POLA BANYAK SISI DAN SIKEL HAMILTON GRAF BERPANGKAT DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

OLEH
ANIS MUKIBATUL BADI'
NIM. 11610029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

POLA BANYAK SISI DAN SIKEL HAMILTON GRAF BERPANGKAT DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Anis Mukibatul Badi'
NIM. 11610029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

POLA BANYAK SISI DAN SIKEL HAMILTON GRAF BERPANGKAT DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Oleh
Anis Mukibatul Badi'
NIM. 11610029

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 01 Juni 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

POLA BANYAK SISI DAN SIKEL HAMILTON GRAF BERPANGKAT DARI GRAF LINTASAN DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Oleh
Anis Mukibatul Badi'
NIM. 11610029

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 9 Juni 2016

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	…………………
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	…………………
Sekretaris Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	…………………
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si	…………………

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Anis Mukibatul Badi'
NIM	: 11610029
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Pola Banyak Sisi dan Sikel Hamilton Graf Berpangkat dari Graf Lintasan dan Graf Bintang

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Anis Mukibatul Badi'
NIM. 11610029

MOTO

"Assalamu'alaikum,

Peace to you"

(Penulis)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta bapak Ahmad Afandi dan ibu Umi Jami’ah,

dan seluruh keluarga besar penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan membimbing penulis dalam penyelesaian skripsi ini. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, dan arahan yang terbaik kepada penulis selama penyelesaian skripsi ini.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, bimbingan, dan nasihat kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Kedua orang tua penulis, yang selama ini mengorbankan dan memberikan segalanya yang terbaik untuk penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011, yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas motivasi, doa, inspirasi, dan bantuanya yang tak ternilai kepada penulis.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. Amiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Badi', Anis Mukibatul. 2016. **Pola Banyak Sisi dan Sikel Hamilton Graf Berpangkat dari Graf Lintasan dan Graf Bintang**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: graf berpangkat, graf Hamilton, graf lintasan, graf bintang

Graf berpangkat yang dinotasikan dengan G^k merupakan perpangkatan sebanyak k dari graf G di mana $k \geq 1$, dengan $V(G^k) = V(G)$ dan untuk setiap sisi $(u, v) \in E(G^k)$ jika dan hanya jika $1 \leq d_G(u, v) \leq k$. Hubungan antara graf berpangkat dan graf Hamilton masih dapat dikembangkan lagi pada graf yang lebih khusus yaitu graf lintasan dan graf bintang.

Tujuan penelitian ini adalah mencari pola banyaknya sisi dan sikel Hamilton pada graf berpangkat dari graf lintasan dan graf bintang. Hasil penelitian ini adalah:

1. Graf berpangkat dari graf lintasan (P_n^k)
   a. Pola banyak sisi, untuk $n \geq 2$ dan $1 \leq k \leq n-1$ $(n, k \in N)$ diperoleh:
   $$|E(P_n^k)| = \frac{k}{2}(2n - k - 1)$$
   b. Pola banyak sikel Hamilton yang berbeda diperoleh:
      1) Pada P_n^{n-1} sebanyak $\frac{(n-1)!}{2}$, untuk $n \geq 4$.
      2) Pada P_n^{n-2} sebanyak $\frac{(n-3)(n-2)!}{2}$, untuk $n \geq 5$.
      3) Pada P_n^3 sebanyak $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, untuk $n \geq 4$.
2. Graf berpangkat dari graf bintang (S_n^k)
   a. Pola banyak sisi, untuk $n \geq 2$ dan $k = 2$ $(n \in N)$ diperoleh:
   $$|E(S_n^2)| = \frac{1}{2}n(n+1)$$
   b. Pola banyak sikel Hamilton yang berbeda, untuk $n \geq 2$ $(n \in N)$ sebanyak $\frac{n!}{2}$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menentukan pola pada banyaknya sikel Hamilton dari graf berpangkat secara umum dan pada graf lainnya.

ABSTRACT

Badi', Anis Mukibatul. 2016. **The Pattern of Size and Hamiltonian Cycles of Powers of Path and Star Graph**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: powers of graph, Hamiltonian graph, path, star

Powers of graph denoted by G^k a k as many powers of graph G, where $k \geq 1$, with $V(G^k) = V(G)$ and for each $u, v \in V(G)$ then $(u, v) \in E(G^k)$ if and only if $1 \leq d_G(u, v) \leq k$ ($k \in N$). The relationship between the powers of graph and Hamiltonian graph can be developed on a more specific graphs that is path and star graph.

The purpose of this research is to determine the pattern of the size and Hamiltonian cycles of powers of path and star graph. The results of this research are:

1. Powers of graph of path (P_n^k)
   a. The pattern of the size, for $n \geq 2$ and $1 \leq k \leq n-1$ ($n, k \in N$) is:
      $$|E(P_n^k)| = \frac{k}{2}(2n - k - 1)$$
   b. The pattern of the number of distinct Hamiltonian cycles is:
      1) In P_n^{n-1} are $\frac{(n-1)!}{2}$, for $n \geq 4$.
      2) In P_n^{n-2} are $\frac{(n-3)(n-2)!}{2}$, for $n \geq 5$.
      3) In P_n^3 are $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, for $n \geq 4$.
2. Powers of graph of star (S_n^k)
   a. The pattern of the size, for $n \geq 2$ and $k = 2$ ($n \in N$) is:
      $$|E(S_n^2)| = \frac{1}{2}n(n+1)$$
   b. The pattern of the number of distinct Hamiltonian cycles, for S_n^2, $n \geq 2$ ($n \in N$) are $\frac{n!}{2}$.

For further research the author suggests to determine the pattern of the number of Hamiltonian cycles of powers graph in General and on the other graphs.

ملخص

البديع، أنث محبة. ٢٠١٦. **نمط الحجم Hamiltonian Cycles من صلاحيات مخطط لمسار و نجمة.** بحث جامعي. الشعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) وحيو ه. إيراوان، الماجستير. (٢) فحرور الرازي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: صلاحيات مخطط، Hamiltonian مخطط، مسار ، نجمة

صلاحيات مخطط الرمز بواسط G^k كقوى العديد من مخطط G، حيث $k \geq 1$ ، مع $V(G^k) = V(G)$ و لكل $u ، v \in V(G)$ ثم $(u ، v) \in E\ (G^k)$ إذا وفقط إذا $1 \leq d_G(u ، v) \leq k$. العلاقة بين صلاحيات مخطط و Hamiltonian مخطط يمكن تطويرها على أكثر تحديدا مخطط هذا هو المسار و نجمة.

والغرض من هذا البحث هو لتحديد نمط الحجم و Hamiltonian cycles صلاحيات مخطط لمسار و نجمة . نتائج هذا البحث هو:

١. صلاحيات مخطط المسار(P_n^k)

أ. نمط من حجم ، ل $(n ، k \in N)$ $1 \leq k \leq n-1$ و $n \geq 2$ هو:

$$|E(P_n^k)| = \frac{k}{2}(2n-k-1)$$

ب. نمط عدد Hamiltonian cycles هو:

١) $\frac{(n-1)!}{2}$ هو P_n^{n-1}، ل $n \geq 4$.

٢) $\frac{(n-3)(n-2)!}{2}$ هو P_n^{n-2}، ل $n \geq 5$.

٣) $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ هو P_n^3 ، ل $n \geq 4$.

٢.صلاحيات مخطط ل نجمة الرسم البياني (S_n^k)

أ. نمط من حجم ، ل $(n ، k \in N)$ $k = 2$ و $n \geq 2$ هو: $|E(S_n^2)| = \frac{1}{2}n(n+1)$

ب. نمط عدد Hamiltonian cycles هو $(n \in N)$ $n \geq 2$ هو $\frac{n!}{2}$

الصلاحيات مخطط في Hamiltonian cycles عدد لتحديد نمط لمزيد من البحوث يقترح المؤلف العام وعلى مخططأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin dan memajukan daya pikir manusia. Perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika di bidang teori bilangan, aljabar, analisis, teori peluang, dan diskrit. Teori graf dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang terlebih dahulu berkembang. Graf merupakan himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan pasangan tidak terurut dari elemen-elemen itu yang disebut sisi. Gambaran dari graf adalah dengan menyatakan objek dengan titik atau *vertex*, sedangkan pasangan titik dinyatakan dengan sisi atau *edge* (Chartrand & Lesniak, 1996).

Penggunaan istilah dalam teori graf belum sepenuhnya bersifat baku. Misalkan untuk menyatakan suatu titik digunakan istilah simpul atau *node*, dan untuk menyatakan suatu sisi digunakan istilah garis atau rusuk. Istilah-istilah dalam teori graf dapat diterima jika digunakan secara konsisten. Teori graf mempunyai banyak manfaat, karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan dalam teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya yang tidak diperlukan (Roza, dkk, 2010).

Kesederhanaan bahasanya menyebabkan teori graf dapat diaplikasikan ke dalam beberapa bidang ilmu. Teori graf dapat diaplikasikan dalam bidang kimia, biologi, ilmu sosial, dan masih banyak bidang ilmu yang lain. Misalnya, pada penggambaran jaringan komunikasi, rangkaian listrik, senyawa kimia, algoritma, peta, dan lain-lainnya. Bahkan pada masalah penjadwalan dari mulai yang mudah sampai yang paling rumit seperti penjadwalan pesawat terbang, terminal, stasiun, perjalanan, dan sebagainya, juga menggunakan prinsip graf.

Ada beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dikaitkan langsung dan dibahas dalam teori graf di antaranya, permasalahan tukang pos dan graf Euler, permasalahan tur optimal dan graf Hamilton. Masalah-masalah tersebut dapat direpersentasikan dengan baik menggunakan prinsip graf. Terdapat pula hubungan yang cukup menarik dalam teori graf yaitu, graf Hamilton dengan graf berpangkat. Secara singkat, graf berpangkat adalah graf terhubung berpangkat bilangan bulat positif dengan banyak titik sama, tetapi menambahkan sisi baru pada graf tersebut sepanjang perpangkatannya (Chartrand & Kapoor, 1974).

Hubungan antara graf Hamilton dan graf berpangkat menjadi terkemuka disebabkan sebuah dugaan dari Nash-Williams dan Plummer (1968), yang menyebut bahwa setiap kuadrat graf terhubung-2 adalah graf Hamilton (Chartrand & Kapoor, 1974). Setelah muncul dugaan tersebut banyak matematikawan yang meneliti bagaimana hubungan graf Hamilton dan graf berpangkat, seperti terdapat pada jurnal dari Arthur M. Hobs (1972) yang berjudul *Some Hamiltonian Results in Power of Graphs*, jurnal dari Gary Chartrand dan S. F. Kapoor (1974) yang berjudul *On Hamiltonian Properties of Powers of Spesial Hamiltonian Graphs*

(Sifat-sifat Kehamiltonan pada Perpangkatan dari Graf-graf Hamilton Khusus), dan masih banyak lagi penelitian tentang hubungan antara graf berpangkat dan graf Hamilton.

Al-Quran telah menjelaskan tentang kekuasaan dan keluasan ilmu pengetahuan Allah dalam surat al-Kahfi/18:109 berikut:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ
جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

"Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(QS. al-Kahfi/18:109).

Hal yang sama juga terdapat dalam surat al-Luqman/31:27 berikut:

وَلَوۡ أَنَّمَا فِي ٱلۡأَرۡضِ مِن شَجَرَةٍ أَقۡلَٰمٞ وَٱلۡبَحۡرُ يَمُدُّهُۥ مِنۢ بَعۡدِهِۦ سَبۡعَةُ أَبۡحُرٖ مَّا
نَفِدَتۡ كَلِمَٰتُ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٞ ٢٧

"Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh laut (lagi) sesudah (kering)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah. Sesungguhnya Allah maha perkasa lagi maha bijaksana"(QS. al-Luqman/31:27).

Kedua ayat di atas menyatakan bahwa Allah telah memberikan nikmat tanpa batas kepada manusia. Seperti halnya nikmat ilmu pengetahuan yang diberikan Allah. Semakin banyak ilmu pengetahuan yang dipelajari manusia, maka semakin luas pengetahuan yang akan dimiliki. Namun, ketika manusia semakin mengetahui ternyata masih begitu banyak ilmu pengetahuan yang tidak diketahui. Karena, ilmu pengetahuan yang dimiliki sekarang hanyalah sedikit sekali dari yang digariskan Allah. Dengan demikian, ilmu pengetahuan akan selalu mengalami perkembangan dari waktu ke waktu pada disiplin ilmu masing-masing.

Berdasarkan uraian di atas penelitian hubungan graf berpangkat dan graf Hamilton masih dapat dikembangkan, dan masih belum ada penelitian tentang graf berpangkat yang dihubungkan dengan graf-graf lain yang lebih khusus. Oleh karena itu, penulis ingin menghubungkan graf berpangkat dengan graf lain yaitu, graf lintasan dan graf bintang. Sehingga penulis tertarik untuk mengambil judul "Pola Banyak Sisi dan Sikel Hamilton Graf Berpangkat dari Graf Lintasan dan Graf Bintang".

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas dapat dirumuskan masalah yang diteliti yaitu bagaimana menentukan pola banyak sisi dan pola banyak sikel Hamilton yang berbeda dari graf berpangkat bilangan bulat positif dari graf lintasan dan graf bintang?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah menunjukkan pola banyak sisi dan pola banyak sikel Hamilton yang berbeda dari graf berpangkat bilangan bulat positif dari graf lintasan dan graf bintang.

1.4 Batasan Masalah

Penulis membatasi pembahasan mengenai pola banyaknya sikel Hamilton graf berpangkat dari graf lintasan pada P_n^3, P_n^{n-2}, dan P_n^{n-1}.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis, sebagai tambahan ilmu pengetahuan dan wawasan penelitian teori graf khususnya tentang graf berpangkat.
2. Bagi lembaga, sebagai tambahan literatur yang dapat dijadikan kajian penelitian matematika khususnya teori graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu studi literatur dengan mempelajari berbagai literatur dan mengaitkannya. Pendekatan penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan menggunakan kajian literatur.

Adapun langkah-langkah penulis dalam melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf berpangkat dari graf lintasan dan graf bintang.
2. Menentukan sikel Hamilton graf berpangkat dari graf lintasan dan graf berpangkat dari graf bintang.
3. Menentukan pola banyaknya sisi pada graf berpangkat dari graf lintasan dan graf bintang.
4. Menentukan pola banyaknya sikel Hamilton yang berbeda graf berpangkat dari graf lintasan dan graf bintang.
5. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Supaya penulisan tugas akhir ini lebih terarah dan mudah dipahami digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka berisi teori-teori yang berhubungan dengan penelitian ini meliputi teori graf, jarak dua titik pada graf, keterhubungan, graf komplit dan graf bipartisi komplit, graf Hamilton, graf berpangkat, graf lintasan, graf bintang, dan keteraturan barisan dalam shalat.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi penjelasan penulis tentang graf berpangkat dari graf lintasan, graf berpangkat dari graf bintang, dan inspirasi al-Quran tentang penentuan pola dalam graf.

Bab IV Penutup

Penutup meliputi kesimpulan dari pembahasan beserta sarannya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

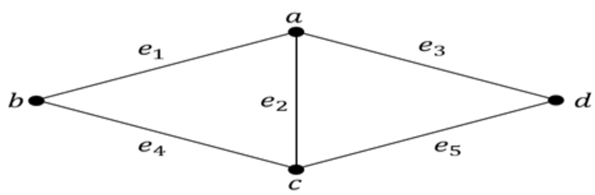
2.1.1 Definisi Graf

Graf G adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) yang berpasangan dengan himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$ (Chartrand & Lesniak, 1996).

Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan $q(G)$. Suatu graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) di mana setiap titik G digambarkan noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan kurva sederhana (ruas garis) dengan akhir di dua titik tersebut.

Contoh graf:

Misalkan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ di mana $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (a, c)$, $e_3 = (a, d)$, $e_4 = (b, c)$, $e_5 = (c, d)$, dapat digambarkan seperti Gambar 2.1



Gambar 2.1 Graf G dengan 4 Titik dan 5 Sisi

2.1.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Sisi $e = (a, b)$ dikatakan menghubungkan titik a dan b. Jika $e = (a, b)$ adalah sisi di graf G, maka a dan b disebut terhubung langsung (*adjacent*), a dan e serta e dan b disebut terkait langsung (*incident*) (Chartrand & Lesniak, 1996).

Diberikan graf G yang memuat himpunan $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ seperti pada Gambar 2.1. Maka titik a dan b terhubung langsung dan titik a dan e_1 serta e_1 dan b adalah terkait langsung.

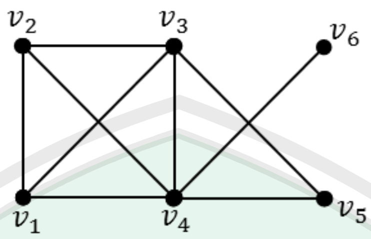
2.1.3 Konsep Jalan, Jejak, Lintasan, Sirkuit, dan Sikel

Misalkan G suatu graf, suatu jalan (*walk*) di G adalah barisan berhingga tak kosong $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. Dikatakan W adalah jalan dari titik v_0 ke v_k atau jalan-(v_0, v_k). Titik v_0 disebut titik awal jalan W dan titik v_k disebut titik akhir jalan W (Budayasa, 2007).

Titik di G boleh muncul lebih dari satu kali dalam jalan W, begitu juga dengan sisi di G, boleh muncul lebih dari satu kali di jalan W. Jika semua sisi dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jika semua titik dan sisi dalam jalan W berbeda, maka W disebut lintasan (*path*) (Budayasa, 2007).

Selanjutnya, jika terdapat jalan tertutup (*closed trail*) dan tak trivial pada graf G disebut sirkuit (*circuit*). Jika sirkuit $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ dengan $(n \geq 3)$ yang memiliki n titik dengan v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut sikel (*cycle*) (Chartrand & Lesniak, 1986).

Contoh jalan, jejak, lintasan, sirkuit dan sikel:



Gambar 2.2 Graf Terhubung

Pada Gambar 2.2 didapatkan suatu jalan (*walk*) $(v_1, v_2, v_3, v_1, v_2, v_4)$, jejak (*trail*) yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3)$, lintasan (*path*) $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6)$, sirkuit (*circuit*) $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1)$, dan sikel (*cycle*) $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$.

2.2 Jarak Dua Titik pada Graf

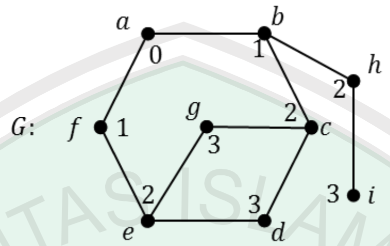
Jarak dari u ke v, dinotasikan dengan $d_G(u, v)$ atau $d(u, v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara titik u dan titik v di G (Budayasa, 2007). Menurut definisi jarak tersebut, himpunan titik $V(G)$ adalah suatu ruang metrik (*metric space*). Sehingga memenuhi syarat-syarat seperti berikut:

1. $d(u, v) \geq 0$ untuk setiap pasangan titik u dan v di G, dan $d(u, v) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$.
2. Syarat Simetris

   $d(u, v) = d(v, u)$ untuk setiap pasangan titik u dan v di G.
3. Ketidaksamaan Segitiga

   $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ untuk setiap titik u, v, dan w di G (Chartrand & Lesniak, 1996).

Contoh jarak dari titik $\boldsymbol{a}$:



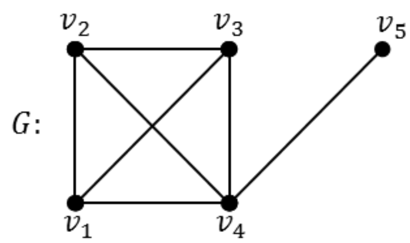
Gambar 2.3 Besar Jarak dari Titik $\boldsymbol{a}$

Setiap titik di G pada Gambar 2.3 dilabeli dengan besarnya jarak titik tersebut dari titik a. Dapat ditulis sebagai berikut: $d(a, a) = 0$, $d(a, b) = 1$, $d(a, c) = 2$, $d(a, d) = 3$, $d(a, e) = 2$, $d(a, f) = 1$, $d(a, g) = 3$, $d(a, h) = 2$, dan $d(a, i) = 3$.

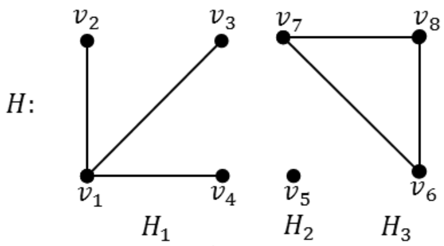
2.3 Keterhubungan

Titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di graf G. Suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected)* jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand & Lesniak, 1986).

Contoh graf terhubung dan tak terhubung:



Gambar 2.4 Graf Terhubung $\boldsymbol{G}$

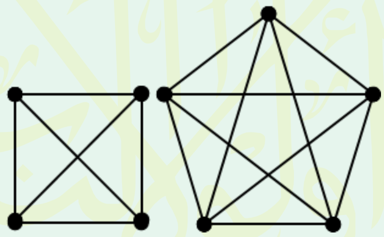


Gambar 2.5 Graf Tak Terhubung $\boldsymbol{H}$ dengan Komponen $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, dan $\boldsymbol{H_3}$

2.4 Graf Komplit dan Graf Bipartisi Komplit

Graf komplit (graf lengkap) dengan n titik, dilambangkan dengan K_n adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi (Budayasa, 2007).

Contoh graf komplit:



Gambar 2.6 Graf $\boldsymbol{K_4}$ dengan 4 titik dan Graf $\boldsymbol{K_5}$ dengan 5 titik

Perhatikan bahwa, jika $|E(K_n)|$ menyatakan banyaknya sisi graf komplit dengan n titik, sebagai konsekuensi langsung dari definisi graf komplit diperoleh,

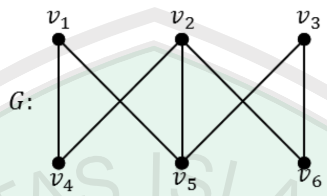
$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

(Budayasa, 2007).

Suatu graf G k-partisi komplit adalah k-partisi graf dengan himpunan partisi $V_1, V_2, \ldots, V_k$ dengan sifat jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, maka $(u, v) \in E(G)$. Jika $|V_i| = n_i$, kemudian grafnya dapat dinotasikan dengan $K_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$ atau $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Sedangkan graf bipartisi komplit adalah graf dengan himpunan partisi

V_1 dan V_2, di mana $|V_1| = r$ dan $|V_2| = s$ atau dapat dinotasikan dengan $K_{(r,s)}$ atau $K_{r,s}$ (Chartrand & Lesniak, 1996).

Contoh graf bipartisi komplit:

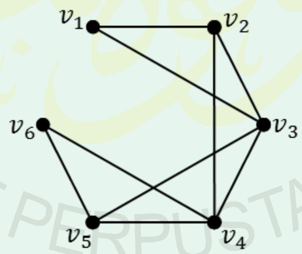


Gambar 2.7 Graf G Bipartisi Komplit

2.5 Graf Hamilton

Misalkan G graf. Sikel di G yang memuat semua titik di G disebut sikel Hamilton. Jika G memuat sikel Hamilton maka G disebut graf Hamilton (Budayasa, 2007).

Contoh graf Hamilton:



Gambar 2.8 Graf Hamilton

Graf di atas merupakan graf Hamilton, karena terdapat sikel yang memuat setiap titik pada graf, yaitu $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1)$.

Teorema 2.1

Untuk setiap ≥ 3 $(n \in N)$, banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada graf K_n adalah

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Bukti:

Pada graf (tidak berarah atau sederhana) K_n, sikel Hamiltonnya merupakan permutasi dari $(1,2,\dots,n)$, berarti terdapat $n!$ permutasi pada graf K_n. Dan setiap permutasi sikel Hamilton tersebut didaftar sebanyak $2n$ yaitu, n titik awal berbeda dan 2 arah berbeda yang dapat dilintasi. Sehingga banyaknya sikel Hamilton pada graf K_n adalah $\frac{n!}{2n}$.

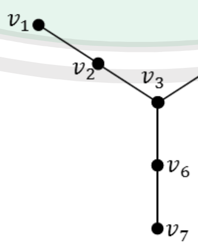
$$\frac{n!}{2n} = \frac{n(n-1)!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

Sehingga didapatkan pola banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada graf K_n sebanyak $\frac{(n-1)!}{2}$ (Lyuu, 2012).

2.6 Graf Berpangkat

Perpangkatan sebanyak k dari graf G atau G^k, di mana $k \geq 1$, $k \in N$ adalah graf dengan $V(G^k) = V(G)$, dan untuk setiap sisi $(u,v) \in E(G^k)$ jika dan hanya jika $1 \leq d_G(u,v) \leq k$ (Chartrand & Lesniak, 1996).

Contoh graf berpangkat:



Gambar 2.9 Graf Berpangkat G

Dari definisi graf berpangkat di atas, kemudian dapat digambarkan graf berpangkat G^2 dari Gambar 2.9 menurut perhitungan penulis sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(G)$, dan $1 \leq d_G(v_1,v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1,v_2) \in E(G^2)$.

$v_1, v_3 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(G^2)$.

$v_1, v_4 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_1, v_4) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_4) \notin E(G^2)$.

$v_1, v_5 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_1, v_5) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_5) \notin E(G^2)$.

$v_1, v_6 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_1, v_6) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_6) \notin E(G^2)$.

$v_1, v_7 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_1, v_7) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_7) \notin E(G^2)$.

$v_2, v_3 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(G^2)$.

$v_2, v_4 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_2, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(G^2)$.

$v_2, v_5 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_2, v_5) \nleq 2$, sehingga $(v_2, v_5) \notin E(G^2)$.

$v_2, v_6 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_2, v_6) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_6) \in E(G^2)$.

$v_2, v_7 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_2, v_7) \nleq 2$, sehingga $(v_2, v_7) \notin E(G^2)$.

$v_3, v_4 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_3, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(G^2)$.

$v_3, v_5 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_3, v_5) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(G^2)$.

$v_3, v_6 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_3, v_6) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_6) \in E(G^2)$.

$v_3, v_7 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_3, v_7) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_7) \in E(G^2)$.

$v_4, v_5 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_4, v_5) \leq 2$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(G^2)$.

$v_4, v_6 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_4, v_6) \leq 2$, sehingga $(v_4, v_6) \in E(G^2)$.

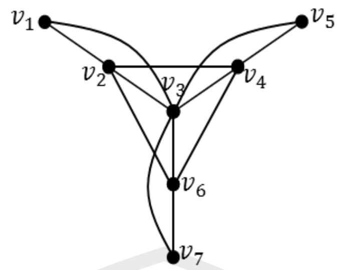
$v_4, v_7 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_4, v_7) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \notin E(G^2)$.

$v_5, v_6 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_5, v_6) \nleq 2$, sehingga $(v_5, v_6) \notin E(G^2)$.

$v_5, v_7 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_5, v_7) \nleq 2$, sehingga $(v_5, v_7) \notin E(G^2)$.

$v_6, v_7 \in V(G)$ dan $1 \leq d_G(v_6, v_7) \leq 2$, sehingga $(v_6, v_7) \in E(G^2)$.

Dengan demikian graf berpangkat G^2 dapat digambarkan seperti Gambar 2.10

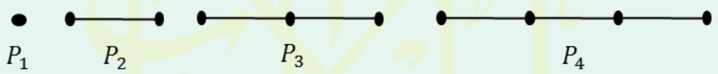


Gambar 2.10 Graf Berpangkat G^2

2.7 Graf Lintasan

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n titik dilambangkan dengan P_n. Perhatikan bahwa P_n memiliki n-titik, dan dapat diperoleh dari graf sikel dengan menghapus sebuah sisi.

Contoh graf lintasan:



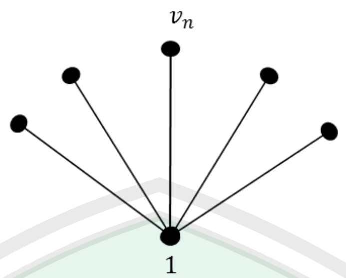
Gambar 2.11 Graf Lintasan

Pada Gambar 2.11 di atas, graf P_1 hanya mempunyai satu titik dan tidak mempunyai sisi. Pada graf P_2 mempunyai dua titik dan satu sisi. Pada graf P_3 mempunyai tiga titik dan dua sisi. Sedangkan pada graf P_4 mempunyai empat titik dan mempunyai tiga sisi. Jadi, terdapat ciri khusus graf lintasan P_n adalah setiap titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 1 dan titik selain titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 2 (Damayanti, 2011).

2.8 Graf Bintang

Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf bintang (*star*) dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order $(n+1)$ dan ukuran n (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh graf bintang:



Gambar 2.12 Graf Bintang-$\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{S_n}$ atau $\boldsymbol{K_{1,n}}$)

2.9 Keteraturan Barisan dalam Shalat

Allah sangat memuji dan mencintai orang yang benar-benar berjuang dengan mengorbankan tenaga, harta, dan jiwa untuk menegakkan agama Allah dan ajaran-Nya, dan menyangkut pujian itu Allah berfirman dalam al-Quran surat as-Shaf/61:4

إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفّٗا كَأَنَّهُم بُنۡيَٰنٞ مَّرۡصُوصٞ ٤

"Sesungguhnya Allah menyukai orang yang berperang dijalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh"(QS. as-Shaf/61:4).

Menurut tafsir Jalalain maksud dari al-Quran surat as-Shaf/61:4 adalah (sesungguhnya Allah menyukai) artinya selalu menolong dan memuliakan (orang-orang yang berperang di jalannya dalam barisan yang teratur), lafal *shaffan* merupakan hal atau kata keterangan keadaan, yakni dalam keadaan berbaris rapi (seakan-akan mereka seperti bangunan yang tersusun kokoh) yakni sebagian di antara mereka menempel rapat dengan sebagian yang lain lagi kokoh (Asy-Syuyuthi & Al-Mahalliy, 2010).

Abu said Alkhudri mengatakan bahwa Rasulullah bersabda:

"Allah tertawa (tersenyum) terhadap tiga macam orang, yaitu

1. *Orang yang bangun shalat malam.*
2. *Kaum yang berbaris rapat dalam shalat.*
3. *Kaum yang berbaris rapat dalam perang fisabilillah." (HR. Ahmad, Ibnu Majah)* (Bahreisy & Bahreisy, 1993).

Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang mengatur diri mereka ber*shaf-shaf* (berbaris-baris) dengan teratur pada waktu perang, sehingga di antara mereka tidak ada lagi celah-celah, seakan mereka adalah bangunan yang bagian-bagiannya berikatan. Rahasianya ialah jika orang-orang yang berperang itu ber*shaf-shaf*, maka kekuatan moral orang-orang tersebut akan bertambah dan menimbulkan rasa takut pada jiwa musuh, di samping perencanaan yang baik dan pelaksanaan kerja yang cermat. Oleh sebab itu, maka Allah memerintahkan kepada kita agar meratakan *shaf-shaf* di dalam shalat, dan seorang yang melaksanakan shalat tidak boleh duduk di *shaf* belakang kecuali jika yang depan sudah penuh (Al-Maragi, 1993).

Abdullah bin Umar berkata, Rasulullah bersabda:

"Luruskanlah shaf-shaf, sejajarkanlah pundak dengan pundak, isilah bagian yang masih renggang, bersikap lembutlah terhadap lengan teman-teman kalian (ketika mengatur shaf), dan jangan biarkan ada celah untuk (dimasuki oleh) syaithan. Barangsiapa yang menyambung shaf maka Allah akan menyambungnya (dengan rahmat-Nya), dan barangsiapa yang memutus shaf maka Allah akan memutuskannya (dari rahmat-Nya)." (HR Abu Daud (666) hadits shahih).

Hadits di atas berisi beberapa manfaat, di antaranya:

1. Perintah untuk meluruskan *shaf*, yaitu dengan menyejajarkan kaki dan pundak.
2. Perintah untuk mengisi bagian *shaf* yang masih kosong.
3. Perintah untuk bersikap lemah lembut ketika mengatur barisan *shaf*, dan tidak asal menarik *makmum* ke depan atau mendorong mereka ke belakang.

4. Perintah untuk merapatkan *shaf* dengan serapat-rapatnya agar tidak ada celah antara dua orang yang bersebelahan untuk dimasuki oleh *syaithan*.
5. Menyambung *shaf* adalah salah satu sebab untuk mendapatkan rahmat Allah. Sebaliknya, memutuskan *shaf* adalah salah satu sebab terputusnya seseorang dari rahmat Allah (Adminbii, 2016).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai masalah graf berpangkat (*Powers of Graph*) dari graf lintasan dan graf bintang. Pembahasan ini lebih lanjut meliputi dua hal, yaitu:

3.1 Graf Berpangkat dari Graf Lintasan

3.1.1 Menggambar Graf Berpangkat dan Sikel Hamiltonnya dari Graf Lintasan

Graf P_n adalah graf lintasan berorder n, dengan $n \in N$. Graf berpangkat dari graf lintasan (P_n^k) dengan n adalah order dari graf lintasan dan $n \geq 2$, dan k adalah pangkat bilangan bulat positif dari graf P_n dan $1 \leq d_{P_n}(u, v) \leq k$, dengan $k \leq n - 1$.

1. Graf berpangkat dari P_2

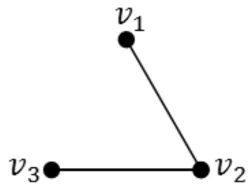
   Berikut ini gambar graf P_2:

Gambar 3.1 Graf $\boldsymbol{P_2}$

Graf P_2 hanya memiliki jarak sebesar satu, maka graf P_2 hanya mempunyai pangkat tertinggi satu. Dengan demikian graf P_2 sama dengan graf P_2^1.

2. Graf berpangkat dari P_3

   Berikut ini gambar graf P_3:



Gambar 3.2 Graf $\boldsymbol{P_3}$

Graf P_3 memiliki jarak terpanjang sebesar dua, maka banyaknya pangkat dari graf P_3 adalah $1 \leq d_{P_3}(u, v) \leq 2$. Dengan demikian graf berpangkat untuk graf P_3 adalah P_3 dan P_3^2.

a. Graf P_3^2

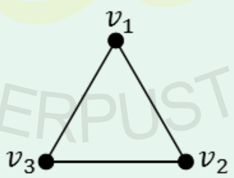
Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_3)$, dan $1 \leq d_{P_3}(v_1, v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_3^2)$.

$v_1, v_3 \in V(P_3)$ dan $1 \leq d_{P_3}(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_3^2)$.

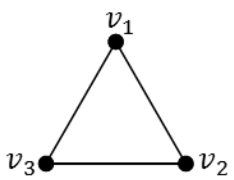
$v_2, v_3 \in V(P_3)$ dan $1 \leq d_{P_3}(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_3^2)$.

Maka graf P_3^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.3



Gambar 3.3 Graf $\boldsymbol{P_3^2}$

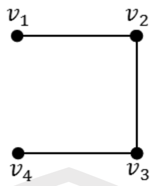
Kemudian dapat diketahui bahwa graf P_3^2 hanya memiliki satu sikel Hamilton yaitu (v_1, v_2, v_3, v_1). Dapat digambarkan seperti Gambar 3.4



Gambar 3.4 Sikel Hamilton dari Graf $\boldsymbol{P_3^2}$

3. Graf berpangkat dari P_4

Berikut ini gambar graf P_4:



Gambar 3.5 Graf $\boldsymbol{P_4}$

Graf P_4 memiliki jarak terpanjang sebesar tiga, maka banyaknya pangkat dari graf P_4 adalah $1 \leq d_{P_4}(u, v) \leq 3$. Dengan demikian graf berpangkat untuk graf P_4 adalah P_4, P_4^2 dan P_4^3.

a. Graf P_4^2

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_1, v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_4^2)$.

$v_1, v_3 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_4^2)$.

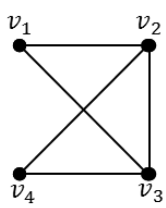
$v_1, v_4 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_1, v_4) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_4) \notin E(P_4^2)$.

$v_2, v_3 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_4^2)$.

$v_2, v_4 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_2, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_4^2)$.

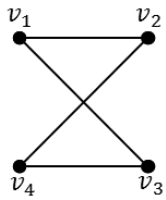
$v_3, v_4 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_3, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_4^2)$.

Maka graf P_4^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.6



Gambar 3.6 Graf $\boldsymbol{P_4^2}$

Kemudian dapat diketahui bahwa graf P_4^2 hanya memiliki satu sikel Hamilton yaitu $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.7



Gambar 3.7 Sikel Hamilton dari Graf P_4^2

b. Graf P_4^3

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_1, v_2) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_4^3)$.

$v_1, v_3 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_1, v_3) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_4^3)$.

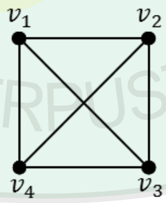
$v_1, v_4 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_1, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(P_4^3)$.

$v_2, v_3 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_2, v_3) \leq 3$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_4^3)$.

$v_2, v_4 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_2, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_4^3)$.

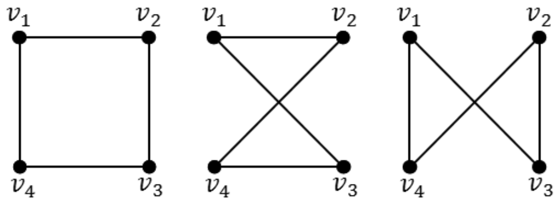
$v_3, v_4 \in V(P_4)$ dan $1 \leq d_{P_4}(v_3, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_4^3)$.

Maka graf P_4^3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.8



Gambar 3.8 Graf P_4^3

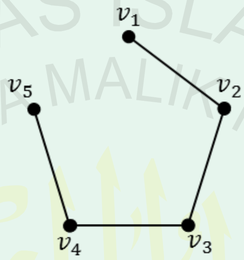
Kemudian dapat diketahui sikel-sikel Hamilton dari graf P_4^3 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$, dan $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.9



Gambar 3.9 Sikel-sikel Hamilton dari Graf $\boldsymbol{P_4^3}$

4. Graf berpangkat dari P_5

Berikut ini gambar dari graf P_5:



Gambar 3.10 Graf $\boldsymbol{P_5}$

Graf P_5 memiliki jarak terpanjang sebesar empat, maka banyaknya pangkat dari graf P_5 adalah $1 \leq d_{P_5}(u, v) \leq 4$. Dengan demikian graf berpangkat untuk graf P_5 adalah P_5, P_5^2, P_5^3, dan P_5^4.

a. Graf P_5^2

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_5^2)$.

$v_1, v_3 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_5^2)$.

$v_1, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_4) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_4) \notin E(P_5^2)$.

$v_1, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_5) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_5) \notin E(P_5^2)$.

$v_2, v_3 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_5^2)$.

$v_2, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_5^2)$.

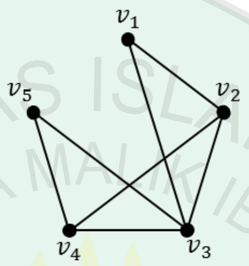
$v_2, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_5) \nleq 2$, sehingga $(v_2, v_5) \notin E(P_5^2)$.

$v_3, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_3, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_5^2)$.

$v_3, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_5) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_5^2)$.

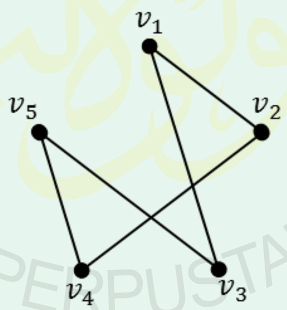
$v_4, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_4, v_5) \leq 2$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_5^2)$.

Maka graf P_5^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.11



Gambar 3.11 Graf $\boldsymbol{P_5^2}$

Kemudian dapat diketahui bahwa graf P_5^2 hanya memiliki satu sikel Hamilton yaitu $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.12



Gambar 3.12 Sikel Hamilton dari Graf $\boldsymbol{P_5^2}$

b. Graf P_5^3

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_2) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_5^3)$.

$v_1, v_3 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_3) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_5^3)$.

$v_1, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(P_5^3)$.

$v_1, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_5) \nleq 3$, sehingga $(v_1, v_5) \notin E(P_5^3)$.

$v_2, v_3 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_2, v_3) \le 3$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_5^3)$.

$v_2, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_2, v_4) \le 3$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_5^3)$.

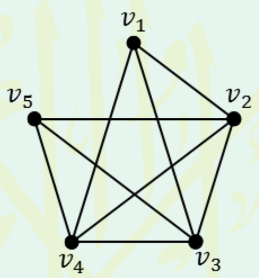
$v_2, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_2, v_5) \le 3$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(P_5^3)$.

$v_3, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_3, v_4) \le 3$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_5^3)$.

$v_3, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_3, v_5) \le 3$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_5^3)$.

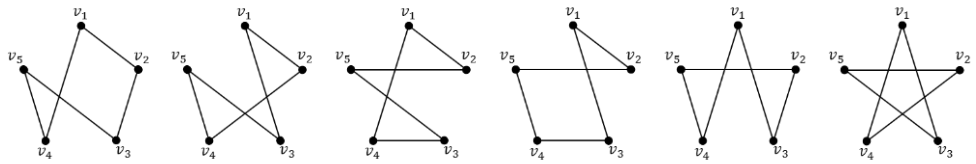
$v_4, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_4, v_5) \le 3$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_5^3)$.

Maka graf P_5^3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.13



Gambar 3.13 Graf P_5^3

Kemudian dapat diketahui sikel-sikel Hamilton yang berbeda dari graf P_5^3 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1)$, dan $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.14



Gambar 3.14 Sikel-sikel Hamilton dari Graf P_5^3

c. Graf P_5^4

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_5)$ dan $1 \le d_{P_5}(v_1, v_2) \le 4$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_5^4)$.

$v_1, v_3 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_3) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_5^4)$.

$v_1, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_4) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(P_5^4)$.

$v_1, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_1, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_5) \in E(P_5^4)$.

$v_2, v_3 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_3) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_5^4)$.

$v_2, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_4) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_5^4)$.

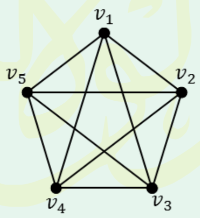
$v_2, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_2, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(P_5^4)$.

$v_3, v_4 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_3, v_4) \leq 4$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_5^4)$.

$v_3, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_3, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_5^4)$.

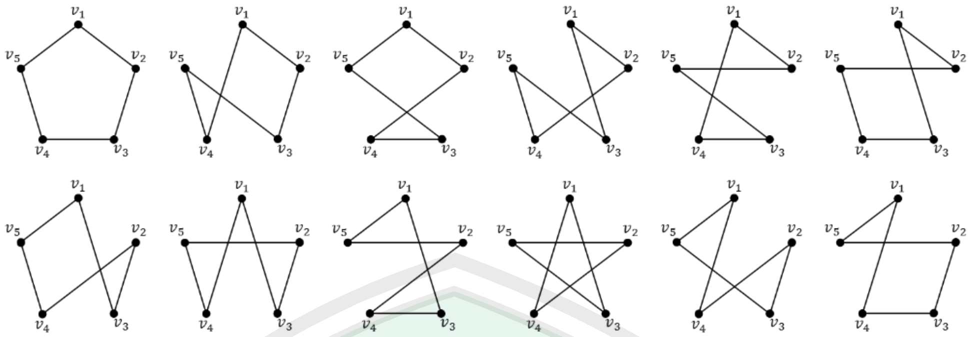
$v_4, v_5 \in V(P_5)$ dan $1 \leq d_{P_5}(v_4, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_5^4)$.

Maka graf P_5^4 dapat digambarkan seperti Gambar 3.15



Gambar 3.15 Graf P_5^4

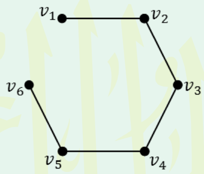
Kemudian dapat diketahui sikel-sikel Hamilton yang berbeda dari graf P_5^4 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5, v_1)$, dan $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.16



Gambar 3.16 Sikel-sikel Hamilton dari Graf P_5^4

5. Graf berpangkat dari P_6

Berikut ini gambar dari graf P_6:



Gambar 3.17 Graf P_6

Graf P_6 memiliki jarak terpanjang sebesar lima, maka banyaknya pangkat dari graf P_6 adalah $1 \leq d_{P_6}(u,v) \leq 5$. Maka graf berpangkat untuk P_6 adalah P_6^1, P_6^2, P_6^3, P_6^4, dan P_6^5.

a. Graf P_6^2

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_6^2)$.

$v_1, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_6^2)$.

$v_1, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_4) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_4) \notin E(P_6^2)$.

$v_1, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_5) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_5) \notin E(P_6^2)$.

$v_1, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_6) \nleq 2$, sehingga $(v_1, v_6) \notin E(P_6^2)$.

$v_2, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_6^2)$.

$v_2, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_6^2)$.

$v_2, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_5) \nleq 2$, sehingga $(v_2, v_5) \notin E(P_6^2)$.

$v_2, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_6) \nleq 2$, sehingga $(v_2, v_6) \notin E(P_6^2)$.

$v_3, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_6^2)$.

$v_3, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_5) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_6^2)$.

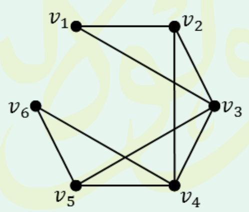
$v_3, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_6) \nleq 2$, sehingga $(v_3, v_6) \notin E(P_6^2)$.

$v_4, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_5) \leq 2$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_6^2)$.

$v_4, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_6) \leq 2$, sehingga $(v_4, v_6) \in E(P_6^2)$.

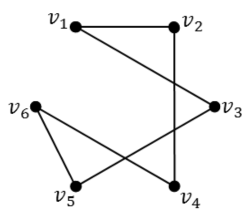
$v_5, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_5, v_6) \leq 2$, sehingga $(v_5, v_6) \in E(P_6^2)$.

Maka graf P_6^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.18



Gambar 3.18 Graf P_6^2

Kemudian dapat diketahui bahwa graf P_6^2 hanya memiliki satu sikel Hamilton yang berbeda yaitu $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.19



Gambar 3.19 Sikel Hamilton dari Graf P_6^2

b. Graf P_6^3

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_2) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_6^3)$.

$v_1, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_3) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_6^3)$.

$v_1, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(P_6^3)$.

$v_1, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_5) \nleq 3$, sehingga $(v_1, v_5) \notin E(P_6^3)$.

$v_1, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_6) \nleq 3$, sehingga $(v_1, v_6) \notin E(P_6^3)$.

$v_2, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_3) \leq 3$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_6^3)$.

$v_2, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_6^3)$.

$v_2, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_5) \leq 3$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(P_6^3)$.

$v_2, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_6) \nleq 3$, sehingga $(v_2, v_6) \notin E(P_6^3)$.

$v_3, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_4) \leq 3$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_6^3)$.

$v_3, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_5) \leq 3$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_6^3)$.

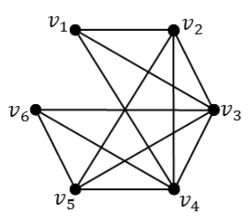
$v_3, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_6) \leq 3$, sehingga $(v_3, v_6) \in E(P_6^3)$.

$v_4, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_5) \leq 3$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_6^3)$.

$v_4, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_6) \leq 3$, sehingga $(v_4, v_6) \in E(P_6^3)$.

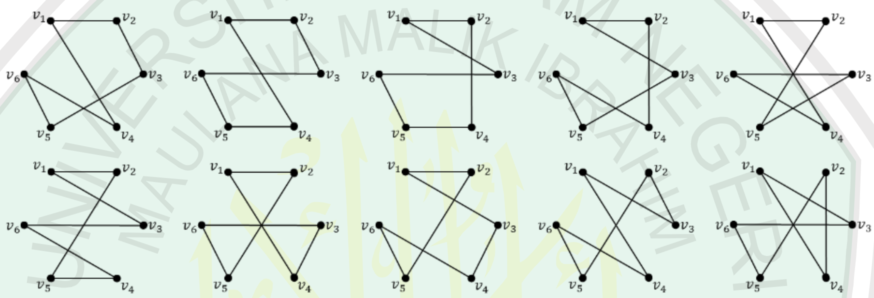
$v_5, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_5, v_6) \leq 3$, sehingga $(v_5, v_6) \in E(P_6^3)$.

Maka graf P_6^3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.20



Gambar 3.20 Graf P_6^3

Kemudian dapat diketahui sikel Hamilton yang berbeda dari graf P_6^3 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_6, v_4, v_1)$, dan $(v_1, v_3, v_6, v_5, v_2, v_4, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.21



Gambar 3.21 Sikel-sikel Hamilton dari Graf P_6^3

c. Graf P_6^4

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_2) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_6^4)$.

$v_1, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_3) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_6^4)$.

$v_1, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_4) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(P_6^4)$.

$v_1, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_1, v_5) \in E(P_6^4)$.

$v_1, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_6) \nleq 4$, sehingga $(v_1, v_6) \notin E(P_6^4)$.

$v_2, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_3) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_6^4)$.

$v_2, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_4) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_6^4)$.

$v_2, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(P_6^4)$.

$v_2, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_6) \leq 4$, sehingga $(v_2, v_6) \in E(P_6^4)$.

$v_3, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_4) \leq 4$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_6^4)$.

$v_3, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_6^4)$.

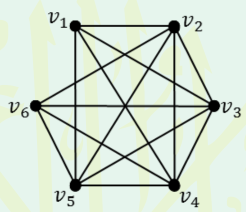
$v_3, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_6) \leq 4$, sehingga $(v_3, v_6) \in E(P_6^4)$.

$v_4, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_5) \leq 4$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_6^4)$.

$v_4, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_6) \leq 4$, sehingga $(v_4, v_6) \in E(P_6^4)$.

$v_5, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_5, v_6) \leq 4$, sehingga $(v_5, v_6) \in E(P_6^4)$.

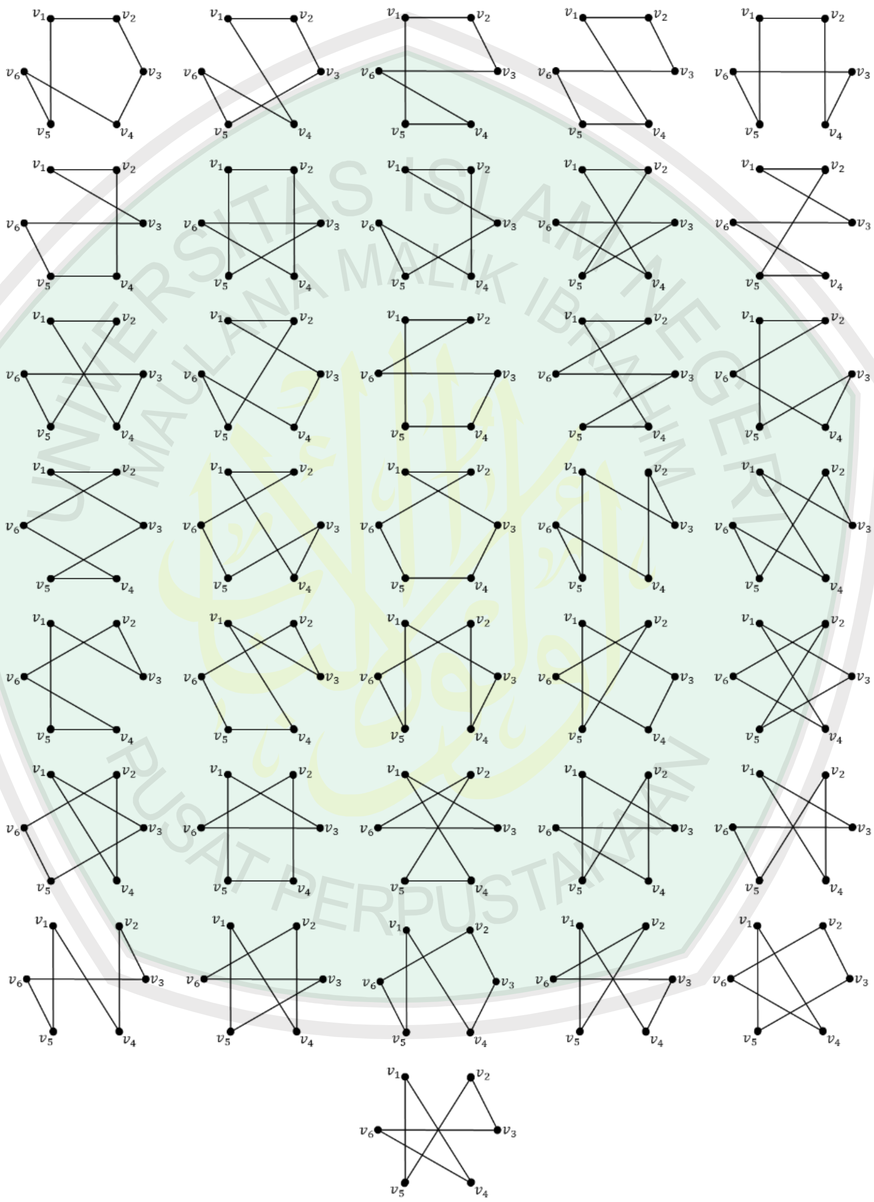
Maka graf P_6^4 dapat digambarkan seperti Gambar 3.22



Gambar 3.22 Graf P_6^4

Kemudian dapat diketahui sikel-sikel Hamilton yang berbeda dari graf P_6^4 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_5, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_6, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_6, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_6, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_2, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_2, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_4, v_2, v_5, v_1)$,

$(v_1, v_3, v_6, v_5, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_6, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_6, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_6, v_2, v_3, v_5, v_1)$, dan $(v_1, v_4, v_6, v_3, v_2, v_5, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.23



Gambar 3.23 Sikel-sikel Hamilton dari Graf P_6^4

d. Graf P_6^5

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_2) \leq 5$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(P_6^5)$.

$v_1, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_3) \leq 5$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(P_6^5)$.

$v_1, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_4) \leq 5$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(P_6^5)$.

$v_1, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_5) \leq 5$, sehingga $(v_1, v_5) \in E(P_6^5)$.

$v_1, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_1, v_6) \leq 5$, sehingga $(v_1, v_6) \in E(P_6^5)$.

$v_2, v_3 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_3) \leq 5$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(P_6^5)$.

$v_2, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_4) \leq 5$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(P_6^5)$.

$v_2, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_5) \leq 5$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(P_6^5)$.

$v_2, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_2, v_6) \leq 5$, sehingga $(v_2, v_6) \in E(P_6^5)$.

$v_3, v_4 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_4) \leq 5$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(P_6^5)$.

$v_3, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_5) \leq 5$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(P_6^5)$.

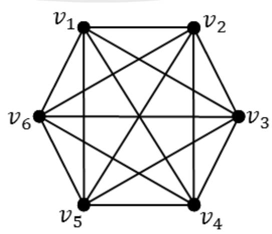
$v_3, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_3, v_6) \leq 5$, sehingga $(v_3, v_6) \in E(P_6^5)$.

$v_4, v_5 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_5) \leq 5$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(P_6^5)$.

$v_4, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_4, v_6) \leq 5$, sehingga $(v_4, v_6) \in E(P_6^5)$.

$v_5, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \leq d_{P_6}(v_5, v_6) \leq 5$, sehingga $(v_5, v_6) \in E(P_6^5)$.

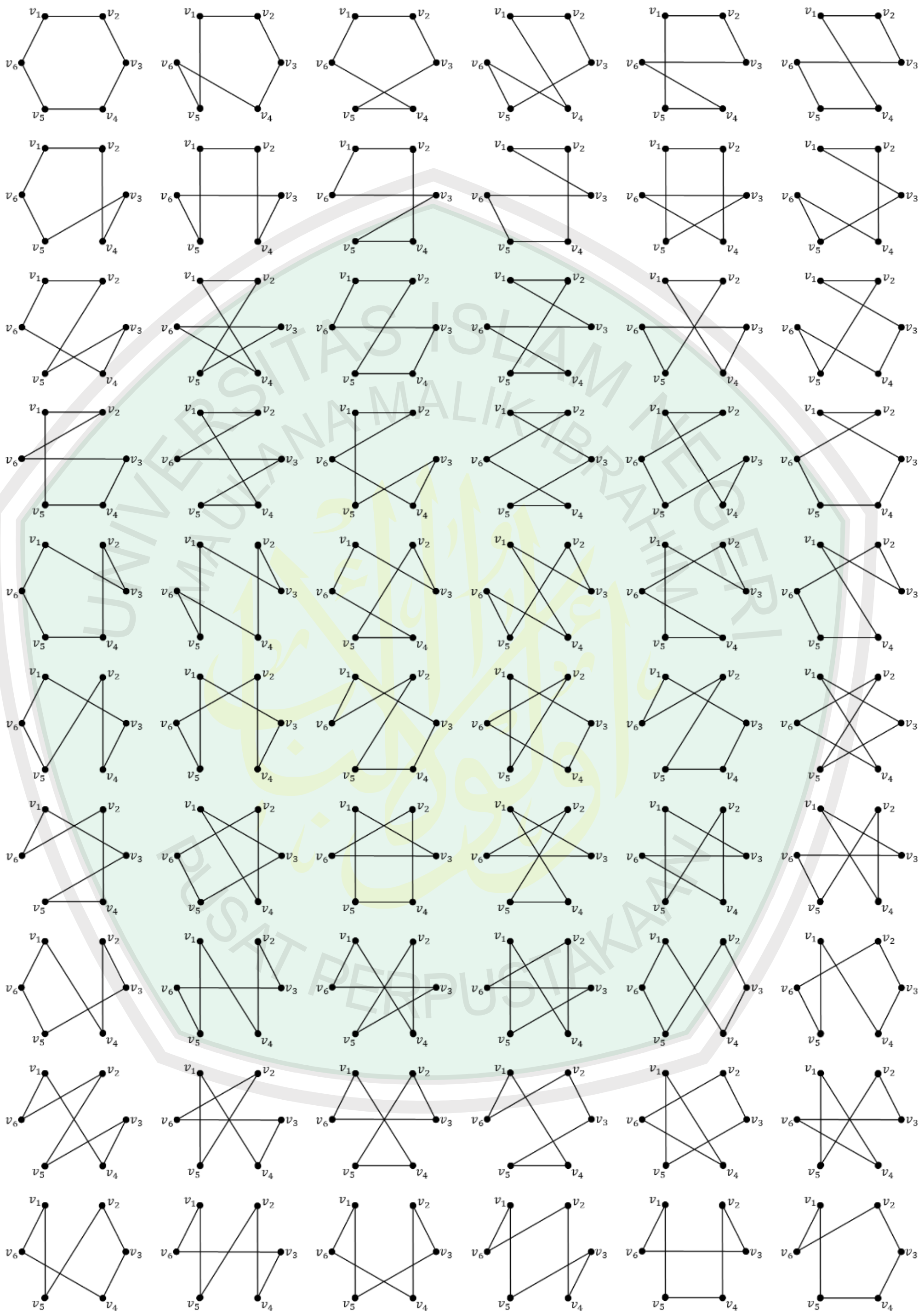
Maka graf P_6^5 dapat digambarkan seperti Gambar 3.24



Gambar 3.24 Graf P_6^5

Kemudian dapat diketahui sikel-sikel Hamilton yang berbeda dari graf P_6^5 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$,

$(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_5, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_6, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_6, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_6, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_2, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_2, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_4, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_5, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_6, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_5, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_6, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_5, v_2, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_5, v_3, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_6, v_2, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_6, v_3, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_5, v_2, v_3, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_2, v_4, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_3, v_2, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_4, v_2, v_3, v_6, v_1)$, dan $(v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.25



Gambar 3.25 Sikel-sikel Hamilton dari Graf P_6^5

3.1.2 Menentukan Pola Banyaknya Sisi Graf Berpangkat dari Graf Lintasan

Setelah diketahui gambar graf berpangkat dari graf lintasan (P_n^k) seperti di atas. Kemudian dapat dibuat tabel pola banyaknya sisi dari graf P_n^k tersebut seperti di bawah ini:

Tabel 3.1 Banyak Sisi dari Graf P_n^k atau $|E(P_n^k)|$

P_n	$\lvert E(P_n^k)\rvert$						
	1	2	3	4	5	...	k
P_2	1						
P_3	2	3					
P_4	3	5	6				
P_5	4	7	9	10			
P_6	5	9	12	14	15		
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	
P_n	$\lvert E(P_n)\rvert = n-1$	$\lvert E(P_n^2)\rvert = (n-1)+(n-2)$	$\lvert E(P_n^3)\rvert = (n-1)+(n-2)+(n-3)$	$\lvert E(P_n^4)\rvert = (n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)$	$\lvert E(P_n^5)\rvert = (n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)$	...	$\lvert E(P_n^k)\rvert = \frac{k}{2}(2n-k-1)$

Dari Tabel 3.1 di atas didapatkan hasil pola banyaknya sisi dari graf P_n^k, sebagai berikut:

Sifat 1

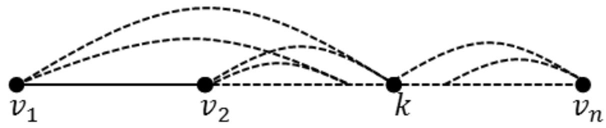
Pola banyak sisi pada graf P_n^k adalah

$$|E(P_n^k)| = \frac{k}{2}(2n-1-k)$$

untuk $n \geq 2$ dan $1 \leq k \leq n-1$ $(n, k \in N)$.

Bukti:

Graf P_n^k, jika digambar seperti Gambar 2.26



Gambar 3.26 Graf P_n^k

Graf P_n^k, dengan $n \geq 2$ dan $1 \leq d_{P_n}(u, v) \leq n - 1$ $(n, k \in N)$. Karena jarak maksimal dari u ke v $(u, v \in P_n)$ adalah $n - 1$. Maka pangkat tertingginya adalah $k = n - 1$. Sehingga dari titik:

v_1 maksimal bertambah sebanyak $n - 1$ sisi.

v_2 maksimal bertambah sebanyak $n - 2$ sisi.

$\vdots$

v_n maksimal bertambah sebanyak $n - k$ sisi.

Karena banyak sisi ke-n merupakan pertambahan sisi dari pangkat sebelumnya maka dapat ditulis dalam deret aritmetika seperti berikut:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k) = \frac{k}{2}\big((n-1) + (n-k)\big) = \frac{k}{2}(2n - 1 - k)$$

Sehingga terbukti pola banyaknya sisi pada graf P_n^k adalah

$$|E(P_n^k)| = \frac{k}{2}(2n - 1 - k)$$

untuk $n \geq 2$ dan $1 \leq k \leq n - 1$ $(n, k \in N)$.

3.1.3 Menentukan Pola Banyaknya Sikel Hamilton yang Berbeda dari Graf Berpangkat dari Graf Lintasan

Berdasarkan uraian mengenai gambar graf berpangkat dan sikel-sikel Hamilton yang berbeda dari graf bintang di atas, dapat diketahui banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada setiap graf berpangkat P_n^k sebagai berikut:

Tabel 3.2 Banyak Sikel Hamilton Graf P_n^k $(k \geq 2, n \geq 3)$

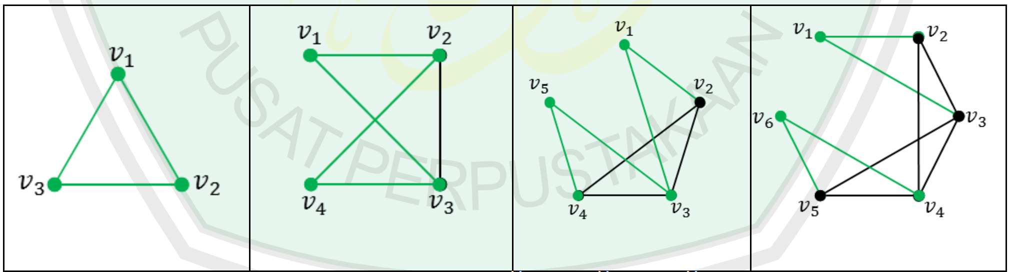
P_n	k			
	2	3	4	5
P_3	1			
P_4	1	3		
P_5	1	6	12	
P_6	1	10	36	60

Sifat 2

Graf P_n^2, dengan $n \geq 3$ $(n \in N)$ hanya mempunyai 1-sikel Hamilton.

Bukti:

Diberikan Graf P_n^2, dengan $n \geq 3$. Graf P_n^2 memiliki $2 \leq \deg_{P_n^2}(v) \leq 4$. Pada graf P_n^2 terdapat dua titik yang memiliki derajat 2, yaitu pada v_1 dan v_n. Seperti pada gambar di bawah ini:



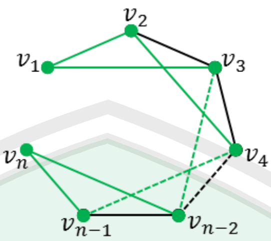
Gambar 3.27 Graf $\boldsymbol{P_3^2}$, $\boldsymbol{P_4^2}$, $\boldsymbol{P_5^2}$, dan $\boldsymbol{P_6^2}$

Titik awal (v_1) akan selalu terhubung langsung dengan v_2 dan v_3, dan titik akhir (v_n) akan selalu terhubung langsung dengan v_{n-1} dan v_{n-2}. Jadi, sikel yang didapat ketika melewati v_1 dan v_n yaitu

a. Ketika n ganjil

$(v_1, v_2, v_{2t}, \dots, v_{n-1}, v_n, v_{n-2}, v_{n-2s}, \dots, v_3, v_1)$, untuk $2 \leq t < n$, dan $2 \leq s < \frac{n-3}{2}$ dengan $(t, s \in N)$.

Jika digambar seperti berikut

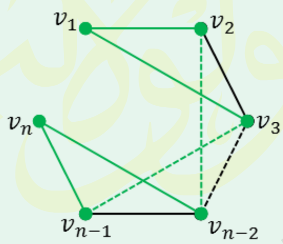


Gambar 3.28 Sikel Hamilton Graf P_n^2 (n ganjil)

b. Ketika n genap

$(v_1, v_2, v_{2t}, \dots, v_{n-2}, v_n, v_{n-1}, v_{n-2s+1}, \dots, v_3, v_1)$, untuk $2 \leq t < n-2$,dan $1 \leq s < \frac{n-2}{2}$ dengan $(t, s \in N)$.

Jika digambar seperti berikut



Gambar 3.29 Sikel Hamilton Graf P_n^2 (n genap)

Tidak ada sikel Hamilton lain (yang berbeda) yang didapatkan dari graf P_n^2, kecuali melewati sikel pada poin a dan b di atas. Lintasan sikel yang melewati setiap titik di graf P_n^2 sudah maksimal, sehingga, sikel Hamilton yang didapatkan hanya sebanyak satu.

Sifat 3

Banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada P_n^{n-1} sebanyak $\frac{(n-1)!}{2}$, untuk $n \geq 4$.

Bukti:

Graf P_n^{n-1} merupakan graf komplit-n (graf K_n) dengan $(n \in N)$. Hal ini karena jarak terpanjangnya graf P_n^{n-1} adalah $n-1$, maka setiap titik sudah dihubungkan dengan titik lain dengan jarak terdekat sampai yang terjauh, sehingga untuk setiap titik u, v di P_n^{n-1} selalu terhubung dengan suatu sisi. Karena graf P_n^{n-1} adalah graf K_n maka banyaknya sikel Hamilton sebanyak $\frac{(n-1)!}{2}$.

Sifat 4

Banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada P_n^{n-2} sebanyak $\frac{(n-3)(n-2)!}{2}$, untuk $n \geq 5$.

Bukti:

Karena graf P_n^{n-1} merupakan graf komplit, sehingga graf P_n^{n-2} merupakan graf dua titik terjauh tidak dihubungkan dengan sebuah sisi. Sama halnya permutasi dengan dua titik yang tidak boleh berdampingan.

Permutasi dua titik yang tidak boleh berdampingan, berarti permutasi semua titik dikurangi permutasi dua titik yang selalu berdampingan. Karena selalu berdampingan maka dua titik tersebut dianggap satu titik, dan dua titik tersebut dapat bertukar tempat sebanyak $2!$. Sesuai dengan ketentuan memperoleh banyaknya sikel Hamilton yang berbeda di atas, maka banyaknya sikel Hamilton semua titik adalah $\frac{(n-1)!}{2}$ dikurangi permutasi dua titik yang selalu berdampingan adalah $\frac{2(n-2)!}{2}$. Sehingga banyaknya sikel Hamilton pada P_n^{n-2} adalah $\frac{(n-1)!}{2} - \frac{2(n-2)!}{2}$.

$$\frac{(n-1)!}{2} - \frac{2(n-2)!}{2} = \frac{(n-1)(n-2)!}{2} - \frac{2(n-2)!}{2}$$

$$= \frac{\big((n-1)-2\big)(n-2)!}{2}$$
$$= \frac{(n-3)(n-2)!}{2}$$

Sehingga didapatkan pola banyak sikel Hamilton graf P_n^{n-2} adalah $\frac{(n-3)(n-2)!}{2}$ untuk $n \geq 5$.

Sifat 5

Banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada P_n^3 sebanyak $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, untuk $n \geq 4$.

Bukti:

1. Benar untuk $n = 4$

   Berarti graf P_4^3, mempunyai sikel Hamilton sebanyak 3. yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_1)$. Pola benar karena,

$$3 = \frac{(4-2)(4-1)}{2}$$

   Sehingga benar untuk $n = 4$.

2. Dianggap benar untuk $n = t$

   Berarti, banyak sikel Hamilton berbeda dari graf P_t^3 dianggap benar sebanyak

$$\frac{(t-2)(t-1)}{2}$$

3. Dibuktikan benar untuk $n = t + 1$

   Didapatkan hasil pola banyaknya sikel Hamilton pada graf P_n^3, jika ditulis dalam deret adalah sebagai berikut:

   $3 + 3 + 4 + 5 + \cdots + \big(3 + (t-1)\big)$, $t \geq 1$ dan $t \in N$.

Jadi sikel Hamiltonnya akan bertambah sebanyak $t-1$ setiap bertambah satu titik selanjutnya. Sehingga untuk $n=t+1$ sikel Hamiltonnya sebanyak $\frac{(t-2)(t-1)}{2}+(t-1)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{(t-2)(t-1)}{2}+(t-1) &= \frac{(t-2)(t-1)+2(t-1)}{2} \\
&= \frac{(t^2-3t+2)+2t-2}{2} \\
&= \frac{t^2-3t+2+2t-2}{2} \\
&= \frac{t^2-3t+2t+2-2}{2} \\
&= \frac{t^2-t}{2} \\
&= \frac{(t-1)t}{2} \\
&= \frac{\big((t+1)-2\big)\big((t+1)-1\big)}{2}
\end{aligned}
$$

Terbukti benar untuk $n=t+1$.

Kondisi 1, 2, dan 3 terpenuhi. Sehingga terbukti pola banyaknya sikel Hamilton untuk graf P_n^3 sebanyak $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, untuk $n \geq 4$.

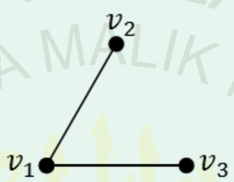
3.2 Graf Berpangkat dari Graf Bintang

3.2.1 Menggambar Graf Berpangkat dan Sikel Hamiltonnya dari Graf Bintang

Graf S_n adalah graf bintang dengan n titik yang mengelilingi titik pusat dan masing-masing titik tersebut *adjacent* dengan titik pusat. Graf berpangkat dari graf bintang (S_n^k) dengan n adalah ukuran dari graf S dan $n \geq 2$, dan k adalah pangkat bilangan bulat positif dari graf S_n dan $1 \leq d_{S_n}(u,v) \leq k$, dengan $k \leq 2$.

1. Graf berpangkat dari S_2

Berikut ini gambar graf S_2:



Gambar 3.30 Graf $\boldsymbol{S_2}$

Graf S_2 memiliki jarak sebesar dua, maka banyaknya pangkat dari graf S_2 adalah $1 \leq d_{S_2}(u,v) \leq 2$. Maka graf berpangkat untuk S_2 adalah S_2 dan S_2^2. Untuk selanjutnya graf S_n^1 tidak digambarkan, karena sama dengan graf S_n.

a. Graf S_2^2

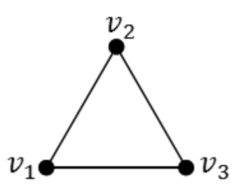
Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(S_2)$ dan $1 \leq d_{S_2}(v_1, v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(S_2^2)$.

$v_1, v_3 \in V(S_2)$ dan $1 \leq d_{S_2}(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(S_2^2)$.

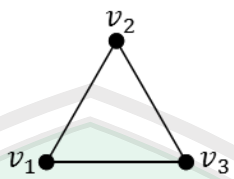
$v_2, v_3 \in V(S_2)$ dan $1 \leq d_{S_2}(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(S_2^2)$.

Maka graf S_2^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.31



Gambar 3.31 Graf S_2^2

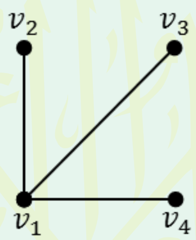
Kemudian dapat diketahui sikel Hamilton dari graf S_2^2 adalah (v_1, v_2, v_3, v_1). Dapat digambarkan seperti Gambar 3.32



Gambar 3.32 Sikel Hamilton Graf S_2^2

2. Graf berpangkat dari S_3

Berikut ini gambar graf S_3:



Gambar 3.33 Graf S_3

Graf S_3 memiliki jarak sebesar dua, maka banyaknya pangkat dari graf S_3 adalah $1 \leq d_{S_3}(u, v) \leq 2$. Maka graf berpangkat untuk S_3 adalah S_3 dan S_3^2.

a. Graf S_3^2

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(S_3)$ dan $1 \leq d_{S_3}(v_1, v_2) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(S_3^2)$.

$v_1, v_3 \in V(S_3)$ dan $1 \leq d_{S_3}(v_1, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(S_3^2)$.

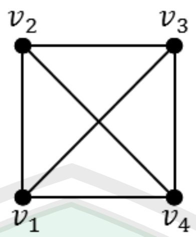
$v_1, v_4 \in V(S_3)$ dan $1 \leq d_{S_3}(v_1, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(S_3^2)$.

$v_2, v_3 \in V(S_3)$ dan $1 \leq d_{S_3}(v_2, v_3) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(S_3^2)$.

$v_2, v_4 \in V(S_3)$ dan $1 \leq d_{S_3}(v_2, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(S_3^2)$.

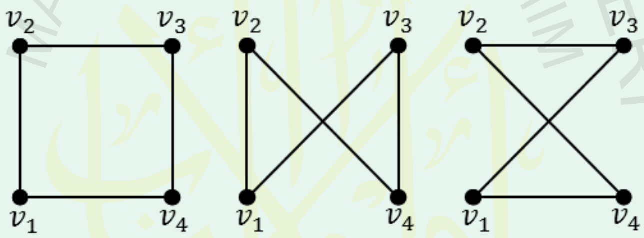
$v_3, v_4 \in V(S_3)$ dan $1 \leq d_{S_3}(v_3, v_4) \leq 2$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(S_3^2)$.

Maka graf S_3^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.34



Gambar 3.34 Graf S_3^2

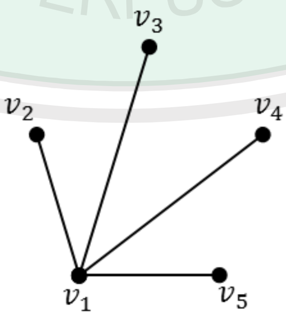
Kemudian dapat diketahui sikel Hamilton yang berbeda dari graf S_3^2 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$, dan $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.35



Gambar 3.35 Sikel-sikel Hamilton dari Graf S_3^2

3. Graf berpangkat dari S_4

Berikut ini gambar graf S_4:



Gambar 3.36 Graf S_4

Graf S_4 memiliki jarak sebesar dua, maka banyaknya pangkat dari graf S_4 adalah $1 \leq d_{S_4}(u, v) \leq 2$. Maka graf berpangkat untuk S_4 adalah S_4 dan S_4^2.

a. Graf S_4^2

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_1, v_2) \le 4$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(S_4^2)$.

$v_1, v_3 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_1, v_3) \le 4$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(S_4^2)$.

$v_1, v_4 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_1, v_4) \le 4$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(S_4^2)$.

$v_1, v_5 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_1, v_5) \le 4$, sehingga $(v_1, v_5) \in E(S_4^2)$.

$v_2, v_3 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_2, v_3) \le 4$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(S_4^2)$.

$v_2, v_4 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_2, v_4) \le 4$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(S_4^2)$.

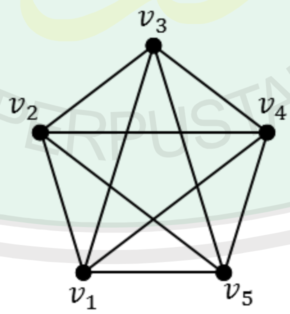
$v_2, v_5 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_2, v_5) \le 4$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(S_4^2)$.

$v_3, v_4 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_3, v_4) \le 4$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(S_4^2)$.

$v_3, v_5 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_3, v_5) \le 4$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(S_4^2)$.

$v_4, v_5 \in V(S_4)$ dan $1 \le d_{S_4}(v_4, v_5) \le 4$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(S_4^2)$.

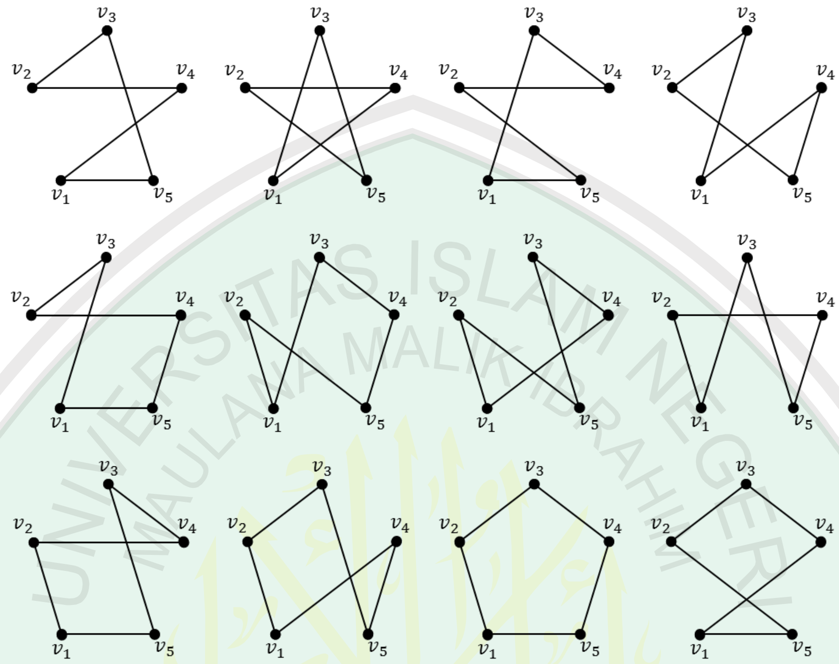
Maka graf S_4^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.37



Gambar 3.37 Graf $\boldsymbol{S_4^2}$

Kemudian dapat diketahui sikel Hamilton yang berbeda dari graf S_4^2 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1)$,

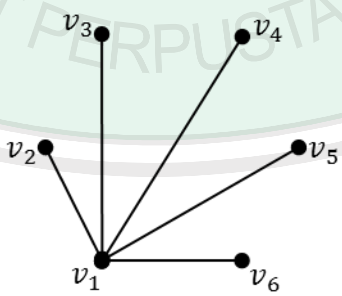
$(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5, v_1)$, dan $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.38



Gambar 3.38 Sikel-sikel Hamilton dari Graf S_4^2

4. Graf berpangkat dari S_5

Berikut ini gambar graf S_5:



Gambar 3.39 Graf S_5

Graf S_5 memiliki jarak sebesar dua, maka banyaknya pangkat dari graf S_5 adalah $1 \leq d_{S_5}(u, v) \leq 2$. Maka graf berpangkat untuk S_5 adalah S_5 dan S_5^2.

a. Graf S_5^2

Dengan perhitungan sebagai berikut:

$v_1, v_2 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_1, v_2) \le 2$, sehingga $(v_1, v_2) \in E(S_5^2)$.

$v_1, v_3 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_1, v_3) \le 2$, sehingga $(v_1, v_3) \in E(S_5^2)$.

$v_1, v_4 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_1, v_4) \le 2$, sehingga $(v_1, v_4) \in E(S_5^2)$.

$v_1, v_5 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_1, v_5) \le 2$, sehingga $(v_1, v_5) \in E(S_5^2)$.

$v_1, v_6 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_1, v_6) \le 2$, sehingga $(v_1, v_6) \in E(S_5^2)$.

$v_2, v_3 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_2, v_3) \le 2$, sehingga $(v_2, v_3) \in E(S_5^2)$.

$v_2, v_4 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_2, v_4) \le 2$, sehingga $(v_2, v_4) \in E(S_5^2)$.

$v_2, v_5 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_2, v_5) \le 2$, sehingga $(v_2, v_5) \in E(S_5^2)$.

$v_2, v_6 \in V(P_6)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_2, v_6) \le 2$, sehingga $(v_2, v_6) \in E(S_5^2)$.

$v_3, v_4 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_3, v_4) \le 2$, sehingga $(v_3, v_4) \in E(S_5^2)$.

$v_3, v_5 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_3, v_5) \le 2$, sehingga $(v_3, v_5) \in E(S_5^2)$.

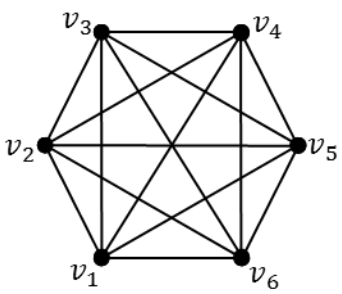
$v_3, v_6 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_3, v_6) \le 2$, sehingga $(v_3, v_6) \in E(S_5^2)$.

$v_4, v_5 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_4, v_5) \le 2$, sehingga $(v_4, v_5) \in E(S_5^2)$.

$v_4, v_6 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_4, v_6) \le 2$, sehingga $(v_4, v_6) \in E(S_5^2)$.

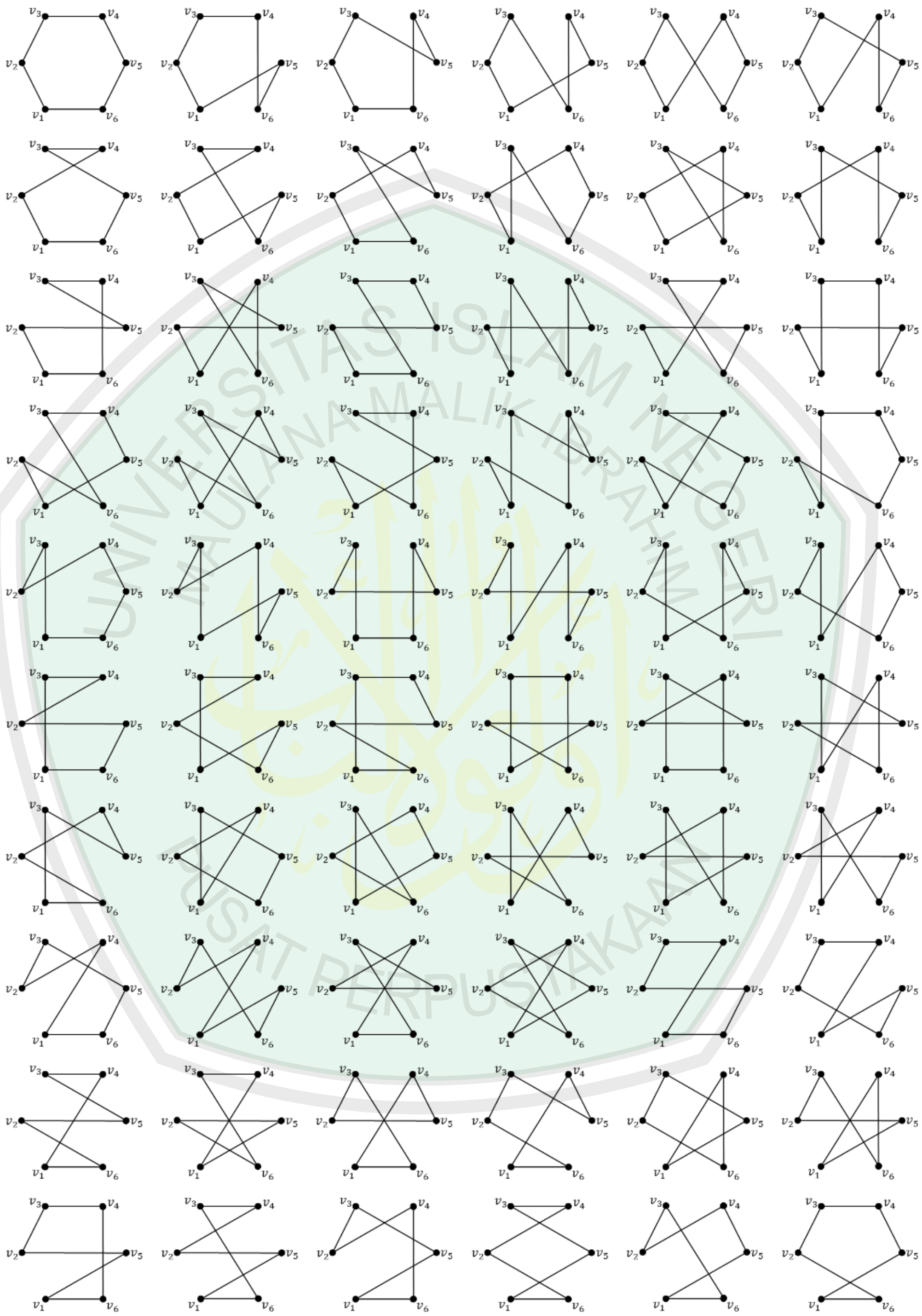
$v_5, v_6 \in V(S_5)$ dan $1 \le d_{S_5}(v_5, v_6) \le 2$, sehingga $(v_5, v_6) \in E(S_5^2)$.

Maka graf S_5^2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.40



Gambar 3.40 Graf S_5^2

Kemudian dapat diketahui sikel Hamilton yang berbeda dari graf S_5^2 yaitu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_6, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_3, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_5, v_3, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_5, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_5, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_6, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_2, v_6, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_4, v_6, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_3, v_5, v_6, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_2, v_4, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_2, v_5, v_4, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_4, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_3, v_6, v_5, v_2, v_4, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_2, v_6, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_5, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_3, v_6, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_5, v_2, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_5, v_3, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_4, v_6, v_2, v_3, v_5, v_1)$, $(v_1, v_4, v_6, v_3, v_2, v_5, v_1)$, $(v_1, v_5, v_2, v_3, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_2, v_4, v_3, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_3, v_2, v_4, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$, $(v_1, v_5, v_4, v_2, v_3, v_6, v_1)$, dan $(v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$. Dapat digambarkan seperti Gambar 3.41



Gambar 3.41 Sikel-sikel Hamilton dari Graf S_5^2

3.2.2 Menentukan Pola Banyaknya Sisi Graf Berpangkat dari Graf Bintang

Setelah diketahui gambar graf berpangkat dari graf bintang (S_n^k), dengan k tertinggi adalah 2 seperti di atas. Kemudian dapat dibuat pola banyaknya sisi dari graf S_n^2 tersebut seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.3 Banyak Sisi dari Graf S_n^2 atau $|E(S_n^2)|$

S_n^2	$\lvert E(S_n^2)\rvert$
S_2^2	3
S_3^2	6
S_4^2	10
S_5^2	15
$\vdots$	$\vdots$
S_n^2	$\lvert E(S_n^2)\rvert = \frac{1}{2}n(n+1)$

Sifat 6

Pola banyaknya sisi pada graf S_n^2 adalah

$$|E(S_n^2)| = \frac{n}{2}(n+1)$$

untuk ≥ 2 $(n \in N)$.

Bukti:

Graf S_n^2 $(n \in N)$ merupakan graf komplit dengan $(n+1)$ titik. Hal ini karena untuk setiap dua titik berbeda u, v di S_n^2 selalu memenuhi $1 \leq d_{S_n}(u,v) = 2 \leq 2$. Jadi sisi (u,v) selalu ada di S_n^2. Karena S_n^2 adalah graf komplit (K_{n+1}) maka,

$$|E(S_n^2)| = |E(K_n)| = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)-1\big)}{2}$$
$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

Sehingga, diperoleh pola banyaknya sisi pada graf S_n^2 adalah $|E(S_n^2)| = \frac{n}{2}(n+1)$, untuk ≥ 2 $(n \in N)$.

3.2.3 Menentukan Pola Banyaknya Sikel Hamilton yang Berbeda dari Graf Berpangkat dari Graf Bintang

Berdasarkan uraian mengenai gambar graf berpangkat dan sikel-sikel Hamilton yang berbeda dari graf bintang di atas, dapat diketahui banyaknya sikel Hamilton yang berbeda pada setiap graf berpangkat dari graf bintang sebagai berikut:

Tabel 3.4 Banyak Sikel Hamilton Graf S_n^2

S_n^2	Banyak Sikel Hamilton
S_2^2	1
S_3^2	3
S_4^2	12
S_5^2	60
$\vdots$	$\vdots$
S_n^2	$\frac{n!}{2}$

Sifat 5

Banyaknya sikel Hamilton yang berbeda dari graf S_n^2 adalah $\frac{n!}{2}$, untuk $n \geq 2$ $(n \in N)$.

Bukti:

Graf S_n^2 $(n \in N)$merupakan graf komplit dengan $(n+1)$ titik atau graf K_{n+1}. Hal ini karena untuk setiap dua titik berbeda u, v di S_n^2 akan selalu memenuhi $1 \leq d_{S_n}(u,v) = 2 \leq 2$. Jadi sisi (u,v) selalu ada di S_n^2. Karena graf S_n^2 adalah graf K_{n+1} maka

$$\frac{((n+1)-1)!}{2} = \frac{n!}{2}$$

Sehingga didapatkan pola banyaknya sikel Hamilton berbeda pada graf S_n^2 sebanyak $\frac{n!}{2}$.

3.3 Inspirasi Al-Quran tentang Penentuan Pola dalam Graf

Dalam kajian banyaknya sisi dan sikel Hamilton graf berpangkat telah didapatkan pola menentukan banyaknya sisi graf berpangkat dari graf lintasan dan graf bintang yaitu $|E(P_n^k)|$ dan $|E(S_n^2)|$ dan pola banyaknya sikel Hamilton graf berpangkat dari graf lintasan dan bintang. Banyaknya sisi dan sikel Hamilton pada setiap graf berpangkat tersebut mulanya didapatkan dengan perhitungan secara mendaftar (menghitung manual). Kemudian karena banyaknya sisi tersebut membentuk barisan teratur, maka didapatkan pola tanpa harus menghitung kembali satu per satu sisi dan sikel Hamiltonnya. Allah menyukai orang-orang yang mengatur diri secara ber*shaf-shaf* (berbaris secara teratur), seakan bangunan yang bagian-bagiannya berikatan. Seperti dalam al-Quran surat as-Shaf/61:4 berikut:

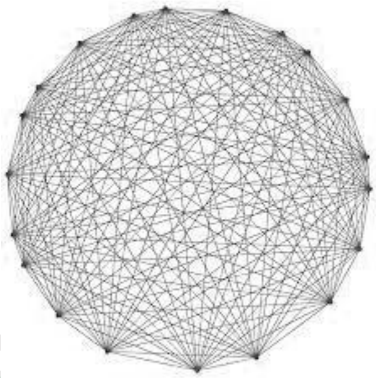
إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفّٗا كَأَنَّهُم بُنۡيَٰنٞ مَّرۡصُوصٞ ٤

"Sesungguhnya Allah menyukai orang yang berperang dijalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh" (QS. as-Shaf/61:4).

Penentuan pola dalam suatu barisan atau deret dibutuhkan untuk mempermudah dan mengawetkan (memperkuat) barisan tersebut yang merupakan suatu kesatuan dari bagian-bagian sebelumnya. Hal mengenai pola tersebut juga merupakan arti kata مَّرۡصُوص yaitu yang kokoh, atau dikatakan juga "*rasasul bina*" yang mempunyai maksud menyesuaikan diri dan menyamakanya, sehingga semua itu menjadi potongan yang satu. Permasalahan dalam matematika juga demikian dapat dibuat kesatuan, yaitu dapat diserhanakan hal umum menjadi khusus dengan arti dan maksud yang sama (satu). Dalam masalah pola, jika diperoleh suatu barisan teratur maka dapat dirumuskan pola umum untuk mengetahui nilai barisan ke-n (selanjutnya) tanpa harus menghitung satu per satu. Tetapi sebaliknya jika nilai-nilai pada barisan tersebut tidak teratur (tidak rapi) maka tidak akan didapatkan rumusan umum untuk barisan tersebut.

Dalam sebuah hadits sahih disebutkan bahwa ada tiga hal yang disukai Allah yaitu orang yang bangun shalat malam, kaum yang berbaris rapat dalam shalat, dan kaum yang berbaris rapat dalam perang *fisabilillah*. Rahasianya ialah jika orang-orang yang berperang itu ber*shaf-shaf*, maka kekuatan moral orang-orang tersebut akan bertambah dan menimbulkan rasa takut pada jiwa musuh, di samping perencanaan yang baik dan pelaksanaan kerja yang cermat. Oleh sebab itu, maka Allah juga memerintahkan kepada kaum yang shalat agar meratakan (merapikan barisan) *shaf-shaf* di dalam shalat, dan seorang yang melaksanakan shalat tidak boleh duduk di *shaf* belakang kecuali jika yang depan sudah penuh. Dan dalam hadits disebutkan bahwa Allah juga memerintahkan untuk menyambung *shaf*, karena menyambung *shaf* adalah salah satu sebab untuk mendapatkan rahmat Allah. Sebaliknya, memutuskan *shaf* adalah salah satu sebab terputusnya seseorang dari rahmat Allah.

Gambaran kaum yang merapatkan diri dalam barisan dapat digambarkan menurut teori graf sebagai graf komplit. Karena setiap titik berpasangan dengan titik lainnya yang dihubungkan dengan sebuah sisi seperti Gambar 3.42 berikut:



Gambar 3.42 Graf Komplit-20

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari pembahasan mengenai pola banyak sisi dan sikel Hamilton graf berpangkat dari graf lintasan dan graf bintang adalah sebagai berikut:

1. Graf berpangkat dari graf lintasan (P_n^k)

a. Pola banyak sisi diperoleh $|E(P_n^k)| = \frac{k}{2}(2n - k - 1)$, untuk $n \geq 2$ dan $1 \leq k \leq n - 1$ $(n, k \in N)$.

b. Graf P_n^2, dengan $n \geq 3$ hanya mempunyai 1-sikel Hamilton.

c. Pola banyak sikel Hamilton yang berbeda diperoleh:

1) Pada P_n^{n-1} sebanyak $\frac{(n-1)!}{2}$, untuk $n \geq 4$.

2) Pada P_n^{n-2} sebanyak $\frac{(n-3)(n-2)!}{2}$, untuk $n \geq 5$.

3) Pada P_n^3 sebanyak $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, untuk $n \geq 4$.

2. Graf berpangkat dari graf bintang (S_n^k)

a. Pola banyak sisi diperoleh $|E(S_n^2)| = \frac{1}{2}n(n + 1)$, untuk $n \geq 2$ $(n \in N)$.

b. Pola banyak sikel Hamilton yang berbeda dari graf berpangkat S_n^2 sebanyak $\frac{n!}{2}$, , untuk $n \geq 2$ $(n \in N)$.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini penulis hanya dapat menentukan pola umum banyaknya sikel Hamilton pada graf berpangkat dari graf lintasan pada P_n^3, P_n^{n-2}, dan P_n^{n-1}. Untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat menentukan pola secara umum untuk banyaknya sikel Hamilton pada P_n^k dan graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N.N., & Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf.* Malang: UIN Malang Press.

Adminbii. 2016. Kajian-kajian yang Berdasarkan pada Al-Quran Disertai Dalil-Dalil dari Hadits yang Shahih, *Shaf Shalat*. (Online), (https://kajiantematisalqurandanassunnah.wordpress.com), diakses 30 Juni 2016.

Al-Maragi, A.M. 1993. *Tafsir Al-Maragi, Juz XXVIII*. Terjemahan B.A. Bakar, H.N. Aly, dan A.U. Sitanggal. Semarang: CV. Toha Putra.

Asy-Syuyuthi, J. dan Al-Mahalliy, J.M.I.A. 2010. *Tafsir Jalalain.* Tasikmalaya: Pesantren Persatuan Islam 91.

Bahreisy, S. & Bahreisy, S. 1993.*Terjemah Singkat Tasir Ibnu Katsir Jilid 8.* Surabaya: PT. Bina Ilmu.

Budayasa, I.K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. & Kapoor S.F. 1974. On Hamiltonian Properties of Powers of Special Hamiltonian Graphs. *Qolloquium Mathematicum*, 16(1):113-117.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph Second Edition.* California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition.* London: Chapman & Hall.

Damayanti, R.T. 2011. Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan. *Jurnal Cauchy*, 2(1):35-40.

Hobbs, A.M. 1972. Some Hamiltonian Results in Powers of Graphs. *Journal of Research os the National Beurau of Sandards-B*, 77B(1&2):1-10.

Roza, I., Narwen. & Zulakmal. 2010. Graf Garis (Line Graph) dari Graf Siklus. Graf Lengkap, dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, 3(2):1-4.

Lyuu, Y.D. 2012. Bipartite Graph, *Number of Hamiltonian Cycle*, 648. (Online), (https://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/dm/2012/20120531.pdf), diakses 30 Juni 2016.

RIWAYAT HIDUP

Anis Mukibatul Badi', biasa dipanggil Anis, lahir di kota Tulungagung pada tanggal 25 Mei 1993. Anak tunggal dari bapak Ahmad Afandi dan ibu Umi Jami'ah. Tinggal di dusun Pakisrejo RT/RW 002/002, Pakel, Ngantru Tulungagung.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Fathul Huda selama enam tahun dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan ke jenjang SMP di MTsN Kunir, Blitar dan lulus pada tahun 2008. Kemudian melanjutkan ke jenjang SMA di MAN 1 Tulungagung dan lulus pada tahun 2011. Setelah lulus SMA melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Anis Mukibatul Badi’
NIM : 11610029
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skipsi : Pola Banyak Sisi dan Sikel Hamilton Graf Berpangkat dari Graf Lintasan dan Graf Bintang
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 November 2015	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	11 November 2015	Revisi Bab I dan Konsultasi Bab II	2.
3.	12 November 2015	Konsultasi Agama Bab I	3.
4.	16 November 2015	Konsultasi Bab III	4.
5.	17 November 2015	Revisi Bab I dan Kajian Agama Bab I	5.
6.	29 Desember 2015	Konsultasi Seminar Proposal	6.
7.	31 Desember 2015	Revisi Bab II dan Bab III	7.
8.	03 Januari 2016	ACC Bab II	8.
9.	12 Januari 2016	Konsultasi Agama Bab II dan Bab III	9.
10.	13 Januari 2016	Revisi Agama Bab II dan III	10
11.	08 April 2016	Konsultasi Bab IV	11.
12.	12 Mei 2016	ACC Bab IV	12.
13.	13 Mei 2016	ACC Keseluruhan Kajian Agama	13.
14.	16 Mei 2016	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 01 Juni 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001