KETAKSAMAAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH
SITI ROHMAH AZIZAH
NIM. 17610059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

KETAKSAMAAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
SITI ROHMAH AZIZAH
NIM. 17610059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

KETAKSAMAAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Siti Rohmah Azizah
NIM. 17610059

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 27 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

KETAKSAMAAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Siti Rohmah Azizah
NIM. 17610059

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika

Tanggal 28 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Ach. Nashichuddin, M.A.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Siti Rohmah Azizah

NIM : 17610059

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,

Siti Rohmah Azizah

NIM. 17610059

MOTO DAN PERSEMBAHAN

"Berpikirlah positif, tidak peduli seseberapa keras kehidupan"

(Ali bin Abi Thalib)

Skripsi ini penulis persembahkan untuk :

Ayah Samain dan Ibu Siti Muntoliah, serta para keluarga yang lainnya menjadi motivasi utama penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat serta cinta dan kasih sayang yang yang tak terhingga.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat dan salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing manusia dari zaman jahiliah menuju zaman islamiah.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak menerima bimbingan, masukan, dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu melalui halaman ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M. A. , selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan banyak ilmu, arahan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku Dosen Pembimbing II yang banyak memberikan ilmu, arahan dan masukan kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd., selaku dosen wali yang selalu memberikan saran dan semangat kepada peneliti untuk selalu giat dalam mencari ilmu.
7. Semua Dosen dan civitas akademik Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim .
8. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu mengirimkan doa terbaik kepada penulis.
9. Semua teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan, yang telah ikut serta membantu menyelesaikan penyusunan skripsi, baik dukungan moril maupun materil.

Penulis sadar tidak bisa memgungkapkan apapun selain ucapan terima kasih dan doa semoga Allah membalas kebaikan jasa dengan balasan yang sebaik-baiknya. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat, baik bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 28 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Azizah, Siti Rohmah. 2022. **Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Operator Integral Fraksional, Operator Integral Fraksional yang Diperumum, Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum

Operator integral fraksional merupakan salah satu operator dalam ilmu analisis. Operator integral fraksional itu sendiri memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari pembagian fungsi tersebut. Salah satu perkembangan operator integral fraksional yaitu operator integral fraksional yang diperumum. Ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Lebesgue. Ruang Morrey merupakan himpunan semua fungsi terukur Lebesgue, yang normnya berhingga atas ruang Morrey. Penelitian ini, akan membahas mengenai ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Pembuktian ketaksamaan tersebut akan menggunakan ketaksamaan Chebyshev dan ketaksamaan Holder.

ABSTRACT

Azizah, Siti Rohmah. 2022. **The Inequality of Generalized Fractional Integral Operators on Generalized Non-homogeneous Morrey Spaces.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Fractional Integral Operators, Generalized Fractional Integral Operators, Generalized Non-homogeneous Morrey Space

A Fractional integral operator is one of the operators in mathematical analysis. Fractional integral operator itself maps any real-valued function into the integral form of the division of the at function. One of the expansion of fractional integral operator is generalized fractional integral operator. Morrey space is an extension of Lebesgue space. Morrey space is the set of all Lebesgue measurable functions, whose norm is finite over Morrey space. In this study, we will discuss the inequalities of the generalized fractional integral operator on a generalized non-homogeneous Morrey space. We proved of this inequality using the Chebyshev inequality and the Holder inequality.

مستخلص البحث

عزيزة ، سيتي رحمة. 2022. عدم المساواة في المعاملات المتكاملة الكسرية المعممة في مسافات موري غير المتجانسة. البحث العلمى. قسم الرياضيات ،كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، بمالانج .المشرف (1) الدكتور خير الرحمن , الماجستير. (2) احمد ناصح الدين ، الماجستير

الكلمات المفتاحية: المشغلون المتكاملون الجزئيون، مشغلو التكامل الجزئي المعممون، المعممون غير المتجانسين (***Morrey Space***)

مشغلو التكامل الجزئي هومن أحد المشغلين في العلوم التحليلية. يقوم مشغل التكامل الكسري نفسه برسم خرائط لأي دالة ذات قيمة حقيقية في الشكل المتكامل لتقسيم الدالة. أحد تطورات مشغل التكامل الجزئي هو (***Morrey space***). (***Lebesgue space***) هو امتداد لـ (***Morrey space***) .عامل التكامل الجزئي المعمم (***Morrey*** القابلة للقياس، والتي يكون قاعدتها محدودة (***Lebesgue***) هي مجموعة من جميع الوظائف في هذه الدراسة، سنناقش عدم المساواة في مشغل التكامل الجزئي المعمم على مساحة موري العامة .(***space*** وعدم المساواة في (***Chebyshev***) غير المتجانسة. سيستخدم الدليل على عدم المساواة عدم المساواة في (***Holder***)

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator integral fraksional dikenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. Operator integral fraksional ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari pembagian fungsi tersebut. Pada tahun 1928, G.H. Hardy dan J. E. Littlewood menunjukkan keterbatasan I_α di ruang Lebesgue $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ dengan $0 < \alpha < n$ dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ dengan menggunakan operator maksimal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood. Sedangkan pada tahun 1930, Sergei Sobolev menyempurnakan keterbatasan I_α pada ruang yang sama yaitu ruang Lebesgue juga menggunakan operator maksimal dengan sebutan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Nakai, (2001) mengembangkan perumuman operator integral fraksional, disimbolkan I_ρ yang memetakan sebarang fungsi bernilai real f ke integral dari fungsi f dikali sebuah fungsi ρ yang telah ditentukan sebelumnya. Operator integral fraksional yang diperumum telah diteliti oleh beberapa pihak. Penelitian yang dilakukan oleh Gunawan, (2003) membahas mengenai perumuman operator integral fraksional yang terbatas pada perumuman ruang Morrey. Selain itu, Eridani, dkk, (2004) membuat penelitian mengenai keterbatasan operator integral fraksional dengan modifikasi ruang Morrey dan ruang Campanato. Selanjutnya, Sawano, dkk, (2009) meneliti tentang ketaksamaan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum. Eridani, dkk, (2014) juga membahas mengenai karakteristik untuk ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey. Sementara Gatto, dkk, (2018) sempat membahas tentang operator integral fraksional yang di ruang metrik yang memenuhi kondisi *growth.*

Ruang Morrey sendiri (disebut juga ruang Morrey klasik) diperkenalkan oleh C. B. Morrey pada tahun 1938. Ruang Morrey adalah himpunan semua fungsi terukur lebesgue, yang normnya berhingga atas ruang Morrey. Norm dari ruang Morrey ini sendiri akan dibahas pada bab 2. Terdapat beberapa peneliti yang mengembangkan ruang Morrey klasik. Ruang Morrey tak homogen yang diperumum merupakan salah satu modifikasi yang ada. Adapun penelitian tentang ruang Morrey tak homogen yang diperumum dilakukan oleh Ivanal, dkk, (2013) yang membahas pembuktikan ketaksaman lemah untuk operator integral fraksional terhadap ruang Morrey tak homogen yang diperumum dengan modifikasi operator maksimal Hardy-Littlewood dan ketaksamaan Chebyshev.

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas tidak ada satupun yang membahas ketaksamaan operator integral fraksional di ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Oleh karena itu, penulis ingin mengembangkan penelitian tersebut.

Layaknya penelitian mengenai operator integral fraksional, setiap ilmu selalu berkembang seiring dengan perubahan zaman. Oleh karena itu, Allah SWT menyuruh manusia untuk senantiasa mengembangkan ilmu pengetahuan seperti yang terdapat dalam surat Al-An’am ayat 50 :

قُل لَّآ أَقُولُ لَكُمۡ عِندِي خَزَآئِنُ ٱللَّهِ وَلَآ أَعۡلَمُ ٱلۡغَيۡبَ وَلَآ أَقُولُ لَكُمۡ إِنِّي مَلَكٌۖ إِنۡ أَتَّبِعُ إِلَّا مَا يُوحَىٰٓ إِلَيَّۚ
قُلۡ هَلۡ يَسۡتَوِي ٱلۡأَعۡمَىٰ وَٱلۡبَصِيرُۚ أَفَلَا تَتَفَكَّرُونَ ٥٠

Artinya:*“Katakanlah (Muhammad), “Aku tidak mengatakan kepadamu, bahwa perbendaharaan Allah ada padaku, dan aku tidak mengetahui yang gaib dan aku tidak (pula) mengatakan kepadamu bahwa aku malaikat. Akhu hanya mengikuti apa yang diwahyukan kepadaku.” Katakanlah, “Apakah sama antara orang yang buta dengan orang yang melihat? Apakah kamu tidak memikirkan(nya)?””*

Ayat di atas memerintahkan untuk setiap manusia agar berpikir tentang sebuah kebenaran. Surat Al-An'am ayat 50 mempunyai tujuan untuk memperbaiki pendapat kaum Quraisy tentang kenabian, maka dari itu Allah memerintahkan mereka untuk berpikir kembali.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang diteliti dalam penelitian ini, yakni "Bagaimana ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum?"

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi penulis, dapat menambah wawasan mengenai ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum.
2. Bagi pembaca, dapat memberikan wawasan pada bidang operator integral fraksional.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian kali ini, topik yang dibahas ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Oleh karena itu, pembahasan kali ini terbatas operator integral fraksional yang diperumum saja. Sedangkan ruang yang dipakai ruang Morrey tak homogen yang diperumum.

1.6 Definisi Istilah

Terdapat beberapa definisi istilah operator integral fraksional dan ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Operator integral fraksional pertama kali dikenalkan oleh Marcell Riesz pada tahun 1886 yaitu misalkan f fungsi bernilai real pada $\mathbb{R}^n$ dengan $0 < \alpha < n$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, operator integral fraksional didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)|x-y|^{\alpha-n}\, dy$$

Berikutnya, ruang Morrey tak homogen yang diperumum misal $1 \leq p < \infty$ dan $\phi: (0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$.Ruang Morrey tak homogen yang diperumum $L^{p,\phi}(\mu) = L^{p,\phi}(\mathbb{R}^d, \mu)$ didefinisikan sebagai:

$$\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)} = \sup_{B(a,r)} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (2.1)$$

untuk ruang fungsi $f \in L^p_{loc}(\mu)$

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Operator Integral Fraksional

Operator integral fraksional diperkenalkan oleh Marcel Riesz. Menurut Gunawan (2003), operator integral fraksional didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Misalkan f fungsi real di $\mathbb{R}^d$, $0 < \alpha < n \le d$ dan μ adalah ukuran Lebesgue. Operator integral fraksional disimbolkan I_α, memetakan $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \tag{2.1}$$

Saat $n = 1$, I_α menjadi

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

2.2 Operator Integral Fraksional yang Diperumum

Operator integral fraksional yang telah dibahas subbab sebelumnya oleh Nakai, (2001). Nakai mendefinisikan operator integral fraksional yang diperumum sebagai berikut

Definisi 2.2. Misalkan $\mathbb{R}^+(0,\infty)$, $0 < n \le d$, $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dan f sebarang fungsi $\mathbb{R}$. Operator integral fraksional yang diperumum, disimbolkan sebagai I_ρ didefinisikan sebagai:

$$I_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{(|x-y|)^n} d\mu(y) \tag{2.2}$$

Jika $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < n$ maka $I_\rho = I_\alpha$. Buktinya adalah sebagai berikut.

Misalkan $I_\rho f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} d\mu(y)$. Misalkan $(t) = t^\alpha$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
I_\rho f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \; \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} \, d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \; \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^n} \, d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \; \frac{1}{|x-y|^n} \frac{1}{|x-y|^{-\alpha}} \, d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, d\mu(y)
\end{aligned}
$$

di mana telah diketahui bahwa $I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $I_\rho = I_\alpha$.

2.3 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue merupakan salah satu ruang fungsi pada analisis fungsional. Ruang ini merupakan ruang dasar dalam ruang fungsi, sebagaimana definisinya dituliskan oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) dalam bukunya sebagai berikut.

Definisi 2.3. Untuk $\mathbb{R}^d$ himpunan terukur, $1 < p < \infty$, dan suatu fungsi f di $\mathbb{R}^d$ didefinisikan sebagai

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.2}$$

2.4 Ruang Lebesgue Tak Homogen

Menurut Hakim, (2013) ruang Lebesgue tak homogen didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4. untuk $1 \leq p < \infty$, kita definisikan ruang Lebesgue tak homogen dengan $L^p(\mu) = L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ sedemikian hingga

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.4}$$

2.5 Ruang Lebesgue Lokal

Menurut Bartle (1995) yakni tentang ruang Lebesgue lokal didefinisikan dengan $1 \leq p < \infty$ disimbolkan $L_{loc}^p = L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ adalah kumpulan kelas-kelas ekuivalen f sedemikian hingga untuk setiap bab himpunan kompak $S \in \mathbb{R}^d$ berlaku $\int_S |f|^p < \infty$.

2.6 Ruang Morrey

Ruang Morrey $L_q^p(\mathbb{R}^d)$ merupakan salah satu ruang yang diperoleh dari modifikasi ruang Lebesgue. Ruang Morrey sendiri diperkenalkan oleh C.B. Morrey pada tahun 1938. Sawano, dkk (2020) menuliskan definisi ruang Morrey yang diambil dari definisi C.B. Morrey.

Definisi 2.5. Misalkan $0 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey merupakan himpunan semua fungsi $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ sedemikian hingga,

$$\|f\|_{L_q^p} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d, r > 0} |B(x,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.5}$$

Ruang Morrey dapat diperoleh dari perluasan ruang Lebesgue. Ketika $p = q$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_q^p} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d, r > 0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^d, r > 0} |B(x,r)|^{0} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Fakta bahwa $L_q^p = L^p$, menunjukkan bahwa ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Lebesgue.

2.7 Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum

Menurut Ivanal, (2013) ruang Morrey tak homogen yang diperumum didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.6. Misal $1 \leq p < \infty$ dan $\phi: (0, \infty) \to (0, \infty)$. Ruang Morrey tak homogen yang diperumum $L^{p,\phi}(\mu) = L^{p,\phi}(\mathbb{R}^d, \mu)$ didefinisikan sebagai:

$$\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)} = \sup_{B(a,r)} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (2.6)$$

untuk ruang fungsi $f \in L_{loc}^p(\mu)$.

2.8 Operator Maksimal Hardy-Littlewood

G.H. Hardy dan J.E. Littlewood memperkenalkan ketaksamaan Hardy-Littlewood sebagai operator maksimal. Eridani, dkk (2004) mendeskripsikan operator tersebut dalam ruang tak homogen sebagai berikut.

Definisi 2.7. Ruang tak homogen dalam operator maksimal Hardy-Littlewood pada didefinisikan sebagai

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu(y) \qquad (2.7)$$

dengan $B(x,r)$ sebarang bola berpusat di $x \in \mathbb{R}^d$ dan berjari-jari $r > 0$.

2.9 *Doubling Condition*

Salah satu kondisi dalam pengerjaan operator integral fraksional yaitu kondisi *doubling*. Menurut Eridani, dkk, (2004) didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.8. Misalkan $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dan asumsikan ϕ memenuhi syarat berikut yaitu terdapat $C_1 > 1$ sedemikian hingga untuk setiap $s, v > 0$ berlaku.

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(v)} \leq C_1 \text{ , untuk } s \in \left[\frac{v}{2}, 2v\right] \text{ dan}$$

$$\int_r^\infty \frac{\phi(s)}{s} ds \leq C_1 \phi(v) \tag{2.8}$$

maka fungsi ϕ dikatakan memenuhi kondisi *doubling*.

2.10 *Growth Condition*

Pembuktian ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum membutuhkan suatu kondisi yaitu kondisi *growth*. Menurut Ivanal, (2013) mendefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9. Fungsi $\rho : (0, \infty) \to (0, \infty)$ disebut kondisi *growth* jika terdapat konstanta k_1 dan k_2 yang memenuhi $0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ dan konstanta $C > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$\sup_{\frac{r}{2} < s \leq r} \rho(s) \leq C \int_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(t)}{t} dt \tag{2.9}$$

untuk bab berikutnya, akan dinotasikan $\rho^*(r) = \int_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(t)}{t} dt$ untuk setiap $r > 0$.

2.11 Ketaksamaan Holder

Ketaksamaan Holder adalah salah satu ketaksamaan yang mendasar di analisis fungsional. Menurut Bartle, (1995) mendefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.10. Jika $f \in L^p$, $g \in L^q$ dengan $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ maka $fg \in L'$ dan $\|fg\|_{L'} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

2.12 Ketaksamaan Chebyshev

Ketaksamaan yang membahas tentang operator integral fraksional I_α adalah ketaksamaan Chebyshev. Salah satu yang membahas ketaksamaan ini adalah Royden (2010). Bunyi ketaksamaan Chebyshev adalah sebagai berikut.

Teorema 2.11. Misalkan μ adalah ukuran Borel pada $\mathbb{R}^d$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^d$ adalah himpunan yang terukur. Jika f adalah fungsi yang terintegralkan pada E, maka untuk setiap $\gamma > 0$ berlaku

$$\mu(\{x \in E : |f(x)| > \gamma\}) \leq \frac{1}{\gamma}\int_E |f(x)| d\mu(x) \qquad (2.10)$$

Bukti. Definisikan $E_\gamma = \{x \in E : |f(y)| > \gamma\}$. Pertama misalkan $\mu(E_\gamma) = \infty$. Misalkan n bilangan asli. Definsikan $E_{\gamma,n} = E_\gamma \cap [-n, n]$ dan $\psi_n = \gamma \cdot \chi E_{\gamma,n}$. Maka ψ_n adalah fungsi terukur yang terbatas dari berhingga.

$\gamma \cdot \mu(E_{\gamma,n}) = \int_E \psi_n$ dan $0 \leq \psi_n \leq f$ di E untuk semua n

Kita simpulkan dari kontinuitas terukur itu

$$\infty = \gamma \cdot \mu(E_\gamma) = \gamma \cdot \lim_{n\to\infty} \mu(E_{\gamma,n}) = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \leq \int_E f$$

Dengan demikian ketidaksamaan (2.10) terjadi karena kedua sisi sama ∞. Sekarang pertimbangan kasusnya $\mu(E_\gamma) < \infty$. Definisikan $h = \gamma \cdot \chi E_\gamma$. Maka h adalah fungsi terukur yang terbatas dari berhingga dan $0 \leq h \leq f$ di E. Maka dengan definisi integral dari f atas E, diperoleh

$$\gamma \cdot \mu(E_\gamma) = \int_E h \leq \int_E f$$

$$\mu(E_\gamma) = \int_E \frac{h}{\gamma} \leq \int_E \frac{f}{\gamma}$$

2.13 Anjuran Berpikir dalam Al-Qur'an

Bab ini akan menjelaskan tentang perintah berpikir dalam Al-Qur'an. Berpikir untuk mengetahui kebenaran dan tidak tersesat. Perintah berpikir untuk mengetahui kebenaran terkandung dalam salah satu ayat Al-Qur'an, yakni pada surat Al-An'am ayat 50

قُل لَّآ أَقُولُ لَكُمۡ عِندِي خَزَآئِنُ ٱللَّهِ وَلَآ أَعۡلَمُ ٱلۡغَيۡبَ وَلَآ أَقُولُ لَكُمۡ إِنِّي مَلَكٌۖ إِنۡ أَتَّبِعُ إِلَّا مَا يُوحَىٰٓ إِلَيَّۚ
قُلۡ هَلۡ يَسۡتَوِي ٱلۡأَعۡمَىٰ وَٱلۡبَصِيرُۚ أَفَلَا تَتَفَكَّرُونَ

Artinya: *"Katakanlah (Muhammad), "Aku tidak mengatakan kepadamu, bahwa perbendaharaan Allah ada padaku, dan aku tidak mengetahui yang gaib dan aku tidak (pula) mengatakan kepadamu bahwa aku malaikat. Aku hanya mengikuti apa yang diwahyukan kepadaku." Katakanlah, "Apakah sama antara orang yang buta dengan orang yang melihat? Apakah kamu tidak memikirkan(nya)?""*

Dalam tafsir Al-Mishbah, (2007) menjelaskan tentang ayat ini yaitu bahwa Nabi Muhammad SAW sama halnya dengan manusia biasanya, yang membedakan bahwa Nabi Muhammad SAW menerima menerima wahyu, sehingga Nabi Muhammad SAW dalam petunjuk-Nya. Seperti halnya orang yang melihat, dan orang yang buta, keduanya tidak sama yang buta mengikuti orang yang melihat, yang tidak mengetahui arah seharusnya diarahkan oleh yang mengetahui arah. Maka seharusnya kita berpikir.

Dalam tafsir Fi Zhilail Qur'an, (2003) menjelaskan berpikir dalam ayat tersebut bahwa berpikir sesuai dengan petunjuk wahyu dan bukan hanya berpikir tidak sesuai petunjukNya. Bukan semata-mata berpikir dalam kegelapan tanpa adanya petunjuk dan kitab suci yang meneranginya

Selanjutnya, oleh Taufik, dkk, (2016) bahwa tujuan berpikir dalam Islam ada beberapa poin diantaranya untuk mendapatkan sebuah kebenaran, mengamalkan syariat Islam dan lebih dekat dengan Allah SWT. Surat Al-An'am ayat 50 merupakan salah satu poin di atas yaitu untuk mendapatkan sebuah kebenaran. Sedangkan cara berpikir dalam Islam juga terdapat beberapa poin yaitu berpikir dalam hati bersih, berpikir dengan akal yang benar dan berpikir dengan luas dan sederhana.

Dalam tafsir Al-Muyassar, (2007) menjelaskan bahwa Nabi Muhammad SAW tidak mengklaim bahwa beliau memiliki pembendaharaan langit dan bumi sehingga aku bisa berbuat apa saja di dalamnya dan beliau tidak mengaku mengetahui perkara-perkara hal ghaib dan tidak mengaku bahwa beliau adalah malaikat. Beliau hanyalah seorang utusan yang di utus dari sisi Allah. Beliau sekedar mengikuti apa yang diwahyukan ke beliau dan kemudian disampaikan kepada umat manusia. Katakanlah (wahai rasul) kepada orang musyrik itu, “apakah sama orang kafir yang buta untuk menyaksikan ayat-ayat Allah sehingga dia tidak mengimaninya dengan orang mukmin yang dapat melihat ayat-ayat Allah lalu mengimaninya? Apakah kalian tidak mau memikirkan auat-ayat Allah agar dapat melihat kebenaran dan kemudian mengimaninya?”

2.14 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Penelitian ini dilakukan dengan cara penelitian kualitatif yang membutuhkan beberapa penelitian. Terdapat beberapa penelitian terkait topik judul yang telah diteliti sebelumnya. Salah satunya dibuat oleh Eridani dan kawan-kawan (2004) dalam artikel *On Generalized Fractional Integral Operators* yang membahas tentang operator integral fraksional yang diperumum dengan versi ruang Morrey dan ruang Campanato dengan menggunakan cara operator maksimal Hardy-Littlewood dan fungsi Young. Ada teorema yang akan digunakan dalam pengerjaan yaitu kondisi *doubling*. Dalam jurnal tersebut jika ρ memenuhi kondisi *doubling* kita mempunyai kondisi berikut :

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(v)} \leq C_1 \text{ , untuk } s \in \left[\frac{v}{2}, 2v\right]$$

$$\int_r^\infty \frac{\phi(s)}{s} ds \leq C_1 \phi(v)$$

Selain itu, Denny Ivanal Hakim dan Hendra Gunawan (2013) dalam artikel *Weak-*(p, q) *Inequality for Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces of Non-Homogeneous Type* yang membahas dengan membuktikan ketaksaman lemah untuk operator integral fraksional terhadap ruang Morrey tak homogen yang diperumum dengan modifikasi operator maksimal Hardy-Littlewood dan ketaksamaan Chebyshev.

Lema 2.12. *Misalkan* $f \in L^1_{loc}(\mu)$ *, maka untuk sebarang bola* $B(x,R)$ *pada* $\mathbb{R}^d$ *berlaku*

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \leq CR^{\alpha} Mf(x) \tag{2.3}$$

Bukti. Dengan dekomposisi bola $B(x,R)$ dipartisi dan berdasarkan definisi operator maksimal serta fakta bahwa $\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$ konvergen, maka untuk sebarang bola $B(x,R) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) &\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&= \int_{|x-y|<\frac{1}{4}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\frac{1}{4}R\leq|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R\leq|x-y|<\frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^jR\leq|x-y|<2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y)
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{|x-y|\leq 2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{(B,2^{j+1}R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^{j}R)^{1-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^{j}R\right)^{\alpha} \frac{1}{(2^{j}R)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq 2R^{\alpha} Mf(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$$

$$\leq CR^{\alpha} Mf(x) \qquad \square$$

Akibat 2.13. *Misalkan $B(x,R)$ adalah bola yang berpusat di $x \in \mathbb{R}^d$ dan berjari-jari $R > 0$ maka*

$$\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \leq CR^{\alpha} \tag{2.4}$$

Dan untuk sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int_{B(x,R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y) \leq C\, R^{\alpha} M\, \chi_{\mathrm{B(a,r)}}(x) \tag{2.5}$$

Bukti. Ambil sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Untuk setiap $y \in B(x,R)$, definisikan $f_1(y) = 1$ dan $f_2(y) = \chi_{B(a,r)}(y)$. Kemudian, dengan substitusi f_1 dan f_2 ke ketaksamaan pada lema 2.10

Untuk $f_1(y) = 1$ disubstitusikan ke ketaksamaan lema 2.10

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{2}R\le|x-y|<R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$=\int_{|x-y|<\frac{1}{4}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{4}R\le|x-y|<\frac{1}{2}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{2}R\le|x-y|<R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^j}R\le|x-y|<\frac{1}{2^{j+1}}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{2^jR\le|x-y|<2^{j+1}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{|x-y|<2^{j+1}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{B(x,2^{j+1}R)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2^jR)^{1-\alpha}}\int_{B(x,2^{j+1}R)}1\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\left(2^jR\right)^{\alpha}\frac{1}{(2^jR)}\int_{B(x,2^{j+1}R)}1\,d\mu(y)$$

$$\le 2R^{\alpha}$$

$$\le CR^{\alpha}$$

Untuk $f_2(y)=\chi_{B(a,r)}(y)$ disubstitusikan ke ketaksamaan lema 2.10

$$\int_{B(x,R)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}d\mu(y)\le\int_{|x-y|<\frac{1}{2}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{2}R\le|x-y|<R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$=\int_{|x-y|<\frac{1}{4}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{4}R\le|x-y|<\frac{1}{2}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{2}R\le|x-y|<R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^j}R\le|x-y|<\frac{1}{2^{j+1}}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{2^jR\le|x-y|<2^{j+1}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\;d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{|x-y|<2^{j+1}R}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\;d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{(B,2^{j+1}R)}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}}\;d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2^jR)^{1-\alpha}}\int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)}\chi_{B(a,r)(y)}\,d\mu(y)$$

$$\le 2R^{\alpha}M\chi_{B(a,r)}(x)$$

$$\le CR^{\alpha}M\chi_{B(a,r)}(x)$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif. Teknik pengumpulan data diperoleh dengan studi pustaka. Untuk mendapatkan dengan cara menghimpun data-data yang sesuai dengan penelitian yakni dari buku ataupun jurnal.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan cara menghimpun data yang sesuai dengan penelitian yang akan dijalani yakni dari buku, jurnal dan artikel. Pada penelitian ini, peneliti menggunakan beberapa rujukan, berikut beberapa rujukan:

Rujukan pertama dari Eridani, Hendra Gunawan dan Eiichi Nakai pada tahun 2004 yang berjudul *On Generalized Fractional Integral Operators*. Penelitian ini membahas tentang keterbatasan operator integral fraksional yang diperumum dengan modifikasi pada Ruang Morrey dan Ruang Campanato. Dengan penyelesaian menggunakan fungsi maksimal Hardy-Littlewood dan fungsi Young.

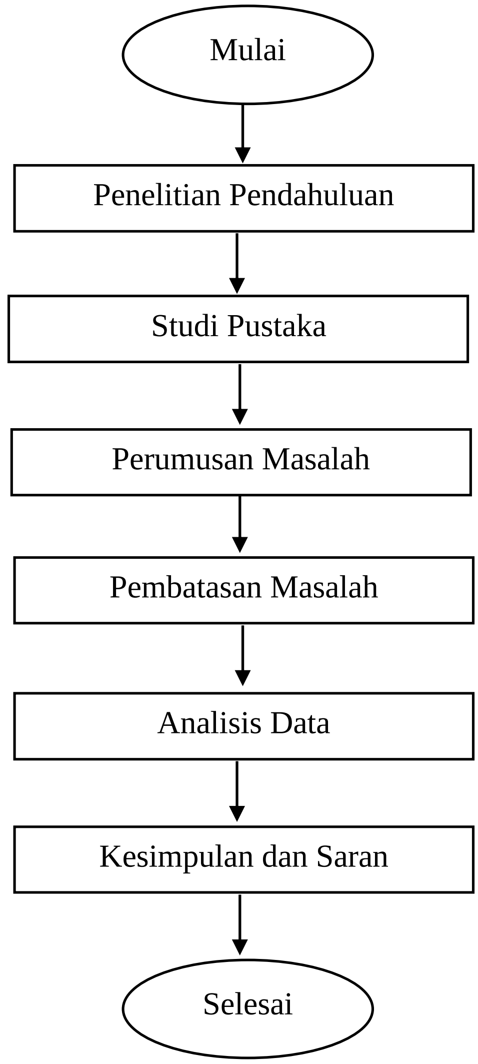
Rujukan kedua dari Denny Ivanal Hakim dan Hendra Gunawan pada tahun 2013 yang berjudul *Weak-*(p, q) *Inequality for Fractional Integrals Operator On Generalized Morrey Spaces of Non-Homogeneous Type*. Penelitian ini membahas ketaksaman lemah untuk operator integral fraksional terhadap perumuman Ruang Morrey melalui ketaksamaan Chebyshev.

Penelitian selanjutnya adalah penelitian skripsi yang berjudul "Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum pada Ruang Morrey

Tak Homogen yang Diperumum". Metode yang digunakan yaitu kajian pustaka yang membutuhkan beberapa buku, artikel ataupun jurnal yang berhubungan dengan penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang ada sesuai dengan penelitian yaitu penelitian kualitatif berikut tahapan-tahapan penelitiannya:



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ketaksamaan Operator Integral Fraksional

Sebelum membuktikan ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Akan ditunjukkan ketaksamaan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue tak homogen.

Ketaksamaan tersebut terdapat pada teorema berikut. Namun, untuk membuktikan teorema tersebut dibutuhkan lema berikut.

Lema 4.1. Untuk setiap $\gamma > 0$

$$\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) \leq Cr^{\gamma}$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) &\leq \int_{|x-y|\geq 2r} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) \\
&= \int_{|x-y|>4r} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{2r\leq|x-y|<4r} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j r\leq|x-y|<2^{j+1}r} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R)\backslash B(x,2^{j}R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y)
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n-\gamma}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} 1 \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu(B(x, 2^{j+1}R)}{(2^j R)^{n-\gamma}}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1} R\right)^n}{(2^j R)^{n-\gamma}}$$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma j} r^{\gamma}$$

$$= Cr^{\gamma}$$

Lema 4.2. Untuk setiap $\gamma > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y) \leq Cr^{-\gamma}$$

Bukti.

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y) \leq \int_{|x-y| \geq 2r} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y)$$

$$= \int_{|x-y| > 4r} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r \leq |x-y| < 4r} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j r \leq |x-y| < 2^{j+1} r} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R) \setminus B(x,2^j R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n+\gamma}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} 1\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu(B(x, 2^{j+1}R)}{(2^j R)^{n+\gamma}}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1} R\right)^n}{(2^j R)^{n+\gamma}}$$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma j} r^{-\gamma}$$

$$= C r^{-\gamma}$$

Teorema mengenai ketaksamaan operator integral fraksional di ruang Lebesgue tak homogen diberikan pada teorema berikut

Teorema 4.3. Misalkan $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, maka terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga

$$\mu\left(\{\, x \in \mathbb{R}^d \colon |I_\alpha f(x)| > \gamma \,\}\right) \leq C \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{\gamma} \right)^q$$

Untuk setiap $\gamma > 0$.

Bukti. Misalkan $I_\alpha f(x) = I_1(x) + I_2(x)$ dengan

$$I_1(x) = \int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y)$$

Sedangkan

$$I_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, d\mu(y)$$

$(n-\alpha)p' = n + \gamma$, di mana $\gamma = n(p'-1) - \alpha p'$, maka

$$\frac{\gamma}{p'} = n\left(1 - \frac{1}{p'}\right) - \alpha = \frac{n}{p} - \alpha > 0$$

dengan menggunakan lema 4.2 $|I_2(x)| \leq \|f\|_{L^p(\mu)}(Cr^{-\gamma})^{\frac{1}{p'}} = C\|f\|_{L^p(\mu)}r^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)}$, berlaku untuk $p = 1$. Kita mengasumsikan bahwa $\|f\|_{L^p(\mu)} = 1$. Juga, untuk $\lambda > 0$, kita pilih r bahwa $Cr^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} = \frac{\lambda}{2}$. Maka,

$$\{x \in \mathbb{R}^d : |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^d : |I_1(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^d : |I_2(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}$$

dikarenakan hubungan antara r dan λ, keduanya kosong. Kita menggunakan ketaksamaan Holder untuk mendapatkannya

$$I \leq \left(\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq C^{\frac{\alpha}{p'}} \left(\int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Selanjutnya, menggunakan ketaksamaan Chebyshev dan lema 4.1, kita mendapatkan

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |I| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$

$$\leq Cr \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) d\mu(x)$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(x,R)} \frac{d\mu(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) |f(y)|^p$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p d\mu(y) \int_{B(x,R)} \frac{d\mu(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

$$\leq C \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

Perumuman dari Teorema 4.3 pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum diberikan pada teorema berikut.

Teorema 4.4. Misalkan $\int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \leq C\phi r$ untuk setiap $r > 0$ dan $\lambda \in [0, n - \alpha)$ kita mempunyai

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1}\, \phi(t)dt \leq Cr^{\lambda+\alpha-n}, r > 0$$

Jika $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n-\lambda}$, maka terdapat konstanta $C > 0$ sedemikiaan hingga $f \in L^{1,\phi}(\mu)$ dan sebarang bola $B(a, r) \subseteq \mathbb{R}^d$, kita mempunyai

$$\mu\,(\{\, x \in B(a,r) :\ |I_\alpha\, f(x)| > \gamma\,\}) \leq\ Cr^n\phi(r)\left(\frac{\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

Untuk setiap $\gamma > 0$

Bukti. Jika $|I_\alpha\, f(x)| > \gamma$, maka

$$|I_\alpha\, f(x)| \leq \int_{|x-y|<r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) + \int_{|x-y|\geq r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$=: A + B$$

Kita amati untuk cara pertama yang kita dapatkan

$$A = \int_{|x-y|<r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\ d\mu(y) + \int_{\frac{1}{2}r\leq|x-y|<r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\ d\mu(y)$$

$$= \int_{|x-y|<\frac{1}{4}r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\ d\mu(y) + \int_{\frac{1}{4}r\leq|x-y|<\frac{1}{2}r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\ d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq|x-y|<r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\ d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}r \leq |x-y| < \frac{1}{2^{j+1}}r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^j r < |x-y| \leq 2^{j+1} r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y| \leq 2^{j+1} r} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^n (2^j r)\, \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y| \leq 2^{j+1} r} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq 2^n r^\alpha Mf(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$$

$$\leq C r^\alpha Mf(x)$$

Sementara itu, cara kedua kita memiliki cara berikut:

$$B = \int_{|x-y| \geq r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{|x-y| > 4r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) + \int_{4r > |x-y| \geq 2r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r \leq |x-y| < 2^{j+1} r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y| \leq 2^{j+1} r} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^n (2^j r)\, \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y| \leq 2^{j+1} r} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq C \|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^j r\right)^\alpha \phi(2^{j+1} r)$$

Dengan ϕ selalu naik, maka $j = 0, 1, 2, ...$

$$(2^j r)^\alpha \phi(2^{j+1} r) \leq C \int_{2^j r}^{2^{j+1} r} t^{\alpha-1} \phi(t) dt$$

Dengan ketaksamaan terakhir

$$B \leq C \|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j r}^{2^{j+1} r} t^{\alpha-1} \phi(t) dt$$

$$\leq C \|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)} \int_{r}^{\infty} t^{\alpha-1} \phi(t) dt$$

$$\leq C r^{\lambda+\alpha-n} \|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)}$$

Maka, kita dapatkan

$$|I_\alpha f(x)| \leq C r^\alpha \left(Mf(x) + r^{\lambda-n} \|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)} \right)$$

$$\leq C [Mf(x)]^{1-\frac{\alpha}{n-\lambda}} \|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}$$

Selanjutnya, kita mempunyai

$$Mf(x) > \left(\frac{\gamma}{C \|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}} \right)^{\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}} = \left(\frac{\gamma}{C \|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}} \right)^{q}$$

dan selanjutnya, dengan menggunakan teorema 4.4, kita dapatkan

$$\mu\left(\{ x \in B(x,r) : \ |I_\alpha f(x)| > \gamma \}\right) \leq C r^n \phi(r) \|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)} \left(\frac{\|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}}{\gamma} \right)^q$$

$$= Cr^n\phi(r)\left(\frac{\|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n-\lambda}}}{\gamma}\right)^q$$

$$\leq\ Cr^n\phi(r)\ \left(\frac{\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

4.2 Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum

Fakta bahwa I_ρ adalah bentuk perumuman operator integral fraksional sedangkan I_α adalah bentuk operator integral fraksional dengan asumsi fungsi ρ memenuhi kondisi tertentu. Dalam bab ini akan dibahas ketaksamaan tipe lemah untuk I_ρ sebagai perumuman ketaksamaan tipe lemah untuk I_α. Khususnya, hasil yang dibahas lebih detail untuk membuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk I_ρ dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev.

Ketaksamaan tipe kuat untuk I_ρ dengan ρ diasumsikan memenuhi kondisi doubling, fungsi dari $x\ \mapsto \int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ f(y)d\mu(y)$ diperoleh dengan kondisi doubling yaitu terdapat konstanta positif C sedemikian hingga untuk setiap $r > 0$ dan bilangan bulat j berlaku

$$\frac{1}{C}\rho\left(2^{j+1}r\right) \leq \int_{2^j r}^{2^{j+1}r} \frac{\rho(t)}{t}\ dt \leq C\ \rho(2^{j+1}r) \qquad (4.1)$$

Pada ketaksamaan di atas tidak dapat untuk fungsi ρ diasumsikan dengan kondisi growth dikarenakan kondisi growth tetapi tidak memenuhi kondisi doubling. Untuk masalah ini, sifat terkait kondisi growth untuk ρ maka diberikan lema berikut.

Lema 4.5. *Misalkan* k_1 *dan* k_2 *adalah dua konstanta positif yang memenuhi* $2k_1 < k_2 < \infty$ *dan* r *adalah sebarang bilangan real positif , maka untuk setiap* $t > 0$ *berlaku*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_{[k_1 2^j r, k_2 2^j r]}(t) \leq 1 + \log_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \tag{4.2}$$

Bukti. Definisikan $= \left\{n \in \mathbb{N} : 2^n < \frac{k_2}{k_1}\right\}$. Karena $k_2 > 2k_1$, maka $1 \in S$. Karena $S \subseteq \mathbb{N}$ dan $\neq \emptyset$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$2^N < \frac{k_2}{k_1} < 2^{N+1}$$

Karena untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$\frac{k_2 r}{2^{N+1}} < k_1 r < \frac{k_2 r}{2^N} < k_2 r$$

Maka banyaknya interval yang beririsan adalah N. Akibatnya, untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_{[k_1 2^j r, k_2 2^j r]}(t) \leq 1 + N = 1 + \log_2 2^N \leq 1 + \log_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

□

Berdasarkan lema 4.7, diperoleh ketaksamaan yang serupa dengan ketaksamaan 2.10. Ketaksamaan tersebut diberikan dalam lema berikut.

Lema 4.6. *Misalkan* $1 \leq p < q < \infty$ *dan* $\in L^1_{loc}(\mu)$ *. Jika fungsi* ρ *dan* ϕ *memenuhi*

$$\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}\, dt \leq C\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}$$

Untuk setiap $r > 0$ *, maka untuk sebarang bola* $B(x,R) \subseteq \mathbb{R}^d$ *berlaku*

$$\int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\, |f(y)|\, d\mu(y) \leq CMf(x)\phi(R)^{\frac{p}{q}-1} \tag{4.3}$$

Bukti. Untuk sebarang bola (x, R) , misalkan

$$I_1(x) = \int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, |f(y)| \, d\mu(y)$$

Dengan mendekomposisi bola $B(x, R)$ secara dipartisi dan dengan menggunakan kondisi growth dari fungsi ρ serta definisi , diperoleh

$$\int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y) \leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$= \int_{|x-y|<\frac{1}{4}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}R\leq|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R\leq|x-y|<\frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^jR\leq|x-y|<2^{j+1}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{|x-y|\leq 2^{j+1}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j R)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \rho(|x-y|)|f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j R)}\, \rho^*(2^{j+1}R) \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq CMf(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{k_1 2^{j+1}R}^{k_2 2^{j+1}R} \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq CMf(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_0^{k_2 R} \chi_{[k_1 2^{j+1}R,\, k_2 2^{j+1}R]}(t) \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C\, Mf(x) \int_0^{k_2 R} \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \chi_{[k_1 2^{j+1}R,\, k_2 2^{j+1}R]}(t) \right) \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq CMf(x) \left(1 + \log_2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right) \int_0^{k_2 R} \frac{\rho(t)}{t}\, dt$$

$$\leq CMf(x)\phi(k_2 R)^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\leq CMf(x)\phi(R)^{\frac{p}{q}-1}$$

□

Ketaksamaan dibawah ini merupakan dua ketaksamaan yang serupa dengan ketaksaman 2.11 dan 2.12.

Akibat 4.7. *Misalkan* $1 \leq p < q < \infty$ *dan* $B(x,R)$ *adalah sebarang bola yang berpusat* $x \in \mathbb{R}^d$ *dan berjari-jari* $R > 0$. *Jika fungsi* ρ *dan* ϕ *memenuhi*

$$\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}\, dt \leq C\, \phi(r)^{\frac{p}{q}-1}$$

Untuk setiap $r > 0$, *maka*

$$\int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} d\mu(y) \leq C\phi(R)^{\frac{p}{q}-1} \tag{4.4}$$

Dan untuk sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \chi_{B(x,r)}(y)dy \leq CM\chi_{B(x,r)}(x)\ \phi(R)^{\frac{p}{q}-1} \qquad (4.5)$$

Bukti. Misalkan $B(x,r)$ adalah sebarang bola pada $\mathbb{R}^d$. Untuk setiap $y \in B(x,R)$, misalkan $f_1(y) = 1$ dan $f_2(y) = \chi_{B(a,r)}\ (y)$. Kemudian, substitusi f_1 dan f_2 ke ketaksamaan lema 4.8.

Untuk $f_1(y) = 1$ disubstitusikan ke ketaksamaan lema 4.8.

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&+ \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&= \int_{|x-y|<\frac{1}{4}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&+ \int_{\frac{1}{4}R\leq|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&+ \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R\leq|x-y|<\frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^jR\leq|x-y|<2^{j+1}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{|x-y|<2^{j+1}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ |f(y)|\ d\mu(y)
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, 1 \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j R)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} 1 \, \rho(|x-y|) \, d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j R)} \, \rho^*(2^{j+1}R) \int_{B(x,2^{j+1}R)} 1 \, d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{k_1 2^{j+1}R}^{k_2 2^{j+1}R} \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{0}^{k_2 R} \chi_{[k_1 2^{j+1}R, k_2 2^{j+1}R]}(t) \, \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C \int_{0}^{k_2 R} \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \chi_{[k_1 2^{j+1}R, k_2 2^{j+1}R]}(t) \right) \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C \left(1 + \log_2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right) \right) \int_{0}^{k_2 R} \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C \, \phi(k_2 R)^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\leq C \, \phi(R)^{\frac{p}{q}-1}$$

Untuk $f_2(y) = \chi_{B(a,r)}(y)$ disubstitusikan ke ketaksamaan lema 4.8.

$$I_2(x) = \int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, |f(y)| \, d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{2}R\le|x-y|<R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$=\int_{|x-y|<\frac{1}{4}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{4}R\le|x-y|<\frac{1}{2}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$+\int_{\frac{1}{2}R\le|x-y|<R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^j}R\le|x-y|<\frac{1}{2^{j+1}}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{2^jR\le|x-y|<2^{j+1}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{|x-y|<2^{j+1}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{B(x,2^{j+1}R)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,|f(y)|\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{B(x,2^{j+1}R)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\,\chi_{B(a,r)}(y)\,d\mu(y)$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2^jR)}\int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)}\chi_{B(a,r)}(y)\,\rho(|x-y|)\,d\mu(y)$$

$$\le C\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2^jR)}\,\rho^*(2^{j+1}R)\int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)}\chi_{B(a,r)}(y)\,d\mu(y)$$

$$\le C\,M\chi_{B(a,r)}(y)\sum_{j=-\infty}^{-1}\int_{k_12^{j+1}R}^{k_22^{j+1}R}\frac{\rho(t)}{t}\,dt$$

$$\leq C\, M\chi_{B(a,r)}(y) \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{0}^{k_2 R} \chi_{[k_1 2^{j+1}R, k_2 2^{j+1}R]}(t)\ \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq CM\chi_{B(a,r)}(y) \int_{0}^{k_2 R} \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \chi_{[k_1 2^{j+1}R, k_2 2^{j+1}R]}(t) \right) \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C\, M\chi_{B(a,r)}(y) \left(1 + \log_2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right) \int_{0}^{k_2 R} \frac{\rho(t)}{t} dt$$

$$\leq C\, M\chi_{B(a,r)}(y)\ \phi(k_2 R)^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\leq C\, M\chi_{B(a,r)}(y)\ \phi(R)^{\frac{p}{q}-1}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan teorema 4.6, lema 4.8 dan akibat 4.9 akan dibuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk I_ρ pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Ketaksamaan tersebut diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.8. *Misalkan* $1 \leq p < q < \infty$. *Asumsikan bahwa* $\inf_{r>0} \phi(r) = 0$ *dan* $\sup_{r>0} \phi(r) = \infty$. *Jika fungsi* ϕ *dan* ρ *memenuhi*

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C\, \phi(r)^p \text{ dan } \phi(r) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\, \phi(r)^{\frac{p}{q}}$$

untuk setiap $r > 0$, *maka untuk sebarang fungsi* $f \in L^{p,\phi}(\mu)$ *dan sebarang bola* $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ *berlaku*

$$\mu\left(\left\{x \in B(a,r) :\ \left|I_\rho f(x)\right| > \gamma\right\}\right) \leq C\, r\phi(r)^p \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}\mu}}{\gamma}\right)^q$$

untuk setiap $\gamma > 0$.

Bukti. Tinjau sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Untuk setiap $x \in B(a,r)$, misalkan

$I_1(x) = \int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y)$ dan $I_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y)$

Untuk sebarang $R > 0$ yang tertentu. Dengan menggunakan dekomposisi dipartisi, kondisi growth dari fungsi ρ, ketaksamaan Holder, kondisi growth dari μ, definisi dari $\|f\|_{L^{P,\mu}(\mu)}$ dan kondisi doubling dari ϕ, diperoleh

$$
\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \backslash B(x,R\}} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) \\
&\leq \int_{|x-y| \geq 2r} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) \\
&= \int_{|x-y|>4r} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) + \int_{4r>|x-y|\geq 2r} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j R \leq |x-y| < 2^{j+1} R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R) \backslash B(x,2^j R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(B,2^{j+1}R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, |f(y)| \, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \rho(|x-y|) \, |f(y)| d\mu(y) \\
&\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)} \rho * \left(2^{j+1} R\right) \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| \, d\mu(y) \\
&\leq C \, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^*\left(2^{j+1} R\right)}{(2^j R)} \, \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| \; d\mu(y) \\
&\leq C \, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^*\left(2^{j+1} R\right)}{(2^j R)} \left(\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p \; d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\mu\left(B\left(x, 2^{j+1} R\right) \right) \right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$\leq C\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^*(2^{j+1}R)}{(2^j R)} \left(\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p\ d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} (2^{j+1}R)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\ \sum_{j=0}^{\infty} \rho^*(2^{j+1}R) \left(\frac{1}{(2^{j+1}R)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p\ d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^*(2^{j+1}R)\, \phi(2^{j+1}R)$$

$$\leq C\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{k_1 2^{j+1}R}^{k_2 2^{j+1}R} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}\, dt$$

Berdasarkan ketaksamaan 4.2 dan kondisi doubling dari fungsi ϕ, diperoleh

$$|I_2(x)| \leq C\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2k_1R}^{\infty} \chi_{[k_1 2^j R, k_2 2^j R]}(t)\, \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}\, dt$$

$$= C\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \int_{2k_1R}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \chi_{[k_1 2^j R, k_2 2^j R]}(t) \right) \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}\, dt$$

$$\leq C\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \left(1 + \log_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \right) \int_{2k_1R}^{\infty} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}\ dt$$

$$\leq C\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \phi(2k_1R)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq C_3\ \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \phi(R)^{\frac{p}{q}}$$

Untuk setiap $\gamma > 0$, misalkan $\tilde{\gamma} = \left(\frac{\gamma}{2C_3 \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}} \right)^{\frac{q}{p}}$. Karena fungsi ϕ memenuhi $\inf_{r>0} \phi(r) < \tilde{\gamma} < \sup_{r>0} \phi(r)$, maka terdapat $k_0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga untuk suatu $R_1, R_2 \in [2^{k_0}, 2^{k_0+1}]$ berlaku

$$\phi(R_1) \leq \tilde{\gamma} \leq \phi(R_2)$$

Karena R_1 dan R_2 memenuhi $\frac{1}{2} \leq \frac{R_1}{R_2} \leq 2$, maka terdapat suatu konstanta $C > 0$ sedemikian hingga $\phi(R_2) \leq C\phi(R_1)$. Akibatnya,

$$\phi(R_1) \leq \tilde{\gamma} \leq C\phi(R_2) \tag{4.6}$$

Oleh karena itu, untuk $R = R_1$ dapat diperoleh

$$|I_2(x)| \leq C_3 \, \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)} \rho(R_1)^{\frac{p}{q}} \leq C_3 \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)} \tilde{\gamma}^{\frac{p}{q}} \leq \frac{\gamma}{2}$$

Definisikan $E_\gamma = \{x \in B(a,r) : \; |I_\rho f(x)| > \gamma\}$. Karena untuk setiap $x \in B(a,r)$ berlaku $|I_\rho f(x)| \leq |I_1(x)| + |I_2(x)| \leq |I_1(x)| + \frac{\gamma}{2}$, maka

$$\mu(E_\gamma) \leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r) : \; |I_1(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$

Berdasarkan ketaksamaan Holder dan ketaksamaan 4.4, diperoleh

$$|I_1(x)| \leq \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_4 \phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan terakhir dan ketaksamaan Chebyshev, diperoleh

$$\mu(E_\gamma) \leq \mu\left\{x \in B(a,r) : \; \int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \; |f(y)|^p d\mu(y) \right.$$

$$\left. > \frac{(\gamma/2)^p}{C_4^p \phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}}\right\}$$

$$\leq \frac{2^p C_4^p \phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}}{\gamma^p} \int_{B(a,r)} \int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \; |f(y)|^p d\mu(y) d\mu(x)$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p}\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}\int_{\mathbb{R}}\int_{B(x,R_1)}\frac{\rho(|x-y|)|f(y)|^p}{|x-y|}\ \chi_{B(a,r)}d\mu(y)d\mu(x)$$

$$\leq \ \frac{C}{\gamma^p}\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^p\int_{B(y,R_1)}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\ \chi_{B(a,r)}d\mu(y)d\mu(x)$$

Berdasarkan ketaksamaan sebelumnya diperoleh

$$\mu(E_\gamma) \leq \frac{C}{\gamma^p}\ \phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)p}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^p\ \ M\ \chi_{B(a,r)}(y)d\mu(y)$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p}\tilde{\gamma}^{\frac{p^2}{q}-p}r\phi(r)^p\|f\|^p_{L^{p,\phi}(\mu)}$$

$$\leq Cr\phi(r)^p\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q \qquad \square$$

Yang merupakan ketaksamaan yang diinginkan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian pada bab sebelumnya, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum terhadap ruang Morrey tak homogen yang diperumum melalui cara ketaksamaan chebyshev yaitu $\mu\left(E_{\gamma}\right) \leq Cr\phi(r)^{p}\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^{q}$

5.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya yaitu dengan menggunakan ruang fungsi yang lainnya diantaranya ruang Morrey homogen ataupun lainnya. Penulis juga menyarakan ketaksamaannya bisa juga untuk tipe kuat pada operator integral fraksionalnya dan bisa juga digunakan ketaksamaan-ketaksamaan lainnya untuk bahan penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an Al-Karim, Departemen Agama Republik Indonesia.

Al-Qarni, 'Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta. Qisthi Press.

Bartle, Robert G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Willey & Sans, Inc.

Cohn, Donald L. 2013. *Measure Theory : Second Edition.* Springer Science & Bussiness Media. LLC.

Eridani, H. Gunawan dan E. Nakai. 2004. *On generalized fractional integral operators.* Scientiac Mathematicae Japonicae Online, vol. 10. 307-318.

Eridani, H. Gunawan, E. Nakai dan Y. Sawano. 2014. *Characterizations for the generalized fractional integral operators on Morrey spaces.* Mathematical Inequalities & Applications, vol. 17. No. 2. 761-777

Garcia-Cuerva, J. dan A. Eduardo Gatto. 2018. *Boundedness Properties of Fractional Integral Operators Associated to Non-Doubling Measures.* Mathematics Subject Classification. 1-18

Gunawan, H. 2003. *A note on the generalized fractional integral operators.* Bandung: Departement of Mathematics. ITB.

Gunawan, H., Sihwaningrum, I. 2016. *A weak-(p, q) Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey spaces via Hedberg Type Inequality*. JMP, vol.8. no.2. p. 103-108.

Hakim, Denny Ivanal, Hendra Gunawan. 2013. *Weak (p, q) Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces of Non-Homogeneous type.* Mathematica Acterna, vol. 3. No. 3. p. 161-168.

Hartanto, Susan. 2014. *Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik atas Ruang Metrik.* ADLN Perpustakaan Universitas Airlangga.

Hidayat, Taufik, Aam A. dan Fahrudin. 2016. *Konsep berpikir (Al-Fikr) dalam Al-Qur'an dan Implikasinya.* Tarbawy. Vol. 3. No. 1

Nakai, E. 2001. *On generalized fractional integrals.* Taiwanese J. Math. 5. 587-607.

Quraish Shibab, M. 2007. *Tafsir Al-Mishbah volume 4: pesan, kesan dan keserasian Al-Qur'an.* Jakarta : Lentera Hati.

Quthb, Sayyid. 2003. *Tafsir Fi Zhilail Qur'an dibawah naungan Al-Qur'an Jilid 4.* Jakarta : gema Insani Press.

Rizqiyah, Anisatur. 2019. *Keterbatasan Operator Integral Fraksioal pada Ruang Morrey Klasik Tak Homogen.*

Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. M. 2010. *Real Analysis Fourth Edition.* Republic of China: Pearson Eduational Asia Limited and China Machine Press.

Sawano, Y. S. Sugano dan H. Tanaka. 2009. *A Note on Generalized Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces.* Hindawi Publishing Corporation. 1-18.

Sawano, Y., Fazio, dan Hakim. 2020. *Morrey Spaces: Introduction and Application to Integral Operators and PDE's Volume I.* India:CRC Press.

RIWAYAT HIDUP

Siti Rohmah Azizah lahir di Malang pada 22 Desember 1998, yang biasa dipanggil Ima, bertempat tinggal di Kota Malang, Jawa Timur. Anak semata wayang dari ayah Samain dan ibu Siti Rohmah Azizah. Pendidikan Taman kanak-kanak di tempuh di TK Sabilil Mutadiin dan lulus pada tahun 2005. Kemudian melanjutkan pendidikan dasar di SD Negeri Kesatrian 1 Kota Malang dan lulus pada tahun 2011. Selanjutnya, melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 10 Kota Malang dan lulus tahun 2014. Kemudian melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 2 Kota Malang dan lulus pada tahun 2017. Pendidikan berikutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil program studi Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI UNIVERSITAS
ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Rohmah Azizah
NIM : 17610059
Judul Skripsi : Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	26 Agustus 2021	Setor dan Konsultasi Judul	1.	
2.	30 September 2021	Konsultasi BAB I		2.
3.	16 Oktober 2021	Revisi BAB I	3.	
4.	2 November 2021	Konsultasi dan Revisi Kajian Agama		4.
5.	20 Februari 2022	Konsultasi BAB II	5.	
6.	22 Maret 2022	Revisi BAB II dan Konsultasi BAB III		6.
7.	15 April 2022	Revisi BAB III dan Konsultasi BAB IV	7.	
8.	20 April 2022	ACC Kajian Agama		8.
9.	3 Mei 2022	ACC Bab I, Bab II, dan Bab III	9.	
10.	22 Mei 2022	Revisi Bab IV dab konsultasi BAB V		10.
11.	10 Juni 2022	ACC Bab V	11.	
12.	28 Juni 2022	Revisi semua bab pasca sidang		12.
13	28 Juni 2022	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 29 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005