TITIK-TITIK *ATTRACTING* DAN *REPELLING* PADA HIMPUNAN MANDELBROT

SKRIPSI

OLEH
DEWI KHASANATUL MASYKUROH
NIM. 15610045

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

TITIK-TITIK *ATTRACTING* DAN *REPELLING* PADA HIMPUNAN MANDELBROT

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
DEWI KHASANATUL MASYKUROH
NIM. 15610045

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

TITIK-TITIK *ATTRACTING* DAN *REPELLING* PADA HIMPUNAN MANDELBROT

SKRIPSI

Oleh
Dewi Khasanatul Masykuroh
NIM. 15610045

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 22 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Juhari, M.Si	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19840209 20160801 1 055	NIDT 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

TITIK-TITIK *ATTRACTING* DAN *REPELLING* PADA HIMPUNAN MANDELBROT

SKRIPSI

Oleh
Dewi Khasanatul Masykuroh
NIM. 15610045

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Ujian Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika

Tanggal 22 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji I	: Hisyam Fahmi, M.Kom	....
Anggota Penguji II	: Juhari, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Dewi Khasanatul Masykuroh
NIM	: 15610045
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Titik-Titik *Attracting* Dan *Repelling* Pada Himpunan Mandelbrot

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL E68F8AJX737037369

Dewi Khasanatul M
NIM. 15610045

MOTO DAN PERSEMBAHAN

"Raihlah ilmu dan untuk meraih ilmu belajarlah tenang dan sabar"
(Umar bin Khattab)

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Masykur, Ibu Uswatun Khasanah tercinta, dan Suami Penulis yang tak putus-putus memberikan doa, dukungan baik secara fisik maupun psikis, semangat, motivasi serta bimbingannya agar penulis bisa menempuh jalan yang selalu di ridhoi Allah SWT dan menjadi seseorang yang tidak lupa akan sholawat kepada Nabi Muhammad Saw sebagai pengikutnya.Tak lupa Adik penulis, yang selalu memberi semangat yang dengan candaanya bisa menghibur serta membangkitkan semangat penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT. Atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan proposal skripsi yang berjudul " Orbit Fraktal Pada Himpunan Mandelbrot". Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang yakni agama Islam. Semoga penulis dan pembaca tergolong sebagai orang-orang yang mendapat syafaat kelak di hari kiamat, aamiin.

Dalam selesainya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah mendukung dan Membantu secara langsung maupun tidak langsung, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang ditujukan:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. M Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
6. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku sebagai Penguji Utama dalam Ujian Skripsi.
7. Hisyam Fahmi,M.Kom selaku sebagai Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi.
8. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah sabar dan ikhlas dalam mendidik dan memberikan ilmu serta bimbinganya kepada penulis.

9. Ayahhanda,Ibu dan suami serta adik tercinta yang selalu memberikan doa dan dukungan, semangat dan motivasi kepada penulis saat ini.
10. Seluruh teman-teman penulis kampus yang dengan serta merta memberikan dukungan, bantuan, serta motivasi kepada penulis sehingga skripsi ini bisa terselesaikan dengan baik.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Program Studi Matematika.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 22 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

M	: Himpunan Mandelbrot
$\mathbb{C}$	: Bilangan Kompleks
z_0	: Titik awal dari Himpunan Mandelbrot
n	: Bilangan Asli
$f(z)$	: Fungsi himpunan Mandelbrot
D	: Suatu daerah persekitaran pada himpunan Mandelbrot
$P_c(z)$	: Polinomial atas bilangan kompleks

ABSTRAK

Khasanatul M, Dewi. 2022. **Titik-titik *Atracting dan Repelling* Pada Himpunan Mandelbrot.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Juhari, M.Si., (II) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: himpunan Mandelbrot, *attracting, repelling,*

Himpunan mandelbrot ini menggunakan persamaan $z = z^2 + c$, di mana z dan c adalah bilangan kompleks. Nilai c tergantung pada parameter masukan x dan y, yaitu $cx = 0$ dan $cy = 0$.Penelitian ini menguji titik-titik yang berada pada lingkaran di dalam daerah himpunan Mandelbrot di ruang kompleks yang memperlihatkan orbit fraktalnya. Dengan nilai $c = -0.5 + 0.2i$ untuk lingkaran dengan titik pusat (0,0) jari-jari 0.5. Hasil dari iterasi ini akan membentuk orbit yang *attracting* atau *repelling.* Pada penelitian ini menghasilkan semua titik-titik pada lingkaran membentuk orbit yang akan selalu berada dalam daerah himpunan Mandelbrot yaitu *attracting*.

ABSTRAC

Khasanatul M, Dewi. 2022. **Attracting and Repelling in the Mandelbrot Set**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Juhari, M.Si., (II) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Mandelbrot set, attracting, repelling, orbit.

This Mandelbrot set uses the equation $z = z^2 + c$, where z and c are complex numbers. The value of c depends on the input parameters x dan y, namely $cx = 0$ and $cy = 0$. This study examines the points on the circle in the region of the Mandelbrot set in complex space showing their fractal orbits. with a value of $c = -0.5 + 0.2i$. For a circle with center (0,0) radius 0.5. The result of this iteration will form an attracting or repelling orbit. In this study, all points on the circle form orbits that will always be in the area of the Mandelbrot set, namely attracting

مستخلص البحث

حسنةالمشكورة، ديوي .٢٠٢٢ .مدارات كسورية(Mandelbrot قسم الرياضيات، كلية العلوم في مجموعة ماندلبروت).والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ .ا المشرف: (١) جوهري، الماجستير، الماجستير. (٢) محمد نافع جوهري، الماجستير

الكلماة الرئيسية: مجموعة Mandelbrot ، attracting، repelling.

مجموعة ماندلبرو هذه تستخدم المعادلة $z = z^2 + c$ ، حيث z و c هما أعداد معقدة .تعتمد قيمة c على معلمات الإدخالy dan x ، أي $cx = 0$ و $cy = 0.$ تبحث هذه الدراسة في النقاط الموجودة على الدائرة في منطقة Mandelbrot الموجودة في الفضاء المعقد والتي تُظهر مدارها الكسوري .بقيمة c = -0.5 + 0. لدائرة ذات نصف قطر مركزي 0,5. (0,0) ستتشكل نتيجة هذا التكرار مدارًا جاذبًا أو طاردًا .في هذه الدراسة، جميع النقاط على شكل دائرة المدارات التي ستكون دائمًا في منطقة مجموعةMandelbrot ، وهيالجذب.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Negara Indonesia mengalami kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi yang cukup pesat oleh karena itu sangat memungkinkan terjadinya sebuah inovasi. Dengan datangnya inovasi tersebut juga mencerminkan kualitas sumber daya manusia bangsa Indonesia yang mempunyai daya saing dan unggul. Karena sudah berfikir secara kreatif tentang cara menghasilkan sesuatu yang kreatif dan tetap mengangkat warisan budaya negara Indonesia. Cabang ilmu yang bisa digunakan mengembangkan kreatifitas tersebut adalah fraktal. Fraktal adalah cabang dalam matematika dan seni. Banyak yang mengenal fraktal karena gambar-gambar yang dihasilkan menarik.

Allah SWT berfirman di dalam Al-Qur'an Surat Thaha ayat 114, yang artinya :

"Maka Maha Tinggi Allah Raja yang sebenar-benarnya, dan janganlah kamu tergesa-gesa membaca Al-Qur'an sebelum disempurnakan mewahyukannya kepadamu, dan katakanlah: " Ya Tuhanku, tambahkanlah kepadaku ilmu pengetahuan".

Ayat di atas memberitahukan bahwa Allah yang Mahatinggi, Mahabesar amat luas Ilmu-Nya yang dengan Ilmu-Nya itu Dia mengatur segala sesuatu dan membuat peraturan-peraturan yang sesuai dengan kepentingan makhluk-Nya, tidak terkecuali peraturan-peraturan untuk keselamatan dan kebahagiaan umat manusia. Maka dari itu tuntutan mencari ilmu adalah kewajiban semua makhluk terutama menuntut ilmu matematika.

Pada tahun 1975, Benoit Mandelbrot memperkenalkan fraktal untuk pertama kali dalam bukunya yang berjudul *A Theory of Fractal Sets*. Secara umum, fraktal dapat dikatakan sebagai suatu teknik pembangkitan citra atau gambar dengan cara melakukan iterasi pada suatu fungsi tertentu (Peitgen,Jurgens. 1992). Pada himpunan Mandelbrot terdapat dua tipe batas orbit yaitu *attracting* dan *repelling*. Suatu titik orbit dikatakan *attracting*, jika titik orbit nya berada di dalam himpunan Mandelbrot. Sebaliknya suatu titik orbit dikatakan *repelling*, jika titik orbitnya di luar himpunan Mandelbrot.

Penelitian ini merupakan perkembangan dari penelitian Andi Niswar (2017) yang membahas tentang kumpulan titik-titik yang berada dalam daerah himpunan Julia di ruang kompleks yang memperlihatkan sebuah algoritma untuk membangkitkan fraktal pada himpunan Julia. Himpunan Julia di bentuk dengan persamaan $Z_n = Z_{n+1}^2 + c$ di mana Z_n dan c adalah bilangan kompleks dengan iterasi ke-n. Nilai c bergantung pada x dan y, yaitu $c = x + yi$, nilai c selalu tetap untuk setiap iterasi. (Andi, Niswar. 2017)

Tedjo Darmanto (2009) yang sudah melakukan penelitian tentang memodelkan objek fraktal dengan model IFS *(Iterad Function System)* berdasarkan transformasi Affine. Efek rotasi objek yang menyerupai bintang dari fraktal IFS dapat dijalankan melalui metode animasi metamorfik sebagai pengganti operasi rotasi Affine pada metode animasi non metamorfik.

Rahmatillah Agustina (2016) yang sudah melakukan penelitian tentang menggambar motif batik gajah oling Banyuwangi menggunakan fraktal untuk memperbanyak motif batik. Dengan penerapan fraktal diharapkan dapat menambahkan keindahan dari seni batik sehingga menambah nilai jual batik.

Penelitian ini membahas kumpulan titik-titik yang berada dalam daerah pada lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5 *attracting* atau *repelling* pada himpunan fraktal Mandelbrot yang memperlihatkan orbit fraktalnya. Himpunan mandelbrot ini menggunakan persamaan $z = z^2 + c$, di mana z dan c adalah bilangan kompleks. Nilai c tergantung pada parameter masukan x dan y, yaitu $cx = 0$ dan $cy = 0$ dengan nilai $c = -0.5 + 0.2i$. Sehingga hasil dari iterasi ini menghasilkan orbit yang terbatas pada fraktal mandelbrot.

Fokus dalam penelitian ini yaitu untuk menghitung orbit fraktal pada himpunan Mandelbrot dengan menggunakan iterasi bilangan kompleks.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah apakah semua titik pada lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5 *attracting* atau *repelling* pada himpunan Mandelbrot ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui semua titik pada lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5 *attracting* atau *repelling* pada himpunan Mandelbrot.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai referensi atau bahan rujukan dengan bantuan komputer, diperoleh prosedur baru dalam menentukan orbit fraktal.

1.5 Batasan Masalah

Untuk membatasi masalah agar sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan dalam mengerjakan, penelitian ini menggunakan fungsi $f(z) = z^2 + c$ dengan nilai parameter $c = -0.5 + 0.2i$ dan titik yang akan di uji adalah titik-titik pada lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5 pada himpunan Mandelbrot.

1.6 Definisi Istilah

1. Mandelbrot set adalah himpunan dari bilangan kompleks c yang digunakan sebagai fungsi $f(z) = z^2 + c$ tidak menyimpang ketika iterasi dari $z = 0$,yaitu, urutan dari $f(0), f\left(f(0)\right), \ldots$ tetap dibatasi dalam nilai absolut.
2. Iterasi adalah suatu pengulangan suatu proses secara berulang – ulang dalam matematika iterasi di lakukan dengan mengoperasikan suatu fungsi, kemuadian hasil dari fungsi tersebut di masukkan lagi ke fungsi sebelumnya.
3. Orbit fraktal adalah orbit dari suatu $z_0 \in \mathbb{C}$ atau fungsi $f(z)$ membentuk suatu urutan bilangan $\{z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f^2(z_0$),..., $z_n = f^n(z_0$),...$\}$.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Definisi Orbit Fraktal dan Teorema Terkait Fraktal

Fungsi $f(z)$ titik awal z_0 yang kemudian membentuk suatu urutan bilangan $\{z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f^2(z_0\ ),..., z_n = f^n(z_0\ ),...\}$ disebut sebagai orbit dari z_0 untuk fungsi $f(z)$. Terdapat dua tipe orbit yaitu orbit *fixed point* dan orbit *periodic point*. Fungsi f dikatakan orbit *fixed point* jika ada titik z_0 sedemikian sehingga $(z_0) = z_0$. Misalkan z_0 adalah *fixed point*, maka

$$f^2(z_0) = f\big(f(z_0)\big) = f(z_0) = z_0$$

Sehingga akan membentuk orbit $\{z_0\ , z_0\ , z_0\ , z_0\ , \dots , z_0\ , \dots\}$

Fungsi f dikatakan orbit *periodic point* jika ada titik z_0 sedemikian sehingga

$$f^n(z_0\ ) = z_0, \text{untuk suatu n } > 0.$$

Orbit dari z_0 dapat juga di katakan sebagai n-*cycle*. Misalkan z_0 adalah *periodic point* dari periode ke-n , maka orbitnya dapat di tuliskan sebagi berikut $\{z_0, f(z_0\ ), \dots , f^n(z_0\ ), z_0, f(z_0\ ), \dots , f^{n+1}(z_0\ ), z_0, \dots\}$ (Andi, Niswar. 2017)

Di mana :

f : Fungsi himpunan Mandelbrot

z_0 : Titik awal dari himpunan Mandelbrot

n : Bilangan asli

- ***Attracting Fixed Point* dan *Repelling Periodic Point***

Titik z_0 dikatakan *attracting fixed point* terhadap f jika z_0 berada dalam daerah persekitaran D. Jika $z \in D$, maka $f^n(z) \in D, n > 0$ dan $f^n(z) \rightarrow z_0$, $n \rightarrow \infty$. Titik z_0 dikatakan *repelling fixed point* pada f jika z_0 tidak berada dalam

daerah persekitaran D, $z \in D$, maka $f^n(z) \notin D$ untuk suatu $n > 0$. (Andi, Niswar. 2017)

Dimana :

D : suatu daerah persekitaran pada himpunan Mandelbrot.

n : Bilangan Asli

Teorema 1.

Diberikan $f(z)$ memiliki titik z_0, maka z_0 *attracting* , jika $|f'(z_0)| < 1$, dan *repelling* jika $|f'(z_0)| > 1$. Jika $|f'(z_0)| = 1$, maka z_0 dikatakan netral. Jika z_0 titik periodik dengan periode n untuk (z) , maka z_0 adalah *fixed point* untuk $f^n(z)$. (D.Oliver. 1997)

2.1.2 Definisi Fraktal Mandelbrot

Himpunan Mandelbrot adalah himpunan $M = \{ c \in \mathbb{C} \mid \exists\, s \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, | (P_c^n(0)| \leq s)$ dimana $P_c^n(z)$ adalah pengulangan dari $P_c(z)$. Dengan $P_c(z)$ adalah suatu polinomial atas $\mathbb{C}$.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Fenomena yang terjadi pada abad ke-7 M, Adalah Suatu fenomena Matahari bergerak dengan kecepatan 720.000 km/jam menuju bintang Vega dalam orbit yang dikenal sebagai Solar Apex.

Artinya, matahari menempuh jarak sekitar 17.280.000 km dalam sehari. Bersamaan dengan matahari, semua planet dan satelit dari sistem gravitasi matahari juga bergerak sejauh ini. Lebih jauh lagi, semua bintang di alam semesta berada dalam gerakan terencana yang sama.

Fenomena tersebut sudah disebutkan pada Al-Qur'an. Dalam Al-Qur'an disebutkan matahari dan bulan masing-masing bergerak dalam orbit atau garis edar tertentu.`

Simak firman Allah SWT dalam surah Al-Anbiya [21] ayat 33:

"*Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya*."

Menurut Quraish Shihab (Al-Misbah) maksud dari ayat di atas menjelaskan Allahlah yang menciptakan malam, siang, matahari dan bulan. Semua itu berjalan pada tempat yang telah ditentukan Allah dan beredar pada porosnya masing-masing yang tidak akan pernah melenceng dari garis edarnya. Masing-masing benda langit mempunyai poros dan garis edar sendiri-sendiri. Semua benda langit itu tidak pernah kenal diam, tetapi terus beredar pada garis edarnya yang disebut orbit. Kenyataan ini tampak jelas terlihat pada matahari dan bulan. Demikian halnya dengan peredaran bumi pada porosnya menjadikan siang dan malam datang silih berganti seolah-olah beredar pula.

Salah satu contohnya adalah dengan menghitung orbit fraktal pada himpunan Mandelbrot. Dengan adanya perhitungan tersebut maka kita bisa mengetahui bahwa pada himpunan Mandelbrot memiliki banyak titik yang berada pada garis edarnya.

2.3 Kajian Topik dan Teori Pendukung

2.3.1 Himpunan Mandelbrot

Himpunan Mandelbrot adalah himpunan titik-titik pada bidang kompleks. Untuk membangun himpunan Mandelbrot, kita menggunakan algoritma berdasarkan rumus iterasi:

$$\boldsymbol{Z_n = Z_{n-1}^2 + C}$$

Dimana :

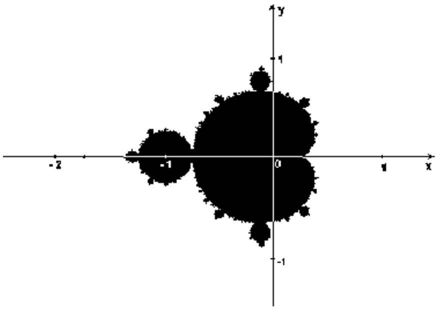
$\boldsymbol{Z_n}$ **:** Sebuah titik pada himpunan Mandelbrot

c : Parameter bilangan kompleks yang sudah di tentukan

Memisahkan poin dari bidang kompleks menjadi dua kategori:

- titik di dalam himpunan Mandelbrot,
- titik di luar himpunan Mandelbrot

Gambar di bawah menunjukkan sebagian dari bidang kompleks. Titik himpunan Mandelbrot adalah yang bewarna hitam



Gambar 2. 1 Contoh Plot Himpunan Mandelbrot

2.3.2 Orbit Farktal Mandelbrot

Fraktal Mandelbrot didapatkan dengan melakukan iterasi atas fungsi berikut :

$$\boldsymbol{Z_n = Z_{n-1}^2 + c}$$

Dengan z dan c adalah bilangan kompleks. Berdasarkan fungsi di atas, iterasi dimulai dengan menghitung nilai z_1 berdasarkan nilai c sembarang yang mewakili suatu titik kompleks $c = x + iy$ yang diuji. (Stevens,Roger.T.1990)

Untuk setiap titik kompleks $c = x + iy$ dilakukan iterasi untuk menghitung z_0, z_1, z_2 dan seterusnya. Iterasi dilakukan sampai mendapatkan suatu kondisi bahwa $|z_n| \geq batas\ divergensi$, atau iterasi telah mencapai cacah iterasi maksimum yang diinginkan. Nilai awal z_n dapat dipilih antara $z_0 = 0$ atau$z_0 = c$. Jika iterasi dimulai dengan mengambil $z_0 = 0$, yang berarti $z_1 = c$, maka diperlukan suatu itarasi tambahan dibandingkan apabila dipilih $z_0 = c$. Jika proses itarasi dipilih $z_0 = 0 + i0$, maka nilai-nilai $z_n$berikutnya adalah :

$z_1 = c$

$z_2 = c^2 + c$

$z_3 = (c^2 + c)^2 + c$

$z_4 = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \; dan \; seterusnya$

Jika pada suatu titik iterasi $x + iy$ setelah iterasi dilakukan terdapat kondisi bahwa $|z_n| \geq batas \; divergensi$, maka nilai $z_n$akan membesar menuju tak berhingga, dan titik iterasi $x + iy$ tersebut akan berada di luar daerah Mandelbrot. Sebaliknya jika setelah iterasi didapatkan nilai $|z_n| < batas \; divergensi$, maka titik $x + iy$ akan berada di dalam daerah Mandelbrot. (Stevens,Roger.T.1990)

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis Penelitian ini adalah kualitatif yang artinya penelitian yang digunakan untuk meneliti pada kondisi fenomena apa yang ditonjolkan pada suatu subjek.

3.2 Tahapan Penelitian

Langkah – langkah pada penelitian ini yaitu :

1. Membuat plot gambar pada himpunan Mandelbrot.
2. Menentukan nilai parameter $c = -0.5 + 0.2i$.
3. Membuat lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5 pada persekitaran himpunan Mandelbrot.
4. Membuktikan bahwa semua titik yang berada pada lingkaran adalah *repelling* atau *attracting* dengan himpunan Mandelbrot.
5. Selanjutnya memberi contoh perhitungan dari titik-titik yang di ambil di persekitaran himpunan himpunan Mandelbrot dan memberi kesimpulan.

BAB IV

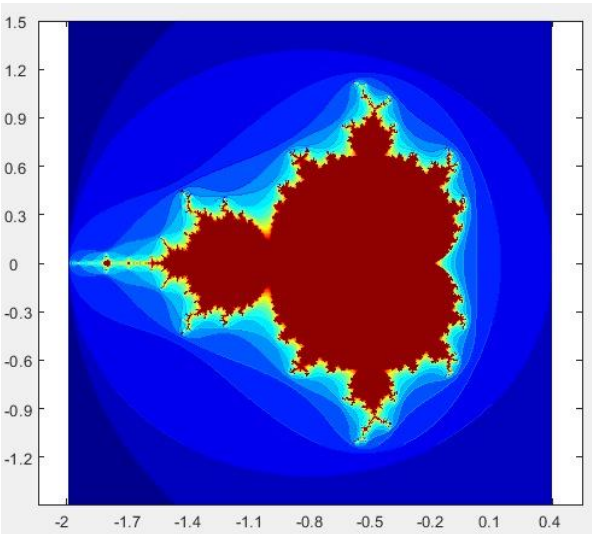
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV ini akan diberikan pemaparan mengenai hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan oleh peneliti saat melakukan penelitian, pada himpunan Mandelbrot. Penjelasan yang diberikan merupakan menjabaran dari rumusan masalah yang ada dengan melalui tahapan-tahapan sebagai berikut :

4.1 Membuat Plot dari Persamaan Himpunan Mandelbrot

Dengan persamaan himpunan Mandelbrot $z = z^2 + c$, dimana z dan c adalah bilangan kompleks. Nilai c tergantung pada parameter masuk kan x dan y, yaitu $cx = 0$ dan $cy = 0$ dengan nilai $c = 0.5 + 0.2i$. sehingga hasil dari iterasi ini menghasilkan orbit yang terbatas pada fraktal mandelbrot.

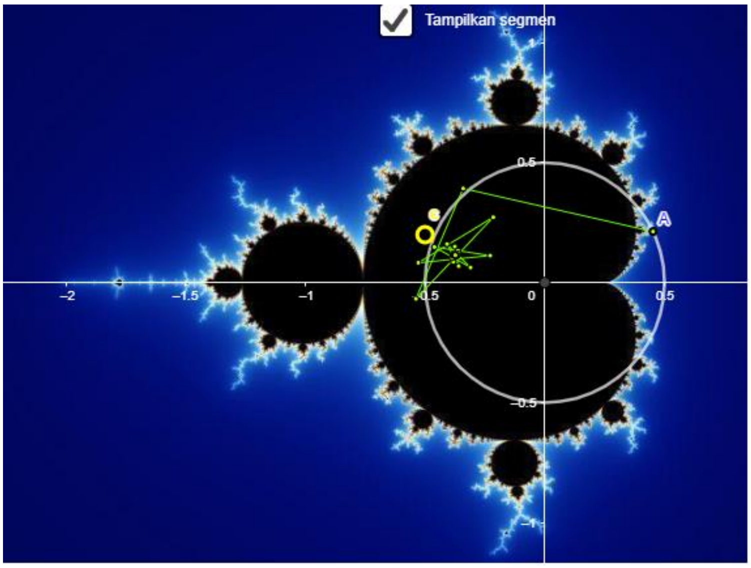
Hasil dari persamaan mandelbrot di atas dengan nilai parameter $c = 0.5 + 0.2i$ menghasilkan gambar sebagai berikut.



Gambar 4.1 Hasil Plot Himpunan Mandelbrot

4.2 Membuat Sebuah Lingkaran di Persekitaran Himpunan Mandelbrot

Setelah membuat plot himpunan mandelbrot, maka peneliti membuat lingkaran dengan titik pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5 menghasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 4.2 Membentuk Lingkaran Pada Himpunan Mandelbrot

4.3 Membuktikan Semua Titik Pada Lingkaran *Attracting* atau *Repelling* Pada Himpunan Mandelbrot.

Dari hasil lingkaran yang di peroleh dengan titik pusat (0,0) dan jari-jari 0.5, selanjutnya dengan memandang pada Teorema 1 Maka bisa di buktikan bahwa :

a. Pembuktian *attracting*

$$f(z) = z^2 + c$$

$$|f'(z_0)| = |2z_0|$$

Dengan nilai parameter $c = -0.5 + 0.2i$,maka bisa menentukan nilai $z_0 = 0.25$.

$$|f'(z_0)| = |2z_0|$$

$$\left|f'^{(z_0)}\right| = |2||0.25|$$

$$|f'(z_0)| = |0.5|$$

$$|f'(z_0)| < 1$$

Maka terbukti bahwa semua titik pada lingkaran dengan titik pusat (0,0) dan jari-jari 0.5 adalah *attracting* pada himpunan Mandelbrot. Jika dibuktikan dengan perhitungan manual dengan titik yang diambil :

Titik 1 = (0.25 , 0.25) , Titik 2 = (-0.25, 0.25) , Titik 3 = (-0.25, -0.25) Titik 4 = (0.25 , -0.25)

Orbit 1 : $z_0 = 0.25 + 0.25i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (0.25 + 0.25i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.5 + 0.33i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.5 + 0.33i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.36 - 0.13i$$

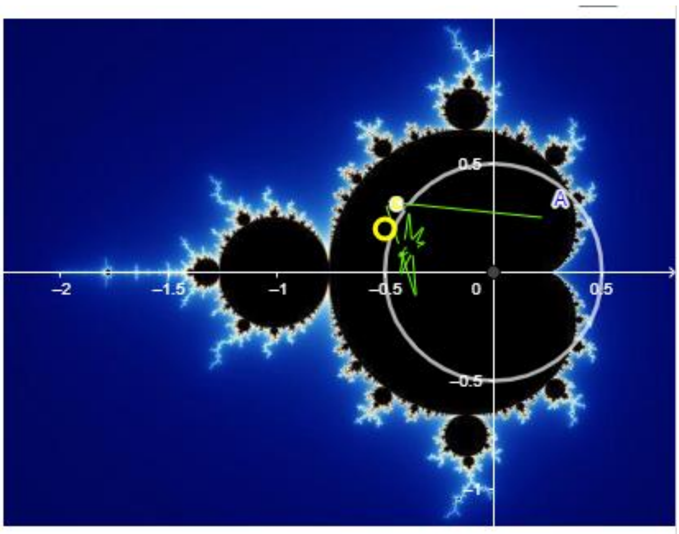
$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.36 - 0.13i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.39 + 0.29i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.39 + 0.29i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.43 - 0.02i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.43 - 0.02i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.31 + 0.22i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$



Gambar 4.3 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit $\boldsymbol{a = 0.25 + 0.25i}$

Orbit 2 : $z_0 = -0.25 + 0.25i,$

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (-0.25 + 0.25i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.5 + 0.08i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.5 + 0.8i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = \ -0.26 + 0.13i$$

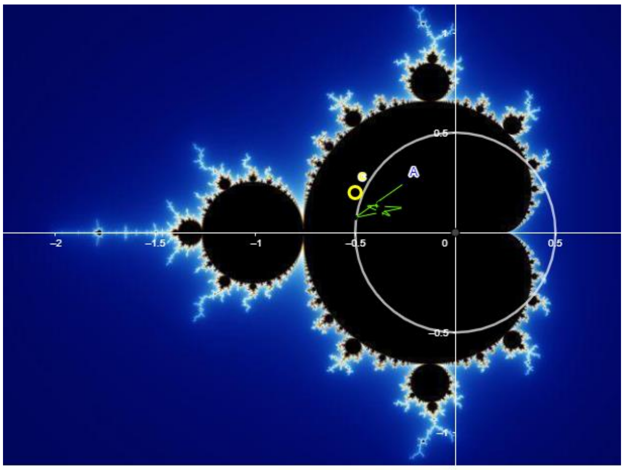
$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.26 + 0.13i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.45 + 0.14i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.45 + 0.14i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.32 + 0.08i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.32 + 0.08i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.41 + 0.15i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.37 + 0.11$$



Gambar 4.4 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit $\boldsymbol{a = -0.25 + 0.25i}$

Tabel 4.1 Orbit 1, Orbit 2 Pada Lingkaran

	Orbit 1		Orbit 2	
	x	Y	x	Y
z_o	0.25	0.25	-0.25	0.25
z_1	-0.5	0.33	-0.5	0.08
z_2	-0.36	-0.13	-0.26	0.13
z_3	-0.39	0.29	-0.45	0.14
z_4	-0.43	-0.02	-0.32	0.08
z_5	-0.31	0.22	-0.41	0.15
z_6	-0.45	0.06	-0.36	0.08
z_7	-0.3	0.15	-0.38	0.14

Tabel 4.2 Lanjutan Orbit 1, Orbit 2 Pada Lingkaran

	Orbit 1		Orbit 2	
	x	Y	x	Y
z_8	-0.43	0.11	-0.38	0.09
z_9	-0.33	0.1	-0.37	0.13
z_{10}	-0.4	0.13	-0.38	0.1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_{50}	-0.37	0.11	-0.37	0.11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_{100}	-0.37	0.11	-0.37	0.11

Orbit 3 : $z_0 = -0.25 - 0.25i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (-0.25 - 0.25i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.5 + 0.33i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.5 + 0.33i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = \ -0.36 - 0.13i$$

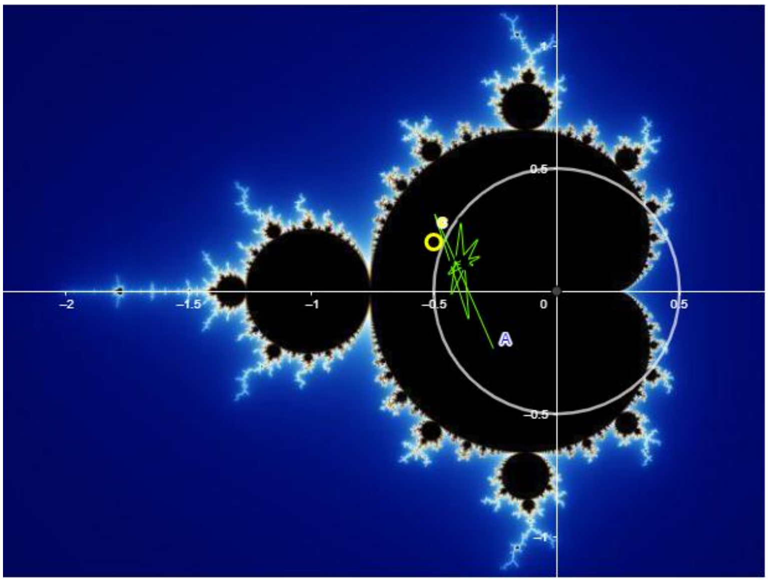
$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.36 - 0.13i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.39 + 0.29i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.39 + 0.29i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.43 - 0.02i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.43 - 0.02i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.31 + 0.22i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = \ -0.37 + 0.11i$$



Gambar 4.5 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit $\boldsymbol{a = -0.25 - 0.25i}$

Orbit 3 : $z_0 = 0.25 - 0.25i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (0.25 - 0.25i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.5 + 0.08i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.5 + 0.08i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.26 + 0.13i$$

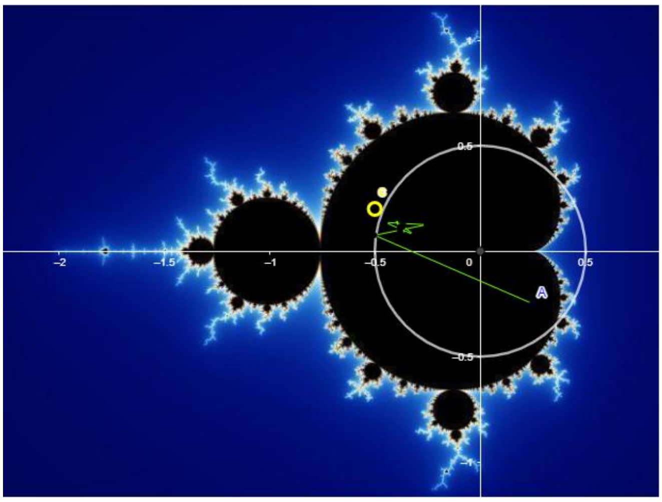
$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.26 + 0.13i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.45 + 0.14i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (\,-0.45 + 0.14i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.32 + 0.08i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.32 + 0.08i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.41 + 0.15i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$



Gambar 4.6 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit $a = 0.25 - 0.25i$

Tabel 4.3 Orbit 3, Orbit 4 Pada Lingkaran

	Orbit 1		Orbit 2	
	x	Y	x	Y
z_o	-0.25	-0.25	0.25	-0.25
z_1	-0.5	0.33	-0.5	0.08
z_2	-0.36	-0.13	-0.26	0.13
z_3	-0.39	0.29	-0.45	0.14
z_4	-0.43	-0.02	-0.32	0.08
z_5	-0.31	0.22	-0.41	0.15
z_6	-0.45	0.06	-0.36	0.08
z_7	-0.3	0.15	-0.38	0.14
z_8	-0.43	0.11	-0.38	0.09
z_9	-0.33	0.1	-0.37	0.13
z_{10}	-0.4	0.13	-0.38	0.1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_{50}	-0.37	0.11	-0.37	0.11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_{100}	-0.37	0.11	-0.37	0.11

Jadi untuk orbit 1, orbit 2, orbit 3,dan orbit 4 menghasilkan tidak menuju tak hingga tetapi konvergen pada titik $z \approx -0.37 + 0.11i$, maka bisa dikatakan bahwa dari keempat orbit tersebut *attracting* pada himpunan Mandelbrot.

Setelah membuktikan teorema pada himpunan Mandelbrot di atas, maka peneliti akan memberi contoh dengan mengambil sebuah titik pada persekitaran himpunan Mandelbrot yaitu $x + iy$, antara lain :

Titik 1 = (-0.4 , 0.5) , Titik 2 = (-0.1, 0.3) , Titik 3 = (-0.11, 0.92)

Titik 4 = (0.31 , -0.04), Titik 5 = (0.36, 0.31), Titik 6 = (-0,08, 0.64).

Orbit 1 : $z_0 = -0.4 + 0.5i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (-0.4 + 0.5i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.59 + 0.2i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.59 + 0.2i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.19 + 0.44i$$

$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-1.19 + 0.44i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.65 + 0.03i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.65 + 0.03i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.07 + 0.16i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.07 + 0.16i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.52 + 0.18i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$

Orbit 2 : $z_0 = -0.1 + 0.3i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (-0.1 + 0.3i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.58 + 0.14i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.58 + 0.14i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.18 + 0.04i$$

$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.18 + 0.04i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.47 + 0.19i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.47 + 0.19i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.32 + 0.03i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.32 + 0.03i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.4 + 0.18i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$

Orbit 3 : $\quad z_0 = -0.11 + 0.92i,$

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (-0.11 + 0.92i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -1.33 - 0i$$

$$z_2 = \quad z_2^2 + c = (-1.33 - 0i)^2 + (0.5 + 0.2i) = 1.28 + 0.21i$$

$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (1.28 + 0.21i)^2 + (0.5 + 0.2i) = 1.1 + 0.73i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (1.1 + 0.73i)^2 + (0.5 + 0.2i) = 0.17 + 1.8i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (0.17 + 1.8i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -3.7 + 0.82i$$

$$\vdots$$

$$Tak\ terhingga$$

Jadi untuk orbit 1, orbit 2 tidak menuju tak hingga tetapi konvergen pada titik $z \approx -0.37 + 0.11i$, maka bisa dikatakan *attracting.* Sedangkan pada orbit 3 menuju tak terhingga (*repelling).* Untuk keragaman titik- titiknya di perlihatkan pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.4 Orbit 1, Orbit 2, Orbit 3 Pada Himpunan Mandelbrot

	Orbit 1		Orbit 2		Orbit 3	
	x	Y	x	Y	x	y
z_o	-0.4	0.5	-0.1	0.3	-0.11	0.92
z_1	-0.59	-0.2	-0.58	0.14	-1.33	0
z_2	-0.19	0.44	-0.18	0.04	1.28	0.21
z_3	-0.65	0.03	-0.47	0.19	1.1	0.73
z_4	-0.07	0.16	-0.32	0.03	0.17	1.8
z_5	-0.52	0.18	-0.4	0.18	-3.7	0.82
z_6	-0.26	0.02	-0.37	0.05	12.54	-5.8
z_7	-0.43	0.19	-0.36	0.16	122.48	-146.8
z_8	-0.35	0.03	-0.39	0.08	$\vdots$	$\vdots$
z_9	-0.38	0.18	-0.35	0.13		
z_{10}	-0.39	0.07	-0.39	0.11		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Tabel 4.5 Lanjutan Orbit 1, Orbit 2, Orbit 3 Pada Himpunan Mandelbrot

	Orbit 1		Orbit 2		Orbit 3	
	x	Y	x	Y	x	y
z_{50}	-0.37	0.11	-0.37	0.11		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
z_{100}	-0.37	0.11	-0.37	0.11		

Orbit 4 : $z_0 = 0.31 - 0.04i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (0.31 - 0.04i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.4 + 0.18i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.4 + 0.18i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.06i$$

$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.37 + 0.06i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.16i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.37 + 0.16i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.39 + 0.08i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.39 + 0.08i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.35 + 0.13i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$

Orbit 5 : $z_0 = 0.36 - 0.31i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (0.36 - 0.31i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.47 + 0.43i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (-0.47 + 0.43i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.46 - 0.2i$$

$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (-0.46 - 0.2i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.32 - 0.38i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.32 + 0.38i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.54 - 0.05i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.54 - 0.05i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.21 + 0.25i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$

Orbit 6 : $z_0 = -0.08 + 0.64i$,

$$z_1 = \quad z_0^2 + c = (-0.08 + 0.64i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = -0.91 + 0.1i$$

$$z_2 = \quad z_1^2 + c = (= -0.91 + 0.1i)^2 + (-0.5 + 0.2i) = 0.32 + 0.02i$$

$$z_3 = \quad z_3^2 + c = (0.32 + 0.02i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.4 - 0.21i$$

$$z_4 = \quad z_4^2 + c = (-0.4 - 0.21i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.38 - 0.03i$$

$$z_5 = \quad z_5^2 + c = (-0.38 - 0.03i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.35 + 0.18i$$

$$\vdots$$

$$z_{100} = \quad z_{100}^2 + c = (-0.37 + 0.11i)^2 + (0.5 + 0.2i) = -0.37 + 0.11i$$

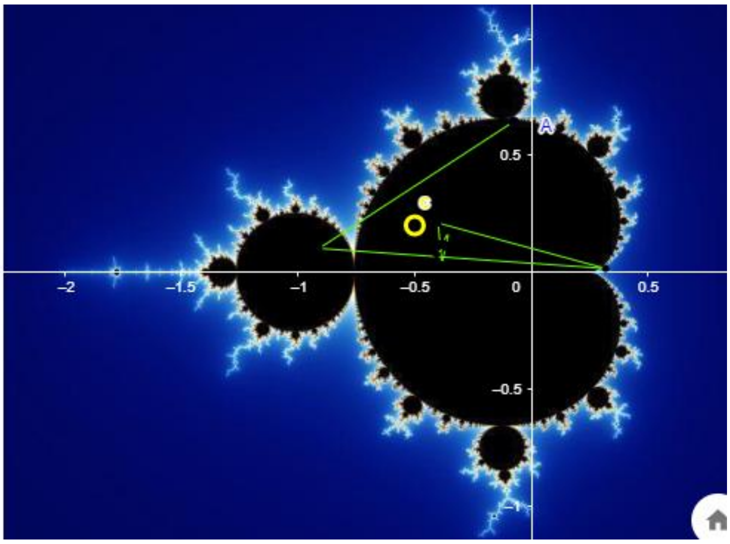
Sedangkan hasil dari orbit 4, orbit 5, dan orbit 6 konvergen pada titik $z \approx -0.37 + 0.11i$ *(attracting)* ditunjukkan pada Table 4.4 di bawah ini.

Tabel 4.6 Orbit 4, Orbit 5, Orbit 6

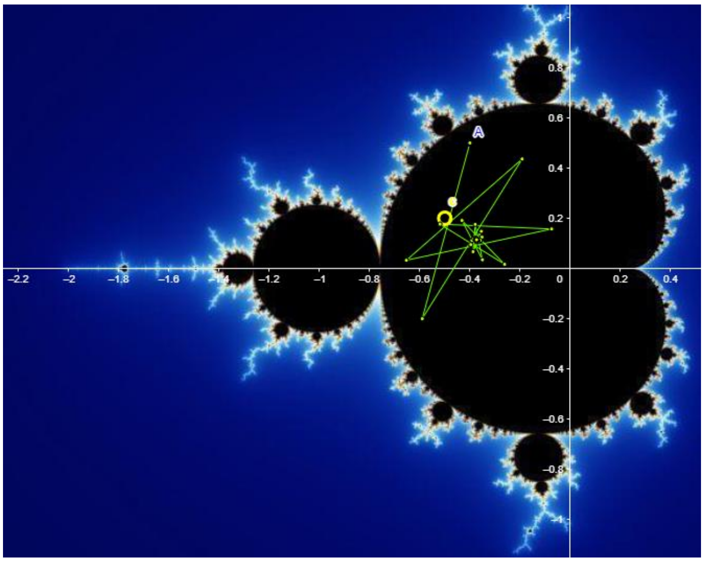
	Orbit 4		Orbit 5		Orbit 6	
	x	Y	x	Y	x	y
z_o	0.31	-0.04	0.36	0.31	-0.08	0.64
z_1	-0.4	0.18	-0.47	0.43	-0.91	0.1
z_2	-0.37	0.06	-0.46.	-0.2	0.32	0.02
z_3	-0.37	0.16	-0.32	0.38	-0.4	0.21
z_4	-0.39	0.08	-0.54	-0.05	-0.38	0.03
z_5	-0.35	0.13	-0.21	0.25	-0.35	0.18
z_6	-0.39	0.1	-0.52	0.09	-0.41	0.08
z_7	-0.36	0.12	-0.24	0.1	-0.34	0.14
z_8	-0.39	0.12	-0.45	0.15	-0.4	0.11
z_9	-0.36	0.11	-0.32	0.06	-0.35	0.11
z_{10}	-0.36	0.12	-0.4	0.06	-0.39	0.12
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_{50}	-0.37	0.11	-0.37	0.11	-0.37	0.11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_{100}	-0.37	0.11	-0.37	0.11	-0.37	0.11

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa fractal himpunan Mandelbrot terdapat orbit yang *attracting* dan *repelling*. Pada Gambar 4.7 di bawah ini memperlihatkan bahwa orbit yang melalui titik-titik di daerah himpunan Manelbrot, dengan titik awal $z_0 = -0.4 + 0.5i$. Sedangkan pada

Gambar 4.8 dengan titik awal $z_0 = -0.1 + 0.3i$ sama-sama konvergen pada titik $z \approx -0.37 + 0.11i$.



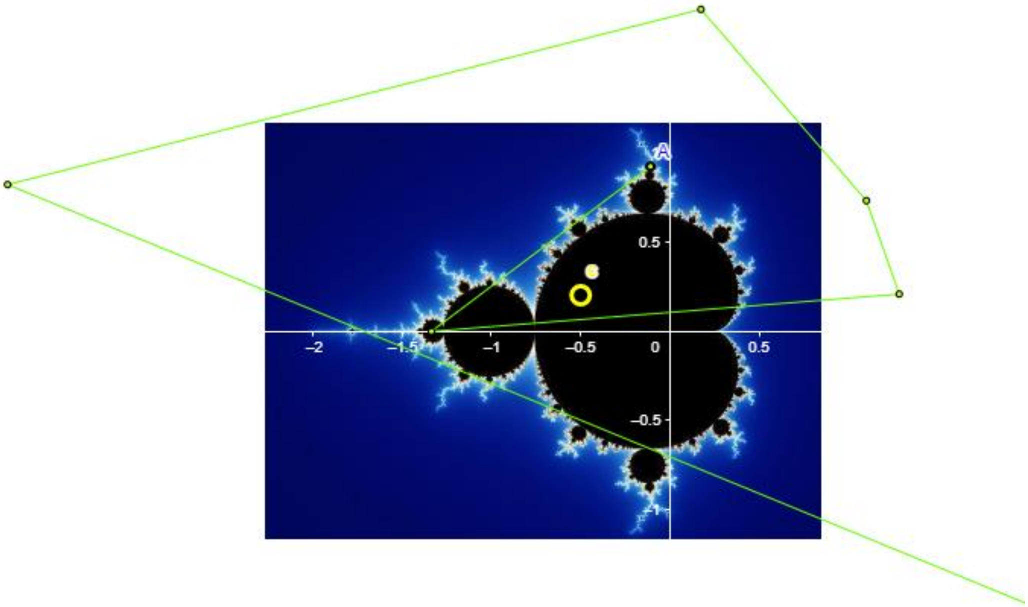
Gambar 4.7 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit $a = -0.4 + 0.5i$



Gambar 4.8 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit Orbit $a = -0.1 + 0.3i$

Sebaliknya, pada Gambar 4.9, memiliki orbit yang *repelling* pada sebuah titik. Sehingga titik – titik tersebut semakin tidak beraturan. Diperlihatkan bahwa orbit fraktal untuk titik awal $z_0 = 0$, dan nilai parameter c adalah $-0.5 + 0.2i$

yang terletak pada himpunan Mandelbrot, maka orbitnya akan selalu konvergen ke sebuah titik dalam himpunan Mandelbrot.



Gambar 4.9 Fraktal Himpunan Mandelbrot, Orbit $a = -0.11 + 0.92i$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian di atas, pada himpunan Mandelbrot terdapat kumpulan dari beberapa titik-titik yang berada dalam batas yaitu *attracting* atau *repelling.* Pada daerah himpunan Mandelbrot bisa di bentuk lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari-jari 0.5.

Dengan adanya bantuan sebuah perhitungan fungsi terhadap himpunan Mandelbrot, maka bisa di ketehui titik- titik orbit pada lingkaran tersebut adalah *attracting* pada himpunan Mandelbrot.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian ini membahas orbit fraktal pada himpunan Mandelbrot. Untuk penelitian selanjutnya di sarankan untuk menghitung orbit fraktal dengan metode lain atau dengan nilai *c* lain atau persamaan limgkaran lain.

DAFTAR PUSTAKA

Avalos-Bock, Stephanie., (2009). *Fraktal Geometry : The Mandelbort and Julia Sets.*

Agustina, Rahmatillah, Rizkin Dari, Rani, Indriani, Elita, (2016). *Geometri fraktal Untuk Re–Desain Motif Batik Gajah Oling Banyuwangi*

D. Oliver. 1997. *Memandang Realita dengan Fractal Vision*. Edisi 1, Cetakan 1. Penerbit Andi, Yogyakarta.

Jaya, Andi Kresna , Aliansa, Niswar. (2017). *Orbit Fraktal Himpunan Julia*. *13*(2), 162–170.

Peitgen, Jürgens, dan Saupe. 1992. Fractal for the classroom part two: Complex system and Mandlebort set. National Council of Teachers of Mathematics, Springer-Verlag.

Darmanto, Tedjo, Suwardi, Iping Supriana, Munir , Rinaldi (2009). *Orbital Trajctory Simulation On Twin Stars System In Iterated Function Systems Fractal Model Based On Hybrid Animation Method.* 68–75.

Stevens,Roger.T.;"Advanced Fractal Programming in C";M&T Books;1990

Rusian, Heri. 2012. Subhanallah, Inilah Mukjizat Alqur'an tentang Garis Edar Tata Surya..https://www.republika.co.id/berita/m1uml4/subhanallah-inilah mukjizat-alquran-tentang-garis-edar-tata-surya (diakses tanggal 1 maret 2022)

https://tafsir.learn-quran.co/id/surat-21-al-anbiya'/ayat-33