

**ANALISIS PERILAKU DINAMIK MODEL PENYEBARAN
COVID-19 PADA POPULASI SEIHRV
DENGAN KONTROL OPTIMAL**

SKRIPSI

**OLEH
NIA NURKHANIFAH
NIM. 18610058**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS PERILAKU DINAMIK MODEL PENYEBARAN
COVID-19 PADA POPULASI SEIHRV
DENGAN KONTROL OPTIMAL**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
NIA NURKHANIFAH
NIM. 18610058**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

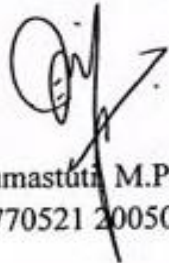
**ANALISIS PERILAKU DINAMIK MODEL PENYEBARAN
COVID-19 PADA POPULASI SEIHRV
DENGAN KONTROL OPTIMAL**

SKRIPSI

**Oleh
Nia Nurkhanifah
NIM. 18610058**

**Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 16 Juni 2022**

Dosen Pembimbing I



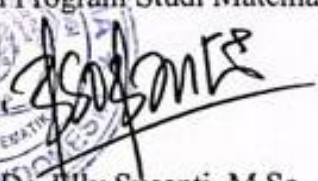
**Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004**

Dosen Pembimbing II



**Erna Herawati, M.Pd
NIDT. 19760723 20180201 2 222**

**Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika**



**Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005**

ANALISIS PERILAKU DINAMIK MODEL PENYEBARAN COVID-19 PADA POPULASI SEIHRV DENGAN KONTROL OPTIMAL

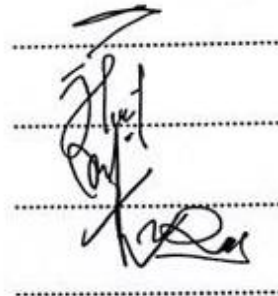
SKRIPSI

Oleh
Nia Nurkhanifah
NIM. 18610058

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 23 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si
Anggota Penguji 1	: Juhari, M.Si
Anggota Penguji 2	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nia Nurkhanifah

NIM : 18610058

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Perilaku Dinamik Model Penyebaran Covid-19 Pada
Populasi SEIHRV Dengan Kontrol Optimal

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,



Nia Nurkhanifah

NIM. 18610058

MOTO DAN PERSEMBAHAN

Tetaplah menjadi orang baik dan lakukanlah semua hal yang baik. Jangan menyerah dan putus asa, sesungguhnya Allah Maha Penolong.

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis yaitu Ayahanda Endik Suprayogi dan Ibunda Suparmi, adik cantik Annisa Humaira, beserta semua keluarga dan teman-teman yang selalu memberi dukungan, do'a, nasihat dan kasih sayang yang tak terhingga untuk penulis. Sehingga menjadikan penulis untuk selalu semangat dalam menulis skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puja dan puji syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan naskah skripsi yang berjudul “Analisis Perilaku Dinamik Model Penyebaran Covid-19 Pada Populasi SEIHRV Dengan Kontrol Optimal”. Shalawat serta salam selalu telimpahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan jahilliyah menuju ke jalan keselamatan.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Maka dari itu ucapan terima kasih yang sebesa-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Ayahanda Endik Suprayogi dan Ibunda Suparmi yang telah memberikan do'a, semangat dan dukungan kepada penulis baik dari segi materi maupun batin selama menimba ilmu di bangku kuliah.
8. Adik cantik Annisa Humaira yang menjadi motivasi sekaligus penyemangat bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

9. Seluruh teman-teman AKSIOMA 2018 khususnya (Aulia, Ifa, Okmi, Pipit, Fahma, Nabila) terimakasih atas segala pengalaman berharga selama menuntut ilmu bersama di bangku kuliah.

10. Seluruh pihak yang telah membantu penulis baik langsung maupun tidak langsung kepada penulis dalam menyelesaikan naskah skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa naskah skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat berharap diberikan kritik dan saran yang membangun oleh pembaca sehingga dapat menjadi bahan perbaikan bagi penulis terkait penelitian selanjutnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 10 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO DAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Definisi Istilah	8
BAB II KAJIAN TEORI	9
2.1 Teori Pendukung	9
2.1.1 Model Matematika Pada Populasi <i>SEIHRV</i>	9
2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa	21
2.1.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Biasa	23
2.1.3 Analisis Dinamik	23
2.1.3.1 Linierisasi	23
2.1.3.2 Titik Ekuilibrium	26
2.1.3.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	27
2.1.3.4 Sifat Kestabilan Titik Ekuilibrium	28
2.1.3.5 Kriteria Routh – Hurwitz	29
2.1.3.6 Matriks Generasi Selanjutnya	30
2.1.3.7 Bilangan Reproduksi Dasar	31
2.1.4 Kontrol Optimal	34
2.1.4.1 Prinsip Maksimum Pontryagin	35
2.1.5 Coronavirus Disease 2019 (Covid-19)	38
2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran	39
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung	40
BAB III METODE PENELITIAN	42
3.1 Jenis Penelitian	42
3.2 Pra Penelitian	42
3.3 Tahapan Penelitian	43
3.3.1 Melakukan Analisis Dinamik Model Pada Populasi	

<i>SEIHRV</i>	44
3.3.2 Melakukan Simulasi Model Pada Populasi <i>SEIHRV</i>	44
3.4 Penetapan Kesimpulan	44
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	45
4.1 Analisis Dinamik.....	45
4.1.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	45
4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar.....	47
4.1.3 Titik Ekuilibrium Endemik	51
4.1.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	53
4.1.5 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik	60
4.1.6 Kontrol Optimal	67
4.2 Simulasi Pada Model <i>SEIHRV</i> Tanpa Kontrol dan Dengan Kontrol	73
4.2.1 Simulasi Model Dalam Kondisi Bebas Penyakit	73
4.2.2 Simulasi Model Dalam Kondisi Endemik	77
BAB V PENUTUP	83
5.1 Kesimpulan.....	83
5.2 Saran.....	85
DAFTAR PUSTAKA	86
LAMPIRAN	88
RIWAYAT HIDUP	110

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Nilai Awal Model Matematika SEIHRV	16
Tabel 2.2 Nilai Awal Parameter Model Matematika SEIHRV	16
Tabel 2.3 Jenis Kestabilan Titik Tetap Sistem Linier	28

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartment Model Matematika <i>SEIHRV</i>	10
Gambar 4.1	Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan γ_2 Sebagai Konstanta.....	74
Gambar 4.2	Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan γ_2 Sebagai Fungsi	75
Gambar 4.3	Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan γ_2 Sebagai Konstanta.....	78
Gambar 4.4	Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan γ_2 Sebagai Fungsi	80

DAFTAR SIMBOL

$S(t)$	: Subpopulasi individu rentan pada waktu ke- t .
$E(t)$	: Subpopulasi individu terpapar Covid-19 pada waktu ke- t .
$I(t)$	: Subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 dan tidak dirawat di rumah sakit pada waktu ke- t .
$H(t)$	: Subpopulasi individu yang terinfeksi dan dirawat di rumah sakit pada waktu ke- t .
$R(t)$	: Subpopulasi individu yang sembuh pada waktu ke- t .
$V(t)$	: Konsentrasi virus corona di lingkungan pada waktu ke- t .
Λ	: Laju kelahiran alami
μ_S	: Laju kematian alami individu rentan
μ_E	: Laju kematian alami individu terpapar
μ_I	: Laju kematian alami individu terinfeksi
μ_H	: Laju kematian alami individu yang dirawat di rumah sakit
μ_R	: Laju kematian alami individu yang telah sembuh
α	: Laju timbal balik masa inkubasi
p	: Proporsi dari individu yang terpapar yang menjadi sakit parah dan dirawat di rumah sakit setelah masa inkubasi
q	: Laju individu yang terinfeksi (yang awalnya menunjukkan gejala ringan atau sedang) dirawat di rumah sakit karena memburuknya kondisi
w	: Tingkat kematian akibat penyakit Covid-19
σ	: Tingkat pemindahan virus corona dari lingkungan
γ_1	: Tingkat kesembuhan individu yang terpapar
γ_2	: Tingkat kesembuhan individu yang terinfeksi
γ_3	: Tingkat kesembuhan individu yang dirawat di rumah sakit
ξ_1	: Tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terpapar
ξ_2	: Tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terinfeksi (non-rawat inap)
ξ_3	: Tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang dirawat di rumah sakit
β_E	: Laju penularan langsung dari manusia ke manusia antara individu yang terpapar dan individu yang rentan
β_I	: Laju penularan antara individu terinfeksi dan individu yang rentan
β_H	: Laju penularan antara individu yang dirawat di rumah sakit dan individu yang rentan
β_V	: Laju penularan virus secara tidak langsung dari lingkungan ke individu yang rentan
γ_2^*	: Fungsi kontrol pengobatan bagi individu yang terinfeksi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Tabel Data Publik Kasus Covid-19	88
Lampiran 2	Proses Diskritisasi Sistem Persamaan	90
Lampiran 3	Perhitungan Maple Untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit dan Endemik.....	98
Lampiran 4	Perhitungan Maple Untuk Bilangan Reproduksi Dasar $R_0 < 1$	100
Lampiran 5	Perhitungan Maple Untuk Bilangan Reproduksi Dasar $R_0 > 1$	101
Lampiran 6	Perhitungan Maple Untuk Nilai Eigen dan Vektor Eigen Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit dan Endemik	103
Lampiran 7	M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Bebas Penyakit dan γ_2 Sebagai Konstanta	105
Lampiran 8	M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Bebas Penyakit dan γ_2 Sebagai Fungsi Kontrol	106
Lampiran 9	M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Endemik dan γ_2 Sebagai Konstanta	107
Lampiran 10	M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Endemik dan γ_2 Sebagai Fungsi Kontrol	108

ABSTRAK

Nurkhanifah, Nia, 2022. **Analisis Perilaku Dinamik Model Penyebaran Covid-19 Pada Populasi SEIHRV Dengan Kontrol Optimal**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, (2)Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Model Matematika SEIHRV, Analisis Dinamik, Bilangan Reproduksi Dasar, Kontrol γ_2 , Bebas Penyakit, Endemik.

Pada penelitian ini membahas mengenai analisis dinamik model penyebaran Covid-19 pada populasi SEIHRV kemudian dilanjutkan simulasi numerik dengan kontrol optimal. Penelitian ini dilakukan untuk merepresentasikan perilaku penyebaran Covid-19 serta efektivitas pengobatan secara mandiri bagi individu terinfeksi. Model matematika SEIHRV membagi populasi manusia menjadi lima kelas yakni *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Hospitalized* (H), *Recovered* (R) dan satu kompartemen tambahan yakni *Virus* (V). Analisis dinamik dilakukan dengan menentukan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$), analisis kestabilan titik ekuilibrium. Kemudian dilanjutkan dengan menentukan kondisi optimal dengan memformulasikan fungsi kontrol γ_2 dengan kaidah tahapan-tahapan kontrol optimal. Selanjutnya, γ_2 berperan sebagai fungsi kontrol efektivitas pengobatan bagi individu yang terinfeksi dan individu yang sembuh. Hasil dari penelitian ini diperoleh bilangan reproduksi dasar yang bernilai $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik bersifat stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik dilakukan saat kondisi bebas penyakit dan kondisi endemik pada situasi γ_2 sebagai fungsi kontrol. Hasil simulasi numerik menunjukkan saat kondisi bebas penyakit tidak ada perbedaan grafik saat γ_2 sebagai konstanta dan fungsi kontrol. Sedangkan dalam kondisi endemik, grafik ketika γ_2 sebagai konstanta dan fungsi kontrol berbeda sehingga diperoleh informasi bahwa pemberian pengobatan bagi individu terinfeksi mampu meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi dan memaksimalkan jumlah individu yang sembuh. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pemberian pengobatan secara mandiri bagi individu terinfeksi Covid-19 sangat efektif.

ABSTRACT

Nurkhanifah, Nia, 2022. **The Dynamic Analysis Behavior of the Covid-19 Spread Model in the SEIHRV Population with Optimal Control**. Thesis. Study Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Mathematical Model of SEIHRV, Dynamic Analysis, Basic Reproduction Number, Control of γ_2 , Disease-Free, Endemic.

This study discusses the dynamic analysis of the Covid-19 spread model in the SEIHRV population, then proceed with numerical simulations with optimal control. This study was conducted to represent the behavior of the spread of Covid-19 and the effectiveness of independent treatment for infected individuals. The SEIHRV mathematical model divides the human population into five classes, namely Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), Hospitalized (H), Recovered (R) and one additional compartment, Virus (V). Dynamic analysis is carried out by determining the equilibrium point, the basic reproduction number ($\mathcal{R}_0$), equilibrium point stability analysis. Then proceed with determining the optimal conditions by formulating the control function γ_2 with the rules of optimal control stages. Next, γ_2 as a function of controlling the effectiveness of treatment for infected individuals and recovered individuals. The result of this research is that the basic reproduction number is $\mathcal{R}_0 > 1$. The disease-free equilibrium point is unstable and the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable. The numerical simulations are carried out when conditions are free of disease and conditions are endemic in situations γ_2 as constant and control function. Numerical simulation results show that when there is no disease-free condition, there is no difference in the current graph γ_2 as constant and control function. While in endemic conditions, the graph γ_2 as constant and control function is different so that information is obtained that giving treatment to infected individuals is able to minimize the number of infected individuals and maximize the number of recovered individuals. So it can be concluded that providing independent treatment for individuals infected with COVID-19 who are quarantined is very effective.

مستخلص البحث

نورخليفة ، نيا ، ٢٠٢٢. تحليل النموذج السلوكي الديناميكي لانتشار كوفيد ١٩ في مجتمع SEIHRV مع التحكم الأمثل. فرضية. قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم جامعة الملنج الحكوميه مالانج. المراكبون : (١) آري كوسوماستوتي الماجستير ، (٢) إرنا هيراوني الماجستير .

الكلمات المفتاحية: النموذج الرياضي SEIHRV ، التحليل الديناميكي ، الأرقام الإنجابية الأساسية ، التحكم γ_2 ، الخالي من الأمراض ، المتوطن .

في هذه الدراسة ، نناقش التحليل الديناميكي لنموذج انتشار كوفيد ١٩ في مجموعة SEIHRV ثم ننتقل إلى عمليات المحاكاة العددية مع التحكم الأمثل أجريت هذه الدراسة لتمثيل سلوك انتشار كوفيد ١٩ وفعالية العلاج المستقل للأفراد المصابين. يقسم النموذج الرياضي SEIHRV البشر إلى خمس فئات ، وهي حساسة (S) ، مكشوفة (E) ، مصابة (I) ، في المستشفى (H) ، تعافى (R) ومقصورة إضافية واحدة ، فيروس (V) . يتم إجراء التحليل الديناميكي من خلال تحديد نقطة الاتزان ، رقم الانجاب الأساسي (R_0) ، تحليل استقرار نقطة الاتزان. ثم تابع تحديد الشروط المثلى من خلال صياغة وظيفة التحكم γ_2 مع قواعد مراحل المراقبة المثلى. وبعد ذلك γ_2 ، كوظيفة للتحكم في فعالية علاج الأفراد المصابين والأفراد المسترجحين. النتيجة من هذا بحث أن ال أساسية إعادة إنتاج رقم $R_0 > 1$ يكون. نقطة الاتزان الخالي من المرض غير مستقرة ونقطة الاتزان المستوطنة مستقرة محليا. ويتم إجراء عمليات المحاكاة الرقمية عندما تكون الظروف خالية من الأمراض ، وتكون الظروف مستوطنة في الحالات γ_2 كوظيفة ثابتة ووظيفة تحكم. تظهر نتائج المحاكاة الرقمية أنه عند عدم وجود حالة خالية من الأمراض ، لا يوجد فرق في الرسم البياني الحالي γ_2 كدالة ثابتة ووظيفة تحكم. في حين أن الرسم γ_2 البياني كدالة ثابتة للمراقبة يختلف في الظروف المستوطنة بحيث يتم الحصول على معلومات تفيد بأن إعطاء العلاج للأشخاص المصابين قادر على تقليل عدد الأشخاص المصابين إلى أدنى حد ممكن وزيادة عدد الأشخاص المستبعدين إلى أقصى حد. لذا، يمكننا استنتاج أن توفير علاج مستقل للأشخاص المصابين بمرض كوفيد ١٩ الذين تم عزلهم في الحجر الصحي هو فعال جدا.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kini seluruh belahan dunia masih dilanda wabah Covid-19 yang terhitung dua tahun lamanya sejak pertama kali munculnya wabah Coronavirus Disease (Covid-19) di akhir tahun 2019. *World Health Organization* (WHO) menetapkan Covid-19 sebagai pandemi dunia mengingat penyebarannya yang semakin masif (A.D.Susanto, 2020). Melihat laju penyebaran Covid-19 di Indonesia semakin meningkat maka perlu dilakukan upaya untuk menekan laju penyebaran Covid-19 dengan membatasi mobilitas masyarakat dan melakukan pengobatan bagi individu yang telah terinfeksi oleh virus penyebab wabah. Dalam Islam hal ini telah disampaikan oleh Rasulullah SAW yang tertuang dalam kitab hadits Shahih Bukhari No.5289 (Shihab, 2001):

حَدَّثَنَا عَبْدُ اللَّهِ بْنُ يُوسُفَ أَخْبَرَنَا مَالِكٌ عَنْ ابْنِ شِهَابٍ عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ عَمْرٍو أَنَّ عُمَرَ حَرَجَ إِلَى الشَّامِ فَلَمَّا كَانَ بِسَرِغَ بَلَغَهُ أَنَّ الْوَبَاءَ قَدْ وَقَعَ بِالشَّامِ فَأَخْبَرَهُ عَبْدُ الرَّحْمَنِ بْنُ عَوْفٍ أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ إِذَا سَمِعْتُمْ بِهِ بِأَرْضٍ فَلَا تَقْدَمُوا عَلَيْهِ وَإِذَا وَقَعَ بِأَرْضٍ وَأَنْتُمْ بِهَا فَلَا تَخْرُجُوا فِرَارًا مِنْهُ

Artinya: “Telah menceritakan kepada kami Abdullah bin Yusuf telah mengabarkan kepada kami Malik dari Ibnu Syihab dari Abdullah bin 'Amir bahwa Umar pernah bepergian menuju Syam, ketika dia sampai di daerah Sargha, diberitahukan kepadanya bahwa negeri Syam sedang terjangkiti wabah penyakit menular, lantas Abdurrahman bin 'Auf memberitahukan kepadanya bahwa Rasulullah shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: Jika kalian mendengar wabah tersebut menjangkiti suatu negeri, maka janganlah kalian menuju ke sana, namun jika dia menjangkiti suatu negeri dan kalian berada di dalamnya, maka janganlah kalian keluar dan lari darinya” (Bukhari, No.5289).

Larangan Rasulullah SAW bertujuan agar umat manusia senantiasa bersabar dan tabah menghadapi wabah serta percaya kehendak Allah SWT. Kondisi wabah yang terjadi di masa Rasulullah SAW hampir sama dengan fenomena pandemi Covid-19

yang terjadi saat ini yaitu atas kehendak Allah SWT. Penyebaran penyakit Covid-19 yang terjadi di Indonesia dapat disajikan dengan model matematika populasi *SEIHRV*. Model ini menggabungkan jalur penularan dari manusia ke manusia dan dari lingkungan ke manusia pada periode waktu tertentu. Model *SEIHRV* membagi populasi inang menjadi lima kelas: *Susceptible* (S) yaitu subpopulasi individu rentan yang dapat tertular oleh Covid-19, *Exposed* (E) yaitu subpopulasi individu yang terpapar, *Infected* (I) yaitu subpopulasi individu yang terinfeksi Covid-19 dan telah dinyatakan positif dengan hasil *rapid test*/ *swab test* namun tidak dirawat di rumah sakit, *Hospitalized* (H) yaitu subpopulasi individu yang telah dinyatakan positif terinfeksi Covid-19 lalu dirawat di rumah sakit dan *Recovered* (R) yaitu subpopulasi individu yang sembuh dan nantinya tidak rentan terinfeksi Covid-19. Sementara itu kompartemen *Virus* (V) mewakili konsentrasi Covid-19 di lingkungan, berdasarkan penelitian eksperimental (Van Doremalen, 2020) terbukti bahwa Covid-19 dapat bertahan di udara hingga 3 jam, di tembaga hingga 4 jam, di permukaan kertas karton hingga 24 jam, di permukaan plastik dan baja anti karat hingga 3 hari (Chayu Yang, 2020).

Model matematika *SEIHRV* disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa bergantung waktu. Model matematika *SEIHRV* merujuk pada penelitian yang dilakukan (Chayu Yang, 2020). Parameter yang digunakan dalam model ini antara lain: Λ sebagai laju kelahiran alami, μ_S sebagai laju kematian alami populasi *Susceptible*, μ_E sebagai laju kematian alami populasi *Exposed*, μ_I sebagai laju kematian alami populasi *Infected*, μ_H sebagai laju kematian alami populasi *Hospitalized*, μ_R sebagai laju kematian alami populasi *Recovered*, α sebagai laju timbal balik masa inkubasi, w sebagai laju kematian akibat virus Covid-19, σ

sebagai tingkat perpindahan virus Covid-19 dari lingkungan, γ_1 sebagai tingkat kesembuhan individu yang terpapar, γ_2 sebagai tingkat kesembuhan individu yang terinfeksi, γ_3 sebagai tingkat kesembuhan individu yang dirawat di rumah sakit, ξ_1 sebagai tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terpapar, ξ_2 sebagai tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terinfeksi (non-rawat inap), ξ_3 sebagai tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang dirawat di rumah sakit, β_E sebagai laju penularan langsung dari manusia ke manusia antara individu yang terpapar dan individu yang rentan, β_I sebagai laju penularan antara individu terinfeksi dan individu yang rentan, β_H sebagai laju penularan antara individu yang dirawat di rumah sakit dan individu yang rentan, β_V sebagai laju penularan virus secara tidak langsung dari lingkungan ke individu yang rentan. Nilai parameter-parameter tersebut pada penelitian ini bersumber pada data Covid-19 Provinsi Jawa Timur dan artikel rujukan (Chayu Yang, 2020).

Terdapat beberapa peneliti yang telah melakukan penelitian serupa sebelumnya tentang epidemiologi Covid-19 yaitu sebagai berikut: Penelitian (Chayu Yang, 2020) penelitian ini dilakukan untuk memprediksi penyebaran Covid-19 jangka pendek pada periode waktu yang berbeda. Penelitian ini menggunakan model matematika *SEIHRV* yaitu *Suceptible* (*S*), *Exposed* (*E*), *Infected* (*I*), *Hospitalized* (*H*), *Recovered* (*R*), *Virus* (*V*). Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa lingkungan secara tidak langsung berpengaruh dalam penyebaran penyakit Covid-19 di Hamilton County, USA. Namun, model pada penelitian ini belum mempertimbangkan dampak distribusi usia populasi manusia.

Penelitian serupa dilakukan oleh (Annas, 2020) yang membahas analisis

dinamik penyebaran Covid-19 di Indonesia dengan mempertimbangkan faktor isolasi dan vaksinasi sebagai parameter model. Model yang digunakan adalah model matematika *SEIR* yaitu *Suceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Recovered* (R). Penelitian menunjukkan bahwa faktor isolasi dapat memperlambat penyebaran Covid-19 dan vaksinasi dapat mempercepat penyembuhan Covid-19. Analisis model memberikan gambaran stabilitas global dalam penyebaran covid-19 serta informasi jika Covid-19 berstatus endemik di Indonesia.

Penelitian lainnya dilakukan oleh (Mandal, et al., 2020) menerapkan model penyebaran Covid-19 pada populasi *SEQIR* *Suceptible* (S), *Exposed* (E), *Quarantine* (Q), *Infected* (I), *Recovered* (R). Penelitian ini membahas kontrol optimal pada model *SEQIR* dengan mempertimbangkan faktor karantina New Delhi, India. Berdasarkan hasil simulasi numerik baik menggunakan kontrol optimal maupun tanpa kontrol optimal, rasio populasi kasus penularan Covid-19 di New Delhi tidak mengalami penurunan setelah diterapkan kebijakan karantina. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kebijakan karantina di New Delhi tidak sepenuhnya efektif untuk menekan laju penularan Covid-19.

Berdasarkan latar belakang diatas, maka penelitian ini difokuskan pada penyebaran virus Covid-19 di lingkungan *SEIHRV* melalui analisis perilaku, semua variabel yang terlibat dengan memodifikasi γ_2 sebagai parameter tingkat kesembuhan individu yang terinfeksi. Modifikasi ini dilakukan dengan mengasumsikan γ_2 yang sebelumnya konstanta (Chayu Yang, 2020) , menjadi suatu fungsi yang mengontrol efektivitas γ_2 pada populasi *SEIHRV*. Analisis perubahan γ_2 menjadi suatu fungsi dilakukan dengan menerapkan kontrol optimal, selanjutnya profil grafik semua variabel pada model akan dibandingkan dalam dua

kondisi yaitu yang pertama bebas penyakit dengan γ_2 konstanta dan γ_2 fungsi. Sedangkan kondisi kedua yaitu endemik dengan γ_2 konstanta dan γ_2 fungsi. Analisis perilaku diharapkan dapat membantu dalam penyusunan strategi dalam pengendalian penyebaran Covid-19 di suatu wilayah berdasarkan interpretasi dari kinerja γ_2 . Sehingga modifikasi model matematika *SEIHRV* (Chayu Yang, 2020) digunakan dalam penelitian ini untuk menuju analisis perilaku dinamik serta simulasinya dengan dan tanpa kontrol optimal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahan pada penelitian ini antara lain:

1. Bagaimana analisis dinamik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* dengan dan tanpa kontrol optimal?
2. Bagaimana hasil simulasi numerik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* dengan dan tanpa kontrol optimal?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan yang ingin dicapai oleh peneliti pada penelitian ini, sebagai berikut :

1. Mengetahui analisis dinamik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* dengan dan tanpa kontrol optimal.
2. Mengetahui hasil simulasi numerik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* dengan dan tanpa kontrol optimal.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan pada penelitian ini, maka manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini yaitu

1. Dapat mengetahui analisis dinamik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* dengan dan tanpa kontrol optimal, sehingga dapat digunakan sebagai referensi penelitian terkait wabah yang terjadi di suatu wilayah.
2. Dapat mengetahui hasil simulasi numerik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* tanpa dan dengan kontrol optimal sehingga dapat digunakan sebagai acuan strategi pengendalian penyebaran Covid-19 di suatu wilayah.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, peneliti memberikan batasan masalah pada objek kajian sebagai berikut:

1. Model matematika yang dipakai yaitu model penyebaran *SEIHRV* (Chayu Yang, 2020) yang telah dimodifikasi sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I) I$$

$$\frac{dH}{dt} = \alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H) H$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R$$

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V$$

2. Populasi diasumsikan tertutup yaitu tidak ada individu yang keluar maupun masuk dari suatu subpopulasi sehingga total populasi diasumsikan konstan.

3. Diasumsikan individu di kelas *Exposed (E)* atau yang terpapar berada dalam masa inkubasi. Mereka tidak menunjukkan gejala dan belum diuji tetapi mereka dianggap mampu menginfeksi orang lain.
4. Diasumsikan individu yang terinfeksi biasanya disarankan untuk melakukan karantina sendiri di rumah dan tidak dirawat di rumah sakit.
5. Diasumsikan individu di kelas *Hospitalized (H)* atau yang dirawat di rumah sakit telah diuji menunjukkan hasil positif dan memiliki risiko tertular yang lebih tinggi. Misalnya, orang tua dan individu yang memiliki riwayat penyakit tertentu.
6. Diasumsikan individu di kelas *Recovered (R)* atau yang telah sembuh tidak dapat menularkan virus Covid-19.
7. Diasumsikan kematian akibat penyakit hanya terjadi pada individu yang dirawat di rumah sakit.
8. Diasumsikan bayi yang baru lahir dimasukkan kedalam kelas *Susceptible (S)*.
9. Diasumsikan individu yang terpapar virus Covid-19, individu yang terinfeksi virus Covid-19 dan individu yang dirawat di rumah sakit dapat menularkan virus Covid-19 ke lingkungan.
10. Diasumsikan terdapat peluang kematian alami yang berbeda disetiap populasi individu.
11. Diasumsikan faktor pengobatan dapat menekan banyaknya individu yang terinfeksi.
12. Dilakukan telaah model (Chayu Yang, 2020) untuk kompartemen V.
13. Studi kasus data sekunder Covid-19 terhadap nilai-nilai parameter model.

1.6 Definisi Istilah

Berdasarkan rumusan masalah dan judul penelitian maka uraian definisi istilah dalam penelitian ini antara lain, sebagai berikut:

1. Analisis perilaku dinamik merupakan suatu analisis model matematika yang merepresentasikan perilaku suatu fenomena dalam sistem persamaan diferensial bergantung waktu dan digunakan untuk mendapatkan solusi model tersebut dengan simulasi numerik (Boyce & DiPrima, 2001).
2. Populasi *SEIHRV* yaitu populasi individu dalam subpopulasi *Suceptible (S)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Hospitalized (H)*, *Recovered (R)* dan konsentrasi *Virus (V)*.
3. Kontrol optimal merupakan model optimasi untuk menentukan nilai fungsi kontrol yang digunakan dalam model supaya fungsi kendala (*constrain*) terpenuhi dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi objektif. (Lewis, Vrabie, & Syrmos, 2012).

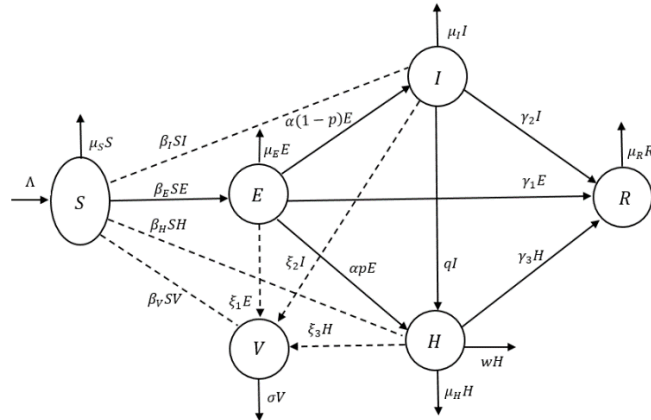
BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Model Matematika Pada Populasi *SEIHRV*

Model matematika yang akan digunakan pada penelitian ini adalah model *SEIHRV* dimana model ini menggabungkan jalur penularan dari manusia ke manusia dan dari lingkungan ke manusia pada periode waktu tertentu. Model *SEIHRV* adalah bentuk pengembangan dari model *SIR* yang ditambahkan kompartemen *Exposed* (*E*) yaitu individu yang terpapar, kompartemen *Hospitalized* (*H*) yaitu individu yang dirawat di rumah sakit, kompartemen *Virus* (*V*) yaitu konsentrasi virus corona di lingkungan.

Model *SEIHRV* adalah model epidemik dengan periode waktu tertentu untuk penyebaran virus Covid-19. Model *SEIHRV* membagi populasi inang menjadi lima kelas: *Suceptible* (*S*) yaitu subpopulasi individu rentan yang dapat tertular oleh Covid-19, *Exposed* (*E*) yaitu subpopulasi individu yang terpapar, *Infected* (*I*) yaitu subpopulasi individu yang terinfeksi Covid-19 dan telah dinyatakan positif dengan hasil *rapid test/ swab test* namun tidak dirawat di rumah sakit, *Hospitalized* (*H*) yaitu subpopulasi individu yang telah dinyatakan positif terinfeksi Covid-19 lalu dirawat di rumah sakit dan *Recovered* (*R*) yaitu subpopulasi individu yang sembuh dan nantinya tidak rentan terinfeksi Covid-19. Sementara itu, kompartemen *Virus* (*V*) mewakili konsentrasi virus Covid-19 yang ada di lingkungan. Model penyebaran ini secara sistematis dapat diilustrasikan dengan diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model Matematika SEIHRV

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat diketahui populasi individu terdiri dari lima kompartemen yaitu *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Hospitalized* (H), *Recovered* (R) serta terdapat kompartemen tambahan yaitu *Virus* (V). Pada setiap kompartemen terjadi perubahan jumlah individu pada masing-masing populasi, hal ini dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu:

1. Perubahan banyaknya populasi individu pada kompartemen individu rentan (S) terhadap waktu dipengaruhi oleh penambahan banyaknya individu oleh laju masuknya populasi sebesar Λ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda$$

Populasi *Susceptible* selanjutnya akan berkurang karena adanya interaksi langsung antara individu yang rentan dengan individu yang terpapar sebesar $\beta_E SE$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE$$

Populasi *Susceptible* selanjutnya akan berkurang karena adanya interaksi langsung antara individu terinfeksi dan individu yang rentan sebesar $\beta_I SI$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI$$

Populasi *Susceptible* selanjutnya akan berkurang karena adanya interaksi langsung antara individu yang dirawat di rumah sakit dan individu yang rentan sebesar $\beta_H SH$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH$$

Populasi *Susceptible* selanjutnya akan berkurang karena adanya interaksi langsung dari lingkungan yang terpapar virus Covid-19 ke individu yang rentan sebesar $\beta_V SV$ sehingga dapat dituliskan

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV$$

Populasi *Susceptible* selanjutnya akan berkurang karena adanya laju kematian alami sebesar $\mu_S S$. Maka diperoleh persamaan pada kompartemen *Susceptible* (S) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S \quad (2.1)$$

2. Perubahan banyaknya populasi individu pada kompartemen individu terpapar (E) terhadap waktu dipengaruhi oleh penambahan: interaksi langsung dari manusia ke manusia antara individu yang terpapar dan individu yang rentan sebesar $\beta_E SE$ sehingga dapat dituliskan

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE$$

Populasi *Exposed* selanjutnya akan mengalami penambahan karena adanya interaksi langsung antara individu terinfeksi dan individu yang rentan sebesar $\beta_I SI$ sehingga dapat dituliskan

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI$$

Populasi *Exposed* selanjutnya akan mengalami penambahan karena adanya interaksi langsung antara individu yang dirawat di rumah sakit dan individu yang rentan sebesar $\beta_H SH$ sehingga dapat dituliskan

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH$$

Populasi *Exposed* selanjutnya akan mengalami penambahan karena adanya interaksi langsung antara virus Covid-19 di lingkungan ke individu yang rentan sebesar $\beta_V SV$ sehingga dapat dituliskan

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV$$

Populasi *Exposed* selanjutnya akan berkurang karena adanya laju α dengan proposisi sebesar $1 - p$, laju kematian alami sebesar $\mu_E E$, laju kesembuhan sebesar $\gamma_1 E$ dan laju timbal balik α dari proposisi pE . Maka diperoleh persamaan pada kompartemen *Exposed* (E) sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E)E \quad (2.2)$$

3. Perubahan banyaknya populasi individu pada kompartemen individu terinfeksi terhadap waktu dipengaruhi oleh penambahan laju α dengan proposisi sebesar $1 - p$ dapat dituliskan:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1 - p)E$$

Populasi *Infected* selanjutnya akan berkurang karena adanya laju kematian alami sebesar $\mu_I I$, laju kesembuhan sebesar $\gamma_2 I$, laju individu terinfeksi (I) yang akan dirawat di rumah sakit sebesar qI . Maka diperoleh persamaan pada kompartemen *Infected* sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I)I \quad (2.3)$$

4. Perubahan banyaknya populasi individu pada kompartemen individu yang dirawat di rumah sakit (H) terhadap waktu dipengaruhi oleh penambahan laju timbal balik α dari proposisi sebesar pE sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha pE$$

Populasi *Hospitalized* selanjutnya mengalami penambahan oleh laju individu terinfeksi yang akan dirawat di rumah sakit sebesar qI sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha pE + qI$$

Populasi *Hospitalized* selanjutnya mengalami pengurangan oleh laju kematian individu akibat Covid-19 sebesar wH , laju kesembuhan sebesar $\gamma_3 H$, laju kematian alami sebesar $\mu_H H$. Maka diperoleh persamaan pada kompartemen *Hospitalized* (H) sebagai berikut:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha pE + qI - (w + \gamma_3 + \mu_H)H \quad (2.4)$$

5. Perubahan banyaknya populasi individu pada kompartemen individu *Recovered* terhadap waktu dipengaruhi oleh penambahan laju kesembuhan individu terpapar sebesar $\gamma_1 E$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E$$

Populasi *Recovered* selanjutnya mengalami penambahan oleh laju kesembuhan individu yang terinfeksi sebesar $\gamma_2 I$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I$$

Populasi *Recovered* selanjutnya mengalami penambahan oleh laju kesembuhan individu yang dirawat di rumah sakit sebesar $\gamma_3 H$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H$$

Populasi *Recovered* selanjutnya mengalami pengurangan oleh laju kematian alami individu yang sembuh sebesar $\mu_R R$. Maka diperoleh persamaan pada kompartemen *Recovered* (R) sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R \quad (2.5)$$

6. Perubahan konsentrasi virus Covid-19 di lingkungan terhadap waktu dipengaruhi oleh penambahan laju penularan virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terpapar sebesar $\xi_1 E$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E$$

Konsentrasi virus Covid-19 mengalami penambahan oleh laju penularan virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terinfeksi sebesar $\xi_2 I$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I$$

Konsentrasi virus Covid-19 mengalami penambahan oleh laju penularan virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang dirawat di rumah sakit sebesar $\xi_3 H$ sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H$$

Konsentrasi virus Covid-19 mengalami pengurangan oleh laju penularan virus Covid-19 dari lingkungan ke lingkungan sebesar σV . Maka diperoleh persamaan pada kompartemen *Virus* (V) sebagai berikut:

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V \quad (2.6)$$

Berdasarkan faktor-faktor diatas maka diperoleh sistem persamaan diferensial untuk model matematika SEIHRV dengan jalur penularan dari manusia ke manusia dan dari lingkungan ke manusia pada periode waktu tertentu, sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I) I$$

$$\frac{dH}{dt} = \alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H) H$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R$$

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V$$

Parameter dan variabel yang digunakan dalam model penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* antara lain :

Tabel 2.1 Nilai Awal Model Matematika *SEIHRV*

No.	Variabel	Keterangan	Nilai Awal
1.	$S(t)$	Subpopulasi individu rentan pada waktu ke- t .	39.273.012 jiwa
2.	$E(t)$	Subpopulasi individu terpapar Covid-19 pada waktu ke- t .	1.780.902 jiwa
3.	$I(t)$	Subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 dan tidak dirawat di rumah sakit pada waktu ke- t .	145.977 jiwa
4.	$H(t)$	Subpopulasi individu yang terinfeksi dan dirawat di rumah sakit pada waktu ke- t .	101.520 jiwa
5.	$R(t)$	Subpopulasi individu yang sembuh pada waktu ke- t .	195.479 jiwa
6.	$V(t)$	Konsentrasi virus corona di lingkungan pada waktu ke- t .	100 virus/ml

Tabel 2.2 Nilai Awal Parameter Model Matematika *SEIHRV*
(pada total populasi manusia $N = 41.496.890$)

No.	Parameter	Keterangan	Nilai	Satuan	Sumber
1.	Λ	Laju kelahiran alami	0,034	Perhari	(Armadani, 2021)
2.	μ_S	Laju kematian alami individu rentan	0,002	Perhari	www.infocovid19.jatimprov.go.id
3.	μ_E	Laju kematian alami individu terpapar	0,003	Perhari	www.infocovid19.jatimprov.go.id
4.	μ_I	Laju kematian alami individu terinfeksi	0,003	Perhari	www.infocovid19.jatimprov.go.id
5.	μ_H	Laju kematian alami individu yang dirawat di rumah sakit	0,002	Perhari	www.infocovid19.jatimprov.go.id
6.	μ_R	Laju kematian alami individu yang telah sembuh	0,005	Perhari	www.infocovid19.jatimprov.go.id
7.	α	Laju timbal balik masa inkubasi	0,14	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
8.	p	Proporsi dari individu yang terpapar yang menjadi sakit parah dan dirawat di rumah sakit setelah masa inkubasi	0,1	Perorang	(Chayu Yang, 2020)

9.	q	Laju individu yang terinfeksi (yang awalnya menunjukkan gejala ringan atau sedang) dirawat di rumah sakit karena memburuknya kondisi	0,01	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
10.	w	Tingkat kematian akibat penyakit Covid-19	0,01	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
11.	σ	Tingkat pemindahan virus corona dari lingkungan	0,5	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
12.	γ_1	Tingkat kesembuhan individu yang terpapar	0,2	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
13.	γ_2	Tingkat kesembuhan individu yang terinfeksi	0,07	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
14.	γ_3	Tingkat kesembuhan individu yang dirawat di rumah sakit	0,14	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
15.	ξ_1	Tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terpapar	2,3	Permili/ Perorang/ Perhari	(Chayu Yang, 2020)
16.	ξ_2	Tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang terinfeksi (non-rawat inap)	1,15	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
17.	ξ_3	Tingkat kontribusi virus Covid-19 ke lingkungan dari individu yang dirawat di rumah sakit	0,013	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
18.	β_E	Laju penularan langsung dari	$5,47 \times 10^{-6}$	Perhari	(Chayu Yang, 2020)

		manusia ke manusia antara individu yang terpapar dan individu yang rentan			
19.	β_I	Laju penularan antara individu terinfeksi dan individu yang rentan	$2,13 \times 10^{-6}$	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
20.	β_H	Laju penularan antara individu yang dirawat di rumah sakit dan individu yang rentan	$2,7 \times 10^{-5}$	Perhari	(Chayu Yang, 2020)
21.	β_V	Laju penularan virus secara tidak langsung dari lingkungan ke individu yang rentan	$5,54 \times 10^{-5}$	Perhari	(Chayu Yang, 2020)

Dalam menentukan jumlah laju kematian alami di populasi manusia ($\mu_S, \mu_E, \mu_I, \mu_H, \mu_R$) dapat dihitung dengan menggunakan rumus *Crude Death Rate* (Angka Kematian Kasar) yang dinyatakan sebagai (Statistika, 2022):

$$Crude\ Death\ Rate\ (CDR) = \frac{D}{P} \times 1000$$

Dimana:

D = Jumlah kematian dalam satu tahun (Sumber: Data Covid-19 Pada Lampiran 1)

P = Jumlah seluruh penduduk di suatu wilayah dalam satu tahun

1000 = konstanta

Selanjutnya untuk menentukan perhitungan nilai parameter laju kematian alami ($\mu_S, \mu_E, \mu_I, \mu_H, \mu_R$) dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

- a. Parameter laju kematian alami populasi *Susceptible* (μ_S)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{30.292}{41.496.890} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 0,72$$

Artinya laju kematian alami populasi *Susceptible* di tahun tersebut sebesar 0,002 disetiap 1000 jiwa. Untuk menghitung laju kematian alami perharinya maka 0,72 perlu dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,002. Artinya laju kematian alami populasi *Susceptible* di tahun tersebut sebesar 0,002 perhari.

- b. Parameter laju kematian alami populasi *Exposed* (μ_E)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{45.440}{41.496.890} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 1,095$$

Artinya laju kematian alami populasi *Exposed* di tahun tersebut sebesar 1,095 di setiap 1000 jiwa. Untuk menghitung laju kematian alami perharinya maka 1,095 perlu dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,003. Artinya laju kematian alami populasi *Exposed* di tahun tersebut sebesar 0,003 perhari.

- c. Parameter laju kematian alami populasi *Infected* (μ_I)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{44.792}{41.496.890} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 1,079$$

Artinya laju kematian alami populasi *Infected* di tahun tersebut sebesar 1,079 disetiap 1000 jiwa. Untuk menghitung laju kematian alami

perharinya maka 1,079 perlu dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,003. Artinya laju kematian alami populasi *Infected* di tahun tersebut sebesar 0,003 perhari.

- d. Parameter laju kematian alami populasi *Hospitalized* (μ_H)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{28.714}{41.496.890} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 0,691$$

Artinya laju kematian alami populasi *Hospitalized* di tahun tersebut sebesar 0,691 disetiap 1000 jiwa. Untuk menghitung laju kematian alami perharinya maka 0.691 perlu dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,002. Artinya laju kematian alami populasi *Hospitalized* di tahun tersebut sebesar 0,002 perhari.

- e. Parameter laju kematian alami populasi *Recovered* (μ_R)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{75.731}{41.496.890} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 1,825$$

Artinya laju kematian alami populasi *Recovered* di tahun tersebut sebesar 1,825 disetiap 1000 jiwa. Untuk menghitung laju kematian alami perharinya maka 1,825 perlu dibagi dengan 365 sehingga diperoleh nilai 0,005. Artinya laju kematian alami populasi *Recovered* di tahun tersebut sebesar 0,005 perhari.

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas sebuah fungsi (Ross, 1989). Persamaan diferensial diklasifikasikan bergantung jumlah variabel bebasnya yaitu: persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Persamaan diferensial biasa didefinisikan $F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) = 0$ disebut linear jika F adalah linear pada variabel $t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$ (Waluya, 2006). Secara umum persamaan diferensial biasa linear orde n diberikan sebagai berikut:

$$a_0(t)y + a_1(t)\dot{y} + \dots + a_{n-1}(t)\ddot{y} + \dots = f(t) \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) dinamakan persamaan diferensial biasa linear karena ciri-cirinya sesuai dengan syarat persamaan diferensial dalam bentuk linear. Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika variabel-variabel tak bebas dan semua turunan dari persamaan diferensial tersebut muncul dalam bentuk linear dalam arti ciri-cirinya:

- a. Variabel tak bebas dan semua turunannya hanya muncul berderajat satu.
- b. Tidak ada suatu perkalian antar variabel-variabel tak bebas, tidak ada perkalian antara suatu turunan dengan turunan lainnya, dan tidak ada perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.
- c. Tidak terdapat suatu fungsi transenden dari variabel-variabel tak bebas dan turunannya.

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika memenuhi ketiga syarat diatas, namun jika tidak memenuhi salah satu maka dapat disebut persamaan diferensial nonlinear. Berikut contoh persamaan diferensial:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dinamakan persamaan diferensial nonlinear karena terdapat perkalian variabel tak bebas antara S , E , I , H , V dengan variabel tak bebas S pada $\beta_E SE - \beta_I(I, t)SI - \beta_H SH - \beta_V SV$.

2.1.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Sistem persamaan diferensial biasa yaitu sebuah sistem persamaan yang memuat dua atau lebih persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai variabel terikat dan t sebagai variabel bebas, sehingga $\frac{dx_n}{dt}$ yakni turunan fungsi x_n terhadap t (Kartono, 2012). Sistem persamaan diferensial biasa dapat dibagi berdasarkan kelinierannya menjadi 2 yaitu sistem persamaan diferensial linier dan sistem persamaan diferensial nonlinier. Suatu sistem persamaan diferensial disebut linier jika sistem persamaan tersebut terdiri lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait, sedangkan sistem persamaan diferensial disebut nonlinier jika sistem persamaan

tersebut terdiri lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce & DiPrima, 2001). Salah satu contoh dari bentuk sistem persamaan diferensial adalah model matematika *SEIHRV* yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E \\
 \frac{dI}{dt} &= \alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I) I \\
 \frac{dH}{dt} &= \alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H) H \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R \\
 \frac{dV}{dt} &= \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

dengan S, E, I, H, R, V adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, sehingga dapat dinyatakan dengan $S(t), E(t), I(t), H(t), R(t)$ dan $V(t)$.

2.1.3 Analisis Dinamik

Perilaku suatu model matematika yang berupa sistem persamaan diferensial dapat diketahui dengan melakukan analisis dinamik. Analisis perilaku dinamik perlu dilakukan untuk mengetahui validitas suatu model matematika. Kestabilan suatu model matematika dapat diketahui dengan melakukan analisis pada titik ekuilibrium dilanjutkan dengan menghitung nilai eigen dari model matematika sehingga dapat diketahui jenis kestabilannya (Boyce & DiPrima, 2001).

2.1.3.1 Linierisasi

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial non-linier dengan persamaan linier untuk membantu memahami persamaan diferensial

non-linier (Boyce & DiPrima, 2001). Berikut linierisasi yang dilakukan pada sistem (2.11) dan dapat dimisalkan dengan,

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S = f_1(S, E, I, H, R, V)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E)E \\ &= f_2(S, E, I, H, R, V) \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1 - p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I)I = f_3(S, E, I, H, R, V)$$

$$\frac{dH}{dt} = \alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H)H = f_4(S, E, I, H, R, V)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R = f_5(S, E, I, H, R, V)$$

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V = f_6(S, E, I, H, R, V)$$

Kemudian, terdapat $(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)$ yang merupakan titik kesetimbangan dari sistem persamaan non-linier. Karena itu dilakukan pendekatan disekitar titik $(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)$ dengan mengekspansi menurut deret Taylor untuk menghilangkan suku tak linier. Misalkan, digunakan titik kesetimbangan $(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Berikut linierisasi pada sistem persamaan (2.11)

$$f_1(S, E, I, H, R, V)$$

$$\begin{aligned} &\approx f_1(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(S - S_0) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(E - E_0) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(I - I_0) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(H - H_0) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(R - R_0) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial V}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(V - V_0)$$

$$f_2(S, E, I, H, R, V)$$

$$\approx f_2(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(S - S_0)$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(E - E_0)$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(I - I_0)$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(H - H_0)$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(R - R_0)$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial V}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(V - V_0)$$

$$f_3(S, E, I, H, R, V)$$

$$\approx f_3(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(S - S_0)$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(E - E_0)$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(I - I_0)$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(H - H_0)$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(R - R_0)$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial V}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(V - V_0)$$

$$f_4(S, E, I, H, R, V)$$

$$\approx f_4(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(S - S_0)$$

$$+ \frac{\partial f_4}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(E - E_0)$$

$$+ \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(I - I_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f_4}{\partial H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(R - R_0) \\
& + \frac{\partial f_4}{\partial V}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(V - V_0)
\end{aligned}$$

$$f_5(S, E, I, H, R, V)$$

$$\begin{aligned}
& \approx f_5(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) \frac{\partial f_5}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(S - S_0) \\
& + \frac{\partial f_5}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(E - E_0) \\
& + \frac{\partial f_5}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(I - I_0) \\
& + \frac{\partial f_5}{\partial H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\partial f_5}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(R - R_0) \\
& + \frac{\partial f_5}{\partial V}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(V - V_0)
\end{aligned}$$

$$f_6(S, E, I, H, R, V)$$

$$\begin{aligned}
& \approx f_6(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) \frac{\partial f_6}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(S - S_0) \\
& + \frac{\partial f_6}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(E - E_0) \\
& + \frac{\partial f_6}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(I - I_0) \\
& + \frac{\partial f_6}{\partial H}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(H - H_0) \\
& + \frac{\partial f_6}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(R - R_0) \\
& + \frac{\partial f_6}{\partial V}(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0)(V - V_0)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, sistem persamaan (2.11) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks yaitu,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dimana

$$A = \begin{pmatrix} f_{1(S)} & f_{1(E)} & f_{1(I)} & f_{1(H)} & f_{1(R)} & f_{1(V)} \\ f_{2(S)} & f_{2(E)} & f_{2(I)} & f_{2(H)} & f_{2(R)} & f_{2(V)} \\ f_{3(S)} & f_{3(E)} & f_{3(I)} & f_{3(H)} & f_{3(R)} & f_{3(V)} \\ f_{4(S)} & f_{4(E)} & f_{4(I)} & f_{4(H)} & f_{4(R)} & f_{4(V)} \\ f_{5(S)} & f_{5(E)} & f_{5(I)} & f_{5(H)} & f_{5(R)} & f_{5(V)} \\ f_{6(S)} & f_{6(E)} & f_{6(I)} & f_{6(H)} & f_{6(R)} & f_{6(V)} \end{pmatrix}$$

atau

$A =$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 & -\beta_E S & -\beta_I S & -\beta_H S & 0 & -\beta_V S \\ \zeta_2 & \beta_E S E - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) & \beta_I S & \beta_H S & 0 & \beta_V S \\ 0 & \alpha(1-p) & -(q + \gamma_2 + \mu_I) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -(w + \gamma_3 + \mu_H) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

dimana

$$\zeta_1 = -\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S$$

$$\zeta_2 = \beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V$$

Lalu substitusikan nilai $S = S_0, E = E_0, I = I_0, H = H_0, R = R_0, V =$

V_0 pada matriks A sehingga diperoleh,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\mu_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \gamma_1 + \mu_E) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1-p) & -(q + \gamma_2 + \mu_I) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -(w + \gamma_3 + \mu_H) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

Matriks A_0 adalah matriks Jacobi yang berukuran 6x6. Jumlah persamaan pada sistem persamaan diferensial dalam model matematika yang

digunakan berperan penting dalam menentukan ukuran matriks Jacobi. Matriks Jacobi yang telah disusun dapat digunakan untuk menghitung kestabilan dari model matematika yang digunakan.

2.1.3.2 Titik Ekuilibrium

Menurut (R.Resmawan, 2020) mendefinisikan titik ekuilibrium dari suatu sistem adalah titik kesetimbangan yang membuat sistem tersebut tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Jika diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$, yang memiliki solusi, dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Suatu vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik ekuilibrium (W.E. Boyce, 2017). Yang berarti nilai titik ekuilibrium dapat diperoleh dengan melakukan substitusi ke titik – titik lainnya.

Titik ekuilibrium terdiri dari dua jenis yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium yaitu titik kesetimbangan disaat tidak terjadi infeksi penyakit dalam sebuah populasi. Sedangkan titik ekuilibrium endemik yaitu titik kesetimbangan disaat terjadi infeksi penyakit dalam sebuah populasi. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear berikut:

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{y} = 1 - (x^2 + y^2)$$

Berdasarkan definisi menurut (P. Van den Driessche, 2002) maka $\dot{x} = \dot{y} = 0$

$$-x = 0$$

$$1 - (x^2 + y^2) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

Substitusi $x = 0$ ke persamaan $\dot{y} = 0$, maka

$$1 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$1 - (0 + y^2) = 0$$

$$y = \pm 1$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium (0,1) dan (0,-1).

2.1.3.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (eigen vector) dari $\mathbf{A}$ jika $\mathbf{A}x$ adalah sebuah kelipatan skalar dari x , maka persamaanya dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{A}x = \lambda x \quad (2.12)$$

Untuk skalar sembarang λ . Skalar λ disebut *eigen value* dari $\mathbf{A}$ dan x disebut sebagai vektor dari $\mathbf{A}$ yang bergantung dengan λ . Lalu *eigen value* dari matriks $\mathbf{A}$ dapat diperoleh dengan persamaan (2.12) kemudian dapat dituliskan kembali $\mathbf{A}x = \lambda x$ sebagai (Waluya, 2006)

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})x = 0 \quad (2.13)$$

Dimana $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas, untuk mendapatkan *eigen value* dari λ , maka perlu dicari suatu solusi bukan nol dari persamaan (2.11) jika dan hanya jika

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.14)$$

atau

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.15)$$

Persamaan polinomial terhadap variabel λ dapat diperoleh berdasarkan persamaan (2.11). Skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik yang tak lain adalah *eigen value* dari $\mathbf{A}$.

2.1.3.4 Sifat Kestabilan Titik Ekuilibrium

Sifat kestabilan titik ekuilibrium dapat digunakan untuk mengetahui penyelesaian sistem persamaan diferensial. Penyelesaian kestabilan titik ekuilibrium dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Secara umum titik ekuilibrium memiliki beberapa syarat yaitu

Tabel 2.3 Jenis Kestabilan Titik Tetap Sistem Linier

Nilai Eigen	Kestabilan Titik Tetap	Jenis Titik Tetap (x^*, y^*)
$\lambda_{1,2} > 0$	Tidak stabil	Titik simpul (<i>Node</i>)
$\lambda_{1,2} < 0$	Stabil asimtotik	Titik simpul (<i>Node</i>)
$\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_1 > 0$	Tidak stabil	Titik pelana (<i>Saddle</i>)
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Titik bintang (<i>Star</i>)
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Titik simpul (<i>Node</i>)
$\lambda_{1,2} = k \pm bi$, dengan $k > 0$ $k < 0$	Tidak stabil	Titik spiral
$\lambda_1 = bi$ dan $\lambda_2 = -bi$ dengan $i \neq 0$	Stabil	Titik pusat (<i>Center</i>)

2.1.3.5 Kriteria Routh – Hurwitz

Perhitungan *eigen value* dapat diperoleh dengan menemukan akar-akar dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A)$. Perlu diketahui akar-akar dari persamaan karakteristik cukup sulit didapatkan. Maka dari itu, perlu sebuah cara untuk menemukan akar – akar persamaan karakteristik bernilai negatif atau yang bernilai positif. Jika telah ditemukan *eigen value* dari sebuah matriks A maka metode Routh – Hurwitz dapat digunakan (G.J.Olsder, 2003).

$$\det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0 \quad (2.16)$$

dimana $a_0 = 1$. Sistem persamaan karakteristik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^j + a_1 \lambda^{j-1} + \dots + a_{j-1} \lambda + a_j = 0 \quad (2.17)$$

Dimana $a_0 = 1$ dan a_j dengan $j = 1, 2, \dots, n$ adalah bilangan real. Maka didefinisikan matriks j sebagai berikut

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \dots$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{bmatrix}$$

Determinan matriks Routh – Hurwitz tingkat ke- j dinotasikan dengan Δ_j , dengan $j = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan (2.15). Jika setiap Δ_j bernilai positif maka semua akar – akar persamaan karakteristik persamaan (2.14) mempunyai nilai real negatif.

2.1.3.6 Matriks Generasi Selanjutnya

Pendekatan matriks generasi selanjutnya bergantung pada pengamatan karakteristik bilangan reproduksi dasar yang dilakukan dengan menganggap transmisi penyakit terjadi dalam keturunan, yaitu melahirkan individu baru yang juga terinfeksi. Yang berarti proses infeksi berkaitan dengan proses demografi dalam generasi yang terinfeksi secara berurutan (Boyce & DiPrima, 2001). Jika jumlah generasi selanjutnya bertambah pesat, maka dapat terjadi epidemi. Berikut ini langkah – langkah penerapan matriks generasi selanjutnya:

1. Persamaan diferensial biasa dibuat sedemikian hingga n kompartemen pertama dari sistem persamaan diferensial biasa sesuai dengan kompartemen terinfeksi. Sistem persamaan diferensial ini dapat ditulis seperti berikut:

$$\begin{aligned} x'_k &= f_k(x, y) \\ y'_j &= g_j(x, y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

2. Persamaan pada ruas kanan dapat dipisah menjadi

$$\begin{aligned} x'_k &= f_k(x, y) - V_k(x, y) \quad k = 1, 2, \dots, n \\ x'_k &= f_k(x, y) \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dengan $F_k(x, y)$ merupakan tingkat kemunculan infeksi pada kompartemen k dan $V_k(x, y)$ merupakan transisi lainnya yaitu kelahiran, perkembangan, kematian, penyakit dan kesembuhan. Asumsikan $y' = g(0, y)$ mempunyai titik ekuilibrium $\varepsilon_{0,j} = (0, y_0)$ sehingga semua keadaan dengan kondisi awal dalam bentuk $(0, y)$ mendekati $(0, y_0)$ maka didapatkan

$$F = \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x_j}, \quad V = \frac{\partial V_k(x, y)}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

Dimana $F_k(x, y)$ dan $V_k(x, y)$ merupakan linierisasi dari bentuk persamaan (2.20) disekitar titik ekuilibrium, sehingga matriks k didefinisikan sebagai (Martcheva, 2015).

$$k = FV^{-1} \quad (2.21)$$

2.1.3.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan suatu batasan terjadinya penyebaran suatu penyakit karena adanya individu yang terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar disebut juga dengan rasio yang dapat disimbolkan dengan R_0 . Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menemukan *eigen value* (nilai eigen) paling besar dari matriks generasi selanjutnya (P. Van den Driessche, 2002). Perlu diperhatikan beberapa kondisi yang muncul setelah menentukan bilangan reproduksi dasar (R.Resmawan, 2020):

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit diperkirakan dapat hilang.
2. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit dapat disebut wabah.
3. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit dapat menetap.

Radius spektral dari matriks A ditentukan sebagai maksimum dari nilai mutlak dari *eigen value* matriks A :

$$\rho(A) = \sup|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)$$

dimana $\sigma(A)$ adalah himpunan *eigen value* dari A . Sehingga bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai *eigen value* positif paling besar dari matriks generasi selanjutnya yang dapat dinyatakan sebagai:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.22)$$

Dimana ρ adalah nilai eigen dominan. Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit adalah satu-satunya titik ekuilibrium dan bersifat stabil asimtotik lokal. Dan jika $R_0 > 1$ maka ada dua titik ekuilibrium: titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, dimana titik ekuilibrium endemik bersifat stabil asimtotik lokal (Martcheva, 2015). Analisis untuk menentukan parameter apa saja yang berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar supaya tidak terjadi endemik yaitu :

1. Memilih semua nilai yang menunjukkan infeksi dan perubahan populasi dari sistem persamaan.
2. Melakukan linearisasi yang direpresentasikan dengan suatu matriks Jacobian (J). Linearisasi dilakukan pada kompartemen yang terinfeksi saat titik ekuilibriumnya bebas penyakit.
3. Melakukan dekomposisi terhadap matriks Jacobi (J) menjadi matriks Transmisi (F) dan matriks Transisi (V). Matriks Transisi merupakan

suatu matriks dengan entri yang menggambarkan terjadinya sebuah infeksi baru. Matriks Transmisi merupakan suatu matriks dengan entri yang menggambarkan adanya suatu perubahan pada populasi yang terinfeksi.

4. Menghitung nilai R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$.

2.1.4 Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan model optimasi untuk menentukan nilai fungsi kontrol yang digunakan dalam sistem dinamik supaya fungsi kendala (*constrain*) terpenuhi dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi objektif (Lewis, Vrabie, & Syrmos, 2012). Fungsi objektif meliputi fungsi kontrol $u(t)$ dan variabel state $x(t)$ yang akan dioptimalkan. Secara umum, persamaan masalah kontrol optimal dirumuskan sebagai berikut:

Maksimum

$$G(t) = L(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} M(x(t), u(t), t) dt \quad (2.23)$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$, kondisi akhir $x(t_f) = x_f$ dan fungsi kontrol $u(t)$ bergantung waktu t . Perlu diketahui bahwa L , M dan f adalah fungsi skalar, sedangkan t_0 adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir pemberian kontrol. Diperlukan metode lain yaitu Metode Prinsip Maksimum Pontryagin untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang sifatnya nonlinier. (Lewis, Vrabie, & Syrmos, 2012). Sebagai contoh disini, dipaparkan penelitian (Mandal,

et al., 2020) yang menjelaskan tentang pembahasan kontrol optimal beserta proses hitungnya sebagai berikut:

1. Menentukan masalah kontrol optimal. Masalah kontrol optimal yang digunakan merujuk pada artikel (Mandal, et al., 2020) yang dirumuskan sebagai:

$$\min_{M \in \Omega} J(M) = \int_0^{t_f} [\zeta_1 I(t) + \zeta_2 M(t)] dt$$

Dimana ζ_1 menunjukkan jumlah populasi *Infected* dan ζ_2 menunjukkan kebijakan pemerintah terkait *lockdown*.

2. Menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dalam memperoleh kondisi yang dibutuhkan saat kontrol optimal. Didefinisikan fungsi Lagrangian sebagai berikut:

$$L(I, M) = \zeta_1 I(t) + \zeta_2 M(t)$$

Dengan fungsi Hamiltonian yang didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} H(I, M, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \\ = L(I, M) + \lambda_1(t) \frac{dS}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dE}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dQ}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dI}{dt} \\ + \lambda_5(t) \frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

3. Menentukan nilai maksimum dari fungsi Hamiltonian terhadap variabel kontrol sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) = \frac{d}{dt} (\zeta_2 + (\lambda_5 - \lambda_1)pS) = -\dot{\lambda}_1 pS - \lambda_1 p\dot{S} + \dot{\lambda}_5 pS + \lambda_5 p\dot{S} \\ &= kE((\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)pS + (A - kSE + b_1Q - oS)(\lambda_5 - \lambda_1)p + poS\lambda_5 \end{aligned}$$

4. Menentukan fungsi Hamiltonian dengan melakukan turunan kedua dikarenakan parameter M belum eksplisit sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) &= [k(E(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)\dot{E}) - o\dot{\lambda}_1]pS \\
&+ (kSE(\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)p\dot{S} \\
&+ (A - k(\dot{S}E + \dot{E}S) + b_1\dot{Q} - o\dot{S})(\lambda_5 - \lambda_1)p \\
&+ (A - kSE + b_1Q - oS)(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_1)p + poS\dot{\lambda}_5 + po\dot{S}\lambda_5
\end{aligned}$$

Dimana $k = \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$

5. Menentukan fungsi kontrol dengan menggunakan persamaan *state* dan *co-state* sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) = \phi_1(t)M(t) + \phi_2(t) = 0$$

Kemudian diperoleh penyelesaian kontrol singular sebagai berikut:

$$M_{singular}(t) = -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}$$

dengan $\phi_1(t) \neq 0$ dan $a \leq -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \leq b$.

6. Menentukan kondisi kontrol optimal pada interval nontrivial sebagai berikut:

Jika $\frac{\partial H}{\partial M} < 0$ maka $M^*(t) = b$

Jika $\frac{\partial H}{\partial M} > 0$ maka $M^*(t) = a$

Jika $\frac{\partial H}{\partial M} = 0$ maka $M_{singular}(t) = -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}$

Sehingga kontrol optimal dipenuhi oleh $\phi_1(t) < 0$ dan $a \leq -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \leq b$

2.1.4.1 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang umumnya bersifat nonlinier.

Berikut adalah langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan prinsip maksimum pontryagin. (Naidu, 2002).

1. Menyusun fungsi Hamiltonian

$$H(x, (t), u(t), \lambda(t), t) = M(x, (t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), \lambda(t), t) \quad (2.24)$$

2. Menentukan nilai maksimum H terhadap semua vektor kontrol

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai kontrol optimal $u^*(t)$ yang memungkinkan dengan

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Maka diperoleh fungsi hamiltonian optimal H^* dengan memanfaatkan $u^*(t)$ yang diperoleh dari langkah 2, yaitu

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Menyelesaikan persamaan *costate* dan *statenya*

$$\dot{\lambda}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir x_f , diperoleh

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda^*(t) \right]_{t_f}' \delta x_f = 0$$

5. Langkah terakhir mensubstitusikan semua hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ yang ada di langkah 2, sehingga akan diperoleh kontrol optimalnya.

2.1.5 Coronavirus Disease 2019 (Covid-19)

Coronavirus Disease 2019 (Covid-19) merupakan suatu penyakit yang dapat menular, penyakit ini disebabkan oleh virus *Severe Acute Respiratory Syndrom-Corona Virus-2 (SARS-CoV-2)*. *Coronavirus Disease 2019 (Covid-19)* merupakan sebutan ketika virus sudah menginfeksi. Virus ini dapat menular dengan cepat dan kini virus tersebut telah menyebar diseluruh belahan dunia. Beberapa negara mengeluarkan kebijakan untuk menutup akses masuk ke negaranya untuk menekan laju penyebaran virus Covid-19. Pemerintah Indonesia, memberlakukan sebuah kebijakan yaitu Pembatasan Sosisal Berskala Besar (PSBB) di bulan Maret – Mei 2020 untuk menekan penyebaran virus corona (Y.Yulida, 2020).

Pada beberapa pasien yang terinfeksi Covid-19 mengalami gejala ringan, gejala berat bahkan tidak mengalami gejala apapun. Kebanyakan pasien memiliki riwayat penyakit tertentu sebelum terinfeksi Covid-19 (Otalora, 2020). Berikut ini adalah langkah perlindungan diri agar tidak terpapar bahkan terinfeksi virus corona yang ada di lingkungan:

1. Membersihkan dan desinfeksi semua permukaan yang sering dipegang atau disentuh oleh tamu atau orang lain.
2. Tidak menyentuh area mulut dan hidung sebelum mencuci tangan atau memakai *hand sanitizer*.
3. Memakai masker dan menjaga jarak saat di tempat umum.
4. Menghindari bersalaman atau kontak fisik dengan orang lain.

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran

Dalam islam segala sesuatu yang berhubungan dengan kehidupan manusia telah diatur, salah satunya adalah kesehatan. Mengingat virus corona yang penyebarannya sangat cepat dan masif, maka perlu dilakukan pencegahan agar tidak terpapar atau terinfeksi oleh virus ini. Kita tahu bahwa kesehatan adalah nikmat paling besar, yang tidak bisa dibeli dengan uang. Maka hendaknya sebagai manusia perlu banyak bersyukur atas anugerah kesehatan yang telah Allah SWT berikan. Meskipun disaat kita ditimpa penyakit ataupun terinfeksi virus Covid-19, kita harus senantiasa bersabar seraya berdo'a memohon kesembuhan dari Allah SWT. Sebagaimana dalam surah Al-Anbiya' ayat 83

وَأَيُّوبَ إِذْ نَادَىٰ رَبَّهُ أَنِّي مَسَّنِيَ الضُّرُّ وَأَنْتَ أَرْحَمُ الرَّاحِمِينَ

Artinya: *“Dan (ingatlah kisah) Ayub, ketika dia berdoa kepada Tuhannya, “(Ya Tuhanku), sungguh, aku telah ditimpa penyakit, padahal Engkau Tuhan Yang Maha Penyayang dari semua yang penyayang”.*(Q.S. Al-Anbiya' ayat 83)

Menurut (Shihab, 2001) surah ini mengingatkan kita untuk senantiasa berdo'a kepada Allah saat ditimpa suatu penyakit sebab Allah Maha Penyayang pada setiap umat-Nya. Salah satu langkah pencegahan agar tidak terinfeksi virus Covid-19 yaitu dengan menjaga kebersihan.

Mengingat penyebaran virus corona yang sangat cepat, maka perlu dilakukan pencegahan diri yang maksimal dengan menjaga kebersihan contohnya mencuci tangan dan kaki sebelum masuk ke dalam rumah, mencuci pakaian setelah perjalanan jauh dan mengganti masker sebelum bepergian secara teratur. Selain itu, pencegahan diri agar tidak terpapar virus corona dapat dilakukan dengan cara berdiam diri di rumah.

Rasullullah SAW bersabda bahwa artinya :

“Dari Siti Aisyah RA, ia berkata, Ia bertanya kepada Rasulullah SAW perihal tha’un, lalu Rasulullah SAW memberitahukanku, Zaman dulu tha’un adalah azab yang dikirimkan Allah kepada siapa saja yang dikehendaki oleh-Nya, tetapi Allah menjadikannya sebagai rahmat bagi orang beriman. Tiada seseorang yang sedang tertimpa tha’un, kemudian menahan diri di rumahnya dengan bersabar serta mengharapkan ridha ilahi seraya menyadari bahwa tha’un tidak akan mengenainya selain karena telah menjadi ketentuan Allah untuknya, niscaya ia akan memperoleh ganjaran seperti pahala orang yang mati syahid” (HR. Ahmad).

Menurut tafsir Kementrian Agama RI, hadist yang diriwayatkan oleh Ahmad memiliki makna hal – hal yang dilakukan saat terjadi *tha’un* atau wabah yaitu tidak keluar rumah, sabar dan meningkatkan ibadah dengan begitu ketika orang tersebut meninggal karena wabah ia memperoleh pahala seperti orang yang meninggal dalam keadaan syahid. Berdasarkan tafsir hadits tersebut hal yang harus dilakukan adalah berdiam diri di rumah, hal ini sesuai dengan anjuran pemerintah untuk *stay at home* (tetap di rumah) saat pandemi berlangsung. Pencegahan dengan cara berdiam diri di rumah ini tergolong efektif karena dapat menekan laju penyebaran virus corona dari manusia ke manusia dan dari lingkungan ke manusia.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Dalam penelitian ini diperlukan teori-teori pendukung untuk menyelesaikan topik masalah yang telah diangkat. Topik yang diangkat pada penelitian ini yaitu menentukan analisis perilaku dinamik serta melakukan simulasi numerik model matematika dengan dan tanpa kontrol optimal pada populasi *SEIHRV*. Berdasarkan topik tersebut perlu diketahui bahwa model matematika *SEIHRV* adalah model epidemik dengan periode waktu tertentu untuk penyebaran virus Covid-19 yang disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa bergantung waktu. Maka diperlukan teori pendukung untuk menyelesaikan analisis perilaku dinamik dari model matematika tersebut.

Teori pendukung untuk menyelesaikan analisis dinamik adalah teori titik ekuilibrium, linierisasi, nilai eigen dan vektor eigen, kestabilan titik ekuilibrium, kriteria Routh – Hurwitz dan bilangan reproduksi dasar (Boyce & DiPrima, 2001). Setelah dilakukan analisis perilaku dinamik, selanjutnya dilakukan simulasi numerik model matematika dengan dan tanpa kontrol optimal. Teori pendukung yang diperlukan adalah teori fungsi kontrol optimal dan prinsip maksimum pontryagin (Armadani, 2021). Kemudian dilanjutkan simulasi numerik terhadap model penyebaran dengan dan tanpa kontrol optimal menggunakan parameter yang telah tersedia.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian kualitatif. Menurut (Prof.Dr.Sugiyono, 2017) penelitian kualitatif yaitu penelitian yang dilakukan untuk mengumpulkan informasi mengenai status suatu peristiwa yang ada berdasarkan peristiwa yang terjadi pada saat penelitian dilakukan. Penelitian kualitatif bertujuan untuk menjelaskan fenomena yang sedang terjadi saat ini yang disajikan secara sistematis, faktual dan akurat berdasarkan fakta-fakta peristiwa yang diteliti.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian adalah tahap awal sebelum penulis melakukan penelitian, beriku ini adalah tahapan pra penelitian yang dilakukan oleh penulis:

1. Menentukan topik permasalahan yang akan diangkat.
2. Melakukan kajian literasi berdasarkan topik yang diangkat yaitu kajian terhadap model matematika *SEIHRV* dengan asumsi-asumsi tertentu. Kajian alur penyebaran dilakukan untuk mengecek apakah model yang dikenalkan oleh (Chayu Yang, 2020) dapat digunakan di Indonesia khususnya Provinsi Jawa Timur.
3. Mencari data sekunder berdasarkan daftar parameter yang telah ditentukan oleh (Chayu Yang, 2020) dengan modifikasi-modifikasi tertentu berdasarkan topik penelitian yang telah ditetapkan. Data sekunder diambil dari data publik kasus Covid-19 di Provinsi Jawa Timur pada bulan Mei – Agustus 2021 yang bersumber dari: www.pusatkrisis.kemkes.go.id,

www.covid19.kemkes.go.id, www.infocovid19.jatimprov.go.id, www.m.andrafarm.com. Selain itu, data sekunder diperoleh dari jurnal referensi (Chayu Yang, 2020).

4. Melakukan perhitungan data sekunder untuk menentukan nilai parameter tertentu.

3.3 Tahapan Penelitian

3.3.1 Melakukan Analisis Dinamik Model Pada Populasi *SEIHRV*

- a. Menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit. Pada tahap ini model penyebaran Covid-19 dalam kondisi setimbang artinya tidak ada laju penularan penyakit dalam populasi. Oleh karena itu, $\beta_E, \beta_I, \beta_H, \beta_V = 0$ atau konstan sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit.
- b. Menentukan bilangan reproduksi dasar pada model matematika *SEIHRV*. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dengan menyusun matriks Jacobi terlebih dahulu dengan melakukan pelinieran. Selanjutnya akan diperoleh akar persamaan karakteristik dan nilai eigen maksimum. Nilai eigen maksimum tersebut yang menjadi bilangan reproduksi dasar.
- c. Menentukan titik ekuilibrium endemik. Untuk menentukan titik ekuilibrium endemik, model penyebaran Covid-19 dalam kondisi terdapat penyakit dalam populasi. Oleh karena itu $S = S^* \neq 0; E = E^* \neq 0; I = I^* \neq 0; H = H^* \neq 0; R = R^* \neq 0; V = V^* \neq 0$.
- d. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit. Analisis kestabilan dilakukan dengan melihat nilai eigen yang diperoleh dari bilangan reproduksi dasar.

- e. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium endemik. Analisis kestabilan dilakukan dengan melihat nilai eigen yang diperoleh dari bilangan reproduksi dasar.
- f. Menyusun fungsi kontrol optimal dengan prinsip maksimum pontryagin.

3.3.2 Melakukan Simulasi Model Pada Populasi *SEIHRV*

- a. Melakukan simulasi numerik dengan melibatkan fungsi kontrol optimal.
- b. Melakukan simulasi numerik tanpa melibatkan fungsi kontrol optimal.

3.4 Penetapan Kesimpulan

Pada tahap ini penulis menarik kesimpulan berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan. Disamping itu, pada tahap ini penulis juga memberikan saran berupa saran untuk penelitian serupa yang akan dilakukan selanjutnya.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik

Titik ekuilibrium disebut juga sebagai titik kesetimbangan atau titik tetap. Untuk memperoleh titik ekuilibrium dari model SEIHRV, maka sistem persamaan (2.7) harus memenuhi $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dV}{dt} = 0$. Sehingga sistem persamaan (2.7) dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E)E = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I)I = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{dH}{dt} = \alpha p E + qI - (w + \gamma_3 + \mu_H)H = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V = 0 \quad (4.6)$$

4.1.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi sehingga $\beta_E, \beta_I, \beta_H, \beta_V = 0$ atau konstan. Langkah awal yang dilakukan untuk menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu ambil persamaan (3.8) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda - 0 - 0 - 0 - 0 - \mu_S S = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda - \mu_S S = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu_S S = -\Lambda$$

$$\Leftrightarrow S_0 = \frac{\Lambda}{\mu_S}$$

Kemudian substitusikan $S_0 = \frac{\Lambda}{\mu_S}$ ke persamaan (4.2), sehingga diperoleh:

$$\frac{dE}{dt} = \beta_E S E + \beta_I S I + \beta_H S H + \beta_V S V - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} E + \beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} I + \beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} H + \beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} V - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E = 0$$

$$\Leftrightarrow E_0 = 0$$

Kemudian substitusikan $E_0 = 0$ ke persamaan (4.3), sehingga diperoleh:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I)I = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1-p)0 - (q + \gamma_2 + \mu_I)I = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - (q + \gamma_2 + \mu_I)I = 0$$

$$\Leftrightarrow I_0 = 0$$

Kemudian substitusikan $E_0 = 0$ dan $I_0 = 0$ ke persamaan (4.4), sehingga diperoleh:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H)H = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha p 0 + q 0 - (w + \gamma_3 + \mu_H)H = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - (w + \gamma_3 + \mu_H)H = 0$$

$$\Leftrightarrow H_0 = 0$$

Kemudian substitusikan $E_0 = 0$, $H_0 = 0$ dan $I_0 = 0$ ke persamaan (4.5), sehingga diperoleh:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 0 + \gamma_2 0 + \gamma_3 0 - \mu_R R = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - \mu_R R = 0$$

$$\Leftrightarrow R_0 = 0$$

Kemudian substitusikan $E_0 = 0$, $H_0 = 0$ dan $I_0 = 0$ ke persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V = 0$$

$$\Leftrightarrow \xi_1 0 + \xi_2 0 + \xi_3 0 - \sigma V = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - \sigma V = 0$$

$$\Leftrightarrow V_0 = 0$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem persamaan (2.7)

$$\text{yaitu: } X_0 = (S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0, 0 \right).$$

4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Setelah menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit, langkah selanjutnya adalah menentukan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) pada sistem persamaan (2.7) dengan menentukan *eigen value* maksimum yang diperoleh dari Matriks Generasi Selanjutnya. Langkah-langkah penentuan bilangan reproduksi dasar sistem (2.7) antara lain sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan yang menunjukkan terjadinya kasus baru terinfeksi dan perubahan dalam kelas individu terinfeksi. Pada sistem persamaan (2.7), subsistem yang terinfeksi adalah E, I, H, V .
2. Menentukan linierisasi terhadap subsistem terinfeksi yang direpresentasikan dengan Matriks Jacobi (J) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} & \frac{dE}{dH} & \frac{dE}{dV} \\ \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dH} & \frac{dI}{dV} \\ \frac{dH}{dE} & \frac{dH}{dI} & \frac{dH}{dH} & \frac{dH}{dV} \\ \frac{dV}{dE} & \frac{dV}{dI} & \frac{dV}{dH} & \frac{dV}{dV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_E S_0 - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) & \beta_I S_0 & \beta_H S_0 & \beta_v S_0 \\ \alpha(1-p) & -(q + \gamma_2 + \mu_I) & 0 & 0 \\ \alpha p & q & -(w + \gamma_3 + \mu_H) & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & -\sigma \end{bmatrix}$$

3. Melakukan dekomposisi matriks Jacobi (J) menjadi, dengan F adalah matriks Transmisi dan V adalah matriks Transisi.

$$F = \begin{bmatrix} \beta_E S_0 & \beta_I S_0 & \beta_H S_0 & \beta_v S_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha(1-p) & \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \mu_3 & 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & \sigma \end{bmatrix}$$

dengan $\mu_1 = \alpha + \gamma_1 + \mu_E$, $\mu_2 = q + \gamma_2 + \mu_I$ dan $\mu_3 = w + \gamma_3 + \mu_H$

Lalu menentukan V^{-1}

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha(1-p)}{\mu_1 \mu_2} & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha(1-p)q + \alpha p \mu_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} & \frac{q}{\mu_2 \mu_3} & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ \frac{\alpha(1-p)q \xi_3 + \alpha(1-p)\mu_3 \xi_2 + \alpha p \mu_2 \xi_3 + \xi_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \sigma} & \frac{q \xi_3 + \mu_3 \xi_2}{\mu_2 \mu_3 \sigma} & \frac{\xi_3}{\mu_3 \sigma} & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix}$$

4. Menghitung $\mathcal{R}_0$ dengan menentukan $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_E(0)S_0 & \beta_I(0)S_0 & \beta_H(0)S_0 & \beta_v(0)S_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\alpha(1-p)}{\mu_1\mu_2} & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \\
\frac{\alpha(1-p)q + \alpha p\mu_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} & \frac{q}{\mu_2\mu_3} & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\
\frac{\alpha(1-p)q\xi_3 + \alpha(1-p)\mu_3\xi_2 + \alpha p\mu_2\xi_3 + \xi_1\mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma} & \frac{q\xi_3 + \mu_3\xi_2}{\mu_2\mu_3\sigma} & \frac{\xi_3}{\mu_3\sigma} & \frac{1}{\sigma}
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} k & l & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan

k

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_E(0)S_0}{\mu_1} + \frac{\beta_I(0)S_0\alpha(1-p)}{\mu_1\mu_2} + \frac{\beta_H(0)S_0(\alpha(1-p)q + \alpha p\mu_2)}{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
&+ \frac{\beta_V(0)S_0(\alpha(1-p)q\xi_3 + \alpha(1-p)\mu_3\xi_2 + \alpha p\mu_2\xi_3 + \xi_1\mu_2\mu_3)}{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma}
\end{aligned}$$

$$l = \frac{\beta_I(0)S_0}{\mu_2} + \frac{\beta_H(0)S_0q}{\mu_2\mu_3} + \frac{\beta_V(0)S_0(q\xi_3 + \mu_3\xi_2)}{\mu_2\mu_3\sigma}$$

$$m = \frac{\beta_H(0)S_0}{\mu_3} + \frac{\beta_V(0)S_0}{\mu_3\sigma}$$

$$n = \frac{\beta_V(0)S_0}{\sigma}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen matriks ($\mathbf{FV}^{-1}$) yang diperoleh dari persamaan berikut ini

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{FV}^{-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & l & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - k & -l & -m & -n \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - k)\lambda^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\beta_E(0)S_0}{\mu_1} - \frac{\beta_I(0)S_0\alpha(1-p)}{\mu_1\mu_2} - \frac{\beta_H(0)S_0(\alpha(1-p)q + \alpha p\mu_2)}{\mu_1\mu_2\mu_3} - \frac{\beta_v(0)S_0(\alpha(1-p)q\xi_3 + \alpha(1-p)\mu_3\xi_2 + \alpha p\mu_2\xi_3 + \xi_1\mu_2\mu_3)}{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma} \right) \lambda^3 = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

dan

$$\lambda_4$$

$$= \frac{\beta_E(0)S_0}{\mu_1} + \frac{\beta_I(0)S_0\alpha(1-p)}{\mu_1\mu_2} + \frac{\beta_H(0)S_0(\alpha(1-p)q + \alpha p\mu_2)}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \frac{\beta_v(0)S_0(\alpha(1-p)q\xi_3 + \alpha(1-p)\mu_3\xi_2 + \alpha p\mu_2\xi_3 + \xi_1\mu_2\mu_3)}{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma}$$

Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral atau nilai terbesar dari nilai eigen, maka didapatkan:

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_E + \mathcal{R}_I + \mathcal{R}_H + \mathcal{R}_V$$

Dengan

$$\mathcal{R}_E = \frac{\beta_E(0)S_0}{\mu_1}$$

$$\mathcal{R}_I = \frac{\alpha(1-p)\beta_I(0)S_0}{\mu_1\mu_2}$$

$$\mathcal{R}_H = \frac{\beta_H(0)S_0(\alpha(1-p)q + \alpha p\mu_2)}{\mu_1\mu_2\mu_3}$$

$$\mathcal{R}_V = \frac{\beta_v(0)S_0(\alpha(1-p)q\xi_3 + \alpha(1-p)\mu_3\xi_2 + \alpha p\mu_2\xi_3 + \xi_1\mu_2\mu_3)}{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma}$$

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada tabel (2.1) dan tabel (2.2) maka diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (2.7) adalah $\mathcal{R}_0 = 1.421990377 \times 10^6$. Sehingga nilai $\mathcal{R}_0 > 1$, ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka penyakit dapat menjadi wabah atau akan terjadi endemik. Selain itu, karena $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, dimana titik ekuilibrium endemik bersifat stabil asimtotik lokal.

4.1.3 Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik yaitu titik ekuilibrium disaat adanya penyebaran penyakit dalam populasi. Langkah pertama dengan menggunakan persamaan (4.1) sehingga diperoleh,

$$\Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V + \mu_S)S = -\Lambda$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\Lambda}{(\beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V + \mu_S)}$$

$$\Leftrightarrow S^* = \frac{\Lambda}{(\beta_E E^* + \beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^* + \mu_S)}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.2) diperoleh,

$$\beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E)E = 0$$

$$\Leftrightarrow (\beta_E S - \mu_2)E + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV = 0$$

$$\Leftrightarrow (\beta_E S - \mu_2)E = -(\beta_I I + \beta_H H + \beta_V V)S$$

$$\Leftrightarrow E = -\frac{(\beta_I I + \beta_H H + \beta_V V)S}{(\beta_E S - \mu_1)}$$

$$\Leftrightarrow E^* = \frac{(\beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^*)S^*}{(\mu_1 - \beta_E S^*)}$$

Dimana $\mu_1 = \alpha + \gamma_1 + \mu_E$

Selanjutnya dari persamaan (4.3) diperoleh,

$$\alpha(1-p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I)I = 0$$

$$\Leftrightarrow -(q + \gamma_2 + \mu_I)I = -\alpha(1-p)E$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{-\alpha(1-p)E}{-(q + \gamma_2 + \mu_I)}$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{\alpha(1-p)E^*}{\mu_2}$$

$$\text{Dimana } \mu_2 = q + \gamma_2 + \mu_I$$

Selanjutnya dari persamaan (4.4) diperoleh,

$$\alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H)H = 0$$

$$\Leftrightarrow -(w + \gamma_3 + \mu_H)H = -\alpha p E - q I$$

$$\Leftrightarrow -(w + \gamma_3 + \mu_H)H = -(\alpha p E + q I)$$

$$\Leftrightarrow H = -\frac{(\alpha p E + q I)}{-(w + \gamma_3 + \mu_H)}$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{\alpha p E + q I}{\mu_3}$$

$$\Leftrightarrow H^* = \frac{\alpha p E^* + q I^*}{\mu_3}$$

$$\text{Dimana } \mu_3 = w + \gamma_3 + \mu_H$$

Selanjutnya dari persamaan (4.5) diperoleh,

$$\gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu_R R = -\gamma_1 E - \gamma_2 I - \gamma_3 H$$

$$\Leftrightarrow R = -\frac{(\gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H)}{-\mu_R}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H}{\mu_R}$$

$$\Leftrightarrow R^* = \frac{\gamma_1 E^* + \gamma_2 I^* + \gamma_3 H^*}{\mu_R}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.6) diperoleh,

$$\xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sigma V = -\xi_1 E - \xi_2 I - \xi_3 H$$

$$\Leftrightarrow V = -\frac{(\xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H)}{-\sigma}$$

$$\Leftrightarrow V^* = \frac{\xi_1 E^* + \xi_2 I^* + \xi_3 H^*}{\sigma}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik dari sistem persamaan (2.7) yaitu:

$$X^* = (S^*, E^*, I^*, H^*, R^*, V^*),$$

Dimana

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{(\beta_E E^* + \beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^* + \mu_S)} \\ E^* &= \frac{(\beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^*) S^*}{(\mu_1 - \beta_E S^*)} \\ I^* &= \frac{\alpha(1-p)E^*}{\mu_2} \\ H^* &= \frac{\alpha p E^* + q I^*}{\mu_3} \\ R^* &= \frac{\gamma_1 E^* + \gamma_2 I^* + \gamma_3 H^*}{\mu_R} \\ V^* &= \frac{\xi_1 E^* + \xi_2 I^* + \xi_3 H^*}{\sigma} \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.1.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Analisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi dengan metode linierisasi di sekitar titik ekuilibriumnya. Matrik Jacobi hasil linearitas dari model matematika *SEIHRV*

di sekitar titik keuilbrium bebas penyakit $X_0 = (S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) =$

$\left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$ adalah

$$J_{(X_0)} = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dS} & \frac{dS}{dE} & \frac{dS}{dI} & \frac{dS}{dH} & \frac{dS}{dR} & \frac{dS}{dV} \\ \frac{dE}{dS} & \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} & \frac{dE}{dH} & \frac{dE}{dR} & \frac{dE}{dV} \\ \frac{dI}{dS} & \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dH} & \frac{dI}{dR} & \frac{dI}{dV} \\ \frac{dH}{dS} & \frac{dH}{dE} & \frac{dH}{dI} & \frac{dH}{dH} & \frac{dH}{dR} & \frac{dH}{dV} \\ \frac{dR}{dS} & \frac{dR}{dE} & \frac{dR}{dI} & \frac{dR}{dH} & \frac{dR}{dR} & \frac{dR}{dV} \\ \frac{dV}{dS} & \frac{dV}{dE} & \frac{dV}{dI} & \frac{dV}{dH} & \frac{dV}{dR} & \frac{dV}{dV} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$J_{(X_0)} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\beta_E S & -\beta_I S & -\beta_H S & 0 & -\beta_V S \\ \zeta_2 & \beta_E S E - \mu_1 & \beta_I S & \beta_H S & 0 & \beta_V S \\ 0 & \alpha(1-p) & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

Dimana

$$\zeta_1 = -\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S$$

$$\zeta_2 = \beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V$$

Kemudian substitusikan nilai titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $X_0 =$

$(S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$ ke matriks (4.7) sehingga diperoleh

matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J_{(x_0)} = \begin{pmatrix} -\mu_S & -\beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & -\beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ 0 & \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} - \mu_1 & \beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & \beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & \beta_V S \\ 0 & \alpha(1-p) & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

Dimana

$$\mu_1 = \alpha + \gamma_1 + \mu_E$$

$$\mu_2 = q + \gamma_2 + \mu_I$$

$$\mu_3 = w + \gamma_3 + \mu_H$$

Nilai eigen matriks $J_{(x_0)}$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J_{(x_0)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -\mu_S & -\beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & -\beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ 0 & \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} - \mu_1 & \beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & \beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & \beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ 0 & \alpha(1-p) & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + \mu_S & \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} & \beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & \beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & \beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ 0 & \lambda - \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} + \mu_1 & -\beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & -\beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ 0 & -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R & 0 \\ 0 & -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 & \lambda + \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_S) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} + \mu_1 & -\beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 & -\beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R & 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 & \lambda + \sigma \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_S) \left[(\lambda + \sigma) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} + \mu_1 & -\beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} & 0 \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \right) \begin{vmatrix} -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 \end{vmatrix} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_S) \left[(\lambda + \sigma)(\lambda + \mu_R) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_E \frac{\Lambda}{\mu_S} + \mu_1 & -\beta_I \frac{\Lambda}{\mu_S} & -\beta_H \frac{\Lambda}{\mu_S} \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\beta_V \frac{\Lambda}{\mu_S} \right) \left(-\alpha(1-p) \begin{vmatrix} -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \\ -\xi_2 & -\xi_3 & 0 \end{vmatrix} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\lambda + \mu_2) \begin{vmatrix} -\alpha p & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \\ -\xi_1 & -\xi_3 & 0 \end{vmatrix} \right) \right] = 0 \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Untuk memperoleh persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (4.8) diperlukan bantuan *software* Maple agar persamaan karakteristik yang diperoleh itu valid, adapun persamaan karakteristik yang diperoleh yakni sebagai berikut:

$$a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda^1 + a_6 = 0$$

dengan

$$a_0 = 1 \quad (4.9)$$

$$a_1 = \frac{\mu_1 \mu_S + \mu_3 \mu_S - \lambda \beta_E + \sigma \mu_S + \mu_2 \mu_S + \mu_R \mu_S + \mu_S^2}{\mu_S}$$

$$a_2 = \frac{1}{\mu_S} (-\lambda\alpha\beta_H + \lambda\alpha\beta_I + \mu_1\mu_3\mu_S + \mu_1\sigma\mu_S + \mu_1\mu_2\mu_S + \mu_1\mu_R\mu_S + \mu_1\mu_S^2 \\ - \mu_3\lambda\beta_E + \mu_3\sigma\mu_S + \mu_3\mu_2\mu_S + \mu_3\mu_R\mu_S + \mu_3\mu_S^2 - \lambda\alpha\beta_I - \lambda\sigma\beta_E \\ - \lambda\mu_2\beta_E - \lambda\beta_E\mu_R - \lambda\beta_E\mu_S - \lambda\beta_E\xi_1 + \sigma\mu_2\mu_S + \sigma\mu_R\mu_S + \sigma\mu_S^2 \\ + \mu_2\mu_R\mu_S + \mu_2\mu_S^2 + \mu_R\mu_S^2)$$

$$a_3 = \frac{1}{\mu_S} (\mu_3\lambda\alpha\beta_I + \lambda\alpha\beta_H - \lambda\alpha\sigma\beta_H + \lambda\alpha\sigma\beta_I - \mu_2\lambda\alpha\beta_H - \lambda\alpha\beta_H\mu_R \\ - \lambda\alpha\beta_H\mu_S + \lambda\alpha\beta_{In}\mu_R + \lambda\alpha\beta_{In}\mu_S + \lambda\alpha\beta_V\xi_3 + \mu_1\mu_3\sigma\mu_S \\ + \mu_1\mu_2\mu_3\mu_S + \mu_1\mu_3\mu_R\mu_S + \mu_1\mu_3\mu_S^2 + \mu_1\sigma\mu_2\mu_S + \mu_1\sigma\mu_R\mu_S \\ + \mu_1\sigma\mu_S^2 + \mu_1\mu_2\mu_R\mu_S + \mu_1\mu_2\mu_S^2 + \mu_1\mu_R\mu_S^2 - \mu_3\lambda\alpha\beta_I - \mu_3\lambda\sigma\beta_E \\ - \mu_3\lambda\mu_2\beta_E - \mu_3\lambda\mu_R\beta_E - \mu_3\lambda\mu_S\beta_E - \mu_3\lambda\beta_V\xi_1 + \mu_3\sigma\mu_2\mu_S \\ + \mu_3\sigma\mu_R\mu_S + \mu_3\sigma\mu_S^2 + \mu_3\mu_2\mu_R\mu_S + \mu_3\mu_2\mu_S^2 + \mu_3\mu_R\mu_S^2 - \lambda\alpha\beta_H \\ - \lambda\alpha\sigma\beta_I - \lambda\alpha\beta_I\mu_R - \lambda\alpha\beta_I\mu_S - \lambda\alpha\beta_V\xi_2 - \lambda\sigma\mu_2\beta_E - \lambda\sigma\mu_R\beta_E \\ - \lambda\sigma\mu_S\beta_E - \lambda\mu_2\beta_E\mu_R - \lambda\mu_2\beta_E\mu_S - \lambda\mu_2\beta_V\xi_1 - \lambda\mu_R\beta_E\mu_S \\ - \lambda\mu_R\beta_V\xi_1 - \lambda\mu_S\beta_V\xi_1 + \sigma\mu_2\mu_R\mu_S + \sigma\mu_2\mu_S^2 + \sigma\mu_R\mu_S^2 \\ + \mu_2\mu_R\mu_S^2)$$

$$a_4 = \frac{1}{\mu_S} (\mu_3\lambda\alpha\sigma\beta_I + \mu_3\lambda\alpha\beta_I\mu_R + \mu_3\lambda\alpha\beta_I\mu_S + \mu_3\lambda\alpha\beta_V\xi_2 + \lambda\alpha\beta_H\mu_S \\ + \lambda\alpha\beta_H\mu_R + \lambda\alpha\beta_H\mu_S + \lambda\alpha\beta_V\xi_3 - \lambda\alpha\sigma\mu_2\beta_H \\ - \lambda\alpha\sigma\mu_R\beta_H - \lambda\alpha\sigma\mu_S\beta_H + \lambda\alpha\sigma\mu_R\beta_I + \lambda\alpha\sigma\mu_S\beta_I \\ - \lambda\alpha\mu_2\beta_H\mu_R - \lambda\alpha\mu_2\beta_H\mu_S - \lambda\alpha\mu_2\beta_V\xi_3 - \lambda\alpha\mu_S\beta_H\mu_R \\ + \lambda\alpha\mu_S\beta_I\mu_R + \lambda\alpha\mu_R\beta_V\xi_2 - \lambda\alpha\mu_R\beta_V\xi_3 + \lambda\alpha\mu_S\beta_V\xi_2 \\ - \lambda\alpha\mu_S\beta_V\xi_3 + \mu_1\mu_3\sigma\mu_2\mu_S + \mu_1\mu_3\sigma\mu_R\mu_S + \mu_1\mu_3\sigma\mu_S^2 \\ + \mu_1\mu_3\mu_2\mu_R\mu_S + \mu_1\mu_3\mu_2\mu_S^2 + \mu_1\mu_3\mu_R\mu_S^2 + \mu_1\mu_2\sigma\mu_R\mu_S \\ + \mu_1\sigma\mu_2\mu_S^2 + \mu_1\sigma\mu_R\mu_S^2 + \mu_1\mu_2\mu_R\mu_S^2 - \mu_3\lambda\alpha\sigma\beta_I - \mu_3\lambda\alpha\beta_I\mu_R \\ - \mu_3\lambda\alpha\beta_I\mu_S - \mu_3\lambda\alpha\beta_I\xi_2 - \mu_3\lambda\sigma\mu_2\beta_E - \mu_3\lambda\sigma\mu_R\beta_E - \mu_3\lambda\sigma\mu_S\beta_E \\ - \mu_3\lambda\mu_2\beta_E\mu_R - \mu_3\lambda\mu_2\beta_E\mu_S - \mu_3\lambda\mu_2\beta_V\xi_1 - \mu_3\lambda\mu_R\beta_E\mu_S \\ - \mu_3\lambda\mu_R\beta_V\xi_1 - \mu_3\lambda\mu_S\beta_V\xi_1 + \mu_2\mu_3\sigma\mu_R\mu_S + \mu_3\sigma\mu_2\mu_S^2 \\ + \mu_3\sigma\mu_R\mu_S^2 + \mu_3\mu_2\mu_R\mu_S^2 - \lambda\alpha\sigma\beta_H - \lambda\alpha\beta_H\mu_R - \lambda\alpha\beta_H\mu_S \\ - \lambda\alpha\beta_V\xi_3 - \lambda\alpha\sigma\beta_I\mu_R - \lambda\alpha\sigma\beta_I\mu_S - \lambda\alpha\beta_V\mu_R\xi_2 - \lambda\alpha\beta_V\mu_S\xi_2 \\ - \mu_2\lambda\sigma\mu_R\beta_E - \mu_2\lambda\sigma\mu_S\beta_E - \mu_R\lambda\sigma\mu_S\beta_E - \mu_2\lambda\mu_S\beta_E\mu_R \\ - \lambda\mu_2\beta_V\mu_R\xi_1 - \lambda\mu_2\beta_V\mu_S\xi_1 - \lambda\mu_S\beta_V\mu_R\xi_1 + \sigma\mu_2\mu_R\mu_S^2)$$

$$\begin{aligned}
a_5 = \frac{1}{\mu_S} & (\mu_3 \lambda \alpha \rho \sigma \beta_I \mu_R + \mu_3 \lambda \alpha \rho \sigma \beta_I \mu_S + \mu_3 \lambda \alpha \rho \beta_I \mu_R \mu_S + \mu_3 \lambda \alpha \rho \beta_V \mu_R \xi_2 \\
& + \mu_3 \lambda \alpha \rho \beta_V \mu_S \xi_2 + \lambda \alpha \rho q \beta_H \mu_R + \lambda \alpha \rho q \sigma \beta_H \mu_S + \lambda \alpha \rho q \beta_H \mu_R \mu_S \\
& + \lambda \alpha \rho q \beta_V \mu_R \xi_3 + \lambda \alpha \rho q \beta_V \mu_S \xi_3 - \lambda \alpha \rho \sigma \mu_2 \beta_H \mu_R - \lambda \alpha \rho \sigma \mu_2 \beta_H \mu_S \\
& - \lambda \alpha \rho \sigma \mu_R \beta_H \mu_S + \lambda \alpha \rho \sigma \mu_R \beta_I \mu_S - \lambda \alpha \rho \mu_2 \beta_H \mu_S - \lambda \alpha \rho \mu_2 \beta_V \mu_R \xi_3 \\
& - \lambda \alpha \rho \mu_2 \beta_V \mu_S \xi_3 + \lambda \alpha \rho \mu_R \beta_V \mu_S \xi_2 - \lambda \alpha \rho \mu_R \beta_V \mu_S \xi_3 \\
& - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sigma \mu_R \mu_S + \mu_1 \mu_3 \sigma \mu_R \mu_S^2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_R \mu_S^2 + \mu_1 \mu_2 \sigma \mu_R \mu_S^2 \\
& - \mu_3 \lambda \alpha \sigma \beta_I \mu_S - \mu_3 \lambda \alpha \beta_I \mu_R \mu_S - \mu_3 \lambda \alpha \beta_V \mu_R \xi_2 - \mu_3 \lambda \alpha \beta_V \mu_S \xi_2 \\
& - \mu_3 \lambda \sigma \mu_2 \beta_E \mu_R - \mu_3 \lambda \sigma \mu_2 \beta_E \mu_S - \mu_3 \lambda \sigma \mu_R \beta_E \mu_S - \mu_3 \lambda \mu_2 \beta_E \mu_R \mu_S \\
& - \mu_3 \lambda \mu_2 \beta_E \mu_R \mu_S - \mu_3 \lambda \mu_2 \beta_E \mu_R \xi_1 - \mu_3 \lambda \mu_2 \beta_E \mu_S \xi_1 \\
& - \mu_3 \lambda \mu_S \beta_E \mu_R \xi_1 + \mu_3 \sigma \mu_2 \mu_R \mu_S^2 - \lambda \alpha q \sigma \beta_H \mu_R - \lambda \alpha q \sigma \beta_H \mu_S \\
& - \lambda \alpha q \beta_H \mu_R \mu_S - \lambda \alpha q \beta_H \mu_R \xi_3 - \lambda \alpha q \beta_V \mu_S \xi_3 - \lambda \alpha \sigma \beta_I \mu_R \mu_S \\
& - \lambda \alpha \beta_V \mu_R \mu_S \xi_2 - \lambda \sigma \beta_I \mu_R \mu_S - \lambda \mu_2 \beta_V \mu_R \mu_S \xi_1) \\
a_6 = \mu_R & (\mu_3 \lambda \alpha \rho \sigma \beta_I + \mu_3 \lambda \alpha \rho \beta_V \xi_2 + \lambda \alpha \rho q \sigma \beta_H + \lambda \alpha \rho q \beta_V \xi_3 - \lambda \alpha \rho \sigma \beta_H \mu_2 \\
& - \lambda \alpha \rho \mu_2 \beta_V \xi_3 + \mu_1 \mu_3 \sigma \mu_2 \mu_S - \mu_3 \lambda \alpha \sigma \beta_I - \mu_3 \lambda \alpha \beta_V \xi_2 \\
& - \mu_3 \lambda \mu_2 \beta_V \xi_1 - \lambda \alpha q \sigma \beta_H - \lambda \alpha q \beta_V \xi_3)
\end{aligned}$$

Untuk menemukan persamaan karakteristik diatas dilakukan dengan bantuan software Maple yang dapat dilihat pada Lampiran. Pada kriteria Routh – Hurwitz untuk $n = 6$, nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat berdasarkan kriteria Routh – Hurwitz berikut:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 > 0$$

Berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika memenuhi syarat kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Kemudian, karena pembuktian kriteria Routh-Hurwitz untuk titik kesetimbangan bebas penyakit secara umum sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, digunakan nilai parameter pada Tabel 2.2 untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan secara khusus sehingga diperoleh sebesar

$$a_0 = 1,00000208 > 0$$

$$a_1 = -9,725003787 < 0$$

$$a_2 = -35,04793772 < 0$$

$$a_3 = -13,77109160 < 0$$

$$a_4 = -1.3781313 < 0$$

$$a_5 = -0.00916379 < 0$$

$$a_6 = -0.00001283199122 < 0$$

Berdasarkan hasil kriteria tersebut dapat diketahui bahwa jenis titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil, dikarenakan terdapat beberapa kriteria yang tidak terpenuhi yaitu $a_0 > 0$ sedangkan $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 < 0$. Perubahan tanda dari positif atau sebaliknya pada kolom pertama di tabel Routh menunjukkan banyaknya akar-akar positif dari persamaan karakteristik. Selanjutnya berdasarkan persamaan karakteristik (4.9) diperoleh nilai eigen dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel (2.2) yaitu sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.002000000000$$

$$\lambda_2 = -0.005000000000$$

$$\lambda_3 = 12.5956134304374$$

$$\lambda_4 = -2.43713300248333$$

$$\lambda_5 = -0.144226881010652$$

$$\lambda_6 = -0.0822535469434475$$

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh dapat diketahui bahwa terdapat 1 akar real positif yaitu $\lambda_3 > 0$ dan 5 akar real negatif yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 < 0$. Sehingga dapat kita ketahui bahwa sifat kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit pada populasi *SEIHRV* adalah tidak stabil. Selain itu berdasarkan kriteria Routh Hurwitz persamaan (4.9) bersifat tidak stabil.

4.1.5 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Analisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi dengan metode linierisasi di sekitar titik ekuilibriumnya. Matrik Jacobi hasil linearitas dari model matematika *SEIHRV* di sekitar titik keuilbrium endemik $X^* = (S^*, E^*, I^*, H^*, R^*, V^*)$ adalah

$$J_{(X^*)} = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dS} & \frac{dS}{dE} & \frac{dS}{dI} & \frac{dS}{dH} & \frac{dS}{dR} & \frac{dS}{dV} \\ \frac{dE}{dS} & \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} & \frac{dE}{dH} & \frac{dE}{dR} & \frac{dE}{dV} \\ \frac{dI}{dS} & \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dH} & \frac{dI}{dR} & \frac{dI}{dV} \\ \frac{dH}{dS} & \frac{dH}{dE} & \frac{dH}{dI} & \frac{dH}{dH} & \frac{dH}{dR} & \frac{dH}{dV} \\ \frac{dR}{dS} & \frac{dR}{dE} & \frac{dR}{dI} & \frac{dR}{dH} & \frac{dR}{dR} & \frac{dR}{dV} \\ \frac{dV}{dS} & \frac{dV}{dE} & \frac{dV}{dI} & \frac{dV}{dH} & \frac{dV}{dR} & \frac{dV}{dV} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$J_{(X^*)} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\beta_E S & -\beta_I S & -\beta_H S & 0 & -\beta_V S \\ \zeta_2 & \beta_E SE - \mu_1 & \beta_I S & \beta_H S & 0 & \beta_V S \\ 0 & \alpha(1-p) & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

Dimana

$$\zeta_1 = -\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S$$

$$\zeta_2 = \beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V \quad (4.10)$$

$$\mu_1 = \alpha + \gamma_1 + \mu_E$$

$$\mu_2 = q + \gamma_2 + \mu_I$$

$$\mu_3 = w + \gamma_3 + \mu_H$$

Kemudian substitusikan nilai titik ekuilibrium endemik yaitu $X^* =$

$(S^*, E^*, I^*, H^*, R^*, V^*)$ ke dalam sistem (4.10) sehingga diperoleh

$$J_{(X^*)} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\beta_E S^* & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* & 0 & -\beta_V S^* \\ \zeta_2 & \beta_E S^* E^* - \mu_1 & \beta_I S^* & \beta_H S^* & 0 & \beta_V S^* \\ 0 & \alpha(1-p) & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

Dimana

$$\zeta_1 = -\beta_E E^* - \beta_I I^* - \beta_H H^* - \beta_V V^* - \mu_S$$

$$\zeta_2 = \beta_E E^* + \beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^*$$

$$\mu_1 = \alpha + \gamma_1 + \mu_E$$

$$\mu_2 = q + \gamma_2 + \mu_I$$

$$\mu_3 = w + \gamma_3 + \mu_H$$

Nilai eigen matriks $J_{(X^*)}$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J_{(X^*)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & -\beta_E S^* & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* & 0 & -\beta_V S^* \\ \zeta_2 & \beta_E S^* E^* - \mu_1 & \beta_I S^* & \beta_H S^* & 0 & \beta_V S^* \\ 0 & \alpha(1-p) & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & q & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\mu_R & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \zeta_1 & \beta_E S^* & \beta_I S^* & \beta_H S^* & 0 & \beta_V S^* \\ -\zeta_2 & \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* & 0 & -\beta_V S^* \\ 0 & -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R & 0 \\ 0 & -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 & \lambda + \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow (\lambda - \zeta_1) \begin{vmatrix} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* & 0 & -\beta_V S^* \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R & 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 & \lambda + \sigma \end{vmatrix} \\
& + \xi_2 \begin{vmatrix} \beta_E S^* & \beta_I S^* & \beta_H S^* & 0 & \beta_V S^* \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R & 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 & \lambda + \sigma \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[(\lambda - \zeta_1) \left[(\lambda + \sigma) \begin{vmatrix} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* & 0 \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} \right. \right. \\
& \left. \left. + (-\beta_V S^*) \begin{vmatrix} -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 \end{vmatrix} \right] \right] \\
& + \left[\xi_2 \left[(\lambda + \sigma) \begin{vmatrix} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* & 0 \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \end{vmatrix} \right. \right. \\
& \left. \left. + (-\beta_V S^*) \begin{vmatrix} -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + \mu_R \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 \end{vmatrix} \right] \right] = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[(\lambda - \zeta_1) \left[(\lambda + \sigma)(\lambda + \mu_R) \begin{vmatrix} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 \end{vmatrix} \right] \right. \\
& \left. + \left[(-\beta_V S^*)(\lambda + \mu_R) \begin{vmatrix} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 \end{vmatrix} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\xi_2 \left[(\lambda + \sigma)(\lambda + \mu_R) \left| \begin{array}{ccc} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 \end{array} \right| \right] + \left[(-\beta_V S^*)(\lambda + \right. \\
& \left. \mu_R) \left| \begin{array}{ccc} \lambda - (\beta_E S^* E^* - \mu_1) & -\beta_I S^* & -\beta_H S^* \\ -\alpha(1-p) & \lambda + \mu_2 & 0 \\ -\alpha p & -q & \lambda + \mu_3 \end{array} \right| \right] \right] = 0 \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (4.10) yang diperoleh adalah

$$a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda^1 + a_6 = 0 \quad (4.12)$$

Dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -E^* S^* \beta_E + \mu_1 + \mu_3 + \sigma + \mu_2 - \zeta_1 + \mu_R$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & -\mu_3 E^* S^* \beta_E + E^* S^* \sigma \beta_E + E^* S^* \mu_2 \beta_E + E^* S^* \zeta_1 \beta_E - E^* S^* \beta_E \mu_R \\
& - S^* \alpha p \beta_H + S^* \alpha p \beta_I - S^* \alpha \beta_I + S^* \zeta_2 \beta_E - S^* \beta_V \xi_1 + \mu_1 \mu_3 \\
& + \mu_3 \sigma + -\mu_3 \zeta_1 + \mu_3 \mu_1 + \mu_3 \mu_2 + \sigma \mu_r - \mu_r \zeta_1 + \mu_R \mu_1 + \mu_R \mu_2 \\
& - \sigma \zeta_1 + \sigma \mu_1 - \sigma \mu_2 - \mu_1 \zeta_1 - \mu_2 \zeta_1 + \mu_1 \mu_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & -\mu_3 \mu_R E^* S^* \beta_E - \mu_3 E^* S^* \sigma \beta_E + \mu_3 E^* S^* \zeta_1 \beta_E - \mu_3 E^* S^* \beta_E \mu_2 \\
& + \mu_3 S^* \alpha p \beta_I - \mu_R E^* S^* \beta_E \xi_1 - \mu_R E^* S^* \beta_E \mu_2 - \mu_R S^* \alpha p \beta_H \\
& + \mu_R S^* \alpha p \beta_I + E^* S^* \sigma \beta_E - E^* S^* \sigma \beta_E \mu_2 + E^* S^* \zeta_1 \beta_E \mu_2 \\
& + S^* \alpha p q \beta_H + S^* \alpha p q \beta_I + S^* \alpha p \zeta_1 \beta_H - S^* \alpha p \zeta_1 \beta_I + S^* \alpha p \zeta_2 \beta_H \\
& - S^* \alpha p \zeta_2 \beta_I - S^* \alpha p \beta_H \mu_2 + S^* \alpha p \beta_V \mu_2 - S^* \alpha p \beta_V \mu_3 \\
& - \mu_3 S^* \alpha \beta_I + \mu_3 S^* \zeta_2 \beta_E - \mu_3 S^* \zeta_1 \beta_V - \mu_r S^* \alpha \beta_I + \mu_r S^* \zeta_2 \beta_E \\
& - \mu_R S^* \zeta_1 \beta_V - S^* \alpha q \beta_H - S^* \alpha \sigma \beta_I + S^* \alpha \zeta_1 \beta_I - S^* \alpha \zeta_2 \beta_V \\
& + S^* \zeta_2 \beta_E + S^* \zeta_1 \beta_V \xi_1 + S^* \zeta_1 \beta_V \mu_2 + S^* \zeta_2 \beta_V \xi_1 - S^* \beta_V \mu_2 \xi_1 \\
& + \mu_3 \mu_R \sigma - \mu_3 \mu_R \zeta_1 + \mu_3 \mu_R \mu_1 + \mu_3 \mu_R \mu_2 - \mu_3 \zeta_1 \mu_2 + \mu_3 \sigma \mu_1 \\
& + \mu_3 \sigma \mu_2 - \mu_3 \zeta_1 \mu_1 - \mu_3 \zeta_1 \mu_2 + \mu_3 \mu_1 \mu_2 - \mu_R \sigma \zeta_1 + \mu_R \sigma \mu_1 \\
& - \zeta_1 \mu_1 \mu_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & -\mu_3\mu_R E^* S^* \sigma \beta_E + \mu_3\mu_R E^* S^* \zeta_1 \beta_E - \mu_3\mu_R E^* S^* \beta_E \mu_2 + \mu_3\mu_R S^* \alpha p \beta_I \\
& + \mu_3 E^* S^* \sigma \zeta_1 \beta_E - \mu_3 E^* S^* \sigma \beta_E \mu_2 + \mu_3 E^* S^* \zeta_1 \beta_E \mu_2 \\
& + \mu_3 S^* \alpha p \sigma \beta_I + \mu_3 S^* \alpha p \zeta_1 \beta_I - \mu_3 S^* \alpha p \zeta_2 \beta_I + \mu_3 S^* \alpha p \xi_1 \beta_E \\
& - \mu_3 E^* S^* \sigma \beta_E \mu_2 + \mu_r E^* S^* \beta_E \mu_2 + \mu_r S^* \alpha p q \beta_H - \mu_r S^* \alpha p \sigma \beta_H \\
& + \mu_r S^* \alpha p \sigma \beta_I + \mu_r S^* \alpha p \zeta_1 \beta_H - \mu_r S^* \alpha p \zeta_1 \beta_I + \mu_r S^* \alpha p \zeta_2 \beta_H \\
& - \mu_r S^* \alpha p \zeta_2 \beta_I - \mu_r S^* \alpha p \beta_H \mu_2 + \mu_r S^* \alpha p \beta_V \xi_2 - \mu_r S^* \alpha p \beta_V \xi_3 \\
& + E^* S^* \sigma \zeta_1 \beta_E \mu_2 + S^* \alpha p q \sigma \beta_H - S^* \alpha p q \zeta_1 \beta_H - S^* \alpha p q \beta_V \xi_3 \\
& + S^* \alpha p \sigma \beta_H \zeta_1 \\
& - S^* \alpha p \sigma \beta_I \zeta_1 + S^* \alpha p \sigma \beta_H \zeta_2 - S^* \alpha p \sigma \beta_I \zeta_2 - S^* \alpha p \sigma \beta_H \mu_2 + S^* \alpha p \zeta_1 \beta_V \mu_2 \\
& - S^* \alpha p \zeta_1 \beta_H \xi_2 + S^* \alpha p \zeta_1 \beta_V \xi_2 - \mu_3\mu_R S^* \alpha \beta_I + \mu_3\mu_R S^* \zeta_2 \beta_E \\
& - \mu_3\mu_R S^* \beta_V \xi_1 - \mu_3 S^* \alpha \sigma \beta_I + \mu_3 S^* \alpha \zeta_1 \beta_I + \mu_3 S^* \alpha \zeta_2 \beta_I \\
& - \mu_3 S^* \alpha \zeta_2 \beta_V + \mu_3 S^* \sigma \zeta_2 \beta_E + \mu_3 S^* \zeta_1 \beta_V \xi_1 + \mu_3 S^* \zeta_1 \beta_E \mu_2 \\
& + \mu_r S^* \zeta_2 \beta_V \xi_2 + \mu_r S^* \sigma \beta_E \zeta_2 + S^* \alpha \zeta_1 \beta_V \xi_2 + S^* \alpha \zeta_2 \beta_V \xi_2 \\
& + S^* \sigma \zeta_2 \beta_E \mu_2 + S^* \zeta_1 \beta_V \mu_2 \xi_1 + S^* \zeta_2 \beta_V \mu_2 \xi_1 - \mu_3\mu_R \sigma \zeta_1 \\
& + \mu_3\mu_R \mu_1 \sigma + \mu_3\mu_R \mu_2 \sigma - \mu_3\mu_R \mu_1 \zeta_1 - \mu_3\mu_R \mu_2 \zeta_1 + \mu_3\mu_R \mu_1 \mu_2 \\
& - \mu_3 \sigma \mu_2 \zeta_1 + \mu_3 \sigma \mu_2 \mu_1 - \mu_2 \mu_1 \mu_3 \zeta_1 - \mu_R \sigma \zeta_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_R \mu_2 \sigma \\
& - \mu_1 \mu_R \mu_2 \zeta_1 - \mu_1 \sigma \zeta_1 \mu_2 \\
a_5 = & \mu_3\mu_R E^* S^* \sigma \beta_E \zeta_1 - \mu_3\mu_R E^* S^* \sigma \beta_E \mu_2 + \mu_3\mu_R E^* S^* \beta_E \zeta_1 \mu_2 \\
& + \mu_3\mu_R S^* \alpha p \beta_2 \zeta_2 + \mu_3\mu_R S^* \alpha p \beta_V \xi_2 + \mu_3 E^* S^* \sigma \zeta_1 \beta_E \mu_2 \\
& - \mu_3 S^* \alpha p \sigma \zeta_1 \beta_I - \mu_3 S^* \alpha p \sigma \zeta_2 \beta_I - \mu_3 S^* \alpha p \zeta_1 \beta_V \xi_2 \\
& - \mu_3 S^* \alpha p \zeta_2 \beta_V \xi_2 + \mu_R E^* S^* \sigma \zeta_1 \beta_E \mu_2 + \mu_R S^* \alpha p q \zeta_2 \beta_H \\
& - \mu_R S^* \alpha p q \zeta_3 \beta_H + \mu_R S^* \alpha p \sigma \zeta_1 \beta_H - \mu_R S^* \alpha p \sigma \zeta_1 \beta_I \\
& + \mu_R S^* \alpha p \sigma \mu_2 \beta_H + \mu_R S^* \alpha p \zeta_1 \beta_V \xi_3 + \mu_R S^* \alpha p \zeta_2 \beta_V \xi_3 \\
& - \mu_R S^* \alpha p \beta_V \xi_3 \mu_2 - S^* \alpha p q \zeta_1 \beta_V \xi_3 - S^* \alpha p q \zeta_2 \beta_V \xi_3 \\
& + S^* \alpha p \sigma \zeta_1 \beta_H \mu_2 + S^* \alpha p \sigma \zeta_2 \beta_H \mu_2 + S^* \alpha p \zeta_1 \beta_H \mu_2 \xi_3 \\
& + S^* \alpha p \zeta_2 \beta_V \mu_2 \xi_3 - \mu_3\mu_R S^* \sigma \alpha \beta_I + \mu_3\mu_R S^* \alpha \zeta_1 \beta_I \\
& + \mu_3\mu_R S^* \alpha \zeta_2 \beta_I - \mu_3\mu_R S^* \alpha \zeta_2 \beta_V + \mu_3\mu_R S^* \sigma \xi_2 \beta_E \\
& + \mu_3\mu_R S^* \zeta_1 \beta_I \xi_1 + \mu_3\mu_R S^* \zeta_1 \beta_E \mu_2 + \mu_3\mu_R S^* \zeta_1 \beta_V \xi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_3\mu_R S^* \mu_2 \beta_V \xi_1 + \mu_3 S^* \alpha \sigma \zeta_1 \beta_I + \mu_3 S^* \alpha \sigma \zeta_2 \beta_I + \mu_3 S^* \alpha \xi_1 \beta_V \xi_2 \\
& + \mu_3 S^* \alpha \xi_2 \beta_V \xi_2 + \mu_R S^* \sigma \zeta_2 \beta_E \mu_2 + \mu_R S^* \zeta_2 \beta_V \mu_2 \xi_1 \\
& + \mu_R S^* \alpha q \beta_H \xi_2 - \mu_R S^* \alpha q \beta_V \xi_3 + \mu_R S^* \sigma \zeta_1 \beta_I + \mu_R S^* \alpha \sigma \zeta_2 \beta_I \\
& + \mu_R S^* \alpha \zeta_1 \beta_V \xi_2 + \mu_R S^* \alpha \zeta_2 \beta_V \xi_2 + \mu_R S^* \sigma \zeta_2 \beta_E \mu_2 \\
& + \mu_R S^* \zeta_1 \beta_V \mu_2 \xi_1 + \mu_R S^* \zeta_2 \beta_V \mu_2 \xi_1 + S^* \alpha q \sigma \zeta_2 \beta_H \\
& + S^* \alpha q \zeta_1 \beta_V \xi_3 + S^* \alpha q \zeta_2 \beta_V \xi_3 - \mu_3 \mu_R \sigma \mu_1 - \mu_3 \mu_R \sigma \zeta_1 \mu_2 \\
& + \mu_3 \mu_R \sigma \mu_1 \mu_2 - \mu_3 \mu_R \zeta_1 \mu_1 \mu_2 - \mu_3 \sigma \zeta_1 \mu_1 \mu_2 - \mu_R \sigma \zeta_1 \mu_1 \mu_2 \\
a_6 = & \mu_R (\mu_3 E^* S^* \sigma \zeta_1 \beta_E \mu_2 - \mu_3 S^* \alpha p \sigma \zeta_1 \beta_I - \mu_3 S^* \alpha p \sigma \zeta_2 \beta_I - \mu_3 S^* \alpha p \zeta_1 \beta_V \xi_2 \\
& + \mu_3 S^* \alpha p \zeta_2 \beta_V \xi_2 - S^* \alpha p q \sigma \zeta_1 \beta_H - S^* \alpha p q \sigma \zeta_2 \beta_H \\
& - S^* \alpha p q \zeta_1 \beta_V \xi_3 - S^* \alpha p q \zeta_2 \beta_V \xi_3 + \alpha p \sigma \zeta_1 \beta_H \mu_2 + \alpha p \sigma \zeta_2 \beta_H \mu_2 \\
& + \alpha p \zeta_1 \beta_H \mu_2 \xi_3 + \mu_3 S^* \alpha \sigma \zeta_1 \beta_I + \mu_3 S^* \alpha \sigma \zeta_2 \beta_I + \mu_3 S^* \alpha \zeta_1 \beta_V \xi_2 \\
& + \mu_3 S^* \alpha \zeta_2 \beta_V \xi_2 + \mu_3 S^* \sigma \zeta_2 \beta_E \mu_2 + \mu_3 S^* \zeta_1 \beta_V \mu_2 \xi_1 \\
& + \mu_3 S^* \zeta_2 \beta_V \mu_2 \xi_1 + S^* \alpha q \sigma \zeta_1 \beta_H + S^* \alpha q \sigma \zeta_2 \beta_H \\
& + S^* \alpha p q \sigma \zeta_2 \beta_V \xi_2 - \mu_3 \sigma \zeta_1 \mu_1 \mu_2)
\end{aligned}$$

Untuk menemukan persamaan karakteristik diatas dilakukan dengan bantuan software Maple yang dapat dilihat pada Lampiran. Pada kriteria Routh – Hurwitz untuk $n = 6$, nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat berdasarkan kriteria Routh – Hurwitz berikut:

- i. $a_0 > 0$
- ii. $a_1 > 0$
- iii. $a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0 > 0$
- iv. $b_1 > 0$
- v. $c_1 > 0$
- vi. $d_1 > 0$

Dengan

$$b_1 = \frac{(a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0)a_3 - (a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0)a_1}{a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0}$$

$$c_1 = \frac{\left(\frac{(a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0)a_3 - (a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0)a_1}{a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0} \right) (a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0)}{b_1}$$

$$- \frac{\left(\frac{(a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0)a_5 - (a_1 \cdot a_6 - a_7 \cdot a_0)a_1}{a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0} \right)}{b_1}$$

$$d_1 = c_1 \left(\frac{(a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0)a_5 - (a_1 \cdot a_6 - a_7 \cdot a_0)a_1}{a_1 \cdot a_4 - a_5 \cdot a_0} \right)$$

Berdasarkan kriteria tersebut, titik ekuilibrium endemik akan stabil jika memenuhi syarat kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Kemudian, karena pembuktian kriteria Routh-Hurwitz untuk titik ekuilibrium endemik secara umum sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, digunakan nilai parameter pada Tabel (2.2) untuk melihat kestabilan titik ekuilibrium endemik secara khusus sehingga diperoleh sebesar

- i. $a_0 = 0,9999999861 > 0$
- ii. $a_1 = 1,214991630 > 0$
- iii. $2,341418051 > 0$
- iv. $6,236627710 > 0$
- v. $1,266003016 > 0$
- vi. $1,295224387 > 0$

Berdasarkan hasil perhitungan diatas maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium endemik adalah stabil. Selanjutnya berdasarkan persamaan karakteristik (4.12) diperoleh nilai eigen dengan menggunakan nilai-nilai pada tabel parameter (2.2) dan nilai titik ekuilibrium endemik yaitu sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.005000000000000$$

$$\lambda_2 = -0.88753071739779$$

$$\lambda_3 = -0.269165365926632 + 0.193117141080525 I$$

$$\lambda_4 = -0.269165365926632 - 0.193117141080525 I$$

$$\lambda_5 = -0.0909336990827455$$

$$\lambda_6 = -0.0822313350242120$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari persamaan polinomial (4.11) dapat diketahui bahwa semua nilai eigennya mempunyai bagian real negative. Sehingga, sifat kestabilan dari titik ekuilibrium endemik pada populasi *SEIHRV* adalah stabil asimtotik lokal. Perubahan tanda dari positif atau sebaliknya pada kolom pertama di tabel Routh menunjukkan banyaknya akar-akar positif dari persamaan karakteristik.

4.1.6 Kontrol Optimal

Dalam masalah kontrol optimal ini yang ingin dilakukan oleh peneliti yaitu meminimalkan fungsi tujuan yakni meminimalkan jumlah populasi individu terinfeksi dan memaksimalkan pengobatan pada interval waktu $[0, tf]$. Berdasarkan artikel rujukan (Mandal, et al., 2020) dan (Resmawan, M, Nurwan, & N, 2020) fungsi tujuan untuk masalah kontrol optimal yang dirumuskan sebagai berikut:

$$J(\gamma_2(t)) = \min \int_0^{tf} [\zeta_1 I(t) - \zeta_2 \gamma_2^2(t)] dt$$

Dengan tf adalah waktu akhir. Fungsi di dalam tanda integral diekspresikan sebagai persamaan Lagrangian masalah kontrol optimal yaitu:

$$L(I, \gamma_2) = \zeta_1 I(t) - \zeta_2 \gamma_2^2(t) \quad (4.13)$$

Dengan ζ_1 sebagai variabel kontrol populasi individu terinfeksi, ζ_2 sebagai konstanta biaya populasi terinfeksi pada kontrol $\gamma_2(t)$, $I(t)$ sebagai populasi

individu terinfeksi, $\gamma_2(t)$ sebagai pengobatan bagi populasi individu terinfeksi. Berdasarkan persamaan (4.13) maka dapat dihitung ekspresi persamaan Hamiltonian dengan memasukkan nilai parameter pada Tabel 2.2. Persamaan Hamiltonian ini berupa penjumlahan antara sistem persamaan (2.7) dengan pengali *Lagrange* atau variabel co-state yakni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= 0.034 - 0.0000547SE - 0.0000213SI - 0.000027SH \\
 &\quad - 0.0000554SV - 0.002S \\
 \frac{dE}{dt} &= 0.0000547SE + 0.0000213SI + 0.000027SH + 0.0000554SV \\
 &\quad - 0.343E \\
 \frac{dI}{dt} &= 0.126E - 0.083I \tag{4.14} \\
 \frac{dH}{dt} &= 0.014E + 0.01I - 0.082H \\
 \frac{dR}{dt} &= 0.2E + 0.14H + 0.7I - 0.005R \\
 \frac{dV}{dt} &= 2.3E + 1.15H + 0.013I - 0.5V
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.13) maka dihitung ekspresi persamaan Hamiltonian berupa penjumlahan antara sistem persamaan (4.14) dengan pengali *Lagrange* atau variabel co-state yakni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H(L, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \\
 = L(I, \gamma_2) + \lambda_1(t) \frac{dS}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dE}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dI}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dH}{dt} + \lambda_5(t) \frac{dR}{dt} \\
 + \lambda_6(t) \frac{dV}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\zeta_1 I(t) - \zeta_2 \gamma_2^2(t)] \\
&+ \lambda_1 [0.034 - 0.0000547SE - 0.0000213SI - 0.00027SH - 0.0000554SV \\
&\quad - 0.002S] \\
&+ \lambda_2 [0.0000547SE + 0.0000213SI + 0.00027SH + 0.0000554SV \\
&\quad - 0.343E] \\
&+ \lambda_3 [0.126E - 0.083I] \\
&+ \lambda_4 [0.126E - 0.083I] \\
&+ \lambda_5 [0.2E + 0.14H + 0.7I - 0.005R] \\
&+ \lambda_6 [2.3E + 1.15H + 0.013I - 0.5V]
\end{aligned}$$

Agar mendapatkan kondisi Hamiltonian yang maksimal, maka harus dipenuhi syarat stasioner sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \gamma_2} &= 0 \\
-\zeta_2 \gamma_2^*(t) + 0.7\lambda_5 I - 0.083I &= 0 \\
\gamma_2^*(t) &= \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh kemungkinan dengan kondisi batas variabel kontrol $0 \leq \gamma_2(t) \leq 1$ yang optimal sebagai berikut:

$$\gamma_2^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2} \leq 0 \\ \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2} & \text{jika } 0 \leq \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2} \leq 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2} \geq 1 \end{cases}$$

Maka diperoleh persamaan kontrol optimal sebagai berikut:

$$\gamma_2^*(t) = \min \left\{ 1, \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2} \right\}$$

Kemudian syarat yang diperlukan untuk memperoleh kondisi optimal yaitu dengan menentukan persamaan *state* dan persamaan *co-state*. Berikut ini adalah persamaan *statenya*:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & 0.034 - 0.0000547SE - 0.0000213SI - 0.000027SH \\ & - 0.0000554SV - 0.002S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & 0.0000547SE + 0.0000213SI + 0.000027SH + 0.0000554SV \\ & - 0.343E \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = 0.126E - 0.083I$$

$$\frac{dH}{dt} = 0.014E + 0.01I - 0.082H$$

$$\frac{dR}{dt} = 0.2E + 0.14H + 0.7I - 0.005R$$

$$\frac{dV}{dt} = 2.3E + 1.15H + 0.013I - 0.5V$$

Sedangkan persamaan *co-state* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial S} = & \lambda_1(-0.0000547E - 0.0000213I - 0.000027H \\ & - 0.0000554V - 0.002) \\ & - \lambda_2(0.0000547E + 0.0000213I + 0.00027H \\ & + 0.0000554V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial E} = & \lambda_1(-0.0000547S) - \lambda_2(-0.0000547S - 0.343) \\ & - 0.126\lambda_3 - 0.014\lambda_4 - 0.2\lambda_5 - 2.3\lambda_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial I} = & \lambda_1(-0.0000213S) - 0.0000213S\lambda_2 - 0.083\lambda_3 - 0.01\lambda_4 \\ & - 0.14\lambda_5 - 1.15\lambda_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_4(t) = -\frac{\partial H}{\partial H} = & \lambda_1(-0.00027S) - \lambda_2 0.00027S - 0.0082\lambda_4 - 0.7\lambda_5 \\ & - 0.013\lambda_6\end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = -\frac{\partial H}{\partial R} = 0.005\lambda_5$$

$$\dot{\lambda}_6(t) = -\frac{\partial H}{\partial V} = \lambda_1(-0.000054S) - 0.0000554V\lambda_2 + 0.5\lambda_6$$

Selanjutnya setelah menentukan persamaan *state* dan persamaan *co-state*, maka perlu dilakukan substitusi $\gamma_2^*(t)$ yang telah didapatkan ke dalam persamaan *state* dan persamaan *co-state*. Sehingga diperoleh sistem persamaan yang optimal sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} = & 0.034 - 0.0000547SE - 0.0000213SI - 0.000027SH \\ & - 0.0000554SV - 0.002S\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = & 0.0000547SE + 0.0000213SI + 0.000027SH + 0.0000554SV \\ & - 0.343E\end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = 0.126E - \left(0.01 + \min\left\{1, \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2}\right\} + 0.003\right)I$$

$$\frac{dH}{dt} = 0.014E + 0.01I - 0.082H$$

$$\frac{dR}{dt} = 0.2E + \min\left\{1, \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2}\right\}I + 0.7H - 0.005R$$

$$\frac{dV}{dt} = 2.3E + 1.15I + 0.013H - 0.5V$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial S} = & \lambda_1(-0.0000547E - 0.0000213I - 0.000027H \\ & - 0.0000554V - 0.002) \\ & - \lambda_2(0.0000547E + 0.0000213I + 0.00027H \\ & + 0.0000554V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial E} = & \lambda_1(-0.0000547S) - \lambda_2(-0.0000547S - 0.343) \\ & - 0.126\lambda_3 - 0.014\lambda_4 - 0.2\lambda_5 - 2.3\lambda_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial I} = & \lambda_1(-0.0000213S) - 0.0000213S\lambda_2 \\ & - \lambda_3\left(0.01 + \min\left\{1, \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2}\right\} + 0.003\right)I \\ & - 0.01\lambda_4 - \min\left\{1, \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2}\right\}\lambda_5 - 1.15\lambda_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_4(t) = -\frac{\partial H}{\partial H} = & \lambda_1(-0.00027S) - \lambda_20.00027S - 0.0082\lambda_4 - 0.7\lambda_5 \\ & - 0.013\lambda_6\end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = -\frac{\partial H}{\partial R} = 0.005\lambda_5$$

$$\dot{\lambda}_6(t) = -\frac{\partial H}{\partial V} = \lambda_1(-0.000054S) - 0.0000554V\lambda_2 + 0.5\lambda_6$$

Berdasarkan uraian di atas, untuk mendapatkan nilai optimal perlu menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* yang berbentuk persamaan differensial nonlinear. Karena sistem persamaan differensial nonlinear sulit diselesaikan dengan analitik, sehingga akan diselesaikan secara numerik. Metode yang digunakan dalam penyelesaian numerik ini menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Persamaan *co-state* akan diselesaikan menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4 dan persamaan *co-state* akan diselesaikan

menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4 sebagaimana yang telah tercantum di Lampiran 3. Proses simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan bantuan ode45 di *software* Matlab.

4.2 Simulasi Pada Model *SEIHRV* Tanpa Kontrol dan Dengan Kontrol

4.2.1 Simulasi Model Dalam Kondisi Bebas Penyakit

Simulasi model matematika *SEIHRV* dalam keadaan bebas penyakit dapat dilakukan saat bilangan reproduksi dasarnya $\mathcal{R}_0 < 1$. Artinya penyebaran penyakit dalam suatu populasi akan semakin berkurang dan kemudian menghilang. Sehingga jenis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakitnya akan stabil asimtotik lokal. Dalam melakukan simulasi numerik diperlukan nilai awal dan parameter. Dalam situasi bebas penyakit diasumsikan populasi bersifat tertutup artinya tidak ada penambahan populasi dari semesta populasi yang lain. Total populasi sebesar $N = 41.496.890$ (sesuai Tabel 2.2)

Sedangkan nilai parameter yang digunakan merupakan persekitaran nilai parameter-parameter yang disajikan pada Tabel 2.2. Hal ini dikarenakan setelah melakukan analisis kestabilan bebas penyakit dengan menggunakan parameter di Tabel 2.2, sifat titik ekuilibrium bebas penyakitnya tidak stabil. Sehingga perlu menggunakan parameter-parameter baru yang merupakan persekitaran nilai parameter agar sifat titiknya stabil asimtotik lokal. Berdasarkan hal tersebut, maka dinyatakan secara rinci dituliskan sebagai berikut:

$$\Lambda = 3400; \mu_S = 0.09; \mu_E = 0.09; \mu_I = 0.04; \mu_H = 0.05; \mu_R = 0.005;$$

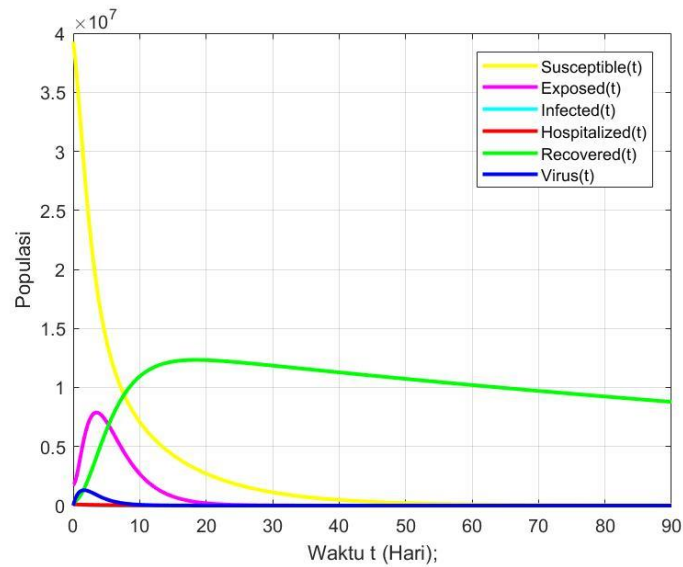
$$\alpha = 3.2 \times 10^{-6}; p = 1 \times 10^{-4}; q = 1 \times 10^{-2}; w = 1 \times 10^{-2}; \sigma = 0.5;$$

$$\gamma_1 = 0.2; \gamma_2 = 0.7; \gamma_3 = 0.104; \xi_1 = 1.3 \times 10^{-4}; \xi_2 = 15; \xi_3 = 1.213 \times 10^{-3};$$

$$\beta_I = 5.222 \times 10^{-9}; \beta_H = 2.347 \times 10^{-9}; \beta_E = 5.434 \times 10^{-8}; \beta_S = 4.2 \times 10^{-8}$$

Dari parameter diatas dapat dihasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 0.8122$, maka dapat diketahui bahwa $\mathcal{R}_0 < 1$ sehingga kondisinya bebas penyakit. Selanjutnya akan dilakukan simulasi dalam keadaan bebas penyakit dengan menganggap γ_2 sebagai konstanta dan γ_2 sebagai fungsi kontrol. Berdasarkan hal ini maka simulasi dinyatakan berturut-turut sebagai berikut:

a. Hasil Simulasi γ_2 Sebagai Konstanta.

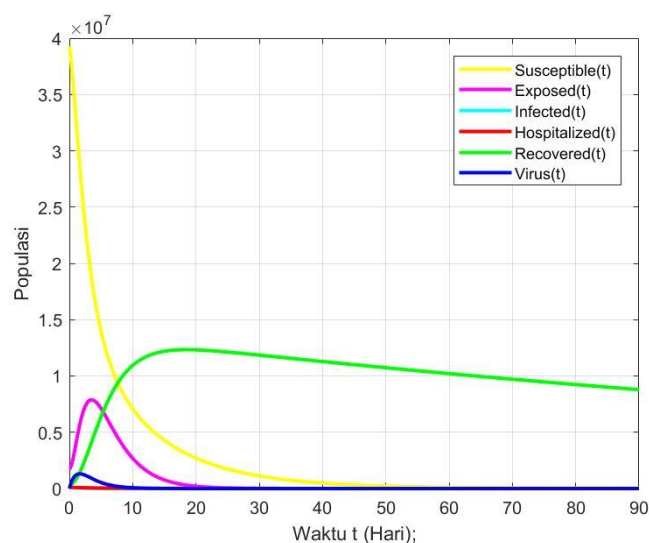


Gambar 4.1 Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan γ_2 Sebagai Konstanta.

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat diketahui, bahwa jumlah populasi *Susceptible* mengalami penurunan dalam kurun waktu 40 hari, yang semula sebesar 3.9×10^7 jiwa menjadi 1×10^6 jiwa. Populasi *Susceptible* akan terus menurun hingga berada dalam kondisi yang setimbang atau konstan. Hal tersebut dikarenakan tidak adanya interaksi langsung antara populasi *Infected*

dan *Hospitalized* dengan populasi *Susceptible*. Interaksi langsung ini tidak dapat terjadi karena populasi *Infected* dan *Susceptible* jumlahnya konstan. Pada populasi *Exposed* jumlah populasinya semula sebesar 1×10^6 jiwa, kemudian mengalami kenaikan pada interval waktu 1 sampai kurang dari 10 hari lalu mengalami penurunan hingga dalam kondisi setimbang. Penurunan jumlah individu dalam populasi ini dikarenakan individu di populasi *Exposed* tidak berinteraksi dengan individu di populasi *Infected* dan *Susceptible*. Pada populasi *Infected* dan *Hospitalized* berada dalam keadaan setimbang, hal ini dikarenakan tidak adanya individu yang terinfeksi setelah masa inkubasi oleh virus Covid-19. Pada populasi *Recovered*, jumlah populasinya mengalami kenaikan pada interval waktu 5 sampai kurang dari 20 hari kemudian berangsur menurun. Pada populasi Virus terjadi kenaikan jumlah populasi pada interval waktu 1-5 hari kemudian mengalami penurunan hingga dalam keadaan setimbang. Kesimpulannya, simulasi tersebut dapat menunjukkan perubahan jumlah populasi pada kondisi bebas penyakit dan penyebaran Covid-19 dalam suatu populasi akan semakin berkurang dan kemudian menghilang.

b. Hasil Simulasi γ_2 Sebagai Fungsi.



Gambar 4.2 Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan γ_2 sebagai fungsi kontrol.

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat diketahui, bahwa jumlah populasi *Susceptible* mengalami penurunan dalam kurun waktu 40 hari, yang semula sebesar 3.9×10^7 jiwa menjadi 1×10^6 jiwa. Populasi *Susceptible* akan terus menurun hingga berada dalam kondisi yang setimbang atau konstan. Hal tersebut dikarenakan tidak adanya interaksi langsung antara populasi *Infected* dan *Hospitalized* dengan populasi *Susceptible*. Interaksi langsung ini tidak dapat terjadi karena populasi *Infected* dan *Susceptible* jumlahnya konstan. Pada populasi *Exposed* jumlah populasinya semula sebesar 1×10^6 jiwa, kemudian mengalami kenaikan pada interval waktu 1 sampai kurang dari 10 hari lalu mengalami penurunan hingga dalam kondisi setimbang. Penurunan jumlah individu dalam populasi ini dikarenakan individu di populasi *Exposed* tidak berinteraksi dengan individu di populasi *Infected* dan *Susceptible*. Pada populasi *Infected* dan *Hospitalized* berada dalam keadaan setimbang, hal ini dikarenakan tidak adanya individu yang terinfeksi setelah masa inkubasi oleh virus Covid-19. Pada populasi *Recovered*, jumlah populasinya mengalami kenaikan pada interval waktu 5 sampai kurang dari 20 hari kemudian berangsur menurun. Pada populasi Virus terjadi kenaikan jumlah populasi pada interval waktu 1-5 hari kemudian mengalami penurunan hingga dalam keadaan setimbang.

Kesimpulannya, simulasi saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan γ_2 sebagai fungsi kontrol dalam hal pengobatan secara mandiri bagi individu yang terinfeksi tidak berpengaruh dalam meminimalkan jumlah populasi *Infected*. Hal ini dikarenakan jumlah populasi *Infected* saat kondisi bebas penyakit bernilai

konstan. Selain itu, γ_2 sebagai fungsi kontrol dalam hal pengobatan secara mandiri bagi individu yang terinfeksi juga tidak berpengaruh dalam kenaikan maupun penurunan jumlah populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Hospitalized*, *Recovered* dan *Virus*.

c. Perbandingan Hasil Simulasi γ_2 Sebagai Konstanta dan γ_2 Sebagai Fungsi.

Berdasarkan hasil simulasi saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dimana γ_2 sebagai konstanta dan γ_2 sebagai fungsi. Diperoleh informasi bahwa tidak ada perbedaan grafik yang dihasilkan dari kedua simulasi tersebut. Hal ini dikarenakan dalam kondisi bebas penyakit, jumlah individu dalam populasi *Infected* bernilai konstan sehingga γ_2 sebagai fungsi tidak berpengaruh dalam populasi tersebut. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pemberlakuan γ_2 sebagai konstanta maupun sebagai fungsi dampaknya sama dalam kondisi bebas penyakit.

4.2.2 Simulasi Model Dalam Kondisi Endemik

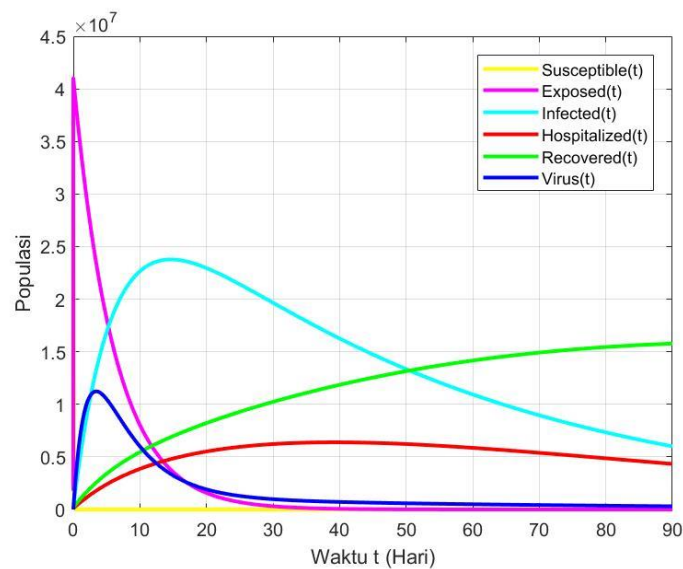
Simulasi model matematika *SEIHRV* dalam keadaan endemik dapat dilakukan saat bilangan reproduksi dasarnya $\mathcal{R}_0 > 1$. Artinya wabah atau penyakit dapat menyebar dalam populasi. Dalam melakukan simulasi numerik diperlukan nilai awal dan parameter. Sehingga jenis kestabilan titik ekuilibrium endemiknya akan stabil asimtotik lokal. Adapun nilai awal yang digunakan dalam simulasi numerik khususnya pada kondisi endemik dimana populasi terinfeksi tidak sama dengan nol, berlaku $S(0) = 39273012$; $E(0) = 1780902$; $I(0) = 145977$; $H(0) = 101520$; $R(0) = 195479$; $V(0) = 100$ sehingga total populasi $N = 41.496.890$ (sesuai Tabel 2.2). Sedangkan

nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi model dalam kondisi endemik bersumber dari data kasus Covid-19 Provinsi Jawa Timur dan artikel rujukan (Chayu Yang, 2020).

Berdasarkan nilai parameter tersebut dapat dihasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 1.4219903 \times 10^6$, maka dapat diketahui bahwa $\mathcal{R}_0 > 1$ sehingga kondisinya endemik. Selain itu dapat diketahui bahwa terdapat 2 jenis titik ekuilibrium yakni bebas penyakit dan endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit yang diperoleh yakni $X_0 = (S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) = (17, 0, 0, 0, 0, 0)$. Sedangkan titik ekuilibrium endemik yang diperoleh yakni $X^* = (S^*, E^*, I^*, H^*, R^*, V^*) = (638.994, 1162.4548, 1764.690, 413.674, 82786.734, 9416.89203)$.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi dalam kondisi endemik dengan menganggap γ_2 sebagai konstanta dan γ_2 sebagai fungsi kontrol, yaitu sebagai berikut:

a. Hasil Simulasi γ_2 Sebagai Konstanta.



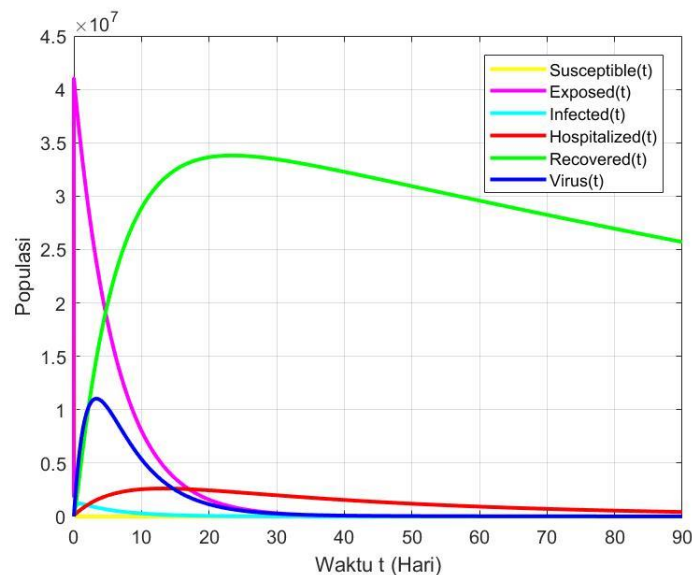
Gambar 4.3 Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan γ_2 sebagai konstanta.

Berdasarkan Gambar 4.3 dapat diketahui bahwa jumlah populasi *Susceptible* tidak mengalami perubahan atau konstan dalam 90 hari. Pada populasi *Exposed* jumlah populasinya mengalami penurunan dalam rentang waktu 1 sampai 25 hari. Hal ini dikarenakan individu dalam populasi *Exposed* mengalami masa inkubasi karena terpapar oleh virus Covid-19, kematian alami dan kesembuhan. Kemudian populasi *Exposed* menjadi konstan dalam rentang waktu 25 sampai 90 hari. Pada populasi *Infected* dalam rentang waktu 1 sampai 20 hari mengalami kenaikan, hal ini dikarenakan individu yang terpapar telah menjadi individu yang terinfeksi setelah melewati masa inkubasi. Kemudian populasi *Infected* mengalami penurunan hingga hari ke 90 sebesar 6×10^6 jiwa dikarenakan adanya kematian alami dan kesembuhan pada individu yang terinfeksi. Pada populasi *Hospitalized* jumlah populasinya mengalami kenaikan jumlah populasi pada rentang waktu 2 sampai 60 hari, hal ini disebabkan adanya individu yang terpapar kemudian dibawa ke rumah sakit dan individu yang terinfeksi kemudian dibawa ke rumah sakit. Kemudian jumlah populasi *Hospitalized* pada hari ke-61 mulai mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian alami, kematian akibat Covid-19 dan kesembuhan. Pada populasi *Recovered*, jumlah populasinya mengalami kenaikan secara stabil mulai hari pertama yang disebabkan oleh kesembuhan dari individu yang terpapar, terinfeksi dan dirawat di rumah sakit. Perlu diketahui bahwa populasi *Recovered* juga mengalami pengurangan populasi akibat kematian alami, sehingga kenaikan dari grafiknya termasuk landai. Selanjutnya populasi Virus yang ada di lingkungan mengalami kenaikan populasi dalam

rentang waktu 1-5 hari. Kemudian setelah hari ke-5, populasi Virus mengalami penurunan hingga menuju kondisi yang setimbang. Hal ini disebabkan jumlah populasi *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized* yang mengalami penurunan.

Kesimpulannya, simulasi tersebut dapat menunjukkan perubahan jumlah populasi pada kondisi endemik dan terjadi penyebaran penyakit Covid-19 dalam suatu populasi sehingga dapat menyebabkan wabah atau endemik.

b. Hasil Simulasi γ_2 Sebagai Fungsi Kontrol.



Gambar 4.4 Grafik Dinamika Populasi Saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan γ_2 sebagai fungsi kontrol.

Berdasarkan Gambar 4.4 dapat diketahui bahwa jumlah populasi *Susceptible* tidak mengalami perubahan atau konstan dalam 90 hari. Pada populasi *Exposed* jumlah populasinya mengalami penurunan yang signifikan dalam rentang waktu 1 sampai 20 hari. Hal ini dikarenakan individu dalam populasi *Exposed* mengalami masa inkubasi karena terpapar oleh virus Covid-19, kematian alami dan kesembuhan. Kemudian populasi

Exposed menjadi konstan dalam rentang waktu 24 sampai 90 hari. Pada populasi *Infected* dalam rentang waktu 1 sampai 7 hari mengalami penurunan, hal ini dikarenakan pemberian pengobatan secara mandiri bagi individu yang terinfeksi berhasil membuat mereka sembuh. Kemudian populasi *Infected* bernilai konstan pada hari ke-8 sampai hari ke-90. Pada populasi *Hospitalized* jumlah populasinya mengalami kenaikan pada rentang waktu 2 sampai 10 hari, hal ini disebabkan adanya individu yang terpapar kemudian dibawa ke rumah sakit dan individu yang terinfeksi kemudian dibawa ke rumah sakit. Kemudian jumlah populasi *Hospitalized* pada hari ke-21 mulai mengalami penurunan hingga dalam kondisi yang setimbang, hal ini dikarenakan adanya kematian alami, kematian akibat Covid-19 dan kesembuhan. Pada populasi *Recovered*, jumlah populasinya mengalami kenaikan sejak hari ke-1 sampai hari ke-20, hal ini dikarenakan semakin banyaknya jumlah individu yang telah sembuh dari populasi *Exposed*, *Infected* dan *Hospitalized*. Selanjutnya jumlah populasi *Recovered* mengalami penurunan dari hari ke-20 sampai hari ke-90, hal ini dipengaruhi oleh jumlah populasi *Exposed*, *Infected* dan *Hospitalized* yang juga mengalami penurunan. Selanjutnya populasi Virus yang ada di lingkungan mengalami kenaikan populasi dalam rentang waktu 1-5 hari. Kemudian setelah hari ke-5, populasi Virus mengalami penurunan hingga menuju kondisi yang setimbang. Hal ini disebabkan jumlah populasi *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized* yang mengalami penurunan.

Kesimpulannya, simulasi saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan γ_2 sebagai fungsi kontrol dalam hal pengobatan secara mandiri bagi individu yang terinfeksi sangat

berpengaruh dalam meminimalkan jumlah populasi *Infected* dan memaksimalkan jumlah populasi *Recovered*. Selain itu, ditemukan fakta baru bahwa pemberlakuan γ_2 sebagai fungsi kontrol berpengaruh dalam meminimalkan jumlah individu dalam populasi *Hospitalized*. Serta tidak berpengaruh dalam meminimalkan maupun memaksimalkan populasi *Susceptible*, *Exposed* dan *Virus*.

c. Perbandingan Hasil Simulasi γ_2 Sebagai Konstanta Dan γ_2 Sebagai Fungsi.

Berdasarkan hasil simulasi saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dimana γ_2 sebagai konstanta dan γ_2 sebagai fungsi, diperoleh hasil yang berbeda dari keduanya khususnya dalam populasi *Infected*. Saat γ_2 berlaku sebagai konstanta, pada populasi *Infected* terjadi kenaikan jumlah populasi hingga mencapai 2.4×10^7 jiwa pada hari ke-15 dan tidak menuju nilai konstan pada hari ke-90. Sedangkan saat γ_2 berlaku sebagai fungsi, pada populasi *Infected* terjadi penurunan populasi sejak hari ke-1 sampai hari ke-7 dan berubah menjadi konstan mulai hari ke-8 sampai hari ke-90. Maka dapat diketahui bahwa pemberlakuan γ_2 sebagai fungsi sangat efektif untuk meminimalkan populasi *Infected*.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis dinamik model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* (*Susceptible, Exposed, Infected, Hospitalized, Recovered* dan Virus) dengan dan tanpa kontrol diperoleh:

- a. Titik ekuilibrium bebas penyakit menghasilkan 1 titik tetap sebagai

$$\text{berikut } X_0 = (S_0, E_0, I_0, H_0, R_0, V_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu_S}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit ini bersifat tidak stabil berdasarkan hasil perhitungan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- b. Titik ekuilibrium endemik menghasilkan 6 titik tetap sebagai berikut:

$$X^* = (S^*, E^*, I^*, H^*, R^*, V^*)$$

$$S^* = \frac{\Lambda}{(\beta_E E^* + \beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^* + \mu_S)}$$

$$E^* = \frac{(\beta_I I^* + \beta_H H^* + \beta_V V^*) S^*}{(\mu_1 - \beta_E S^*)}$$

$$I^* = \frac{\alpha(1-p)E^*}{\mu_2}$$

$$H^* = \frac{\alpha p E^* + q I^*}{\mu_3}$$

$$R^* = \frac{\gamma_1 E^* + \gamma_2 I^* + \gamma_3 H^*}{\mu_R}$$

$$V^* = \frac{\xi_1 E^* + \xi_2 I^* + \xi_3 H^*}{\sigma}$$

Titik ekuilibrium endemik ini bersifat stabil asimtotik lokal berdasarkan hasil perhitungan kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- c. Bilangan reproduksi dasar yang diperoleh adalah $\mathcal{R}_0 = 1.4219903 \times 10^6 > 1$. Sehingga penyakit Covid-19 dapat menjadi wabah atau akan terjadi endemik.
- d. Kondisi optimal yang diperoleh untuk model $SEIHRV$ dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu:

$$\gamma_2^*(t) = \min \left\{ 1, \frac{(0.7\lambda_5 - 0.083\lambda_3)I}{\zeta_2} \right\}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik model $SEIHRV$ dengan dan tanpa kontrol, diperoleh:

- a. Pada kondisi bebas penyakit

Berdasarkan hasil simulasi saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dimana γ_2 sebagai konstanta dan γ_2 sebagai fungsi. Dapat diketahui bahwa tidak ada perbedaan grafik yang dihasilkan dari kedua simulasi tersebut. Hal ini dikarenakan dalam kondisi bebas penyakit, jumlah individu dalam populasi *Infected* bernilai konstan sehingga γ_2 sebagai fungsi tidak berpengaruh dalam populasi tersebut.

- b. Pada kondisi endemik

Berdasarkan hasil simulasi saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dimana γ_2 sebagai konstanta dan γ_2 sebagai fungsi, dapat diketahui bahwa γ_2 sebagai fungsi dalam hal pengobatan secara mandiri mampu meminimalkan jumlah populasi terinfeksi hingga keadaan konstan pada hari ke 10. Sedangkan saat γ_2

berlaku sebagai konstanta jumlah populasi Infected tidak kunjung dalam keadaan konstan dalam waktu 90 hari.

5.2 Saran

Pada penelitian ini telah membahas model matematika penyebaran Covid-19 pada populasi *SEIHRV* (*Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Hospitalized*, *Recovered*, dan *Virus*) yang melibatkan parameter tingkat penyembuhan dan fungsi kontrol dalam hal pengobatan secara mandiri bagi individu yang terinfeksi. Diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat ditambahkan kontrol lain contohnya penerapan 3M (Memakai masker, Mencuci tangan, Menjaga jarak) agar dapat mengetahui sebesar apa efektivitas penerapan 3M dalam mengontrol jumlah virus yang ada di lingkungan. Selain itu, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan dampak distribusi usia dalam penyebaran virus Covid-19.

DAFTAR PUSTAKA

- A.D.Susanto, F. a. (2020). Pneumonia Corona Virus Infection Disease-19 (COVID-19). *Indonesia Medical Association*, 87-94.
- Al-Qur'an dan Terjemahannya Kemenag RI. 2011. Jakarta: Adhi Aksara Abadi Indonesia
- Annas, S. P. (2020). Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139.
- Armadani, Z. (2021). Penerapan Model SEQIR Dengan Kontrol Optimal Pada Sistem Dinamik Pandemi Covid-19. *Math Unesa*, 366-379.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementarary Differential Equations and Boundawey Value Problem*. New York: Von Hoffman Press.
- Chayu Yang, J. W. (2020). Modeling the transmission of COVID-19 in the US. *KEAI*, 195-211.
- Dahlia, S. d. (2018). Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dan Dua disertai Nilai Awal dengan menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Felhberg . *Jurnal Matematika Integratif*, 51-60.
- Finizio, N, L. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- G.J.Olsder, J. V. (2003). *Mathematical Systems Theory*. Netherlands: Delft University of Technology.
- Hyman, J. M., Cushing, J. M., & Chitnis, N. (2008). Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology* , 1272-96.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Lewis, F. L., Vrabie, D., & Syrmos, V. L. (2012). *Optimal Control*. New York: John Willey & Sons.
- M.Manaqib, I. M. (2019). Mathematical Model for MERS-COV Disease Transmission with Medical Mask Usage and Vaccination. *J. Pure Apply Math*, 97-109.
- Mandal, M., Soocoojeet, J., Swapan, K. N., Anupam, K., Sayani, A., & T, K. K. (2020). A model based study on the dynamics of COVID-19: Prediction and Control. *ELSEIVER*, 136-149.
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York.
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Otalora, M. (2020). Corona Virus Disease (COVID-19) Sebuah tinjauan literature. 124-137.
- P. Van den Driessche, J. (2002). Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 29-48.
- Prof.Dr.Sugiyono. (2017). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Jakarta: Alfabeta.
- R.Resmawan, L. Y. (2020). Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission. *Cauchy*, 91.
- Resmawan, M, E., Nurwan, & N, A. (2020). ANALISIS KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENGGUNA

- NARKOBA DENGAN FAKTOR EDUKASI. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 238-248.
- Ross, S. (1989). *Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Jersey: Wiley.
- Shihab, M. (2001). *Wawasan Al-Qur'an*. Bandung: Mizan.
- Statistika, B. P. (2022, Juni 10). *Sirusa BPS*. Diambil kembali dari Sirusa BPS: <https://sirusa.bps.go.id>
- Pemprov Jatim. (2022, May 12). *Info Covid-19 Jatim* . Diambil kembali dari Infocovid-19: <http://www.infocovid19.jatimprov.go.id>
- Van Doremalen, N. B. (2020). Aerosol and Surface Stability of SARS-CoV-2 as Compared with SARS-CoV-1. *Journal of Medicine*, 1546-1567.
- W.E. Boyce, R. D. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New Jersey: Wiley.
- Waluya, S. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Y.Yulida, M. K. (2020). Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 di Provinsi Kalimantan Selatan. *Binawakya*, 3257-3264.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Tabel Data Publik Kasus Covid-19. Data kasus Covid-19 diambil dari tanggal 20 Mei 2021 sampai 20 Agustus 2021. Data tersebut bersumber dari website resmi yakni (Timur, 2022)

Data Publik Kasus Covid-19 Number recorded as of kemkes RI dan andarmul														
Tgl	Kasus Terkonfirmasi Positif	Positif Bergejala	Positif Tanpa Gejala	Meninggal (Susceptible)	Sembuh	Probable	Survei	Meninggal (Kemulim)	Ditulis	Meninggal (Sembuh)	Meninggal RS	Kontak Konfirmasi	Kontak Suspek	Kontak Exit
20/05/2021	152190	75189	73001	10417	138641	1432	4958	1038	12038	2145	614	46872	5509	1202302
21/05/2021	152434	79276	73158	10533	139810	1491	4943	1036	12046	2190	617	46921	5512	1202784
22/05/2021	152667	79281	73386	10565	140006	1512	4944	1038	12069	2210	619	47028	5531	1202890
23/05/2021	152895	80101	72794	10565	140206	1524	4946	1039	12099	2239	620	47210	5549	1202930
24/05/2021	153122	80127	72995	10685	140412	1525	4933	1042	12103	2247	623	47431	5568	1203121
25/05/2021	153339	80455	73194	10807	140595	1537	4957	1040	12132	2256	629	47498	5579	1203478
26/05/2021	153596	81128	72268	10927	140721	1648	4947	1044	12148	2273	630	47521	5583	1203531
27/05/2021	154014	81432	72582	11020	140903	1660	4955	1046	12163	2289	634	47559	5597	12035315
28/05/2021	154260	81470	72790	11102	141109	1681	4977	1045	12169	2284	638	47612	5603	12035346
29/05/2021	154315	81590	72725	11289	141312	1714	4938	1050	12171	2310	639	47665	5619	12035456
30/05/2021	154532	81623	72909	11306	141472	1754	4925	1049	12189	2320	645	47780	5620	12035468
31/05/2021	154781	81803	72978	11335	141698	1748	4903	1049	12201	2367	648	47881	5632	120354793
01/06/2021	154905	82882	72523	11357	141867	1782	4934	1044	12245	2378	649	47905	5661	120354941
02/06/2021	155445	83420	72025	11385	142071	1789	4954	1042	12265	2391	653	48114	5665	120355129
03/06/2021	155505	83551	72654	11410	142277	1818	5002	1047	12278	2421	658	48201	5677	120355273
04/06/2021	155806	84174	72432	11432	142533	1841	5054	1043	12289	2436	661	48359	5681	120355489
05/06/2021	156000	84889	72601	11458	142713	1879	5070	1045	12296	2450	665	48436	5692	120355742
06/06/2021	156202	85172	72815	11479	142902	1906	5085	1045	12305	2480	669	48533	5711	120355839
07/06/2021	156417	85417	73039	11500	143091	1934	5100	1047	12315	2510	673	48630	5730	120356000
08/06/2021	156632	85672	73262	11526	143286	1962	5115	1047	12327	2540	678	48735	5800	120356183
09/06/2021	156843	85936	73514	11552	143582	2003	5134	1047	12342	2570	678	48826	5801	120356208
10/06/2021	157043	86203	73819	11584	143789	2049	5151	1049	12359	2593	679	48920	5922	120356317
11/06/2021	157283	86502	74081	11639	144045	2099	5155	1053	12374	2623	680	49105	5935	120356520
12/06/2021	157641	86899	74422	11667	144343	2131	5224	1056	12392	2659	686	49201	5993	120356693
13/06/2021	158059	87334	74734	11696	144748	2155	5195	1064	12423	2692	692	49322	6001	120356890
14/06/2021	158462	87853	75072	11726	144978	2208	5284	1071	12437	2713	693	49429	6016	120356983
15/06/2021	158961	88334	75367	11767	145229	2221	5284	1086	12447	2747	694	49655	6022	1203571927
16/06/2021	160663	92683	68580	11813	145229	3621	5273	1087	12766	3648	699	49712	6045	1203572008
17/06/2021	161385	92633	69222	11866	145568	3951	5284	1097	12769	3761	701	49872	6092	1203573210
18/06/2021	162116	93417	68699	11905	145976	4235	5372	1076	12892	3785	704	49924	6108	1203576139
19/06/2021	162809	93458	69351	11943	146322	4544	5529	1076	12923	3891	706	50032	6119	1203577540
20/06/2021	163548	93476	70072	11994	146698	4856	5445	1077	13012	3928	708	50184	6121	1203578343
21/06/2021	164267	93561	70706	12044	147065	5158	5487	1011	13021	3949	710	50209	6154	1203579256
22/06/2021	165013	93742	71271	12085	147448	5480	5677	1025	13078	3979	714	50321	6163	1203581543
23/06/2021	165886	93909	72077	12136	147870	5880	5888	1025	13102	4012	725	50488	6178	1203582135
24/06/2021	166811	94001	72830	12187	148264	6380	5957	893	13280	4124	730	50573	6185	1203586190
25/06/2021	167806	94512	72994	12239	148773	6794	6056	875	13392	4412	739	50600	6197	1203587349
26/06/2021	168795	95021	73174	12289	149351	7155	6296	921	13491	4411	731	50624	6201	1203588272
27/06/2021	169548	95770	73878	12353	149848	7483	6393	921	13589	4411	733	50743	6215	1203589802
28/06/2021	170380	95888	74867	12419	150407	7939	6355	911	13672	4395	739	50743	6231	1203591374
29/06/2021	171033	96178	75012	12497	150954	8379	6611	916	13892	4395	742	50831	6237	1203593124
30/06/2021	171440	96817	76216	12591	151602	8840	6714	910	13901	4402	745	50957	6240	1203594271
01/07/2021	171880	96982	76216	12591	151602	8840	6714	910	13901	4402	745	50957	6240	1203594271
02/07/2021	172527	97003	76815	12747	152297	9468	6792	841	14192	4439	747	51345	6246	120370184
03/07/2021	172818	97003	76815	12747	152297	9468	6792	841	14192	4439	747	51345	6246	120370184
04/07/2021	173515	97003	76815	12747	152297	9468	6792	841	14192	4439	747	51345	6246	120370184
05/07/2021	173757	97453	77257	12827	153084	9987	7205	919	14356	4512	769	51534	6252	1203715220
06/07/2021	174026	97453	77257	12827	153084	9987	7205	919	14356	4512	769	51534	6252	1203715220
07/07/2021	174265	97892	78376	13016	153765	11358	7108	922	14452	4523	789	51636	6269	1203716548
08/07/2021	174626	98076	78706	13016	154077	11855	7987	919	14554	4539	789	51789	6283	1203716244
09/07/2021	174976	98313	79076	13138	154444	12494	8004	930	14697	4569	791	51892	6296	1203719269
10/07/2021	175248	98456	80168	13138	154444	12494	8004	930	14697	4569	791	51892	6296	1203719269
11/07/2021	175494	98802	80168	13293	154789	13842	7906	932	14852	4570	793	51912	6324	1203719821
12/07/2021	175703	98802	80168	13293	154789	13842	7906	932	14852	4570	793	51912	6324	1203719821
13/07/2021	175949	99475	80495	13458	155172	14917	8108	942	14921	4489	806	52013	6389	1203721203
14/07/2021	176205	99475	80495	13458	155172	14917	8108	942	14921	4489	806	52013	6389	1203721203
15/07/2021	176451	99767	80495	13606	155722	15712	8288	946	15035	4482	809	52031	6412	1203726795
16/07/2021	176703	99767	80495	13606	155722	15712	8288	946	15035	4482	809	52031	6412	1203726795
17/07/2021	176949	100000	80702	13713	156174	16412	8469	956	15133	4383	804	52112	6415	1203727446
18/07/2021	177205	100000	80702	13713	156174	16412	8469	956	15133	4383	804	52112	6415	1203727446
19/07/2021	177451	100256	80936	13806	156618	17142	8695	961	15142	4380	810	52112	6415	1203727446
20/07/2021	177703	100256	80936	13806	156618	17142	8695	961	15142	4380	810	52112	6415	1203727446
21/07/2021	177949	100417	81171	13885	156858	18020	8735	885	15253	4311	819	52398	6447	1203728113
22/07/2021	178205	100417	81171	13885	156858	18020	8735	885	15253	4311	819	52398	6447	1203728113
23/07/2021	178451	100678	81405	13979	157197	18719	8831	891	15345	4378	823	52514	6468	1203729113
24/07/2021	178703	100678	81405	13979	157197	18719	8831	891	15345	4378	823	52514	6468	1203729113
25/07/2021	178949	100923	81626	14080	157625	19458	8968	906	15490	4505	830	52788	6498	1203730113
26/07/2021	179205	100923	81626	14080	157625	19458	8968	906	15490	4505	830	52788	6498	1203730113
27/07/2021	179451	101174	81850	14175	158078	20208	9098	916	15588	4533	834	53198	6532	1203731815
28/07/2021	179703	101174	81850	14175	158078	20208	9098	916	15588	4533	834	53198	6532	1203731815
29/07/2021	180000	101323	82081	14271	158326	21017	9168	939	15638	4571	839	54120	6572	1203732229
30/07/2021	180256	101323	82081	14271	158326	21017	9168	939	15638	4571	839	54120	6572	1203732229
31/07/2021	180502	101581	82312	14366	158632	21816	9268	860	15695	4591	840	54332	6593	1203735621

23/06/2021	165886	93809	72077	12136	147870	5880	5888	885	13102	4012	725	50488	6178	168135
24/06/2021	166831	94001	72830	12187	148764	6380	5957	895	13200	4134	729	50573	6185	1686190
25/06/2021	167806	94512	73294	12239	148773	6794	6056	873	13192	4412	730	50600	6197	1687349
26/06/2021	168795	95621	73174	12289	149511	7155	6246	787	13291	4211	731	50624	6201	1688272
27/06/2021	169648	95770	73878	12353	149848	7483	6193	921	13389	4215	733	50711	6215	1689802
28/06/2021	170765	95888	74867	12419	150407	7939	6355	911	13672	4321	739	50743	6231	1691873
29/06/2021	171830	96728	75102	12497	150954	8179	6611	916	13882	4305	742	50831	6231	1693124
30/06/2021	173033	96817	76216	12591	151062	8840	6714	810	13901	4402	745	50897	6240	1694271
01/07/2021	174430	96982	77448	12665	152097	9468	6792	841	14192	4439	747	51345	6246	1701894
02/07/2021	175818	97003	78815	12747	153084	9987	7205	919	14273	4480	760	51412	6252	1702311
03/07/2021	177257	97174	80083	12827	153722	10708	7193	969	14356	4512	769	51534	6253	1715220
04/07/2021	178725	97453	81272	12916	154451	11358	7108	922	14452	4523	787	51636	6269	1716548
05/07/2021	180268	97882	82376	13016	155367	11885	7987	919	14554	4539	789	51789	6283	1717624
06/07/2021	182076	98313	83763	13138	156444	12494	8004	930	14697	4569	791	51882	6296	1718269
07/07/2021	184624	98456	86168	13293	157489	13842	7906	930	14852	4570	793	51912	6324	1719821
08/07/2021	187175	98802	88373	13458	158780	14937	8103	932	14921	4489	796	52031	6389	1721203
09/07/2021	189705	99210	90495	13626	160207	15572	7298	946	14035	4482	802	52031	6412	1726795
10/07/2021	191842	99267	92675	13806	161724	16412	7469	956	14133	4393	804	52112	6415	1727346
11/07/2021	194361	99736	94625	14085	163158	17118	7600	961	14142	4380	810	52763	6419	1728101
12/07/2021	197103	99872	97231	14256	164827	18020	7735	885	14253	4321	819	53098	6432	1728921
13/07/2021	203372	104376	98996	14435	166958	21979	8131	971	14345	4578	823	53124	6447	1728713
14/07/2021	210460	108172	102088	14669	168795	26996	8848	981	14782	4565	829	53243	6468	1728814
15/07/2021	218690	110923	107767	14880	170783	33027	8651	980	14980	4552	834	53378	6499	1729815
16/07/2021	226522	117280	109242	15225	173009	38288	8709	1017	15098	4563	836	53399	6532	1731293
17/07/2021	233442	118920	114522	15508	175713	42721	8760	1010	15245	4571	839	54120	6572	1734229
18/07/2021	239168	128937	110231	15836	178766	44566	8858	1007	15425	4591	840	54237	6593	1735621
19/07/2021	243591	129203	114388	16195	181631	45765	8979	1020	15662	4644	844	54361	6670	1739183
20/07/2021	249245	134729	114516	16463	184213	48569	8566	1022	15821	4632	855	54565	6710	1740982
21/07/2021	253104	134829	118775	16865	187193	49046	8745	1031	15921	4630	859	54565	6778	1746992
22/07/2021	259289	143291	115998	17135	190375	52719	8744	1024	15012	4593	859	54612	6783	1747138
23/07/2021	266641	145792	120849	17484	194400	54697	8786	1021	15034	4576	866	54734	6821	1747635
24/07/2021	272340	146850	125490	17840	198888	55610	8745	1016	15262	4552	869	54880	6856	1748809
25/07/2021	277103	146921	130182	18158	203754	55612	8753	1026	15442	4421	870	54982	6877	1749887
26/07/2021	280260	148720	131540	18529	208244	55191	8863	1034	15736	4426	884	55100	6890	1751836
27/07/2021	286397	149281	137116	18883	213000	54887	8855	1044	15771	4422	889	55210	6912	1752102
28/07/2021	293019	150112	142107	19284	217791	54514	8952	1061	15933	4456	894	55348	6921	1753092
29/07/2021	299525	150737	146488	19621	222478	54306	8976	1060	15922	4459	890	55374	6933	1753281
30/07/2021	306435	152572	150606	20000	226278	54380	8786	1072	16213	4531	895	55527	6956	1756218
31/07/2021	308433	145109	145109	20330	231908	55190	8766	1072	16213	4531	895	55527	6956	1757330
01/08/2021	312730	149180	149180	20660	237986	55547	8666	1055	16262	4527	858	55693	6960	1757634
02/08/2021	317593	147321	147321	21012	243726	49855	8755	1055	16312	4578	878	55771	6923	1758634
03/08/2021	318705	166728	152176	21331	248113	49263	8536	1053	16442	4588	882	55771	6982	1759721
04/08/2021	322735	166788	155847	21670	252303	48762	8549	1058	16459	4678	888	55832	6995	1761982
05/08/2021	326809	167334	159575	22361	256953	47875	8400	1068	16501	4689	983	55935	7023	1761027
06/08/2021	331298	167820	163479	22361	261960	46978	8216	1079	16629	4690	1002	56012	7039	1762839
07/08/2021	334737	167993	166744	22683	266489	4565	8005	1081	16781	4682	1004	56075	7045	1763109
08/08/2021	337274	168124	169150	22987	270016	44271	7967	1074	16838	4682	1006	56133	7052	1765234
09/08/2021	339239	172121	166818	23292	273493	42454	7961	1065	16981	4633	1008	56198	7084	1767736
10/08/2021	342857	178525	164332	23621	277964	41272	7790	1060	17212	4512	1009	56224	7095	1768202
11/08/2021	345742	178723	167019	24052	282339	39451	7821	1067	17242	4509	1010	56359	7121	1769146
12/08/2021	348903	178902	170001	24357	286381	38165	7748	1059	17341	4523	1012	56477	7131	1771099
13/08/2021	353081	180331	172850	24619	290756	37706	7730	1059	17367	4501	1029	56583	7145	1772145
14/08/2021	356313	183790	168923	24893	295247	36173	7810	1058	17354	4501	1067	56890	7159	1773908
15/08/2021	358038	189822	168216	25123	298792	34123	7618	1046	17389	4516	1068	56911	7180	1774691
16/08/2021	359597	187334	172263	25359	302376	31662	7674	1046	17456	4532	1089	57003	7199	1776210
17/08/2021	361943	186037	175906	25616	306247	29780	7608	1046	17671	4578	1123	57112	7231	1777350
18/08/2021	363442	193124	170118	25851	309764	27827	7662	930	17891	4550	1125	57216	7289	1778489
19/08/2021	364512	194561	169951	26074	313479	26908	7604	1055	17932	4523	1130	57328	7393	1779231
20/08/2021	366461	195283	171178	26277	316826	25866	7523	1083	17977	4520	1135	57495	7310	1780902

Lampiran 2: Proses Diskritisasi Sistem Persamaan

- Penyelesaian persamaan *state* menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4 sebagai berikut :

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6}(m_{1,S} + 2m_{2,S} + 2m_{3,S} + m_{4,S})$$

$$E_{i+1} = E_i + \frac{h}{6}(m_{1,E} + 2m_{2,E} + 2m_{3,E} + m_{4,E})$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6}(m_{1,I} + 2m_{2,I} + 2m_{3,I} + m_{4,I})$$

$$H_{i+1} = H_i + \frac{h}{6}(m_{1,H} + 2m_{2,H} + 2m_{3,H} + m_{4,H})$$

$$R_{i+1} = R_i + \frac{h}{6}(m_{1,R} + 2m_{2,R} + 2m_{3,R} + m_{4,R})$$

$$V_{i+1} = V_i + \frac{h}{6}(m_{1,V} + 2m_{2,V} + 2m_{3,V} + m_{4,V})$$

dengan

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$m_{1,S} = f(t_i, S_i)$$

$$= \Lambda - \beta_E SE - \beta_I SI - \beta_H SH - \beta_V SV - \mu_S S$$

$$m_{1,E} = f(t_i, E_i)$$

$$= \beta_E SE + \beta_I SI + \beta_H SH + \beta_V SV - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) E$$

$$m_{1,I} = f(t_i, I_i)$$

$$= \alpha(1 - p)E - (q + \gamma_2 + \mu_I) I$$

$$m_{1,H} = f(t_i, H_i)$$

$$= \alpha p E + q I - (w + \gamma_3 + \mu_H) H$$

$$m_{1,R} = f(t_i, R_i)$$

$$= \gamma_1 E + \gamma_2 I + \gamma_3 H - \mu_R R$$

$$m_{1,V} = f(t_i, V_i)$$

$$= \xi_1 E + \xi_2 I + \xi_3 H - \sigma V$$

$$m_{2,S} = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda - \beta_E \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) - \beta_I \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(I + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) \\
&\quad - \beta_H \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(H + \frac{1}{2} h m_{1,H} \right) - \beta_V \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(V + \frac{1}{2} h m_{1,V} \right) \\
&\quad - \mu_S \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \\
m_{2,E} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, E_i + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) \\
&= \beta_E \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) + \beta_I \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(I + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) \\
&\quad + \beta_H \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(H + \frac{1}{2} h m_{1,H} \right) + \beta_V \left(S + \frac{1}{2} h m_{1,S} \right) \left(V + \frac{1}{2} h m_{1,V} \right) \\
&\quad - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) \\
m_{2,I} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, I_i + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) \\
&= \alpha(1-p) \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) - (q + \gamma_2 + \mu_I) \left(I + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) \\
m_{2,H} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, H_i + \frac{1}{2} h m_{1,H} \right) \\
&= \alpha p \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) + q \left(I + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) - (w + \gamma_3 + \mu_H) \left(H + \frac{1}{2} h m_{1,H} \right) \\
m_{2,R} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, R_i + \frac{1}{2} h m_{1,R} \right) \\
&= \gamma_1 \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) + \gamma_2 \left(I + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) + \gamma_3 \left(H + \frac{1}{2} h m_{1,H} \right) \\
&\quad - \mu_R \left(R + \frac{1}{2} h m_{1,R} \right) \\
m_{2,V} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, V_i + \frac{1}{2} h m_{1,V} \right) \\
&= \xi_1 \left(E + \frac{1}{2} h m_{1,E} \right) + \xi_2 \left(I + \frac{1}{2} h m_{1,I} \right) + \xi_3 \left(H + \frac{1}{2} h m_{1,H} \right) \\
&\quad - \sigma \left(V + \frac{1}{2} h m_{1,V} \right) \\
m_{3,S} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, S_i + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \\
&= \Lambda - \beta_E \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) - \beta_I \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(I + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_H \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(H + \frac{1}{2} h m_{2,H} \right) - \beta_V \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(V + \frac{1}{2} h m_{2,V} \right) \\
& -\mu_S \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \\
m_{3,E} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, E_i + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) \\
&= \beta_E \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) + \beta_I \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(I + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right) \\
&+ \beta_H \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(H + \frac{1}{2} h m_{2,H} \right) + \beta_V \left(S + \frac{1}{2} h m_{2,S} \right) \left(V + \frac{1}{2} h m_{2,V} \right) \\
&- (\alpha + \gamma_1 + \mu_E) \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) \\
m_{3,I} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, I_i + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right) \\
&= \alpha(1-p) \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) - (q + \gamma_2 + \mu_I) \left(I + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right) \\
m_{3,H} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, H_i + \frac{1}{2} h m_{2,H} \right) \\
&= \alpha p \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) + q \left(I + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right) - (w + \gamma_3 + \mu_H) \left(H + \frac{1}{2} h m_{2,H} \right) \\
m_{3,R} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, R_i + \frac{1}{2} h m_{2,R} \right) \\
&= \gamma_1 \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) + \gamma_2 \left(I + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right) + \gamma_3 \left(H + \frac{1}{2} h m_{2,H} \right) \\
&\quad - \mu_R \left(R + \frac{1}{2} h m_{2,R} \right) \\
m_{3,V} &= f \left(t_i + \frac{1}{2} h, V_i + \frac{1}{2} h m_{2,V} \right) \\
&= \xi_1 \left(E + \frac{1}{2} h m_{2,E} \right) + \xi_2 \left(I + \frac{1}{2} h m_{2,I} \right) + \xi_3 \left(H + \frac{1}{2} h m_{2,H} \right) \\
&\quad - \sigma \left(V + \frac{1}{2} h m_{2,V} \right) \\
m_{4,S} &= f(t_i + h, S_i + h m_{3,S}) \\
&= \Lambda - \beta_E(S + h m_{3,S})(E + h m_{3,E}) - \beta_I(S + h m_{3,S})(I + h m_{3,I}) \\
&- \beta_H(S + h m_{3,S})(H + h m_{3,H}) - \beta_V(S + h m_{3,S})(V + h m_{3,V}) \\
&- \mu_S(S + h m_{3,S})
\end{aligned}$$

$$m_{4,E} = f(t_i + h, E_i + hm_{3,E})$$

$$\begin{aligned} &= \beta_E(S + hm_{3,S})(E + hm_{3,E}) + \beta_I(S + hm_{3,S})(I + hm_{3,I}) \\ &+ \beta_H(S + hm_{3,S})(H + hm_{3,H}) + \beta_V(S + hm_{3,S})(V + hm_{3,V}) \\ &- (\alpha + \gamma_1 + \mu_E)(E + hm_{3,E}) \end{aligned}$$

$$m_{4,I} = f(t_i + h, I_i + hm_{3,I})$$

$$= \alpha(1 - p)(E + hm_{3,E}) - (q + \gamma_2 + \mu_I)(I + hm_{3,I})$$

$$m_{4,H} = f(t_i + h, H_i + hm_{3,H})$$

$$= \alpha p(E + hm_{3,E}) + q(I + hm_{3,I}) - (w + \gamma_3 + \mu_H)(H + hm_{3,H})$$

$$m_{4,R} = f(t_i + h, R_i + hm_{3,R})$$

$$= \gamma_1(E + hm_{3,E}) + \gamma_2(I + hm_{3,I}) + \gamma_3(H + hm_{3,H}) - \mu_R(R + hm_{3,R})$$

$$m_{4,V} = f(t_i + h, V_i + hm_{3,V})$$

$$= \xi_1(E + hm_{3,E}) + \xi_2(I + hm_{3,I}) + \xi_3(H + hm_{3,H}) - \sigma(V + hm_{3,V})$$

- Persamaan *co-state* diselesaikan dengan skema mundur metode Runge Kutta orde 4 sebagai berikut:

$$\lambda_S^j = \lambda_S^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,S} + 2m_{2,S} + 2m_{3,S} + m_{4,S})$$

$$\lambda_E^j = \lambda_E^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,E} + 2m_{2,E} + 2m_{3,E} + m_{4,E})$$

$$\lambda_I^j = \lambda_I^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,I} + 2m_{2,I} + 2m_{3,I} + m_{4,I})$$

$$\lambda_H^j = \lambda_H^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,H} + 2m_{2,H} + 2m_{3,H} + m_{4,H})$$

$$\lambda_R^j = \lambda_R^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,R} + 2m_{2,R} + 2m_{3,R} + m_{4,R})$$

$$\lambda_V^j = \lambda_V^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,V} + 2m_{2,V} + 2m_{3,V} + m_{4,V})$$

Dengan

$$j = (n + 2 - i)$$

$$m_{1,S} = f(t_i, \lambda_1^j)$$

$$= \lambda_1^j(-\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S) - \lambda_2^j(\beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V)$$

$$m_{1,E} = f(t_i, \lambda_2^j)$$

$$= \lambda_1^j(-\beta_E S) - \lambda_2^j(\beta_E S - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E)) - \lambda_3^j \alpha(1-p) - \lambda_4^j \alpha p - \lambda_5^j \gamma_1 - \lambda_6^j \xi_1$$

$$m_{1,I} = f(t_i, \lambda_3^j)$$

$$= \lambda_1^j(-\beta_I S) - \lambda_2^j \beta_I S - \lambda_3^j \left(q + \min \left\{ 1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2} \right\} + \mu_I \right) - \lambda_4^j q - \lambda_5^j \min \left\{ 1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2} \right\} - \lambda_6^j \xi_2$$

$$m_{1,H} = f(t_i, \lambda_4^j)$$

$$= \lambda_1^j(-\beta_H S) - \lambda_2^j \beta_H S - \lambda_4^j (w + \gamma_3 + \mu_H) - \lambda_5^j \gamma_3 - \lambda_6^j \xi_3$$

$$m_{1,R} = f(t_i, \lambda_5^j) = \lambda_5^j \mu_R$$

$$m_{1,V} = f(t_i, \lambda_6^j) = \lambda_1^j(-\beta_V S) - \lambda_2^j \beta_V V + \lambda_6^j \sigma$$

$$m_{2,S} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)$$

$$= \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)(-\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,E}\right)(\beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V)$$

$$m_{2,E} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,E}\right)$$

$$= \left(\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)(-\beta_E S)\right) - \left(\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,E}\right)(\beta_E S - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E))\right) - \left(\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,I}\right)\alpha(1-p)\right) - \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{1,H}\right)\alpha p - \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{1,R}\right)\gamma_1 - \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{1,V}\right)\xi_1$$

$$m_{2,I} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,I}\right)$$

$$= \left(-\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,E}\right)\right)\beta_I S - \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,I}\right)\left(q + \min \left\{ 1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2} \right\} + \mu_I\right) - \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{1,H}\right)q - \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{1,R}\right)\min \left\{ 1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2} \right\} - \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{1,V}\right)\xi_2$$

$$\begin{aligned}
m_{2,H} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{1,H}\right) \\
&= \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)(-\beta_H S) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,E}\right)\beta_H S \\
&\quad - \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{1,H}\right)(w + \gamma_3 + \mu_H) - \\
&\quad \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{1,R}\right)\gamma_3 - \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{1,V}\right)\xi_3 \\
m_{2,R} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{1,R}\right) = \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{1,R}\right)\mu_R \\
m_{2,V} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{1,V}\right) \\
&= \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)(-\beta_V S) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,E}\right)\beta_V V + \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{1,R}\right)\sigma \\
m_{3,S} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right) \\
&= \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)(-\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S) \\
&\quad - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,E}\right)(\beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V) \\
m_{3,E} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,E}\right) \\
&= \left(\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)(-\beta_E S)\right) - \left(\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,E}\right)(\beta_E S - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E))\right) \\
&\quad - \left(\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,I}\right)\alpha(1-p)\right) - \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{2,H}\right)\alpha p - \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{2,R}\right)\gamma_1 \\
&\quad - \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{2,V}\right)\xi_1 \\
m_{3,I} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,I}\right) \\
&= \left(-\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,E}\right)\right)\beta_I S \\
&\quad - \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,I}\right)\left(q + \min\left\{1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2}\right\} + \mu_I\right) - \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{2,H}\right)q \\
&\quad - \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{2,R}\right)\min\left\{1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2}\right\} - \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{2,V}\right)\xi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,H} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{2,H}\right) \\
&= \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)(-\beta_H S) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,E}\right)\beta_H S \\
&\quad - \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{2,H}\right)(w + \gamma_3 + \mu_H) - \\
&\quad \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{2,R}\right)\gamma_3 - \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{2,V}\right)\xi_3 \\
m_{3,R} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{2,R}\right) = \left(\lambda_5^j - \frac{1}{2}hm_{2,R}\right)\mu_R \\
m_{3,V} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{2,V}\right) \\
&= \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)(-\beta_V S) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,E}\right)\beta_V V + \left(\lambda_6^j - \frac{1}{2}hm_{2,R}\right)\sigma \\
m_{4,S} &= f(t_i - h, \lambda_1^j - hm_{3,S}) \\
&= (\lambda_1^j - hm_{3,S})(-\beta_E E - \beta_I I - \beta_H H - \beta_V V - \mu_S) \\
&\quad - (\lambda_2^j - hm_{3,E})(\beta_E E + \beta_I I + \beta_H H + \beta_V V) \\
m_{4,E} &= f(t_i - h, \lambda_2^j - hm_{3,E}) \\
&= \left((\lambda_1^j - hm_{3,S})(-\beta_E S)\right) - \left((\lambda_2^j - hm_{3,E})(\beta_E S - (\alpha + \gamma_1 + \mu_E))\right) \\
&\quad - \left((\lambda_3^j - hm_{3,I})\alpha(1-p)\right) - (\lambda_4^j - hm_{3,H})\alpha p - (\lambda_5^j - hm_{3,R})\gamma_1 \\
&\quad - (\lambda_6^j - hm_{3,V})\xi_1 \\
m_{4,I} &= f(t_i - h, \lambda_3^j - hm_{3,I}) \\
&= \left(-(\lambda_1^j - hm_{3,S}) - (\lambda_2^j - hm_{3,E})\right)\beta_I S \\
&\quad - (\lambda_3^j - hm_{3,I})\left(q + \min\left\{1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2}\right\} + \mu_I\right) - (\lambda_4^j - hm_{3,H})q \\
&\quad - (\lambda_5^j - hm_{3,R})\min\left\{1, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)I}{\zeta_2}\right\} - (\lambda_6^j - hm_{3,V})\xi_2 \\
m_{4,H} &= f(t_i - h, \lambda_4^j - hm_{3,H}) \\
&= (\lambda_1^j - hm_{3,S})(-\beta_H S) - (\lambda_2^j - hm_{3,E})\beta_H S - (\lambda_4^j - hm_{3,H})(w + \gamma_3 + \mu_H) \\
&\quad - (\lambda_5^j - hm_{3,R})\gamma_3 - (\lambda_6^j - hm_{3,V})\xi_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,R} &= f(t_i - h, \lambda_5^j - hm_{3,R}) = (\lambda_5^j - hm_{3,R})\mu_R \\
m_{4,V} &= f(t_i - h, \lambda_6^j - hm_{3,V}) \\
&= (\lambda_1^j - hm_{3,S})(-\beta_V S) - (\lambda_2^j - hm_{3,E})\beta_V V + (\lambda_6^j - hm_{3,R})\sigma
\end{aligned}$$

Lampiran 3: Perhitungan Maple Untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit dan Endemik

```

> restart, with( linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis,
bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite,
delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvecs, enternmatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim,
fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite,
indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor,
minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row,
rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, subbasis, swapcol, swaprow, sylveste, toeplitz,
trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
> unprotect( gamma);
> dS := λ - βen·S·E - βI·S·In - βh·S·H - βv·S·V - μs·S
dS := -E S βen - H S βh - In S βI - S V βv - μs S + λ
(1)
> dE := βen·S·E + βI·S·In + βh·S·H + βv·S·V - (α + γI + μen)·E
dE := βen S E + βI S In + βh S H + βv S V - (α + γI + μen) E
(2)
> dIn := α·(1 - p)·E - (q + γ2 + μI)·In
dIn := α (1 - p) E - (q + γ2 + μI) In
(3)
> dH := α·p·E + q·In - (w + γ2 + μh)·H
dH := α p E + q In - (w + γ2 + μh) H
(4)
> dR := γI·E + γ2·In + γ3·H - μr·R
dR := -μr R + E γI + H γ3 + In γ2
(5)
> dV := ξ1·E + ξ2·In + ξ3·H - V·σ
dV := E ξ1 + H ξ3 + In ξ2 - V σ
(6)
> λ := 0.034; μs := 0.002; μen := 0.003; μI := 0.003; μh := 0.002; μv := 0.005; α := 0.3; p := 0.1; q := 0.1; w := 0.01; σ := 0.005; γI := 0.2; γ2 := 0.07; γ3 := 0.14;
ξ1 := 0.013; ξ2 := 1.15; ξ3 := 0.013; βen := 0.000054700000; βI := 0.00002130000000; βh := 0.00000270000000; βv := 0.000055400000;
λ := 0.034
μs := 0.002
μen := 0.003
μI := 0.003
μh := 0.002
μr := 0.005
α := 0.3
p := 0.1
q := 0.1
w := 0.01
σ := 0.005
γI := 0.2
γ2 := 0.07
γ3 := 0.14
ξ1 := 0.013
ξ2 := 1.15
ξ3 := 0.013
βen := 0.000054700000
βI := 0.00002130000000
βh := 0.00000270000000
βv := 0.000055400000
(8)
> TTK := solve( {dS, dE, dIn, dH, dR, dV}, {S, E, In, H, R, V} )
TTK := {E = 0., H = 0., In = 0., R = 0., S = 17., V = 0.}, {E = 1162.45484567, H = 413.67405789, In = 1764.6904890, R = 82786.73456, S = 638.9941568, V
= 9416.89203}
> fp1 := TTK[1]
fp1 := {E = 0., H = 0., In = 0., R = 0., S = 17., V = 0.}
(9)
> fp2 := TTK[2]
fp2 := {E = 1162.45484567, H = 413.67405789, In = 1764.6904890, R = 82786.73456, S = 638.9941568, V = 9416.89203}
(10)

```

Lampiran 4: Perhitungan Maple Untuk Bilangan Reproduksi Dasar $\mathcal{R}_0 < 1$

```
> restart; with(linalg): unprotect(gamma);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout,
```

(1)

```
blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag,
diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvecs, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwarbsub, frobenius,
gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith,
issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace,
orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix,
submatrix, subvector, subbasis, swapcol, swaprow, sylvest, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
> E := 1780902; H := 101520; In := 145977; R := 195479; S := 39273012; V := 100; λ := 3400; μs := 0.09; μen := 0.09; μi := 0.04; μh := 0.05; μr := 0.005; α
:= 0.0000032; p := 0.0001; q := 0.01; w := 0.01; σ := 0.5; γ1 := 0.2; γ2 := 0.7; γ3 := 0.104; ξ1 := 0.0013; ξ2 := 15; ξ3 := 0.01213; βen := 0.00000005434; β1
:= 0.00000005222; βh := 0.0000002347; βv := 0.00000042;
```

$$E := 1780902$$

$$H := 101520$$

$$In := 145977$$

$$R := 195479$$

$$S := 39273012$$

$$V := 100$$

$$\lambda = 3400$$

$$\mu_s := 0.09$$

$$\mu_{en} := 0.09$$

$$\mu_i := 0.04$$

$$\mu_h := 0.05$$

$$\mu_r := 0.005$$

$$\alpha := 0.0000032$$

$$p := 0.0001$$

$$q := 0.01$$

$$w := 0.01$$

$$\sigma := 0.5$$

$$\gamma_1 := 0.2$$

$$\gamma_2 := 0.7$$

$$\gamma_3 := 0.104$$

$$\xi_1 := 0.0013$$

$$\xi_2 := 15$$

$$\xi_3 := 0.01213$$

$$\beta_{en} := 5.434 \cdot 10^{-8}$$

$$\beta_1 := 5.222 \cdot 10^{-8}$$

$$\beta_h := 2.347 \cdot 10^{-8}$$

$$\beta_v := 4.2 \cdot 10^{-7}$$

(2)

```
> μ1 := α + γ1 + μen; μ2 := q + γ1 + μi; μ3 := w + γ3 + μh
```

$$\mu_1 := 0.290032$$

$$\mu_2 := 0.25$$

$$\mu_3 := 0.164$$

(3)

```
> F := 
$$\begin{bmatrix} \beta_{en} S & \beta_{in} S & \beta_h S & \beta_v S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

```

```
F := 
$$\begin{bmatrix} 0.2134095472 & 0.2050836687 & 0.09217375916 & 3.440315851 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

(4)

```
> Y := 
$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha(1-p) & \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \mu_3 & 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & \sigma \end{bmatrix};$$

```

$$Y := \begin{bmatrix} 0.290032 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0000319968 & 0.25 & 0 & 0 \\ -3.2 \cdot 10^{-9} & -0.01 & 0.164 & 0 \\ -0.0013 & -15 & -0.01213 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

`> Z := inverse(Y);`

$$Z := \begin{bmatrix} 3.447895405 & -0. & 0. & -0. \\ 0.0004412864787 & 4.000000000 & -0. & 0. \\ 0.00002697498813 & 0.2439024390 & 6.097560976 & -0. \\ 0.02220377682 & 120.0059171 & 0.1479268293 & 2.000000000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

`> K := evalm(F&*Z);`

$$K := \begin{bmatrix} 0.8122947896 & 413.7010749 & 1.070950132 & 6.880631702 \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (7)$$

`> det((lambda*LinearAlgebra-IdentityMatrix(4, 4) - K));`

$$1.336016736 \cdot 10^{14} \quad (8)$$

`> eigenvalues(K);`

$$0.812294789600000, 0., 0., 0. \quad (9)$$

Lampiran 5: Perhitungan Maple Untuk Bilangan Reproduksi Dasar $\mathcal{R}_0 > 1$

```

> restart; with(finalg): unprotect(gamma);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout,
blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag,
diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvecs, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius,
gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, initbasis, inverse, ismith,
issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace,
orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix,
submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
> E := 1780902; H := 101520; In := 145977; R := 195479; S := 39273012; V := 100;  $\lambda = 0.034$ ;  $\mu_s := 0.002$ ;  $\mu_{en} := 0.003$ ;  $\mu_i := 0.003$ ;  $\mu_h := 0.002$ ;  $\mu_r := 0.005$ ;  $\alpha$ 
:= 0.14;  $p := 0.1$ ;  $q := 0.01$ ;  $w := 0.01$ ;  $\sigma := 0.5$ ;  $\gamma_i := 0.2$ ;  $\gamma_2 := 0.07$ ;  $\gamma_3 := 0.14$ ;  $\xi_1 := 2.3$ ;  $\xi_2 := 1.15$ ;  $\xi_3 := 0.013$ ;  $\beta_{en} := 0.0105$ ;  $\beta_1 := 0.00772$ ;  $\beta_h$ 
:= 0.0118;  $\beta_v := 0.0000554$ ;

```

$E := 1780902$

$H := 101520$

$In := 145977$

$R := 195479$

$S := 39273012$

$V := 100$

$\lambda = 0.034$

$\mu_s := 0.002$

$\mu_{en} := 0.003$

$\mu_i := 0.003$

$\mu_h := 0.002$

$\mu_r := 0.005$

$\alpha := 0.14$

$p := 0.1$

$q := 0.01$

$w := 0.01$

$\sigma := 0.5$

$\gamma_i := 0.2$

$\gamma_2 := 0.07$

$\gamma_3 := 0.14$

$\xi_1 := 0.013$

$\xi_2 := 1.15$

$\xi_3 := 0.013$

$\beta_{en} := 0.000054700000$

$\beta_1 := 0.0000213000000$

$\beta_h := 0.0000027000000$

$\beta_v := 0.000055400000$

(8)

```

>  $\mu_1 := \alpha + \gamma_i + \mu_{en}$ ;  $\mu_2 := q + \gamma_i + \mu_r$ ;  $\mu_3 := w + \gamma_3 + \mu_h$ 

```

$\mu_1 := 0.290032$

$\mu_2 := 0.25$

$\mu_3 := 0.164$

(3)

```

>  $F := \begin{bmatrix} \beta_{en} S & \beta_m S & \beta_h S & \beta_v S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$ 

```

$$F := \begin{bmatrix} 4.123666260 \cdot 10^5 & 3.031876526 \cdot 10^5 & 4.634215416 \cdot 10^5 & 2120.742648 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

```

>  $Y := \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha(1-p) & \mu_2 & 0 & 0 \\ -\alpha p & -q & \mu_3 & 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & \sigma \end{bmatrix};$ 

```

$$Y := \begin{bmatrix} 0.290032 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0000319968 & 0.25 & 0 & 0 \\ -3.2 \cdot 10^{-9} & -0.01 & 0.164 & 0 \\ -0.0013 & -15 & -0.01213 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> Z := inverse(Y);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 3.447895405 & -0. & 0. & -0. \\ 0.0004412864787 & 4.000000000 & -0. & 0. \\ 0.00002697498813 & 0.2439024390 & 6.097560976 & -0. \\ 0.02220377682 & 120.0059171 & 0.1479268293 & 2.000000000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

```
> K := evalm(F&*Z);
```

$$K := \begin{bmatrix} 1.421990377 \cdot 10^6 & 1.580281920 \cdot 10^6 & 2.826054822 \cdot 10^6 & 4241.485296 \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (7)$$

```
> det((lambda * LinearAlgebra-IdentityMatrix(4, 4) - K));
```

$$-5.575627618 \cdot 10^{16} \quad (8)$$

```
> eigenvalues(K);
```

$$1.42199037700000 \cdot 10^6, 0., 0., 0. \quad (9)$$

Lampiran 6: Perhitungan Maple Untuk Nilai Eigen dan Vektor Eigen Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit dan Endemik

> with(linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, (13)

blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvecs, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sunbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

> jac := Matrix(jacobian([dS, dE, dI, dH, dR, dV], [S, E, I, H, R, V]));
jac := [[-0.0005470000000 E - 0.000002700000000 H - 0.00002130000000 I - 0.00005540000000 V - 0.002 - 0.00005470000000 S - 0.00002130000000 S (14)

- 0.000002700000000 S, 0 - 0.00005540000000 S],

[0.0005470000000 E + 0.00002130000000 I + 0.000002700000000 H + 0.00005540000000 V + 0.00005470000000 S - 0.343, 0.00002130000000 S,

0.000002700000000 S, 0.00005540000000 S]

[0.0.126 - 0.083, 0.0.0],

[0.0.014, 0.01, -0.082, 0.0],

[0.0.2, 0.07, 0.14, -0.005, 0],

[0.2.3, 1.15, 0.013, 0, -0.5]]

> jac1 := subs(fp1, evalm(jac));

$$jac1 := \begin{bmatrix} -0.002 & -10.94000000 & -4.260000000 & -0.5400000000 & 0 & -11.08000000 \\ 0 & 10.59700000 & 4.260000000 & 0.5400000000 & 0 & 11.08000000 \\ 0 & 0.126 & -0.083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.014 & 0.01 & -0.082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.07 & 0.14 & -0.005 & 0 \\ 0 & 2.3 & 1.15 & 0.013 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (15)$$

> nilai_eigen1 := eigenvals(jac1);
nilai_eigen1 := -0.002000000000000000, -0.005000000000000000, 12.5956134304374, -2.43713300248333, -0.144226881010652, -0.0822535469434475 (16)

> eigenvectors(jac1);

[[-0.1442268811, 1, [[-0.07609569946 - 0.05444832639 0.1120502818 - 0.005756776303 0.02766774828 0.0099834201]], [-0.005, 1, (17)

[[[-0.0 0 0 1 0]], [12.59561341, 1, [[1.017643046 - 0.9908228376 - 0.009846792560 - 0.001101941444 - 0.01579352594 - 0.1748853290]],

[-2.437132998, 1, [[-0.5822073095 0.6770115403 - 0.03623561394 - 0.003870611742 - 0.05440653513 - 0.7822928370]], [-0.002, 1,

[[[1 0 0 0 0]], [-0.08225354695, 1,

[[[-0.00004858227640 - 0.00001494710961 - 0.002523013642 0.1003340638 - 0.1795020306 - 0.00390548136]]]]

> jac2 := subs(fp2, evalm(jac));

$$jac2 := \begin{bmatrix} -0.6259838179 & -0.03495298021 & -0.01361057548 & -0.001725284215 & 0 & -0.03540027612 \\ 0.6239838180 & -0.3080470198 & 0.01361057548 & 0.001725284215 & 0 & 0.03540027612 \\ 0 & 0.126 & -0.083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.014 & 0.01 & -0.082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.07 & 0.14 & -0.005 & 0 \\ 0 & 2.3 & 1.15 & 0.013 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (18)$$

> nilai_eigen2 := eigenvals(jac2);
nilai_eigen2 := -0.005000000000000000, -0.887535071739779, -0.269165365926632 + 0.193117141080525 I, -0.269165365926632 - 0.193117141080525 I, (19)

-0.0909336990827455, -0.0822313350242120

> eigenvectors(jac2);

[[-0.005, 1, [[0 0 0 0 1 0]], [-0.2691653667 + 0.1931171413 I, 1, [[0.7274759086 + 0.1121491651 I - 0.1262129176 - 1.166821220 I - 0.3534509762 (20)

+ 0.4230756397 I - 0.01860180488 + 0.04548070776 I - 0.2262448107 + 0.5817942786 I - 6.459402137 - 4.111771597 I]], [-0.08223133509, 1,

[[[0.0008680437 0.0002670732 0.0437789526 - 1.908610186 3.419434412 0.0625899780]], [-0.8875350715, 1,

[[[0.4513746478 - 0.734035514 0.1149589100 0.01133024300 0.1554314943 4.014944076]], [-0.09093369897, 1,

[[[-0.1293979420 - 0.0456540108 0.7250596875 - 0.7400563512 0.7213062401 1.758134762]], [-0.2691653667 - 0.1931171413 I, 1,

[[[0.7274759086 - 0.1121491651 I - 0.1262129176 + 1.166821220 I - 0.3534509762 - 0.4230756397 I - 0.01860180488 - 0.04548070776 I - 0.2262448107

- 0.5817942786 I - 6.459402137 + 4.111771597 I]]]

Lampiran 7: M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Bebas Penyakit dan γ_2 Sebagai Konstanta

```

clc; clear all; close all;
global a mu1 mu2 mu3 mu4 mu5 alpha beta1 beta2 beta3 beta4
gamma1 gamma2 gamma3 ksi1 ksi2 ksi3 p q w sigma;
a=0.14;
mu1= 0.09;
mu2= 0.09;
mu3= 0.04;
mu4= 0.04;
mu5= 0.005;
alpha= 0.14;
beta1= 0.00000042;
beta2= 0.0000005434;
beta3= 0.000000005222;
beta4= 0.00000002347;
gamma1= 0.02;
gamma2= 0.007;
gamma3= 0.014;
ksi1= 0.23;
ksi2= 0.015;
ksi3= 0.013;
p= 0.1;
q= 0.01;
w= 0.01;
sigma= 0.5;

tn=90;
u0=[39273012;1780902;145977;101520;195479;100];
[tsol,usol]=ode45(@rhs1,[0,tn],u0);
Ssol=usol(:,1);Esol=usol(:,2);Isol=usol(:,3);Hsol=usol(:,4);
Rsol=usol(:,5);Vsol=usol(:,6);
figure(1);
plot(tsol,Ssol,'y','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Esol,'m','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Isol,'c','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Hsol,'r','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Rsol,'g','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Vsol,'b','linewidth',2);hold on;
grid on
legend('Susceptible(t)', 'Exposed(t)', 'Infected(t)', 'Hospital
ized(t)', 'Recovered(t)', 'Virus(t)');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');
function udot=rhs1(~,u)
global a mu1 mu2 mu3 mu4 mu5 alpha beta1 beta2 beta3 beta4
gamma1 gamma2 gamma3 ksi1 ksi2 ksi3 p q w sigma ;
S=u(1); E=u(2); I=u(3); H=u(4); R=u(5); V=u(6);
Sdash = a-beta1*S*E-beta2*S*I-beta3*S*H-beta4*S*V-mu1*S;
Edash = (beta1*S*E+beta2*S*I+beta3*S*H+beta4*S*V)-
(alpha+gamma1+mu2)*E;
Idash = (alpha*(1-p)*E)-(q+gamma2+mu3)*I;

```

```
Hdash = alpha*p*E+q*I-(w+gamma3+mu4)*H;  
Rdash = gamma1*E+gamma2*I+gamma3*H-mu5*R;  
Vdash = ksi1*E+ksi2*I+ksi3*H-sigma*V;  
udot=[Sdash; Edash; Idash; Hdash; Rdash; Vdash];  
end
```

Lampiran 8: M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Bebas Penyakit dan γ_2 Sebagai Fungsi Kontrol

```

clc;clear all;close all;
t=90;
initial_S=39273012;
initial_E=1780902;
initial_I=145977;
initial_H=101520;
initial_R=195479;
initial_V=100;
[t,x]=ode45(@smg,t,[initial_S;initial_E;initial_I;initial_H;
initial_R;initial_V]);
S=x(:,1);
E=x(:,2);
I=x(:,3);
H=x(:,4);
R=x(:,5);
V=x(:,6);
figure(1)
plot(t,(x(:,1)),'y',t,(x(:,2)),'m',t,(x(:,3)),'c',t,(x(:,4))
,'r',t,(x(:,5)),'g',t,(x(:,6)),'b','LineWidth',2);
legend('Susceptible','Exposed',
'Infected','Hospitalized','Recovered','Virus');
grid off;

dxdt_1=a*N-beta1*S*E-beta2*S*I-beta3*S*H-beta4*S*V-mu1*S;
dxdt_2=(beta1*S*E+beta2*S*I+beta3*S*H+beta4*S*V)-
(alpha+gamma1+mu1)*E;
dxdt_3=(alpha*(1-p)*E)-(q+gamma2*lambda+mu1)*I;
dxdt_4=alpha*p*E+q*I-(w+gamma3+mu1)*H;
dxdt_5=gamma1*E+gamma2*lambda*I+gamma3*H-mu1*R;
dxdt_6=ksi1*E+ksi2*I+ksi3*H-sigma*V;

dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3;dxdt_4;dxdt_5;dxdt_6];
end

```

Lampiran 9: M-File untuk Simulasi Model SEIHRV Saat Kondisi Endemik dan γ_2 sebagai konstanta

```

clc; clear all; close all;
global a mu1 mu2 mu3 mu4 mu5 alpha beta1 beta2 beta3 beta4
gamma1 gamma2 gamma3 ksi1 ksi2 ksi3 p q w sigma;
a=0.034;
mu1= 0.002;
mu2= 0.003;
mu3= 0.003;
mu4= 0.002;
mu5= 0.005;
alpha= 0.14;
beta1= 0.000054700000;
beta2= 0.0000213000000;
beta3= 0.0000027000000;
beta4= 0.000055400000;
gamma1= 0.2;
gamma2= 0.07;
gamma3= 0.14;
ksi1= 2.3;
ksi2= 1.15;
ksi3= 0.013;
p= 0.1;
q= 0.01;
w= 0.01;
sigma= 0.5;

tn=90;
u0=[39273012;1780902;145977;101520;195479;100];
[tsol,usol]=ode45(@rhs1,[0,tn],u0);
Ssol=usol(:,1);Esol=usol(:,2);Isol=usol(:,3);Hsol=usol(:,4);
Rsol=usol(:,5);Vsol=usol(:,6);
figure(1);
plot(tsol,Ssol,'y','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Esol,'m','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Isol,'c','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Hsol,'r','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Rsol,'g','linewidth',2);hold on;
plot(tsol,Vsol,'b','linewidth',2);hold on;
grid on
legend('Susceptible(t)','Exposed(t)','Infected(t)','Hospital
ized(t)','Recovered(t)','Virus(t)');
xlabel('Waktu t (Hari)');
ylabel('Populasi');
function udot=rhs1(~,u)
global a mu1 mu2 mu3 mu4 mu5 alpha beta1 beta2 beta3 beta4
gamma1 gamma2 gamma3 ksi1 ksi2 ksi3 p q w sigma ;
S=u(1); E=u(2); I=u(3); H=u(4); R=u(5); V=u(6);
Sdash = a-beta1*S*E-beta2*S*I-beta3*S*H-beta4*S*V-mu1*S;
Edash = (beta1*S*E+beta2*S*I+beta3*S*H+beta4*S*V)-
(alpha+gamma1+mu2)*E;
Idash = (alpha*(1-p)*E)-(q+gamma2+mu3)*I;
Hdash = alpha*p*E+q*I-(w+gamma3+mu4)*H;

```

```
Rdash = gamma1*E+gamma2*I+gamma3*H-mu5*R;  
Vdash = ksi1*E+ksi2*I+ksi3*H-sigma*V;  
udot=[Sdash; Edash; Idash; Hdash; Rdash; Vdash];  
end
```

Lampiran 10: M-File untuk Simulasi Model *SEIHRV* Saat Kondisi Endemik dan γ_2 Sebagai Fungsi Kontrol

```

clc;clear all;close all;
t=90;
initial_S=39273012;
initial_E=1780902;
initial_I=145977;
initial_H=101520;
initial_R=195479;
initial_V=100;
[t,x]=ode45(@smg,t,[initial_S;initial_E;initial_I;initial_H;
initial_R;initial_V]);
S=x(:,1);
E=x(:,2);
I=x(:,3);
H=x(:,4);
R=x(:,5);
V=x(:,6);
figure(1)
plot(t,(x(:,1)),'y',t,(x(:,2)),'m',t,(x(:,3)),'c',t,(x(:,4))
,'r',t,(x(:,5)),'g',t,(x(:,6)),'b','LineWidth',2);
legend('Susceptible','Exposed',
'Infected','Hospitalized','Recovered','Virus');
grid off;

dxdt_1=a*N-beta1*S*E-beta2*S*I-beta3*S*H-beta4*S*V-mu1*S;
dxdt_2=(beta1*S*E+beta2*S*I+beta3*S*H+beta4*S*V)-
(alpha+gamma1+mu1)*E;
dxdt_3=(alpha*(1-p)*E)-(q+((lambda5-lambda3)/xi2)+mu1)*I;
dxdt_4=alpha*p*E+q*I-(w+gamma3+mu1)*H;
dxdt_5=gamma1*E+((lambda5-lambda3)/xi2)*I+gamma3*H-mu1*R;
dxdt_6=ksi1*E+ksi2*I+ksi3*H-sigma*V;

dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3;dxdt_4;dxdt_5;dxdt_6];
end

```

RIWAYAT HIDUP



Nia Nurkhanifah, lahir di Kabupaten Trenggalek pada tanggal 24 Agustus 2000. Nama panggilan Nia, saat ini tinggal di Kabupaten Trenggalek, Jawa Timur. Putri semata wayang dari Bapak Endik Suprayogi dan Ibu Suparmi. Pendidikan dasar yang ditempuh di SDN 1 Ngulan Kulon dan lulus pada tahun 2012. Setelah itu penulis melanjutkan pendidikan ke SMPN 1 Pogalan dan lulus pada tahun 2015, kemudian melanjutkan ke jenjang SMA di SMAN 2 Trenggalek dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil program studi Matematika. Selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang penulis aktif menjadi pengurus HMJ Matematika “Integral” UIN Malang, pengurus *Mathematics English Club* (MEC), anggota Serambi Matematika Asyik (SeMaTa), anggota UPKM JDFI bidang MC dan juga mengikuti beberapa lomba salah satunya menjadi juara 1 di *Green Video Contest* tingkat Universitas yang diadakan HMJ Biologi “Semut Merah” UIN Malang. Selain itu, penulis juga mengikuti Riset Kompetitif Mahasiswa (RKM) Tahun 2021 Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nia Nurkhanifah
NIM : 18610058
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Perilaku Dinamik Model Penyebaran Covid-19
Pada Populasi SEIHRV Dengan Kontrol Optimal
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Pembimbing II : Erna Hermawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	31- Desember 2021	Konsultasi Bab 1	1.
2.	11- Januari 2022	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	20 - Januari 2022	Konsultasi Bab 2	3.
4.	1- Februari 2022	Konsultasi Kajian Agama	4.
5.	10 - Februari 2022	Konsultasi Bab 2	5.
6.	23 - Februari 2022	Konsultasi Bab 3	6.
7.	25 - Februari 2022	Revisi Bab 2,3	7.
8.	21 - Maret 2022	ACC Bab 1, 2, 3	8.
9.	21 - Maret 2022	Konsultasi Kajian Agama	9.
10.	29 - April 2022	Konsultasi Bab 4	10.
11.	30 - April 2022	Konsultasi Bab 4	11.
12.	7 - Mei 2022	Konsultasi Bab 4,5	12.
13.	11 - Mei 2022	ACC Bab 4,5	13.
14.	21 - Mei 2022	Konsultasi Kajian Agama	14.

Malang, 23 Juni 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP.197411292000122005