SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN POISSON 2D MENGGUNAKAN PERLUASAN FUNGSI EIGEN DAN DERET FOURIER

SKRIPSI

OLEH
WAHYU INGGRIANA
NIM. 11610006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN POISSON 2D MENGGUNAKAN PERLUASAN FUNGSI EIGEN DAN DERET FOURIER

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Wahyu Inggriana
NIM. 11610006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN POISSON 2D MENGGUNAKAN PERLUASAN FUNGSI EIGEN DAN DERET FOURIER

SKRIPSI

Oleh
Wahyu Inggriana
NIM. 11610006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 01 Juni 2016

Pembimbing I,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 2005 01 1004

Pembimbing II,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN POISSON 2D MENGGUNAKAN PERLUASAN FUNGSI EIGEN DAN DERET FOURIER

SKRIPSI

Oleh
Wahyu Inggriana
NIM. 11610006

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 01 Juni 2016

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Wahyu Inggriana

NIM : 11610006

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Sekripsi : Solusi Analitik Persamaan Poisson 2D menggunakan Perluasan Fungsi Eigen dan Deret Fourier

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Mei 2016
Yang membuat pernyataan,

Wahyu Inggriana
NIM. 11610006

MOTO

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱسْتَعِينُوا۟ بِٱلصَّبْرِ وَٱلصَّلَوٰةِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ﴿١٥٣﴾

“Hai orang-orang yang beriman, mintalah pertolongan melalui sabar dan shalat, Sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar.”

(QS. Al-Baqarah/2:153)

“Allah selalu memberikan senyum di balik kesedihan. Allah selalu memberikan harapan di balik keputusasaan”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Eko Budiwiyono, ibunda Siti Munawaroh, serta adik tersayang Lutfiatul Fajariyah. Muhammad SAW yang kata-katanya selalu memberikan semangat yang berarti bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. Atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan mtematika, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik

Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
7. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, Mei 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Inggriana, Wahyu. 2016. **Solusi Analitik Persamaan Poisson 2D Menggunakan Perluasan Fungsi Eigen dan Deret Fourier.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Muhammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Persamaan Poisson 2D, Perluasan Fungsi Eigen, Deret Fourier.

Persamaan Poisson 2D merupakan persamaan diferensial parsial linier orde dua tipe eliptis. Persamaan ini merupakan bentuk khusus atau bentuk non homogen dari persamaan Laplace. Persamaan Poisson 2D dalam skripsi ini menggambarkan distribusi panas dalam ruang, yang dalam hal ini berbentuk persegi panjang dan memiliki kondisi batas homogen.

Solusi analitik dari persamaan Poisson 2D diperoleh dengan menentukan solusi $X(x)$ dan $Y(y)$ terlebih dahulu dengan menggunakan pemisahan variabel. Solusi tersebut dapat dikatakan sebagai fungsi eigen. Selanjutnya menggunakan perluasan fungsi eigen dengan memisalkan fungsi nonhomogennya $f(x, y) = ku$, menggunakan deret Fourier untuk menentukan konstanta C_{mn} yang terdapat pada fungsi eigen, dan interpretasi dari model tersebut.

ABSTRACT

Inggriana, Wahyu. 2016. **Analitical Solition of Poisson 2D Equation Using Eigen Function Expansion and Fourier Series.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Muhammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keyword: Poisson 2D Equation, Expansion Eigen Function, Fourier Series.

2D Poisson equation is a linear partial differential equation of second order elliptical type. This equation is a particular form or non-homogeneous form of the Laplace equation. 2D Poisson equation in this paper describes the distribution of heat in the room, which in this case rectangular and has a homogeneous boundary conditions.

Analytic solution of 2D Poisson's equation is obtained by determining the solution of $X\ (x)$ and $Y\ (y)$ in advance using separation of variables, the solution can be regarded as the eigen function, then using the function expansion eigen by letting nonhomogeneus function $f\ (x, y) = ku$, using Fourier series to determine the constants C_{mn} contained in eigen function, and interpretating the model.

ملخص

انجري انا، وحي. 2016. تحليلية الحل. معادلة 2D Poisson باشخرام توسع الدالة الذاتية وظائف Eigen وسلسلة Fourier. بحث جامعي . شعبة قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الوجامعة ولاية العلكدمية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (I) محمد جمهوري، ماجستير (II) الدكتور عبد الشاكر الماجستير.

كلمات الرئسية: معادلة بواسون 2D ، توسيع الدالة الذاتية، سلسلة Fourier.

معادلة بواسون 2D هي الخطية المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية من نوع شكل بيضاوي . هذه المعادلة هي شكل معين أو شكل غير متجانسة من معادلة لابلاس. معادلة بواسون 2D في هذه الدراسة توضح توزيع الحرارة في الغرفة، وهو في هذه الحالة مستطيلة ولها شروط الحدود متجانسة.

يتم الحصول على حل التحليلي لمعادلة بواسون $2D$ من خلال تحديد $X(x)$و $Y(y)$ في وقت مبكر عن طريق استخدام الفصل بين المتغيرات، ويمكن اعتبار الحل عن وظيفة ايقن، ثم استخدم توستع الدالة الذاتية عن طريق السماح و $f(x,y) = ku$، باستخدام سلسلة Fourier لتحديد الثوابت C_{mn} الواردة في الدالة الذاتية، وتفسير النموذج.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika untuk suatu fungsi tak diketahui dari satu atau beberapa peubah yang berhubungan dengan nilai dari fungsi tersebut dengan turunannya sendiri. Secara matematis persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan-turunan. Sedangkan secara fisis, persamaan diferensial adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara turunan dari satu variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Oleh sebab itu persamaan diferensial banyak digunakan pada bidang fisika. Salah satu persamaan yang dapat dibentuk adalah persamaan Poisson.

Untuk mendapatkan solusi terbaik dari suatu persamaan diferensial parsial para ilmuwan telah mengembangkan berbagai metode baik secara analitik maupun secara numerik. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:286 berikut ini:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"(QS. al-Baqarah/2:286).

Ayat di atas menjelaskan kepada manusia bahwa Allah Swt. memberikan beban kepada manusia hanyalah sesuai dengan batas kemampuannya. Karena apabila manusia dibebani di luar kemampuannya maka manusia tidak akan sanggup menjalani beban tersebut. Ini merupakan kelembutan, kasih sayang dan kebaikan Allah Swt. terhadap manusia. Meskipun Allah Swt. menghisab dan meminta pertanggungjawaban kepada umatNya, namun Allah Swt. tidak mengadzab melainkan disebabkan dosa yang manusia miliki. Manusia mendapat pahala dari kebajikan yang dikerjakannya, dan manusia mendapatkan siksa dari kejahatan yang dikerjakannya.

Seperti halnya dalam ilmu matematika, setiap manusia tidak dapat menyelesaikan berbagai persamaan matematika. Khususnya pada persamaan Poisson 2D, yang mana persamaan ini dapat diselesaikan baik secara analitik maupun secara numerik. Sehingga manusia hanya dianjurkan untuk memilih metode penyelesaian yang tepat menurut batas kemampuannya. Oleh karena itu manusia diberi akal dan kemampuan untuk berpikir.

Persamaan Poisson merupakan suatu persamaan yang dibentuk dari fenomena fisik yang terjadi pada distribusi panas dalam kondisi *stady-state.* Persamaan ini tidak memperhitungkan perubahan waktu namun lebih kepada utilitas luas dari berbagai permasalahan elektrostatis, teknik mesin dan fisika teoritis. Sehingga tidak ada nilai awal sebagaimana persamaan diferensial parsial yang berhubungan dengan waktu. Hanya saja persamaan ini diikuti dengan kondisi batas tertentu (Tvieito dan Winther, 2005).

Seperti yang telah diuraikan sebelumnya ada berbagai macam metode yang telah dikemukakan untuk memberikan solusi bagi permasalahan tersebut. Seperti pemisah variabel atau dikenal dengan metode pemisahan variabel. Karena sudah banyak peneliti yang mengkaji persamaan Poisson 2D ini dengan menggunakan metode numerik, sehingga persamaan ini menarik untuk dicari solusi eksak atau analitiknya.

Seperti halnya para peneliti yang telah mengkaji persamaan Poisson, di antaranya yaitu Shiferaw dan Mittal, (2011). Penelitian ini membahas tentang persamaan Poisson 3D. Akan tetapi, pembahasan tersebut hanya membahas pendiskritan persamaan tersebut dan tidak diikuti dengan mensimulasikan dari model Poisson 3D.

Selain itu penelitian yang membahas persamaan Poisson juga dilakukan oleh Rita dan Masduki, (2009). Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan Poisson dan Laplace secara numerik. Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah metode beda hingga order empat dan *full multi grid* yang mana metode tersebut mencari solusi untuk persamaan Poisson. Pada metode beda hingga orde empat bertujuan untuk mencari solusi yang akurat. Sedangkan pada metode *full multi grid* bertujuan untuk mendapatkan nilai awal yang baik bagi proses penyelesaian secara iterasi.

Penyelesaiaan Poisson 2D dengan numerik juga telah diselesaikan oleh Fitria (2011). Penelitian tersebut membahas tentang penyelesaian persamaan Poisson menggunakan jaringan fungsi radial basis. Dalam artikel itu memandang model memiliki kondisi batas homogen. Akan tetapi, pada penelitian tersebut tidak dijelaskan mengenai kestabilan dari solusi menggunakan skema fungsi radial basis. Sehingga tidak dapat dijamin penyelesaian yang stabil pada waktu tertentu.

Selain itu Mufidah (2014) melakukan penelitian mengenai persamaan Poisson pada koordinat polar yang dikerjakan dengan mengembangkan solusi numerik yaitu fungsi jaringan radial basis sehingga akan ditemukan galat untuk mengetahui seberapa dekat solusi analitik atau solusi eksaknya dengan solusi numeriknya.

Salah satu teknik dasar yang digunakan untuk memperoleh fungsi eigen dari persamaan diferensial parsial non homogen yaitu dengan metode pemisah variabel. Metode ini dilakukan dengan cara memisahkan antara fungsi variabel *independent* (bebas) dengan fungsi variabel *dependent* (terikat). Dengan menjadikan terlebih dahulu persamaan diferensial non homogen menjadi persamaan diferensial homogen. Sehingga fungsi yang sudah dipisahkan tersebut dapat diselesaikan dalam bentuk persamaan dferensial biasa.

Penyelesaian persaman Poisson 2D menggunakan perluasan fungsi eigen dan deret Fourier sangat diperlukan karena hal ini untuk menambah pengatahuan bahwa persamaan ini juga dapat diselesaikan secara analitik meskipun memiliki kondisi batas homogen. Oleh karena itu, penelitian ini bermaksud menentukan solusi dengan menggunakan perluasan fungsi eigen dan deret Fourier pada persamaan Poisson yang merupakan persamaan non homogen tetapi memiliki nilai batas homogen. Sehingga peneliti mengambil judul "Solusi Analitik Persamaan Poisson 2D Menggunakan Perluasan Fungsi Eigen dan Deret Fourier".

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan Poisson 2D menggunakan perluasan Fungsi Eigen dan deret Fourier?

1.3.Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk memperoleh penyelesaian persamaan Poisson 2D menggunakan perluasan Fungsi Eigen dan deret fourier.

1.4. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan skripsi ini yaitu dapat memperoleh penyelesaian persamaan Poisson 2D dengan menggunakan perluasan fungsi eigen dan deret fourier, sebagai kajian teori yang dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut.

1.5. Batasan Masalah

Adapun ruang lingkup yang dikaji dalam penelitian ini adalah Persamaan persamaan Poisson 2D, seperti tertulis pada persamaan berikut ini:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

Untuk $f(x, y) = ku$

$$u_{xx} + u_{yy} = ku$$

dengan kondisi batas

$$u(0, y) = 0 = u(a, y)$$

$$u(x, 0) = 0 = u(x, b)$$

Sedangkan pada simulasi dimisalkan $ku = 1$ dan $ku = x^2$ $(\mathrm{O'neil}, 2014)$.

1.6. Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang diterapkan penulis dalam membahas penelitian ini dengan tahapan sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan Poisson 2D beserta kondisi batas yang akan digunakan.
2. Memisalkan $f(x, y) = ku$ pada persamaan Poisson 2D.
3. Menggunakan permisalan $u(x, t) = X(x)Y(y)$ untuk menentukan λ yang sesuai dengan memisalkan $\lambda = 0$, $\lambda = -\beta^2$, atau $\lambda = \beta^2$.
4. Mencari nilai eigen dan fungsi eigen dari solusi $X(x)$ dengan memasukkan kondisi batas x.
5. Menentukan fungsi eigen dari solusi $Y(y)$ dengan memasukkan kondisi batas y.
6. Subsitusi fungsi eigen $X(x)$ dan $Y(y)$ terhadap permisalan $u(x, y) = X(x)Y(x)$.
7. Menentukan koefisien deret fourier sinus pada $f(x, y)$ yang menunjukkan persamaan tersebut non homogen.
8. Mencari koefisien C_{mn} yang merupakan penyelesaian dari suatu fungsi non homogen. Sehingga dapat diperoleh solusi analitik dari persamaan tersebut.
9. Mensimulasikan penyelesaian persamaan Poisson 2D.

1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini digunakan untuk mempermudah dalam memahami dan menyusun laporan penelitian. Adapun sistematika penulisan dalam penelitian ini yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang teori persamaan Poisson 2D, perluasan fungsi eigen, kondisi batas, dan deret Fourier.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang langkah-langkah penyelesaian persamaan Poisson 2D menggunakan perluasan fugsi eigen dan deret Fourier, serta mensimulasikan solusi dari persamaan tersebut.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penulisan yang telah diselesaikan dengan dilengkapi saran-saran yang berkaitan dengan hasil dari penulisan ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.7. Persamaan Poisson

Persamaan Poisson merupakan penurunan dari hukum Coloumb dan teorema Gauss. Pada matematika pesamaan Poisson merupakan persamaan diferensial parsial, dengan kegunaan pada bidang elektrostatistik, rekayasa mekanis, dan fisika teoritis. Persamaan ini ditemukan oleh matematikawan Prancis yang bernama Simeon Dennis Poisson (1781-1840), dalam manciptakan persamaannya Simeon Dennis Poisson yang telah berkolaborasi dengan Charles Agustin Coloumb (1736-1806) yang merupakan Fisikawan Prancis dan Karl Friedich Gauss (1777-1855) yang merupakan seorang ahli matematika Jerman (Liu, 2011).

Meurut Wiliam dan Hayt (2009), untuk memperoleh persamaan Poisson, persamaan yang digunakan cukup sederhana yakni dari bentuk teori hukum Gauss, yang dapat ditulis pada persamaan berikut

$$\nabla \cdot D = \rho_v \tag{2.1}$$

Operator ∇ merupakan gradien, sedangkan kerapatan fluks listrik yang dilambangkan dengan D didefinisikan dengan,

$$D = \epsilon E \tag{2.2}$$

dan gradien yang berhubungan dengan intensitas medan listrik yang dilambangkan dengan E

$$E = -\nabla V \tag{2.3}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.2) dan (2.3) terhadap persamaan (2.1) sehingga diperoleh

$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon \nabla E) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_v \tag{2.4}$$

atau

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \tag{2.5}$$

Setiap ϵ pada persamaan homogen adalah konstan.

Persamaan (2.5) merupakan persamaan Poisson tetapi dengan operasi ∇, sehingga perlu penafsiran dan perluasan pada koordinat kartesius, sebelum persamaan tersebut digunakan lebih lanjut.

Menurut Purcell dan Varberg (1987), operator ∇ dapat ditulis dengan

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} \tag{2.6}$$

Sedangkan jika diberikan V yang mana V merupakan suatu fungsi peubah yang dapat didiferensialkan di $\mathbf{p} = (x, y)$, turunan parsial pertama dari V berada di **p,** yakni dapat ditulis sebagai berikut

$$\nabla V(\mathbf{p}) = \frac{\partial V}{\partial x}(\mathbf{p})\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}(\mathbf{p})\mathbf{j} \tag{2.7}$$

Dari persamaan (2.6) dan persamaan (2.7), persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai berikut ini

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Sehingga operator $\nabla \cdot \nabla$ dapat diringkas sebagai ∇^2, yang mana menunjukkan turunan kedua dari persamaan diferensial parsial. Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \tag{2.8}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan Poisson pada koordinat kartesius (Wiliam dan Hayt, 2009).

Dapat dikatakan bahwa (2.8) merupakan persamaan Poisson 2D, yang mana persamaan tersebut merupakan persamaan non homogen dengan ditandai $-\frac{\rho_v}{\epsilon}$ merupakan suatu fungsi dan tanda ke non homogennya.

2.8. Masalah Kondisi Awal dan Kondisi Batas

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memiliki lebih dari satu solusi. Dengan demikian perlu adanya kondisi yang diformulasikan sehingga persamaan tersebut memiliki solusi yang tunggal (*unique*). Terdapat dua macam kondisi yang digunakan, yakni kondisi awal dan kondisi batas. Kondisi awal digunakan untuk menentukan solusi pada waktu pertama t_0 sehingga dapat ditulis sebagai $u(x, t_0) = \psi(x)$ (Strauss, 1992).

Pada permasalahan tertentu, terdapat daerah (*domain*) *D* yang menjadikan persamaan diferensial tersebut menjadi valid. *Domain D* terletak pada interval $0 < x < a$, sehingga permasalahan kondisi batas pada daerah *D* hanya pada titik $x = 0$ dan $x = a$. Adapun kondisi batas yang umum digunakan yaitu:

1. Kondisi batas *Dirichlet*: $u(0, y) = g(y)$ dan $u(l, y) = h(y)$.
2. Kondisi batas *Neumann*: $u_x(0, y) = g(y)$ dan $u_x(l, y) = h(y)$.
3. Kondisi batas *Robin*: $u_x(0, y) - a_0 u(0, y) = g(y)$ dan $u_x(l, y) + a_1 u(l, y) = g(y)$, a_0 dan a_1 adalah konstanta yang diberikan (Strauss, 1992).

Menurut Boyce dan DiPrima (2009), kondisi batas memiliki dua klasifikasi untuk menyelesaikan suatu permasalahan diferensial yakni kondisi batas homogen dan kondisi batas non homogen.

2.8.1. Kondisi Batas Homogen

Misalkan $u(x,y)$ adalah solusi dari suatu persamaan diferensial parsial pada batas $0 < x < a$, kondisi batas pada saat $x = 0$ dituliskan seperti persamaan berikut.

$$u(0,y) = g(y) \text{ atau } u_x(0,y) = g(y) \text{ atau } u_x(0,y) - hu(0,y) = g(y) \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) secara terurut merupakan contoh kondisi batas *Dirichlet*, *Neumann*, dan *Robbin*. Untuk setiap h adalah konstanta, sehingga pada persaman (2.9) apabila $g(y) = 0$ maka disebut sebagai kondisi batas homogen (Pinsky, 2003).

2.8.2. Kondisi Batas Tak Homogen

Pada persamaan (2.9), apabila $g(y) \neq 0$, maka disebut sebagai kondisi batas tak homogen (Boyce dan DiPrima, 2009). Sehingga $g(y)$ dapat bernilai konstanta yang tidak nol, adapun $g(y)$ sebuah fungsi yang dipengaruhi oleh variabel y.

2.9. Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif pada solusi beberapa tipe persamaan diferensial parsial. Misalnya saja solusi $u(x,y)$ untuk persamaan diferensial parsial. Untuk menentukan solusi $u(x,y)$ diasumsikan dengan variabel terpisah sehingga $u(x,y) \approx u(x,y) = X(x)T(y)$. Dengan cara ini akan dihasilakn solusi persamaan diferensial parsial (Nagle, 2012). Sehingga kedua fungsi tersebut dapat dipisahkan dengan konstanta pemisah dan diselesaikan secara terpisah menjadi bentuk persamaan diferensial biasa. Masing-masing fungsi dan konstanta pemisahan disebut sebagai fungsi eigen dan nilai eigen (Strauss, 1992).

Pada kondisi batas homogen, untuk menentukan fungsi eigen dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan kondisi batas pada masing-masing fungsi yang sudah diselesaikan secara terpisah (Strauss, 1992). Sedangkan kondisi batas tak homogen terdapat kendala untuk menentukan masing-masing nilai eigen dan fungsi eigen.

Metode pemisah variabel bertujuan untuk memisahkan antara variabel $X(x)$ dan $Y(y)$ yang mana, variabel $X(x)$ merupakan fungsi eigen yang memuat variabel x, sedangkan $Y(y)$ adalah fungsi eigen yang memuat variabel y. Kemudian dengan mensubstitusikan masing-masing fungsi eigen pada persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan, maka masing-masing fungsi eigen dapat diselesaikan secara terpisah (Agarawal dan O'Regan, 2009).

Namun jika diketahui suatu persamaan tak homogen dan memiliki kondisi batas homogen dan tidak memiliki kondisi awal maka akan didapatkan solusi nol (trivial), sehingga menurut $(\mathrm{O'neil}, 2014)$ setelah didapatkan fungsi eigen dari $X(x)$ dengan mensubstitusi kondisi batas dari x dan perluasan deret Fourier pada $f(x,y)$. Selanjutnya untuk mencari $Y(y)$ dilakukan transformasi ke dalam persamaan awal dan substitusi kondisi batas y, sehingga diperoleh fungsi eigen dari $Y(y)$.

Dengan demikian untuk menentukan solusi persamaan Poisson dapat dilakukan dengan cara mentransformasikan ke dalam permisalan awal. Yang mana transformasi dilakukan dengan tujuan untuk memperoleh masing masing nilai eigen dan fungsi eigen yang tidak nol (trivial).

2.10. Perluasan Fungsi Eigen

Metode perluasan fungsi eigen banyak dikaitkan dengan metode deret Fourier, atau metode pemisah variabel, yang mana dimaksudkan untuk mendapatkan solusi eksak dari suatu persamaan diferensial. Jika menggunakan metode ini, sering melibatkan fungsi khusus untuk mendapatkan solusi dari suatu masalah fungsi eigen. Metode pemisah variabel disarankan oleh d'Alemberd (1749). Pada abad ke 18 digunakan pada Euler, Bernoulli, dan Lagrange untuk memecahkan masalah fluktuasi dari sebuah dawai. Sedangkan pada abad ke 19 Fourier dikembangkan, metode ini diperluas, diperinci dan berguna untuk masalah konduktifitas kalor (Shutyaev, 2012).

Menurut O'Neil (2014) jika memiliki penyelesaian dari masalah kondisi batas pada pemisah variabel yang mengakibatkan sinus dan cosinus, sehingga hal ini dapat dikatakan sebagai fungsi eigen. Masalah ini dapat diperoleh beberapa penyelesaian fungsi dengan menggunakan perluasan deret Fourier.

Fungsi eigen merupakan awal dari solusi umum dari suatu persamaan diferensial. Sehingga metode pemisah variabel selalu digunakan dalam permasalahan diferensial. Seperti halnya pada masalah *Sturm-Liouville*, merupakan persamaan linier orde dua yakni

$$(ry')' + (q + \lambda p)y = 0$$

dimana r, q, dan p diberikan. Fungsi kontinyu pada interval ini adalah $[a, b]$ atau (a, b), $r(x) > 0$ dan $p(x) > 0$ untuk setiap $a < x < b$. Dengan kondisi batas homogen yang dapat ditulis sebagai berikut

$$a_1 y(a) + a_2 \frac{dy}{dx}(a) = 0$$

$$b_1 y(b) + b_2 \frac{dy}{dx}(b) = 0$$

di mana a_1, a_2, b_1 dan $b_2 \neq 0$.

Sehingga kondisi batas dari persamaan tersebut dapat ditulis dengan:

1. $r(a) = 0$ merupakan kondisi batas di a
2. $r(b) = 0$ merupakan kondisi batas di b
3. Sehingga $r(a) = r(b) = 0$ merupakan kondisi batas pada persamaan di atas.

Pada permasalahan selain *Sturm-Liouville*, nilai dari λ yang memiliki solusi non trivial (solusi tidak nol) dapat disebut nilai eigen, dan jika disubstitusikan terhadap suatu fungsi dapat disebut fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen (O'neil, 2014).

Dengan demikian untuk menentukan solusi dari persamaan Poisson dengan kondisi batas homogen, dapat dilakukan dengan cara memisahkan antara variabel x dan variabel y. Selanjutnya, dapat dicari perluasan fungsi eigen dengan menentukan nilai eigen terlebih dahulu, selanjutnya nilai eigen disubstitusikan ke dalam solusi umum dari persamaan sehingga menghasilkan fungsi eigen. Fungsi eigen dimaksudkan untuk mencari solusi khusus dari persamaan.

2.11. Deret Fourier

Deret Fourier merupakan metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan masalah kondisi batas, dimana pemisah variabel menimbulkan integral Fourier. Sehingga masalah ini memiliki dua teori yakni integral Fourier sinus dan integral Fourier cosinus. Untuk menentukan apakah suatu persamaan menggunakan integral sinus atau integral cosinus yakni dengan mengetahui solusi fungsi eigennya (O'neil, 2014).

Menurut Strauss (1992), misalkan terdapat domain x pada suatu interval $0 < x < l$, sedemikian sehingga terdapat suatu deret sinus yang konvergen menuju suatu fungsi $\phi(x)$ yang didefinisikan seperti pada persamaan berikut.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{2.10}$$

dengan A_n adalah koefisien dari deret sinus, sedangkan $\phi(x)$ adalah suatu fungsi tertentu.

Misalkan terdapat dua bilangan bulat n dan m sedemikian sehingga $n \neq m$, maka dengan menggunakan identitas trigonometri, suatu integral sinus pada interval $0 < x < l$ yang mempunyai dua sudut berbeda dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \frac{m\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{m\pi x}{l}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \frac{m\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{m\pi x}{l}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)\frac{l}{n-m}\right]_0^l - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)\frac{l}{n-m}\right]_0^l$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka persamaan tersebut diperoleh

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{l}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi l}{l}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{l}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi l}{l}\right)$$

Dikarenakan nilai dari $\sin(\pi) = 0$, maka untuk setiap kelipatan π nilai dari $\sin\big((n \pm m)\pi\big) = 0$. Dengan demikian, persamaan tersebut dapat ditulis kembali seperti berikut.

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = 0, \quad \forall n \neq m$$

Sedangkan untuk dua bilangan bulat n dan m sedemikian sehingga $n = m$, maka suatu integral sinus pada interval $0 < x < l$ yang mempunyai dua sudut sama dapat dinyatakan dengan,

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2 dx \tag{2.11}$$

Kemudian dengan menggunakan identitas trigonometri maka fungsi $\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2$ dapat diubah menjadi

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left(1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right]_0^l$$

Selanjutnya, dengan menggunakan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\left(l - \frac{l}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(l - \frac{l}{2n\pi}\sin(2n\pi)\right)$$

Diketahui nilai dari $\sin(\pi) = 0$, maka setiap kelipatan π, nilai dari $\sin(2n\pi) = 0$. Dengan demikian persamaan (2.11) dapat ditulis menjadi

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}l, \quad \forall n = m$$

Selanjutnya, untuk menentukan koefisien dari deret sinus, maka kedua ruas pada persamaan (2.10) dikalikan dengan $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, kemudian integralkan terhadap variabel x pada interval $0 < x < l$, sehingga persamaan (2.10) menjadi

$$\int_0^l \phi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx$$

Apabila dipilih $n \neq m$, maka akan didapatkan koefisien deret sinus pada opersamaan di atas adalah nol atau $A_n = 0$. Dengan demikian nilai n dan m yang dipilih adalah $n = m$. Sehingga persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\int_0^l \phi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = A_m \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx$$

$$= A_m \int_0^l \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)^2 dx$$

Dengan demikian $n = m$, maka persamaan tersebut dapat ditulis kembali dalam bentuk persamaan berikut

$$\int_0^l \phi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = A_m \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2 dx$$

Apabila kedua sisi dikalikan dengan $\frac{2}{l}$, maka diperoleh nilai A_n yaitu

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

(Strauss, 1992).

2.12. Kajian Agama

Ilmu pengetahuan telah memberikan sumbangan yang berarti dalam memahami al-Quran terutama yang berkaitan dengan fenomena alam semesta. Ayat-ayat tersebut hanya dapat dipahami maknanya dengan bantuan beberapa teori dan penemuan-penemuan ilmiah. Dengan demikian ilmu pengetahuan adalah disiplin ilmu yang juga memberi sumbangan kepada ilmu tafsir.

Begitu juga dengan proses penemuan ilmu pengetahuan tersebut, berbagai masalah dihadapi oleh manusia dan cara penyelesaian masalah yang berbeda. Seperti halnya dalam matematika suatu persamaan memiliki berbagai macam cara penyelesaian. Pada umumnya matematika memiliki penyelesaian persamaan numerik dan persamaan analitik. Sehingga dapat diketahui bahwasannya setiap masalah ada solusinya meskipun solusi tersebut harus melalui hal yang sulit. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt. dalam surat al-Insyirah/94:5-6 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

"Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyirah/94:5-6).

Dalam tafsir ibnu katsir telah dijelaskan, bahwa Allah Swt. memberitahukan kepada umatnya bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian Allah mempertegas berita tersebut (Al-Sheikh, 2004). Sedangkan pada ayat di atas kata *'yusra'* yang artinya mudah (tanpa alif laam) maknanya kemudahan yang tiada terhingga, sementara kata *'al usri'* yang artinya sulit (dengan alif laam) menunjukkan kesulitannya spesifik terhadap suatu objek. Dan kata ini diulang sebanyak dua kali, yang dapat diambil maknanya bahwa setiap ada kesulitan Allah memberikan kemudahan setelahnya, dan kemudahan yang tiada terhingga (Andriani, 2009).

Salah satu bukti dalam matematika yakni dalam permasalahan persamaan non homogen. Suatu persamaan non homogen dapat diselesaiakan secara analitik dengan memisalkan persamaan tersebut mejadi persamaan homogen. Selanjutnya dipisahkan kedua variabel yang terikat, setelah diketahui solusi dari persamaan yang berbentuk homogen disubstitusikan ke dalam persamaan non homogennya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Poisson 2D Menggunakan Perluasan Fungsi Eigen dan Deret Fourier

Persamaan Poisson merupakan salah satu persamaan diferensial parsial tipe elips yang diambil dari nama matematikawan Prancis, ahli ilmu ukur dan fisika yakni Simeon-Denis Poisson. Persamaan ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \text{ pada } \{0 < x < a, 0 < y < b\} \tag{3.11}$$

dengan kondisi batas homogen yang digunakan yaitu:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 = u(a,y) \\ u(x,0) &= 0 = u(x,b) \end{aligned} \tag{3.12}$$

(O'neil, 2014).

Persamaan ini sering muncul pada masalah fisis dan teknik. Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Pada pembahasan kali ini akan dipaparkan penyelesaian persamaan Poisson 2D dengan menggunakan perluasan fungsi eigen dan deret Fourier. Untuk menyelesaikan persamaan Poisson 2D maka dilakukan dengan cara pemisah variabel pada persamaan Poisson 2D dan disubstitusi kondisi batas dari persamaan tersebut.

Untuk menyelesaikan persamaan Poisson 2D dengan menggunakan perluasan fungsi eigen dengan memisalkan,

$$f(x,y) = ku \tag{3.13}$$

dengan k merupakan nilai eigen, sehingga k harus mempunyai penyelesaian taktrivial. Sehingga persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{xx} + u_{yy} = ku \tag{3.14}$$

Selanjutnya dari persamaan (3.4) ditentukan solusi $X(x)$ dan $Y(y)$ dengan metode pemisahan variabel,

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{3.15}$$

Dikarenakan fungsi u memuat dua variabel yaitu x dan y, maka berdasarkan notasi persamaan diferensial parsial, penulisan turunan fungsi u terhadap variabel x dinotasikan dengan $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ atau dapat ditulis $u_x(x,y)$, begitupula untuk variabel y dinotasikan dengan $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ atau dapat ditulis $u_y(x,y)$ dan seterusnya. Karena fungsi X memuat variabel x dan fungsi Y memuat variabel y maka masing-masing turunan dari persamaan (3.5) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= X'(x)Y(y) \\ u_{xx}(x,y) &= X''(x)Y(y) \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} u_y(x,y) &= X(x)Y'(y) \\ u_{yy}(x,y) &= X(x)Y''(y) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Selanjutnya dengan substitusi persamaan (3.16) dan (3.17) pada persamaan (3.1), maka diperoleh

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = kX(x)Y(y) \tag{3.18}$$

Untuk memudahkan menentukan solusi maka persamaan (3.18) dapat pula ditulis sebagai berikut

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) + kX(x)Y(y) \tag{3.19}$$

Persamaan (3.19) merupakan persamaan yang masih bergantung terhadap x dan y sehingga ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (3.19) dikalikan dengan $\frac{1}{X(x)Y(y)}$ sehingga dapat diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k \tag{3.20}$$

Ruas kiri dari persamaan (3.20) hanya bergantung pada x saja, sedangkan ruas kanan hanya bergantung pada y saja. Persamaan tersebut hanya mungkin dipenuhi jika keduanya merupakan konstanta. Misalkan konstanta tersebut adalah λ, maka:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k = \lambda \tag{3.21}$$

Persamaan (3.21) dapat ditulis secara terpisah sebagai

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{3.22}$$

dan

$$Y''(y) - kY(y) + \lambda Y(y) = 0 \tag{3.23}$$

Persamaan (3.23) dapat disederhanakan sebagai berikut

$$Y''(y) + (-k + \lambda)Y(y) = 0 \tag{3.24}$$

Kondisi batas (3.12) dapat ditulis dalam bentuk variabel terpisah, yaitu:

$$\begin{gathered} u(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \text{ dan } u(a, y) = X(a)Y(y) = 0 \\ u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \text{ dan } u(x, b) = X(x)Y(b) = 0 \end{gathered} \tag{3.25}$$

Selanjutnya, dikerjakan terlebih dahulu persamaan (3.22) karena persamaan (3.22) merupakan persamaan yang lebih sederhana. Pada persamaan (3.12) λ merupakan suatu konstanta, maka λ harus bernilai nol, positif, atau negatif, secara terurut dinotasikan dengan $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, atau $\lambda < 0$ atau λ dapat dinotasikan sebagai $\lambda = 0$, $\lambda = \beta^2$, dan $\lambda = -\beta^2$. Sehingga untuk menentukan solusi persamaan (3.22) ditentukan terlebih dahulu λ yang memenuhi kedua fungsi eigen dari $X(x)$ dan $Y(y)$, yaitu persamaan (3.12) dan (3.14).

Pertama: Untuk $\lambda = 0$, dengan kondisi batas $X(0) = 0$ dan $X(a) = 0$. Persamaan (3.22) dapat ditulis sebagai berikut

$$X''(x) - 0X(x) = 0 \tag{3.26}$$

dengan solusi

$$X(x) = c_1 x + c_2 \tag{3.27}$$

Penjabaran untuk solusi ini dapat dilihat pada Lampiran 1. Kemudian dengan mensubstitusikan kondisi batas $X(0) = 0$ terhadap persamaan (3.27) yaitu sebagai berikut

$$c_1(0) + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Karena $c_2 = 0$, maka persamaan (3.27) dapat ditulis sebagai $X(x) = c_1 x$. Selanjutnya disubstitusikan kondisi batas $X(a) = 0$ terhadap $X(x) = c_1 x$ sehingga dapat diperoleh

$$X(a) = c_1 a$$

$$0 = c_1 a$$

$$\frac{0}{a} = c_1$$

$$0 = c_1$$

Dapat disimpukan bahwa solusi di atas merupakan solusi trivial, karena masing-masing nilai dari $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$.

Kedua: Untuk $\lambda = \beta^2$ dengan kondisi batas $X(0) = 0$ dan $X(a) = 0$. Persamaan (3.22) dapat ditulis sebagai berikut

$$X(x)'' - \beta^2 X(x) = 0 \tag{3.28}$$

dengan solusi

$$X(x) = C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x) \tag{3.19}$$

Penjabaran untuk solusi ini dapat dilihat pada Lampiran 2. Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (3.19) terhadap kondisi batas saat $X(0) = 0$, sehingga

$$X(x) = C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x)$$

$$C\cosh(\beta 0) + D\sinh(\beta 0) = 0$$

$$C = 0$$

Setelah diketahui bahwa $C = 0$, maka persamaan tersebut menjadi $X(x) = D\sinh(\beta x)$. Sehingga dilakukan pensubstitusian kondisi batas saat $X(a) = 0$ terhadap $X(x) = D\sinh(\beta x)$, dapat diperoleh

$$X(a) = D\sinh(\beta a)$$

$$0 = D\sinh(\beta a)$$

Pada kondisi tersebut, terdapat dua kemungkinan yang dapat dipenuhi, yaitu nilai $D = 0$ atau $\sinh(\beta x) = 0$.

$$D\sinh(\beta a) = 0$$

Andaikan $D \neq 0$, maka

$$\sinh(\beta a) = 0$$

$\sinh(\beta a)$ dapat ditulis sebagai

$$\frac{e^{\beta a} - e^{-\beta a}}{2} = 0$$

Dalam hal ini β yang memenuhi adalah $\beta = 0$, sedangkan konstanta λ harus bernilai positif, sehingga tidak ada β positif yang memenuhi persamaan tersebut.

Dengan demikian solusi $X(x)$ dapat terpenuhi hanya pada interval $x = 0$, sehingga dapat diperoleh solusi $X(x)$ adalah nol atau solusi trivial. Dari kedua kondisi tersebut, dapat diketahui solusi $X(x)$ pada persamaan (3.22) dengan memisalkan $\lambda = \beta^2$ diperoleh solusi nol *(trivial solution).*

Ketiga: Untuk $\lambda = -\beta^2$ dengan kondisi batas $X(0) = 0$ dan $X(a) = 0$. Persamaan (3.22) dapat ditulis sebagai berikut

$$X(x)'' + \beta^2 X(x) = 0 \tag{3.20}$$

dengan solusi

$$X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \tag{3.21}$$

Penjabaran untuk solusi tersebut dapat dilihat pada Lampiran 3. Selanjutnya, dengan menggunakan kondisi batas pada saat $X(0) = 0$ maka persamaan (3.21) menjadi

$$A\cos(\beta 0) + B\sin(\beta 0) = 0$$

$$A(1) + B(0) = 0$$

$$A = 0$$

Setelah diketahui $A = 0$, maka persamaan tersebut menjadi

$$X(x) = B\sin(\beta x) \tag{3.22}$$

Selanjutnya disubstitusi kondisi batas $X(a) = 0$ ke dalam persamaan $X(x) = B\sin(\beta x)$ sehingga persamaan tersebut menjadi

$$X(a) = B\sin(\beta a)$$

$$0 = B\sin(\beta a)$$

Pada kondisi tersebut, terdapat dua kemungkinan yang dapat dipenuhi, yaitu nilai $B = 0$ atau $\sin(\beta x) = 0$. Andaikan dipilih $B = 0$, maka solusinya adalah nol (trivial). Sehingga solusi tidak akan trivial jika $B \neq 0$ atau $\sin(\beta a) = 0$.

Selanjutnya pilih $B \neq 0$ oleh karena itu berakibat $\sin(\beta a)$ harus sama dengan nol, sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$(\beta a) = \arcsin\ (0)$$

$$= n\pi \qquad \{n = 1,2,\dots\}$$

$$\beta = \frac{n\pi}{a}$$

Karena $\lambda = -\beta^2$, maka

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

λ disebut nilai eigen, sedangkan fungsi eigennya dapat diperoleh dari mensubstitusikan nilai eigen terhadap persamaan (3.22), yaitu

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{3.23}$$

Persamaan (3.23) juga dapat dikatakan sebagai fungsi eigen dari persamaan (3.12) solusi khusus untuk $X(x)$.

Langkah selanjutnya mencari solusi $Y(y)$ dangan cara menyelesaikan persamaan (3.14). Pada persamaan (3.14) $(-k - \beta^2)$ merupakan suatu konstanta, sehingga dapat dimisalkan sebagai konstanta yang lain dalam hal ini dimisalkan sebagai γ. Maka γ dapat bernilai nol, positif, atau negatif, secara terurut dinotasikan dengan $\gamma = 0$, $\gamma > 0$, atau $\gamma < 0$. Sehingga untuk menentukan solusi persamaan (3.22) ditentukan terlebih dahulu γ yang memenuhi fungsi eigen dari $Y(y)$. Untuk $\gamma < 0$ dan $\gamma = 0$ akan bernilai trivial hal ini dapat dilihat pada Lampiran 4.

Dikarenakan konstanta yang memenuhi fungsi eigen $X(x)$ adalah $\lambda = -\beta^2$, maka persamaan (3.14) menjadi seperti berikut

$$Y'' + (-k - \beta^2)Y = 0 \tag{3.24}$$

Dengan kondisi batas $Y(0) = 0$ dan $Y(b) = 0$, dapat diperoleh solusi sebagai berikut

$$Y(y) = C\cos\left(\left(\sqrt{-k-\beta^2}\right)y\right) + D\sin\left(\left(\sqrt{-k-\beta^2}\right)y\right) \tag{3.25}$$

Penjabaran dari solusi (3.25) dapat dilihat pada Lampiran 4.

Selanjutnya, karena β sudah diketahui yakni $\beta = \frac{n\pi}{a}$ sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$Y(y) = C\cos\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)y\right) + D\sin\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)y\right)$$

Untuk menentukan koefisien k digunakan kondisi batas $Y(0) = 0$

$$C\cos\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)(0)\right) + D\sin\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)(0)\right) = 0$$

$$C(1) + D(0) = 0$$

$$C = 0$$

Setelah diketahui $C = 0$, maka persamaan tersebut menjadi

$$Y(y) = D\sin\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)y\right)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan kondisi batas $Y(b) = 0$ ke dalam persamaan di atas, maka persamaan di atas menjadi

$$Y(b) = D\sin\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)(b)\right)$$

$$0 = D\sin\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b)\right)$$

Pada kondisi tersebut, terdapat dua kemungkinan yang dapat dipenuhi, yaitu nilai $D = 0$ atau $\sin\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(y)\right) = 0$. Andaikan dipilih $D = 0$, maka solusinya adalah nol (trivial). Sehingga solusi tidak akan trivial jika $D \neq 0$ diperoleh

$$\sin\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)(b)\right) = 0$$

$$\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b) = \arcsin\,(0)$$

$$\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,(b) = m\pi \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

$$\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = \frac{m\pi}{b}$$

$$-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

$$k = -\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) \tag{3.26}$$

Persamaan (3.26) merupakan nilai eigen yang memenuhi persamaan $Y(y)$, sedangkan fungsi eigen yang memenuhi persamaan $Y(y)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai eigen terhadap persamaan berikut

$$Y_m(y) = D_m\sin\left(\left(\sqrt{-k-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)y\right) \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) merupakan solusi umum dari persamaan (3.23). Selanjutnya disubstitusikan nilai eigen k terhadap persamaan (3.27) untuk mendapatkan solusi khusus, sehingga dapat diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} Y_m(y) &= D_m \sin\left(\sqrt{\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\; y\right) \\ &= D_m \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \qquad (3.28) \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa persamaan (3.23) merupakan fungsi eigen dari $X(x)$ yakni pada persamaan (3.22) dan persamaan (3.28) merupakan fungsi eigen dari $Y(y)$ yakni pada persamaan (3.23).

Setelah diperoleh nilai eigen k dan fungsi eigen dari $X(x)$ dan $Y(y)$, langkah selanjutnya mencari koefisien dari u_{nm}. Untuk menentukan u_{nm} pada awal subbab telah diketahui permisalan (3.15) yaitu $u(x,y) = X(x)Y(y)$, sehingga u_{nm} dapat diperoleh sebagai berikut

$$u_{nm} = B_n D_m \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Karena $B_n D_m$ merupakan suatu konstanta, sehingga $B_n D_m$ dapat dibentuk menjadi suatu konstanta yang lain, dalam hal ini $B_n D_m$ dimisalkan sebagai C_{nm}, sehingga persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$u_{mn} = C_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa u_{mn} merupakan fungsi eigen dari persamaan (3.11). Persamaan di atas dapat pula ditulis dalam bentuk deret yakni sebagai berikut

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{3.29}$$

Selanjutnya untuk menentukan koefisien C_{mn} dapat dikerjakan dengan menggunakan permisalan pada persamaan (3.3), yaitu

$$f(x,y) = ku$$

Dengan k nilai eigen pada persamaan (3.26), sedangkan u merupakan fungsi eigen dari $X(x)$ dan $Y(y)$ pada persamaan (3.29). Karena k memuat m dan n maka jika dijumlahkan akan sama dengan m dan n yang terdapat pada u, sehingga u dapat dituliskan sebagai berikut

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{3.30}$$

untuk $n = 1,2,3, \ldots$ dan $m = 1,2,3, \ldots$, maka terdapat C_{mn} yang selalu berubah-ubah mengikuti banyaknya n dan banyaknya m. C_{mn} merupakan koefisien deret Fourier yang dapat diperoleh dengan cara transformasi deret Fourier.

Misalkan terdapat dua bilangan bulat n dan r, maka dengan menggunakan identitas trigonometri, suatu integral sinus pada interval $0 < x < a$ yang memiliki sudut berbeda dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\int_0^a f(x,y) \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right) dx$$

$$\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mn}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx \tag{3.31}$$

Apabila $n \neq r$ maka berakibat $\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx = 0$, sehingga koefisien deret sinus pada persamaan di atas adalah nol atau $C_{mn} = 0$.

Sebaliknya jika $n = r$, maka persamaan (3.31) di atas menjadi

$$\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mr}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\int_0^a \left(\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right)^2 dx$$

$$\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mr}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\frac{a}{2}$$

untuk memperoleh $\int_0^a \left(\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right)^2 dx = \frac{a}{2}$ dapat dilihat pada Lampiran 13.

Selanjutnya untuk persamaan yang mengandung koefisien y. Misalkan terdapat dua bilangan bulat m dan s, maka dengan menggunakan identitas trigonometri, suatu integral sinus pada interval $0 < x < b$ yang memiliki sudut berbeda dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\int_0^b \left(\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dy$$

$$= \int_0^b \left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mr}\,\frac{a}{2}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)dy$$

Karena yang dikerjakan terlebih dahulu adalah $\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)dx$ maka ruas kiri pada persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi $\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dxdy$.

$$\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dxdy$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{mr}\,\frac{a}{2}\int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dy \qquad (3.32)$$

Apabila $m \neq s$ akan berakibat $\int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dy = 0$, sehingga koefisien deret sinus pada persamaan di atas adalah nol atau $C_{mr} = 0$. Sebaliknya jika $m = s$. Maka persamaan (3.32) menjadi

$$\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dxdy$$

$$= \left(-\left(\left(\frac{s\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{sr}\,\frac{a}{2}\int_0^b \left(\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)^2 dy$$

$$\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dxdy = \left(-\left(\left(\frac{s\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right) C_{sr}\,\frac{a}{2}\frac{b}{2}$$

untuk memperoleh $\int_0^b \left(\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)^2 dy = \frac{b}{2}$ dapat dilihat pada Lampiran 14.

Dari hasil pengintegralan pada persamaan (3.31) dan (3.32) pesamaan tersebut berakibat seperti berikut

$$\int_0^b \int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dxdy = \left(-\left(\left(\frac{s\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right)C_{sr}\frac{1}{4}ab$$

Sehingga dapat diperoleh

$$C_{sr} = \frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{s\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right)\right)}\frac{4}{ab}\int_0^b \int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)dxdy \quad (3.33)$$

Setelah diperoleh C_{sr} pada persamaan (3.33) dan u pada persamaan (3.29) langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan nilai C_{mn} pada persamaan (3.29), sedangkan nilai C_{mn} sama halnya pada persamaan (3.33) dimana $n = r$ dan $m = s$. Sehingga dapat dituliskan solusi $u(x,y)$ adalah sebagai berikut

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)} \frac{4}{ab}\int_0^b \int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (3.34)$$

Dapat disimpulkan bahwa persamaan (3.34) merupakan solusi analitik dari persamaan Poisson 2D dengan kondisi batas homogen. Untuk mengetahui bahwa (3.34) merupakan solusi dari persamaan Poisson pada (3.11) yang memiliki kondisi batas homogen (3.12), maka perlu dilakukan analisis terlebih dahulu.

Pertama, diketahui persamaan Poisson (3.11) dan memiliki kondisi batas homogen pada (3.12) selanjutnya dilakukan beberapa penyelesaian sehingga diperoleh solusi $u(x,y)$ pada persamaan (3.34). Untuk menjamin apakah persamaan (3.34) merupakan solusi dari persamaan Poisson maka persamaan

(3.34) disubstitusikan pada persamaan (3.11), apabila hasilnya adalah $f(x, y)$, maka persamaan (3.34) merupakan solusi dari persamaan (3.11) seperti yang tertulis pada Lampiran 5.

Selanjutnya, diketahui kondisi batas yang digunakan untuk menyelesaikan pesamaan Poisson adalah kondisi batas homogen dengan $u(0, y) = 0 = u(a, y)$ dan $u(x, 0) = 0 = u(x, b)$. Dengan demikian perlu dianalisis pada saat $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, dan $y = b$ persamaan (3.34) memenuhi kondisi tersebut seperti yang terdapat pada Lampiran 6.

Berdasarkan kedua kondisi tersebut, maka dijamin bahwa persamaan (3.34) merupakan solusi dari persamaan Poisson (3.11) yang memenuhi kondisi batas homogen (3.12).

3.2 Simulasi Solusi Persamaan Poisson 2D.

Persamaan Poisson merupakan bentuk khusus atau bentuk non homogen dari persamaan Laplace. Persamaan Laplace itu sendiri terbentuk dari persamaan difusi atau persamaan gelombang yang tidak bergantung terhadap waktu. Persamaan Poisson ini menggambarkan distribusi panas atau penyebaran panas dalam suatu lempeng dengan keadaan *stady state* atau tetap.

Dengan demikian solusi dari persamaan (3.1), yakni dengan mensubstitusikan kondisi batas terlebih dahulu, yaitu untuk $0 < x < a$ dan $0 < y < b$. Misalkan $a = 2$ dan $b = 1$. Sehingga n dan m merupakan jumlah dari persamaan yang mana n dan m merupakan nilai bilangan bulat dari $1,2,3, \ldots$, dengan $\Delta x = 0{,}1$ dan $\Delta y = 0{,}1$.

Selain itu untuk menentukan gambar solusi dari (3.34) perlu didefinisikan $f(x,y)$. Dalam hal ini dimisalkan $f(x,y) = 1$. Sehingga untuk memperoleh gambar solusi dapat dihitung sebagai berikut.

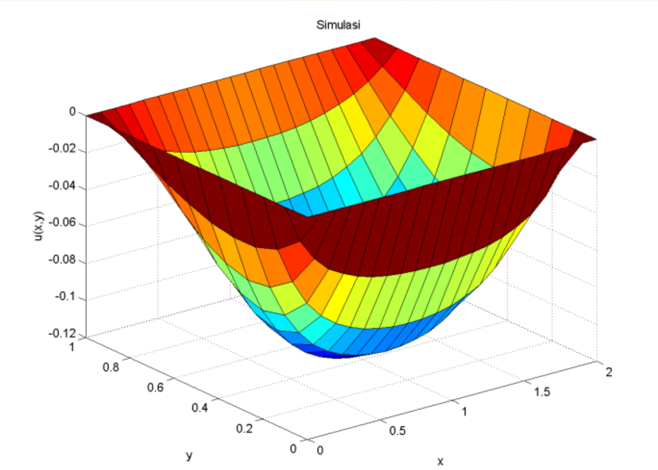
$$u(x,y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy}{-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{ab}\int_0^1\int_0^2 1\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)dxdy}{-\left(\left(\frac{m\pi}{1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{2}\frac{(-1+\cos(n\pi))2(-1+\cos(m\pi))}{n\pi^2 m}}{-\left(\left(\frac{m\pi}{1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)$$

dengan panjang $n = 1,2,\dots,20$ dan panjang $m = 1,2,\dots 30$. Solusi analitik persamaan (3.34) dengan $f(x,y) = 1$ dapat dilihat gambar solusi sebagai berikut.



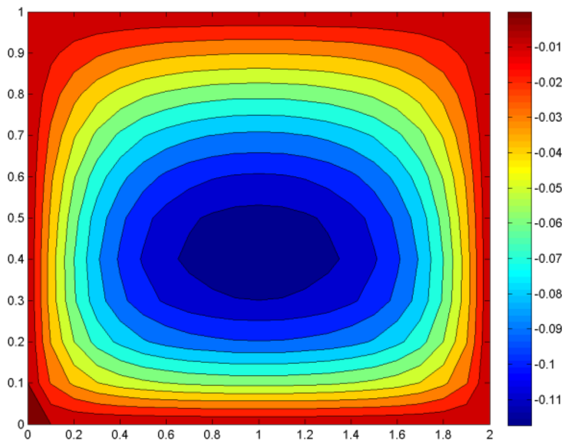
Gambar 3.1 Kurva Ketinggian Solusi Persamaan Poisson 2D Dengan $f(x,y) = 1$

Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi 3D persamaan Poisson terhadap ruang x, ruang y, dan ketinggian $u(x,y)$. Dari grafik tersebut menunjukkan persamaan tidak bergantung terhadap waktu, untuk $f(x,y)$ yang memenuhi adalah $f(x,y) = 1$.

Gambar 3.1 mendeskripsikan bahwa ketinggian terjadi pada seluruh ruang yang berbentuk persegi panjang dengan kondisi batas untuk x adalah $u(0,y) = 0 = u(a,y)$ kondisi batas tersebut dapat pula ditulis sebagai $0 < x < a$ dengan $a = 1$ dan y adalah $u(x,0) = 0 = u(x,b)$ kondisi tersebut dapat pula ditulis dengan $0 < y < b$ dengan $b = 2$. Artinya pada saat x dengan kondisi batas $0 < x < 1$ dan pada saat y dengan kondisi batas $0 < y < 2$, ketinggian belum mengalami pergeseran yakni tetap pada titik 0.

Sehingga dapat dijelaskan bahwa, dengan diawali titik nol, ketinggian perlahan mulai merambat turun yang kemudian merambat naik menuju titik $u(x,y) = 0$. Hal ini dapat ditunjukkan jika diambil sebuat sampel $x = 0{,}2$ dan $y = 0{,}4$ maka diperoleh $u(x,y) = -0{,}0725$, sedangkan jika diambil sebuah sampel $x = 0{,}5$ dan $y = 0{,}5$ maka diperoleh solusi $u(x,y) = -0{,}0972$. Sehingga pernyataan di atas dapat menunjukkan bahwa semakin kecil x dan y yang diambil maka ketinggian akan mengalami penurunan, ataupun sebaliknya.

Persamaan Poisson dapat pula dinyatakan sebagai persamaan panas, sehingga grafik solusi persamaan Poisson dalam bentuk persaman panas dapat dilihat seperti gambar berikut.



Gambar 3.2 Grafik Contour Solusi Persamaan Poisson 2D Dengan $f(x,y) = 1$.

Pada Gambar 3.2 ditunjukkan bahwa sebuah lempengan logam tipis berbentuk persegi panjang dengan jarak $\Delta x = 0{,}1$ dan jarak $\Delta y = 0{,}1$. Lempeng logam tersebut terbatas pada dimensi dua yaitu $x = 0{,}0.1{,}0.2, \dots ,2$ dan $y = 0{,}0.1, \dots ,1$.

Gambar 3.2 mendeskripsikan bahwa panas menyebar pada seluruh lempeng yang berbentuk persegi panjang dengan kondisi batas untuk x adalah $u(0,y) = 0 = u(a,y)$ dengan besar $a = 2$ dan y adalah $u(x,0) = 0 = u(x,b)$ besar $b = 1$. Artinya pada saat x dengan kondisi batas x yang dapat dituliskan dengan $0 < x < 2$ dan kondisi batas y yang dapat dituliskan dengan $0 < y < 1$, Artinya, pada kondisi batas tersebut suhu/panas batas tepi lempeng adalah sebesar 0, yakni suhu/panas yang tertinggi hal ini ditunjukkan dengan grafik yang berwarna merah.

Gambar 3.2 menjelaskan bahwa, saat panas menyebar pada sebuat pelat persegi panjang panas tersebut juga mengalami penurunan hal ini ditunjukkan dengan misalan diambil sebuah sampel $x = 0{,}2$ dan $y = 0{,}3$ maka akan menghasilkan $u(x,y) = -0{,}06$ sedangkan jika diambil sebuah sampel $x = 1$ dan

$y = 0{,}4$ menghasilkan $u(x,y) = -0{,}11$ sehingga dari kedua sampel terrsebut menunjukkan semakin kecil $u(x,y)$ yang dihasilkan maka pernyebaran panas akan semakin menurun.

Selanjutnya, menggunakan kondisi batas dan panjang n dan m sama dengan Gambar 3.1, akan tetapi koefisien $f(x,y) = x^2$, maka solusi dari persamaan (3.34) adalah sebagai berikut

$$u(x,y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy}{-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{ab}\int_0^1\int_0^2 x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)dxdy}{-\left(\left(\frac{m\pi}{1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)$$

Misalkan

$$\int_0^1\int_0^2 x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)dxdy = G$$

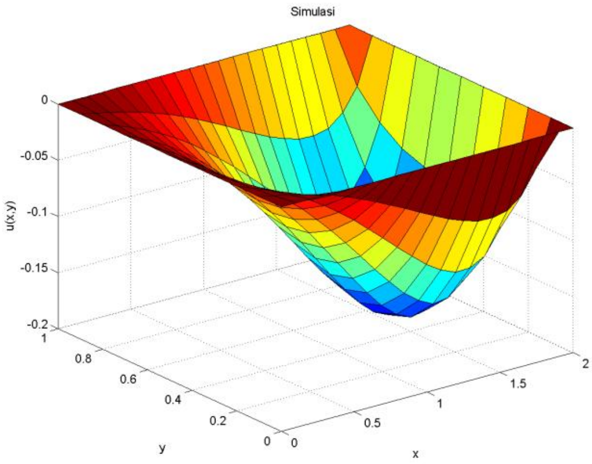
dan

$$G = \frac{((a^3b(2-2\cos(n\pi)+n^2\pi^2\cos(n\pi)-2n\pi\sin(n\pi))(-1+\cos(m\pi))}{n^3\pi^4 m}$$

Sehingga diperoleh

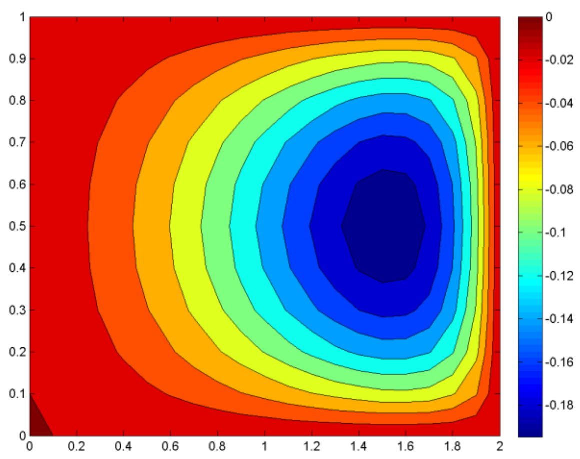
$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{2}G}{-\left(\left(\frac{m\pi}{1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)$$

Dari solusi di atas, maka dapat diperoleh gambar solusi untuk $f(x,y) = x^2$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.3 Kurva Ketinggian Solusi Persamaan Poisson 2D Dengan $f(x,y) = x^2$

Gambar 3.3 merupakan hasil simulasi 3D untuk $f(x,y) = x^2$ dari persamaan (3.11) terhadap ruang x, ruang y, dan solusi $u(x,y)$. Dengan panjang selang x adalah $0 < x < 2$ dan memiliki panjang parameter $n = 1,2, \dots 20$ sedangkan untuk panjang selang y adalah $0 < y < 1$ dan memiliki panjang selang $m = 1,2, \dots ,30$. Grafik tersebut dinyatakan dalam bentuk kurva ketinggian.



Gambar 3.4 Grafik Contour Solusi Persamaan Poisson 2D Dengan $f(x,y) = x^2$

Gambar 3.4 menginterpretasikan bahwa jika dimisalkan suatu lempengan logam jika dipanaskan lebih banyak pada sisi y maka saat panas merambat menuju ke sisi x lempengan logam panas tersebut akan menghilang. Hal ini ditunjukkan dengan gambar yang semakin mencekung kekanan menuju negatif. Misalkan diambil $y = 0$ dan $x = 0$ maka akan diperoleh $u(x, y) = 0$ sedangkan jika diambil $y = 0.5$ dan $x = 1.5$ maka akan diperoleh $u(x, y) = -0.0163$ yang ditunjukkan semakin berwarna biru. sehingga hal ini menunjukkan bahwa panas akan semakin turun ketika menuju ke salah satu sisi lempengan logam.

Berdasarkan Gambar 3.1 dan Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa gelombang akan mengalami pergerakan bergantung pada fungsi $f(x, y)$. Sedangkan berdasarkan Gambar 3.2 dan Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa perambatan panas akan mengalami perubahan suhu bergantung pada fungsi $f(x, y)$.

3.3 Kajian Agama

Keyakinan ibarat kekuatan iman dan keteguhannya bagaikan ombak yang besar. Tidak digoncangkan oleh keraguan dan pikiran, bahkan keraguan dan khayalan tidak ada wujudnya sama sekali. Jika ada keraguan dari luar, maka telinga tidak akan mendengarkannya dan hati tidak akan menoleh kepadanya.

Sehingga manusia dianjurkan untuk senantiasa meyakini dan berusaha bahwa setiap apapun yang dilakukan pasti memperoleh jalan keluar seperti halnya pada ayat al-Quran surat Yusuf/12:87 yang berbunyi:

يَٰبَنِيَّ ٱذۡهَبُواْ فَتَحَسَّسُواْ مِن يُوسُفَ وَأَخِيهِ وَلَا تَاْيۡـَٔسُواْ مِن رَّوۡحِ ٱللَّهِۖ إِنَّهُۥ لَا
يَاْيۡـَٔسُ مِن رَّوۡحِ ٱللَّهِ إِلَّا ٱلۡقَوۡمُ ٱلۡكَٰفِرُونَ ٨٧

Hai anak-anakku, pergilah kamu, Maka carilah berita tentang Yusuf dan saudaranya dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir".

Ayat di atas menjelaskan tentang pesan Nabi Yakub as kepada anak-anaknya dalam mencari saudaranya yaitu Yusuf dan Bunyamin. Pada ayat tersebut nabi Yakub as bukan saja memerintahkan kepada anak-anaknya untuk terus berharap dan keyakinan diri serta tidak putus asa dalam mencari saudaranya, tetapi ada pesan kepada semua manusia agar memiliki sikap kepercayaan diri dan tidak putus asa dalam mencari rahmat Allah Swt. Karena Allah akan memberikan rahmatNya kepada setiap manusia yang berikhtiar dan memiliki keyakinan diri.

Berdasarkan ayat di atas, konsep matematika yang terkandung dalam sekripsi ini adalah penulis yakin bahwa persamaan Poisson ini akan mendapatkan solusi analitiknya, sehingga dengan terus berikhtiar dan penuh keyakinan diri dalam proses pengerjaannya, penulis mendapatkan solusi yang diinginkan.

Begitu pentingnya konsep keyakinan diri, sehingga Allah menurunkan ayat pada surat al-Hijr/15:55

قَالُواْ بَشَّرۡنَٰكَ بِٱلۡحَقِّ فَلَا تَكُن مِّنَ ٱلۡقَٰنِطِينَ ٥٥

Mereka menjawab: "Kami menyampaikan kabar gembira kepadamu dengan benar, Maka janganlah kamu termasuk orang-orang yang berputus asa".

Ayat tersebut menegaskan bahwa Allah akan menurunkan kabar gembira bagi setiap manusia yang memiliki keyakinan diri dan mau berusaha untuk mencapai solusi dari setiap masalah yang diperolehnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penyelesaian analitik persamaan Poisson 2D menggunakan perluasan fungsi eigen dan deret Fourier dapat dilakukan dengan langkah-langkah antara lain yaitu menentukan kondisi batas, menentukan nilai eigen dari persamaan yang memenuhi persamaan yang bergantung variabel x dan y, selanjutnya menentukan fungsi eigen yang memenuhi persamaan $X(x)$ dan $Y(y)$. Setelah diperoleh fingsi eigen dari $X(x)$ dan $Y(y)$ dilakukan perluasan fungsi eigen, di dalam perluasan fungsi eigen masih terdapat konstanta C_{mn}, sehingga konstanta tersebut dapat ditentukan nilainya dengan menggunakan metode deret Fourier.
2. Solusi analitik dari persamaan Poisson 2D pada (3.1) dengan kondisi batas homogen pada (3.2) adalah

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{ab}C_{mn}}{-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

dengan

$$C_{mn} = \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dxdy \quad n \neq m$$

4.2. Saran

Penelitian ini difokuskan pada solusi analitik dari persamaan Poisson 2D yang mana merupakan persamaan non homogen, kondisi batas yang digunakan peneliti yakni kondisi batas homogen, dan menggunakan metode pemisahan variabel. Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk membandingkan dengan solusi persamaan Poisson 2D menggunakan metode yang berbeda dengan kondisi batas yang berbeda, sehingga dapat diperoleh hasil penyelesaian yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Agarawal, R.P & O'Regan, 2009. *Ordinary and Partial Differential Equation With Special Function, Fourier Series, and Boundary Value Problems.* New York: Springer Science + Business Media.

Al-Sheikh, D.A. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir.* Terjemahan M. Abdul Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Andriani, E. 2009. *Jangan Menyerah (tafsir QS.Al Insyirah 94:5-8).* (Online), (http.//eviandrianimosy.blogspot), diakses 11 November 2015.

Boyce, W.E & DiPrima, R.C. 2009. *Elementarry Differential Equation and Boundary Value Problem Ninth Edition.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

Fitria, R. 2008. *Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Liu, J.L. 2011. *Poisson's Equation in Electrostatistics*, (Online), (www.nhcue.edu.tw), diakses 10 Oktober 2015.

Mufidah, F. 2014. *Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis pada Koordinat Polar.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nagle R.K. 2012. *Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems.* New York: Addison Wesley.

O'neil, P. 2014. *Beginning Partial Differential Equations.* New York: John Wiley & Sons.Inc.

Pinsky, M.A. 2003. *Partial Differential Equation and Boundary-Value Problem With Aplication Third Edition.* Rhode Island: Waveland Press.

Rita, P. K. dan Masduki. 2009. Penerapan Metode Beda Hinga Order Empat dan Full Multigrid Untuk Menyelesaikan Persamaan Poisson dan Laplace. *Jurnal Penelitian Sains & Teknologi* , 68-74.

Shiferaw, A. dan Mittal, R.C. 2011. An Efficient Direct Method to Solve the Three Dimensional Poisson’s Equation. *American Journal of Computational Mathematics* , 285-293.

Shutyaev, V.P. 2012. Eigen Value Problem: Methods of Eigen Functions. *Computational Methods and Algorithms* .

Strauss, W.A. 1992. *Partial Differensial Equation An Introduction.* New York: John Wiley & Sons.Inc.

Tvieito, A. dan Winther, R. 2005. *Introduction to Partial Differential Equations A Computational Approach.* New York: Springer.

Purcell, E.J., dan Varberg, E.J. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2.* Bandung: Erlangga.

Wiliam, H. dan Hayt, J.D. 2009. *Engineering Electromagnetics.* New York: Mc Graw Hill.

Lampiran 1: Solusi Persamaan (3.12) dengan $\lambda = 0$.

Pada persamaan (3.12) dapat dituliskan dengan

$$X" - \lambda X = 0$$

Maka dilakukan perhitungan solusi $X(x)$ dengan $\lambda = 0$ adalah sebagai berikut

$$X'' - 0X = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 0\right)X = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dX}{dx}\right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{dX}{dx}\right) dx = \int 0\, dx$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{dX}{dx}\right] dx = \int 0\, dx$$

$$\frac{dX}{dx} = 0 + c_1$$

$$\frac{dX}{dx} = c_1$$

$$dX = c_1\, dx$$

$$\int dX = \int c_1 dx$$

$$X = c_1 x + c_2$$

Persamaan di atas merupakan solusi $X(x)$

Lampiran 2: Solusi Persamaan (3.12) dengan $\lambda > 0$.

Pada persamaan (3.12) dapat dituliskan dengan

$$X" - \lambda X = 0$$

Maka dilakukan perhitungan solusi $X(x)$ dengan $\lambda > 0$, sehingga λ dapat dimisalkan dengan $\lambda = \beta^2$. Pada persamaan di atas dapat diproses sebagai berikut:

$$X'' - \beta^2 X = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx} - \beta\right) X = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right) X = 0 \tag{1}$$

Misalkan

$$\left(\frac{d}{dx} - \beta\right) X = A \tag{2}$$

dan

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) A = 0 \tag{3}$$

Untuk mendapatkan solusi $X(x)$, dapat diselesaikan persamaan (3) terlebih dahulu, yaitu

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) A = 0$$

$$\frac{dA}{dx} + \beta A = 0$$

$$\frac{dA}{dx} = -\beta A$$

Selanjutnya kedua ruas dari persamaan tersebut dikalikan dengan $\frac{dx}{A}$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{dA}{A} = -\beta dx$$

Kemudian dengan mengintegralkan kedua ruas, maka dapat dipeoleh

$$\int \frac{1}{A} dA = -\int \beta\, dx$$

$$\ln A = -\beta x + c_1$$

$$A = e^{-\beta x + c_1}$$

$$A = e^{-\beta x} e^{c_1}$$

Karena e^{c_1} merupakan konstanta sehingga dapat disederhanakan menjadi c_2

$$A = c_2 e^{-\beta x} \tag{4}$$

Dengan mensubstitusikan persamaa (4) terhadap persamaan (2) diperoleh

$$\frac{dX}{dx} - \beta X = c_2 e^{-\beta x} \tag{5}$$

Dapat digunakan faktor integrasi untuk menyelesaikan persamaan (5)

$$I = e^{\int (-\beta) dx} = e^{-\beta x} \tag{6}$$

Selanjutnya kedua ruas dari persamaan (5) dikalikan dengan faktor integrasi pada persamaan (6),yaitu

$$e^{-\beta x} \frac{dX}{dx} - \beta e^{-\beta x} X = c_2 e^{-2\beta x} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\beta x} X\right) = c_2 e^{-2\beta x} \tag{8}$$

Integralkan kedua ruas pada persamaan (8) sehingga

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-\beta x} X\right) dx = c_2 \int e^{-2\beta x}\, dx$$

$$e^{-\beta x} X = c_2 \left[\frac{1}{-2\beta} e^{-2\beta x} + c_3\right]$$

$$e^{-\beta x}X = -\frac{c_2}{2\beta}e^{-2\beta x} + c_2c_3$$

$$X = -\frac{c_2}{2\beta}e^{-\beta x} + c_2c_3e^{\beta x} \tag{10}$$

Pada persamaan (10), $-\frac{c_2}{2\beta}$ dan c_2c_3 merupakan suatu konstanta sehingga dapat dimisalkan sebagai konstanta yang lain secara terurut dapat ditulis sebagai k_1 dan k_2

$$X = k_1e^{-\beta x} + k_2e^{\beta x}$$

Untuk menentukan bentuk persamaan yang lebih sederhana persamaan di atas dapat diubah menjadi bentuk sinusoidal, dengan memisalkan $k_1 = \frac{C+D}{2}$ dan $k_2 = \frac{C-D}{2}$, dengan D dan C merupakan suatu konstanta yang berubah sehingga persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} X(x) &= \left(\frac{C+D}{2}\right)e^{-\beta x} + \left(\frac{C-D}{2}\right)e^{\beta x} \\ &= \frac{C}{2}e^{-\beta x} + \frac{D}{2}e^{-\beta x} + \frac{C}{2}e^{\beta x} - \frac{D}{2}e^{\beta x} \\ &= C\left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2}\right) + D\left(\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}\right) \\ &= C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x) \end{aligned} \tag{11}$$

Persamaan (11) merupakan solusi

Lampiran 3: Solusi Persamaan (3.12) dengan $\lambda < 0$.

Pada persamaan (3.12) dapat dituliskan dengan

$$X" - \lambda X = 0$$

Maka dilakukan perhitungan solusi $X(x)$ dengan $\lambda < 0$, sehingga λ dapat dimisalkan dengan $\lambda = -\beta^2$. Pada persamaan di atas dapat diproses sebagai berikut:

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx} + \beta^2\right) X = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right)\left(\frac{d}{dx} - i\beta\right) X = 0 \tag{12}$$

Dari persamaan (12) dapat dimisalkan sebagai

$$\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right) X = A \tag{13}$$

dan

$$\left(\frac{d}{dx} - i\beta\right) A = 0 \tag{14}$$

Dari kedua persamaan di atas, dapat diselesaikan persamaan (14) terlebih dahulu, yaitu

$$\left(\frac{d}{dx} - i\beta\right) A = 0$$

$$\frac{dA}{dx} - i\beta A = 0$$

$$\frac{dA}{dx} = i\beta A$$

Selanjutnya kedua ruas dari persamaan tersebut dikalikan dengan $\frac{dx}{A}$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{dA}{A} = i\beta dx$$

Kemudian dengan mengintegralkan kedua ruas, maka dapat diperoleh

$$\int \frac{1}{A} dA = \int i\beta \, dx$$

$$\ln A = i\beta x + c_1$$

$$A = e^{i\beta x + c_1}$$

$$= e^{i\beta x} e^{c_1}$$

$$= c_2 e^{i\beta x} \quad (15)$$

Pada persamaan (15) dilakukan substitusi terhadap persamaan (13), sehingga diperoleh

$$\frac{dX}{dx} + i\beta X = c_2 e^{i\beta x} \quad (16)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (16) digunakan faktor integrasi

$$I = e^{\int (i\beta) dx} = e^{i\beta x} \quad (17)$$

Kedua ruas dari persamaan (16) dikalikan dengan faktor integrasi (17), yaitu

$$e^{i\beta x} \frac{dX}{dx} - i\beta e^{i\beta x} X = c_2 e^{2i\beta x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{i\beta x} X\right) = c_2 e^{2i\beta x} \quad (18)$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (18) terhadap dx sehingga

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{i\beta x} X\right) dx = c_2 \int e^{2i\beta x} dx$$

$$e^{i\beta x} X = c_2 \left[\frac{1}{2i\beta} e^{2i\beta x} + c_3\right]$$

$$e^{i\beta x} X = \frac{c_2}{2i\beta} e^{2i\beta x} + c_2 c_3$$

$$X = \frac{c_2}{2i\beta} e^{i\beta x} + c_2 c_3 e^{-i\beta x} \tag{19}$$

Pada persamaan (19) $\frac{c_2}{2i\beta}$ dan $c_2 c_3$ merupakan suatu konstanta sehingga dapat dimisalkan sebagai konstanta yang lain secara terurut dapat ditulis sebagai k_1 dan k_2

$$X = k_1 e^{i\beta x} + k_2 e^{-i\beta x} \tag{20}$$

Dengan menggunakan deret taylor persamaan (20) dapat diubah dalam bentuk sinusoidal

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$$

dan (21)

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$$

Selanjutnya persamaan (21) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} X(x) &= k_1[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)] + k_2[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)] \\ &= k_1\cos(\beta x) + k_1 i\sin(\beta x) + k_2\cos(\beta x) - k_2 i\sin(\beta x) \\ &= (k_1 + k_2)\cos(\beta x) + (k_1 - k_2) i\sin(\beta x) \end{aligned} \tag{22}$$

Misalkan $k_1 + k_2 = A$ dan $(k_1 - k_2)i = B$ sehingga persamaan (22) menjadi

$$X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \tag{23}$$

Persamaan (23) merupakan solusi $X(x)$.

Lampiran 4: Solusi Persamaan (3.14) dengan $\gamma = 0, \gamma < \beta^2$, dan $\gamma > \beta^2$.

Pertama: Perhitungan solusi $Y(y)$ misalkan $\left(-k - \beta^2\right) = \gamma$ dengan $\gamma > 0$ dengan kondisi batas $Y(0) = 0$ dan $Y(b) = 0$

$$Y''(y) + (-k - \beta^2)Y(y) = 0$$

Karena $\gamma > 0$ dapat dimisalkan sebaga $\gamma = l^2$. Sehingga dapat dituliskan sebagai $Y'' + l^2 Y = 0$ maka akan diperoleh perhitungan seperti berikut berikut:

$$Y'' + l^2 Y = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx} + l^2\right)Y = 0$$

$$\left(\frac{d}{dy} - il\right)\left(\frac{d}{dy} + il\right)Y = 0 \qquad (24)$$

Dari persamaan (36) dapat dimisalkan sebagai

$$\left(\frac{d}{dy} - il\right)Y = H \qquad (25)$$

dan

$$\left(\frac{d}{dy} + il\right)H = 0 \qquad (26)$$

Dari kedua persamaan di atas, dapat diselesaikan terlebih dahulu persamaan (26) untuk mendapatkan nilai H yang memenuhi sehingga

$$\left(\frac{d}{dy} + il\right)H = 0$$

$$\frac{dH}{dy} + il\, H = 0$$

$$\frac{dH}{dy} = -il\, H$$

Selanjutnya kedua ruas pada persamaan tersebut dikalikan dengan $\frac{dy}{H}$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{dH}{H} = -il\,dy$$

Kemudian dengan mengintegralkan kedua ruas, maka dapat diperoleh

$$\int \frac{1}{H}\,dH = -\int il\,dy$$

$$\ln H = -il\,y + c_1$$

$$H = e^{-il\,y + c_1}$$

$$= e^{-il\,y} e^{c_1}$$

$$= c_2 e^{-il\,y} \tag{27}$$

Selanjutnya persamaan (27) disubstitusikan terhadap persamaan (25) untuk memperoleh nilai dari Y, sehingga

$$\left(\frac{d}{dy} - il\right) Y = H$$

$$\frac{dY}{dy} - il\,Y = H$$

$$\frac{dY}{dy} - il\,Y = c_2 e^{-il\,y} \tag{28}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (28) digunakan faktor integrasi

$$I = e^{\int -il\,dy} = e^{-il\,y} \tag{29}$$

Kedua ruas dari persamaan (28) dikalikan dengan faktor integrasi pada persamaan (29), yaitu

$$e^{-il\,y}\frac{dY}{dy} - e^{-il\,y} il\,Y = c_2 e^{-il\,y} e^{-il\,y}$$

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-il\,y}\,Y\right) = c_2 e^{-2\,il\,y} \tag{30}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (30) terhadap dy sehingga

$$\int \frac{d}{dy}\left(e^{-il\,y}\,Y\right)dy = c_2 \int e^{-2\,il\,y}dy$$

$$e^{-il\,y}\,Y = c_2\left[\frac{1}{-2l}e^{-2\,il\,y} + c_3\right]$$

$$Y = \frac{c_2}{-2il}e^{il\,y} + c_2c_3e^{-il\,y} \tag{31}$$

Misalkan $-\frac{c_2}{2il} = v_1$ dan $c_1c_2 = v_2$, maka persamaan (31) menjadi

$$Y = v_1e^{il\,y} + v_2e^{-il\,y} \tag{32}$$

Dengan menggunakan deret taylor persamaan (32) dapat diubah dalam bentuk sinusoidal

$$e^{il\,y} = \cos(ly) + i\sin(ly)$$

Dan

$$e^{-il\,y} = \cos(ly) - i\sin(ly)$$

Selanjutnya persamaan (32) dapat ditulis sebagai berikut

$$Y(y) = v_1[\cos(ly) + i\sin(ly)] + v_2[\cos(ly) - i\sin(ly)]$$

$$= v_1\cos(ly) + v_1 i\sin(ly) + v_2\cos(ly) - v_2 i\sin(ly)$$

$$= (v_1 + v_2)\cos(ly) + (v_1 - v_2)i\sin(ly) \tag{33}$$

Misalkan $v_1 + v_2 = C$ dan $(v_1 - v_2)i = D$ sehingga persamaan (33) menjadi

$$Y(y) = C\cos(ly) + D\sin(ly) \tag{34}$$

Telah diketahui bahwa $\gamma = l^2$ dan $\gamma = -k - \beta^2$ sehingga untuk koefisien l pada persamaan (34) dapat dituliskan dengan $\sqrt{\gamma}$ sehingga

$$Y(y) = C\cos\left(\left(\sqrt{-k-\beta^2}\right)y\right) + D\sin\left(\left(\sqrt{-k-\beta^2}\right)y\right) \tag{35}$$

Persamaan (35) merupakan solusi dari $Y(y)$

Kedua: Perhitungan solusi $Y(y)$ misalkan $\left(-k - \beta^2\right) = \gamma$ dengan $\gamma < 0$ dengan kondisi batas $Y(0) = 0$ dan $Y(b) = 0$

$$Y''(y) + (-k - \beta^2)Y(y) = 0$$

Karena $\gamma < 0$ dapat dimisalkan sebaga $\gamma = -l^2$. Sehingga dapat dituliskan sebagai $Y'' - l^2 Y = 0$ maka akan diperoleh perhitungan seperti berikut berikut:

$$Y'' - l^2 Y = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx} - l^2\right) Y = 0$$

$$\left(\frac{d}{dy} - l\right)\left(\frac{d}{dy} + l\right) Y = 0 \tag{36}$$

Dari persamaan (36) dapat dimisalkan sebagai

$$\left(\frac{d}{dy} - l\right) Y = H \tag{37}$$

dan

$$\left(\frac{d}{dy} + l\right) H = 0 \tag{38}$$

Dari kedua persamaan di atas, dapat diselesaikan terlebih dahulu persamaan (38) untuk mendapatkan nilai A yang memenuhi sehingga

$$\left(\frac{d}{dy} + l\right) H = 0$$

$$\frac{dH}{dy} + l\,H = 0$$

$$\frac{dH}{dy} = -l\,H$$

Selanjutnya kedua ruas pada persamaan tersebut dikalikan dengan $\frac{dy}{H}$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{dH}{H} = -l\,dy$$

Kemudian dengan mengintegralkan kedua ruas, maka dapat diperoleh

$$\int \frac{1}{H} dH = -\int l\, dy$$

$$\ln H = -l\, y + c_1$$

$$H = e^{-l\, y + c_1}$$

$$H = e^{-l\, y} e^{c_1}$$

$$H = c_2 e^{-l\, y} \tag{39}$$

Selanjutnya persamaan (39) disubstitusikan terhadap persamaan (37) untuk memperoleh nilai dari Y, sehingga

$$\left(\frac{d}{dy} - l\right) Y = H$$

$$\frac{dY}{dy} - l\, Y = H$$

$$\frac{dY}{dy} - l\, Y = c_2 e^{-l\, y} \tag{40}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (40) digunakan faktor integrasi

$$I = e^{\int -l\, dy} = e^{-l\, y} \tag{41}$$

Kedua ruas dari persamaan (40) dikalikan dengan faktor integrasi pada persamaan (41), yaitu

$$e^{-l\, y} \frac{dY}{dy} - e^{-l\, y} l\, Y = c_2 e^{-l\, y} e^{-l\, y}$$

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-l\, y}\, Y\right) = c_2 e^{-2\, l\, y} \tag{42}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (42) terhadap dy sehingga

$$\int \frac{d}{dy}\left(e^{-l\, y}\, Y\right) dy = c_2 \int e^{-2\, l\, y} dy$$

$$e^{-l\, y}\, Y = c_2 \left[\frac{1}{-2l} e^{-2\, l\, y} + c_3\right]$$

$$Y = \frac{c_2}{-2l} e^{l\,y} + c_2 c_3 e^{-l\,y} \tag{43}$$

Misalkan $\frac{c_2}{2l} = v_1$ dan $c_1 c_2 = v_2$, maka persamaan (43) menjadi

$$Y = v_1 e^{l\,y} + v_2 e^{-l\,y} \tag{44}$$

Untuk menentukan bentuk persamaan yang lebih sederhana persamaan di atas dapat diubah menjadi bentuk sinusoidal, dengan memisalkan $v_1 = \frac{C+D}{2}$ dan $v_2 = \frac{C-D}{2}$, dengan D dan C merupakan suatu konstanta yang lain sehingga persamaan tersebut menjadi

$$Y(y) = \left(\frac{C+D}{2}\right) e^{l\,y} + \left(\frac{C-D}{2}\right) e^{-l\,y}$$

$$Y(y) = \frac{C}{2} e^{l\,y} + \frac{D}{2} e^{l\,y} + \frac{C}{2} e^{-l\,y} - \frac{D}{2} e^{-l\,y}$$

$$Y(y) = C\left(\frac{e^{l\,y} + e^{-l\,y}}{2}\right) + D\left(\frac{e^{l\,y} - e^{-l\,y}}{2}\right)$$

$$Y(y) = C\cosh(l(y)) + D\sinh(l(y)) \tag{45}$$

Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (45) terhadap kondisi batas saat $Y(0) = 0$, sehingga

$$Y(y) = C\cosh(l(y)) + D\sinh(l(y))$$

$$C\cosh(l\,(0)) + D\sinh(l\,(0)) = 0$$

$$C = 0$$

Setelah diketahui bahwa $C = 0$, maka persamaan tersebut menjadi $Y(y) = D\sinh(l(y))$. Sehingga dilakukan pensubstitusian kondisi batas saat $Y(y) = 0$ terhadap $Y(y) = D\sinh(l(y))$, dapat diperoleh

$$Y(b) = D\sinh(l(b))$$

$$0 = D\sinh(l(b))$$

Pada kondisi tersebut, terdapat dua kemungkinkan yang dapat dipenuhi, yaitu nilai $D = 0$ atau $D\sinh(l(b)) = 0$.

$$D\sinh(l(b)) = 0$$

Andaikan $D \neq 0$, maka

$$\sinh(l(b)) = 0$$

$\sinh(l(b))$ dapat ditulis sebagai

$$\frac{e^{l(b)} - e^{-l(b)}}{2} = 0$$

Dalam hal ini l yang memenuhi adalah $l = 0$, sedangkan konstanta λ harus bernilai positif, sehingga tidak ada l positif yang memenuhi persamaan tersebut. Sehingga dapat disimpulkan $\gamma > 0$ bernilai trivial.

Ketiga: Perhitungan solusi $Y(y)$ misalkan $(-k + \lambda) = \gamma$ dengan $\gamma = 0$ dengan kondisi batas $Y(0) = 0$ dan $Y(b) = 0$

$$Y''(y) + (-k - \beta^2)Y(y) = 0$$

Sehingga dapat dituliskan sebagai $Y'' + (\gamma)Y = 0$ maka akan diperoleh perhitungan seperti berikut berikut:

$$Y'' + (0)Y = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dy} + (0)\right)Y = 0$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dY}{dy}\right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dy}\left(\frac{dY}{dy}\right) dy = \int 0 \, dy$$

$$\frac{d}{dy}\left[\int \frac{dY}{dy}\right] dy = \int 0 \, dy$$

$$\frac{dY}{dy} = 0 + c_1$$

$$\frac{dY}{dy} = c_1$$

$$dY = c_1 \, dy$$

$$\int dY = \int c_1 dy$$

$$Y = c_1 y + c_2$$

Kemudian dengan mensubstitusikan kondisi batas $Y(0) = 0$ terhadap persamaan di atas yaitu sebagai berikut

$$c_1(0) + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Karena $c_2 = 0$, maka persamaan $Y = c_1 y + c_2$ dapat ditulis sebagai $Y(y) = c_1 y$. Selanjutnya disubstitusikan kondisi batas $Y(b) = 0$ terhadap $Y(y) = c_1 y$ sehingga dapat diperoleh

$$Y(b) = c_1 b$$

$$0 = c_1 b$$

$$\frac{0}{b} = c_1$$

$$0 = c_1$$

Dapat disimpukan bahwa solusi di atas merupakan solusi trivial, karena masing-masing nilai dari $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$.

Lampiran 5: Pembuktian Solusi $u(x,y)$ pada Persamaan (3.34).

Solusi dari $u(x,y)$ adalah sebagai berikut

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) u(x,y)$$

dengan $C_{mn} = \frac{1}{k}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}(x)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}(y)\right)dxdy$

Sehingga dapat ditulis sebagai

$$u(x,y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

dengan $k = -\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)$

Untuk membuktikan bahwa solusi tersebut kembali ke dalam bentuk awal, maka solusi dari persamaan tersebut harus diturunkan dua kali terhadap x dan y.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)a^2 b}\cdot$$

$$\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)n\pi\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)a^3 b}\cdot$$

$$\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)n^2\pi^2\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)ab^2}\cdot$$

$$\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)m\pi\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)ab^3}\cdot$$

$$\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)m^2\pi^2\right)$$

Sehingga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\left(-\frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)a^3b}\right.$$

$$\left.\cdot\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)n^2\pi^2\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\left(-\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right)ab^3}\right.$$

$$\left.\cdot\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)m^2\pi^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{4}{ba}\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

dengan

$$ku = k\frac{1}{k}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Pembuktian tersebut maka dapat disimpulkan solusi dari persamaan Poisson 2D kembali ke dalam bentuk awal. Hal ini dapat pula dilihat dalam bentuk program yaitu sebagai berikut:

> $k := -\left(\left(\frac{m\cdot\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\cdot\pi}{a}\right)^2\right)$

$$k := -\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

> $C_{mn} := \frac{1}{k}\cdot\frac{4}{a\cdot b}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot y}{b}\right)\,dx\,dy$

$$C_{mn} := \frac{4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy\right)}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}$$

> $u := C_{mn}\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot y}{b}\right)$

$$u := \frac{1}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

> $diff(u,x,x)+diff(u,y,y)$

$$-\frac{1}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a^3 b}\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)n^2\pi^2\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\, b^3}\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)m^2\pi^2\right)$$

> *simplify*(%)

$$\frac{1}{b\,a}\left(4\left(\int_0^b\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left(\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

> $k\cdot u$

$$\frac{1}{a\,b}\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

Lampiran 6: Pembuktian Solusi $u(x, y)$ pada (3.34) Memenuhi Kondisi Batas (3.2).

Solusi dari $u(x, y)$ adalah sebagai berikut

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) u(x, y)$$

dengan $C_{mn} = \frac{1}{k} \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}(x)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}(y)\right) dxdy$

Sehingga dapat ditulis sebagai

$$u(x, y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dxdy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Untuk membuktikan solusi persamaan tersebut benar harus memenuhi kondisi batas terlebih dahulu sehingga harus dilakukan pensubstitusian kondisi batas.

Pertama untuk $u(0, y) = 0$

$$u(x, y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(0, y) \sin\left(\frac{n\pi(0)}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dxdy \sin\left(\frac{n\pi(0)}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$\sin\left(\frac{n\pi}{a}(0)\right) = 0$ sehingga perkalian dengan 0 akan menghasilkan

$$u(x, y) = 0$$

Hal ini membuktikkan bahwa memenuhi kondisi batas pada $u(0, y) = 0$

Kedua untuk $u(a, y) = 0$

$$u(x, y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(a, y) \sin\left(\frac{n\pi(a)}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dxdy \sin\left(\frac{n\pi(a)}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Karena kondisi batas yang digunakan adalah $u(a, y) = 0$, kondisi batas tersebut dapat pula ditulis sebagai $X(a) = 0$. Sehingga $\sin\left(\frac{n\pi}{a}(a)\right) = 0$. Sehingga perkalian dengan 0 akan menghasilkan

$$u(x, y) = 0$$

Ketiga untuk $u(x, 0) = 0$

$u(x, y)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi(0)}{b}\right)dxdy\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi(0)}{b}\right)$$

$\sin\left(\frac{m\pi}{b}\ (0)\right) = 0$ sehingga perkalian dengan 0 akan menghasilkan

$$u(x, y) = 0$$

Hal ini membuktikkan bahwa memenuhi kondisi batas pada $u(x, 0) = 0$

Keempat untuk $u(x, b) = 0$

$u(x, y)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,b)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi(b)}{b}\right)dxdy\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi(b)}{b}\right)$$

Karena kondisi batas yang digunakan adalah $u(x, b) = 0$, kondisi batas tersebut dapat pula ditulis sebagai $X(b) = 0$. Sehingga $\sin\left(\frac{m\pi}{b}(b)\right) = 0$. Sehingga perkalian dengan 0 akan menghasilkan

$$u(x, y) = 0$$

Dari keempat pembuktian tersebut maka dapat disimpulkan solusi dari persamaan Poisson 2D memenuhi kondisi batas. Hal ini dapat pula dilihat dalam bentuk program yaitu sebagai berikut:

> $k := -\left(\left(\frac{m\cdot\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\cdot\pi}{a}\right)^2\right)$

$$k := -\frac{m^2\pi^2}{b^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

> $C_{mn} := \frac{1}{k}\cdot\frac{4}{a\cdot b}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot y}{b}\right)\,dx\,dy$

$$C_{mn} := \frac{4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy\right)}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}$$

> $u := C_{mn}\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot y}{b}\right)$

$$u := \frac{1}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}\left(4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

> $subs(x=0,u)$

$$\frac{1}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}\left(4\left(\int_0^b int\left(f(0,y)\sin(0)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right),0=0..a\right)dy\right)\sin(0)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right)$$

> $subs(n=1,x=a,u)$

$$\frac{4\left(\int_0^b\int_0^a f(a,y)\sin(\pi)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)da\,dy\right)\sin(\pi)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{\pi^2}{a^2}\right)a\,b}$$

> $simplify(\%)$

$$0$$

> $subs(y=0,u)$

$$\frac{1}{\left(-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}\left(4\left(int\left(\int_0^a f(x,0)\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)\sin(0)\,dx,\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.0=0..b\right)\right)\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)\sin(0)\right)$$

> $subs(m=1, y=b, u)$

$$\frac{4\left(\int_0^b\int_0^a f(x,b)\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)\sin(\pi)\,dx\,db\right)\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)\sin(\pi)}{\left(-\frac{\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)a\,b}$$

> $simplify(\%)$

$$0$$

Lampiran 7: Program untuk Menampilkan Kurva Ketinggian Solusi Persamaan Poisson 2D dengan $f(x,y) = 1$

```
clc,clear

%menentukan panjang x dan y

a=2;
b=1;

x=0:0.1:a;
y=0:0.1:b;



%solusi persamaan poisson
for i=1:length(y)
        for j = 1:length(x)
            jml =0;
            for n =1:20
                for m=1:30
                 jml      =      jml      +((4*(-1+cos(n*pi))*(-
1+cos(n*pi))*sin(n*pi*x(j)/a)*sin(m*pi*y(i)/b))/(n*pi^2*m*(-
(m*pi/b)^2-(n*pi/a)^2)));
                end

            u(i,j)=jml;
            end
        end
end
%menampilkan grafik tiga dimensi
surf(x,y,u)
title('Simulasi ')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('u(x,y)')

print('gambar_1','-dpng')
```

Lampiran 8: Program untuk Menampilkan Grafik Contour Solusi Persamaan Poisson 2D dengan $f(x,y) = 1$

```
clc,,clear
%menentukan panjang x dan y

a=2;
b=1;

x=0:0.1:a;
y=0:0.1:b;



%solusi persamaan poisson
for i=1:length(y)
        for j = 1:length(x)
            jml =0;
            for n =1:20
                for m=1:30
                 jml       =       jml       +((4*(-1+cos(n*pi))*(-
1+cos(n*pi))*sin(n*pi*x(j)/a)*sin(m*pi*y(i)/b))/(n*pi^2*m*(-
(m*pi/b)^2-(n*pi/a)^2)));
                end

            u(i,j)=jml;
            end
        end
end
contourf(x,y,u)
colorbar('location','eastoutside')
```

Lampiran 9: Program untuk Menampilkan Kurva Ketinggian Solusi Persamaan Poisson 2D dengan $f(x,y) = x^2$

```
clc,clear
%menentukan panjang x dan y

a=2;
b=1;

x=0:0.1:a;
y=0:0.1:b;



%solusi persamaan poisson
for i=1:length(y)
        for j = 1:length(x)
            jml =0;
            for n =1:20
                for m=1:30
                 jml            =           jml           +(4*a^2*(2-
2*cos(n*pi)+n^2*pi^2*cos(n*pi)-2*n*pi*sin(n*pi))*(-
1+cos(m*pi))*sin(n*pi*x(j)/a)*sin(m*pi*y(i)/b)/(n^3*pi^4*m*(-
m^2*pi^2/b^2-n^2*pi^2/a^2)));
            end
            u(i,j)=jml;
            end
        end
end
surf(x,y,u)
title('Simulasi ')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('u(x,y)')

print('gambar_2','-dpng')
```

Lampiran 10: Program untuk Menampilkan Grafik Contour Solusi Persamaan Poisson 2D dengan $f(x,y) = x^2$

```
clc,clear
%menentukan panjang x dan y

a=2;
b=1;

x=0:0.1:a;
y=0:0.1:b;



%solusi persamaan poisson
for i=1:length(y)
        for j = 1:length(x)
            jml =0;
            for n =1:20
                for m=1:30
                 jml          =          jml          +(4*a^2*(2-
2*cos(n*pi)+n^2*pi^2*cos(n*pi)-2*n*pi*sin(n*pi))*(-
1+cos(m*pi))*sin(n*pi*x(j)/a)*sin(m*pi*y(i)/b)/(n^3*pi^4*m*(-
m^2*pi^2/b^2-n^2*pi^2/a^2)));
            end
            u(i,j)=jml;
            end
        end
end
contourf(x,y,u)
colorbar('location','eastoutside')
```

Lampiran 11: Proses solusi $\int_0^a \left(\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right)^2 dx = \frac{a}{2}$.

$$\int_0^a \left(\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right)^2 dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2r\pi x}{a}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left(1-\cos\left(\frac{2r\pi x}{a}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2r\pi}\sin\left(\frac{2r\pi x}{a}\right)\right]_0^a$$

Selanjutnya, dengan menggunakan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = a$, maka persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\int_0^a \left(\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(a - \frac{l}{2r\pi}\sin\left(\frac{2r\pi}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a - \frac{l}{2r\pi}\sin(2r\pi)\right)$$

Diketahui nilai dari $\sin(\pi) = 0$, maka setiap kelipatan π, nilai dari $\sin(2r\pi) = 0$. Dengan demikian dapat diperoleh

$$\int_0^a \left(\sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right)\right)^2 dx = \frac{1}{2}a, \quad \forall n = r$$

Lampiran 12: Proses Solusi $\int_0^b \left(\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)^2 dy = \frac{b}{2}$

$$\int_0^b \left(\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)^2 dy = \int_0^b \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2s\pi y}{b}\right)\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^b \left(1 - \cos\left(\frac{2s\pi y}{b}\right)\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - \frac{1}{2s\pi}\sin\left(\frac{2s\pi y}{a}\right)\right]_0^b$$

Selanjutnya, dengan menggunakan batas interval $y = 0$ sampai dengan $y = b$, maka persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\int_0^b \left(\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)^2 dy = \frac{1}{2}\left(b - \frac{l}{2s\pi}\sin\left(\frac{2s\pi}{b}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(b - \frac{l}{2s\pi}\sin(2s\pi)\right)$$

Diketahui nilai dari $\sin(\pi) = 0$, maka setiap kelipatan π, nilai dari $\sin(2b\pi) = 0$. Dengan demikian dapat diperoleh

$$\int_0^b \left(\sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)\right)^2 dy = \frac{1}{2}b, \quad \forall m = s$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Tlp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Wahyu Inggriana
NIM : 11610006
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Solusi Analitik Persamaan Poisson 2D Menggunakan Perluasan Fungsi Eigen dan Deret Fourier
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M. Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	9 Juli 2015	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	13 Agustus 2015	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	14 Oktober 2015	Revisi bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.
4.	7 Desember 2015	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	1 Februari 2016	Revisi Bab III	5.
6.	29 Februari 2016	ACC bab I dan Bab II	6.
7.	31 Maret 2016	ACC kajian Keagamaan	7.
8.	4 April 2016	ACC Bab III	8.
9.	12 April 2016	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	9.
10.	16 Mei 2016	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 16 Mei 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP

Wahyu Inggriana, lahir di kota Malang pada tanggal 02 Januari 1993, biasa dipanggil Inggri, tinggal di Jl. S. Parman Desa Senggreng Kec. Sumberpucung Kab. Malang. Anak pertama dari Bapak Eko Budiwiyono dan Ibu Siti Munawaroh.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 01 Senggreng dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 02 Sumberpucung dan lulus tahun 2008. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 01 Kepanjen dan lulus tahun 2011 pada jurusan Ilmu Pengatahuan Sosial. Selanjutnya, pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif dalam organisasi intra dan ekstra kampus dalam mengembangkan kompetensi akademiknya. Dia pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HMJ) seksi bidang kewirausahaan pada tahun 2012/2013. Selain itu, dia juga menjadi asisten laboratorium dalam rangka mengembangkan keilmuannya.