

**EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK
MELALUI DUA BALOK BERPORI**

SKRIPSI

**OLEH
ISRAFATUL FURAI DAH
NIM. 10610064**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK
MELALUI DUA BALOK BERPORI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh

**Israfatul Furaidah
NIM. 10610064**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK
MELALUI DUA BALOK BERPORI**

SKRIPSI

**Oleh
Israfatul Furaidah
NIM. 10610064**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 11 Januari 2016

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika




Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**EVOLUSI GELOMBANG HARMONIK
MELALUI DUA BALOK BERPORI**

SKRIPSI

**Oleh
Israfatul Furaidah
NIM. 10610064**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 27 Januari 2016

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
Anggota Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdusakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Israfatul Furaidah

NIM : 10610064

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Dua Balok Berpori

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan plagiat atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali sebagai literatur yang tercantum pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari dapat dibuktikan skripsi ini hasil plagiasi, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2016
Yang membuat pernyataan,



Israfatul Furaidah
NIM. 10610064

MOTO

“Tahu bahwa kita tahu apa yang kita ketahui dan tahu bahwa kita tidak tahu apa yang tidak kita ketahui, itulah pengetahuan sejati”.

Copernicus (1473-1543)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda tercinta Sumarno, Ibunda tercinta Budiwati Widiastutik, adik Zakiyah Nur Kholishoh, dan keluarga besar penulis yang telah memberikan doa, motivasi dan dukungan untuk penulis dalam menyelesaikan skripsi.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt., atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga peneliti mampu menyelesaikan penyusunan skripsi sekaligus studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullahu bikhair*, peneliti haturkan sebagai penghargaan yang setinggi-tingginya kepada semua pihak yang telah membantu terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si dan H. Wahyu H. Irawan, M.Pd selaku dosen pembimbing I dan pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada peneliti sehingga peneliti lebih terarah dalam menulis skripsi ini.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan ibu, selaku orang tua yang selalu memberikan doa, semangat serta motivasi kepada peneliti yang tidak pernah ada hentinya.
7. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010, Danial Lutfi M, Khafidhoh Nurul, Rivatul Ridho, Ika Purwaningsih, Sari Nur, Nova Nevisa, Ana Naila, Tahta Alfina, “Keluarga Cemara”, dan “Kontrakan 158” yang telah memberikan motivasi dan dukungan pada penulis.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Peneliti berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi peneliti dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2016

Peneliti

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	7
1.6 Metode Penelitian	7
1.7 Sistematika Penulisan	8
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Gelombang Harmonik	10
2.2 Persamaan Kontinuitas	11
2.3 Persamaan Laplace	14
2.4 Persamaan Momentum	15
2.5 Persamaan Bernoulli	20
2.6 Kondisi Batas	22
2.6.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Bebas	23
2.6.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Bebas	24
2.6.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Aliran Kaku	26
2.7 Aliran Fluida pada Media Berpori	27
2.7.1 Persamaan Laplace	27
2.7.2 Persamaan Bernoulli	28

2.7.3	Persamaan Pengatur dan Laplace Kedua Media	29
2.7.4	Kondisi Batas Kinematik pada <i>Interface</i>	31
2.7.5	Kondisi Batas Dinamik Aliran pada <i>Interface</i>	32
2.7.6	Kondisi Batas pada Permukaan	32
2.7.7	Kondisi Batas pada Dasar Saluran Berpori	33
2.8	Teori Gelombang Linear	33
2.8.1	Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida	34
2.8.2	Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida	34
2.8.3	Kondisi Batas Dinamik pada <i>Interface</i>	35
2.8.4	Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Saluran Media Fluida	35
2.8.5	Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Media Berpori	35
2.9	Metode Pemisahan Variabel	36
2.10	Kajian Gelombang dalam Al-Quran	37

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Solusi dan Relasi Dispersi untuk Ruas I, II, III, IV, dan V	41
3.1.1	Solusi pada Ruas I	41
3.1.2	Solusi pada Ruas II	50
3.1.3	Solusi pada Ruas III	56
3.1.4	Solusi pada Ruas IV	57
3.1.5	Solusi pada Ruas V	58
3.1.6	Relasi Dispersi untuk Ruas I, III, dan V	60
3.1.7	Relasi Dispersi untuk Ruas II dan IV	61
3.2	Model Gelombang Harmonik yang Melalui Dua Balok Berpori	62
3.3	Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Tinggi Balok Berpori	76
3.4	Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Lebar Balok Berpori	78
3.5	Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Jarak Kedua Balok Berpori	79
3.6	Gelombang dalam Islam	80

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	84
4.2	Saran	84

DAFTAR PUSTAKA	86
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Kesetimbangan Massa	12
Gambar 2.2	Batas-batas Fluida Bebas	23
Gambar 2.3	Perambatan Gelombang di Atas Media Berpori	29
Gambar 3.1	Ilustrasi Gelombang Harmonik Melalui Dua Balok Berpori	40
Gambar 3.2	Pembagian Saluran Berdasarkan Struktur Dasar Saluran	41
Gambar 3.3	Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Rata di $x < 0$	43
Gambar 3.4	Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Berpori di $0 \leq x \leq R_1$	51
Gambar 3.5	Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Rata di $R_1 < x < R_2$	56
Gambar 3.6	Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Berpori di $R_2 \leq x \leq L$	57
Gambar 3.7	Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Rata di $x > L$	59
Gambar 3.8	Perambatan Gelombang Melalui Dua Balok Berpori	63
Gambar 3.9	Simulasi dengan Memodifikasi Tinggi Dua Balok Berpori.....	77
Gambar 3.10	Simulasi dengan Memodifikasi Lebar Dua Balok Berpori	78
Gambar 3.11	Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Jarak	80

ABSTRAK

Furaidah, Israfatul. 2016. **Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Dua Balok Berpori**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Kata kunci: *Evolusi Gelombang Harmonik, Metode Pemisahan Variabel, Pemecah Gelombang*

Pada penelitian ini diteliti tentang suatu gelombang harmonik yang terjadi pada permukaan air dan dasar salurannya berupa dua balok berpori. Permasalahan pada penelitian ini aliran fluida berada pada saluran dua dimensi dengan asumsi bahwa fluida ideal dan tidak berotasi. Persamaan pengatur pada media fluida diturunkan dari hukum kesetimbangan massa dan hukum kesetimbangan momentum sehingga dihasilkan persamaan Laplace dengan kondisi batas dinamik dan kinematik yang terjadi pada permukaan fluida dan dasar saluran datar.

Penelitian ini menggunakan teori gelombang linear, maka kondisi batas yang digunakan adalah kondisi batas yang linear. Kemudian persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel. Gelombang yang dihasilkan merupakan gelombang linear. Persamaan dispersi dapat digunakan untuk mengamati evolusi gelombang sepanjang saluran. Persamaan dispersi tersebut dihasilkan dari penurunan model linear.

Selanjutnya dilakukan simulasi evolusi gelombang permukaan dari solusi dan persamaan dispersi yang diperoleh dengan pemberian nilai amplitudo gelombang transmisi A , frekuensi gelombang (ω), porositas pada balok berpori (C_r), koefisien gesek (f), dan kedalaman saluran h_1 dan h_2 . Simulasi yang dilakukan yaitu memodifikasi tinggi balok berpori, memodifikasi lebar balok berpori dan memodifikasi jarak antara dua balok berpori. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin tinggi balok berpori pemecah gelombang, maka semakin besar penurunan amplitudo gelombang dan semakin besar lebar balok berpori pemecah gelombang, maka penurunan amplitudo yang dihasilkan semakin besar pula. Semakin lebar jarak kedua balok berpori pemecah gelombang, maka semakin besar pula penurunan amplitudo gelombang yang dihasilkan.

Untuk penelitian selanjutnya disarankan agar dilakukan penelitian evolusi gelombang harmonik yang melalui dua balok berpori menggunakan teori gelombang nonlinear.

ABSTRACT

Furaidah, Israfatul. 2016. **Evolution of Harmonic Wave Through Two Porous Beams**. Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Keywords: Evolution of Harmonics, Variabel Separating Method, Wave Fission

This research investigates the harmonic waves occurs on water surface and the basic channel from two porous beams. The problem of this research is on the fluid flow on two dimension flows with the assumption that the fluid is ideal and not rotated. The controlling equation on fluid medium is derived from the law of mass and momentum balance and obtained Laplace equation with the condition of dynamic and kinematic limit on fluid surface and flat channel base.

This research uses the theory of linear wave, so the boundary conditions that is used are linear boundary conditions. Then the Laplace equation and its limit conditions is solved using the variables separating method. The resulting wave is a linear wave. The dispersion equation can be used to observe the evolution of the wave along the channel. The dispersion equation is obtained from the derivation of linear model.

Next, there is a simulation of surface wave evolution from the solution and dispersion relation obtained by giving spesific number to the amplitude of transmission wave A , wave frequency (ω), the porosity of the porous beam (C_r), friction coefficient (f), and the channel depth h_1 and h_2 . The simulation is applied by modifying the height and the width of porous beam, and modifying the distance of two porous beams. From this simulation, it could be concluded that the higher of the porous beam of wave fission, the bigger the decrease of amplitude wave and the wider decline of porous beam of wave fission, the bigger amplitude decline that resulted. The wider distance of two porous beams of wave fission, the bigger the decline of the amplitude of wave that resulted.

For further research, the researcher suggests to conduct an evolution research of harmonic wave through the two of porous beam using nonlinear wave theory.

ملخص

اسرافة الفريدة، 2016م، تطور موجة التوافقي من خلال سلسلة الشعاعين المساميتين ، البحث الجامعي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانج. المشرف الأول: محمد جمهوري الماجستير، والمشرف الثاني: وحي هنك إيراوان الماجستير.

الكلمات الأساسية: تطور موجة التوافقي، طريقة فصل المتغيرات، كاسر الأمواج

ان في هذا البحث سيتم بحث عن موجة التوافقي والذي يحدث على سطح المياه وقناة لها وهو شعاعين مساميتين. واما المشكلات في هذا البحث وهي قنوات تدفق السوائل هي في بعدين على افتراضي ان المائع المثالي وعدم تدوير. واما المعادلة التي تحكم المستمدة من وسائل الاعلام تشناق من حكم التوازن الشامل وحكم التوازن الزخم حتى تحصل المعادل "لافلجي" بأحوال المجموعة الحركية والديناميكية والذي يحدث على سطح السائل والقناة الأساسية.

لأن النظرية المستخدمة في هذا البحث وهي موجة الخطي، فأحوال المجموعة المستخدمة وهي فأحوال المجموعة. واما استخدمت الباحثة طريقة فصل المتغيرات لحل معادلة "لافلجي" مع أحوالها. واما الموجة المحسولة في هذا البحث وهي الموجة الخطي. وان المعادلة التشتت تستخدم ليلاحظ تطور موجة حول قنوات وهذه المعادلة تحصل من اشتقاق النموذج الخطي.

وعلاوة على ذلك، ومحاكاة للتطور الموجات السطحية من الحلول و المعادلة التشتت التي تم الحصول عن طريقة اعطاء موجة قيمة السعة A ، موجة التردد (w) ، مسامية على الشعاع المسامية (C_T) ، معامل الاحتكاك (f) ، عميق القنوات $(h_1$ و $h_2)$. واما يتم محاكاة لتعديل الإرتفاع والعروض شعاع مسامية، وتعديل المسافة شعاعين مساميتين. وانطلاقا الأعلى فتلخص ان افضل الإرتفاع شعاع مسامية كاسر الأمواج فأفضل اشتقاق موجة السعة وافضل العروض شعاع مسامية كاسر الأمواج فأفضل السعة المحسولة. واتساع المسافة شعاعين مساميتين فأفضل اشتقاق موجة السعة المحسولة.

لبحوث الأتي زادات الباحثة الاقتراحات وهي من اجل القيام عن تطور موجة التوافقي من خلال سلسلة الشعاع المسامية باستخدام موجة عدم الخطي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang sangat berguna untuk membantu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam pengembangan ilmu dan teknologi. Dewasa ini para ilmuwan menggunakan matematika sebagai alat komunikasi antara ilmu dan ilmuwan. Selain itu, matematika juga digunakan oleh para ilmuwan sebagai alat untuk melakukan analisis. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam al-Quran yaitu

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ إِنَّ فِي ذَلِكَ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ



“Dan dia Telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir.” (QS. al-Jaatsiyah/45:13).

Surat al-Jaatsiyah ayat 13 tersebut menganjurkan agar manusia berpikir dan melakukan suatu penelitian terhadap fenomena-fenomena alam yang terjadi seperti pergantian siang dan malam. Manusia dianjurkan untuk berpikir agar manusia mampu memahami kejadian-kejadian alam di sekitarnya dan agar manusia mampu menjaga kelestarian dan keseimbangan alam sebagai bentuk tugas manusia sebagai khalifah di bumi. Dari penelitian yang dilakukan tersebut dapat dijadikan suatu ilmu pengetahuan yang bermanfaat bagi kehidupan manusia untuk kebutuhan dan kesejahteraan semasa hidupnya. Manfaat dari pelajaran

tersebut yaitu dapat meningkatkan keimanan kepada Allah Swt. dan menunjukkan kebesaran dan kesempurnaan Allah Swt.

Selanjutnya salah satu pembahasan dalam matematika yang digunakan untuk melakukan analisis di bidang fisika adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang terdapat turunan-turunan didalamnya (Ault dan Ayres, 1992). Persamaan diferensial ini digunakan untuk menurunkan persamaan gelombang dan persamaan yang lainnya.

Gelombang adalah peristiwa perambatan getaran yang berpindah dari satu tempat ke tempat yang lain melalui suatu medium atau perantara (Young dan Freedman, 2003). Terjadinya suatu gelombang disebabkan oleh gangguan yang diberikan terhadap benda tersebut, misalnya gelombang yang terjadi pada air. Gangguan yang diberikan pada air tersebut menyebabkan partikel air bergerak naik turun terhadap titik setimbangnya. Sehingga getaran partikel air yang bergerak mengakibatkan terjadinya gelombang pada air. Pada peristiwa ini, fungsi air adalah sebagai medium atau perantara bagi gelombang untuk merambat. Berikut firman Allah Swt. tentang gelombang pada surat Huud ayat 42 dan 43

وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَى نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْرَلٍ يَبْنَئُ أَرْكَبَ مَعَنَا
وَلَا تَكُن مَعَ الْكَافِرِينَ ﴿٤٢﴾ قَالَ سَاوِيَ إِلَىٰ جِبَلٍ يَّعِصْمُنِي مِنَ الْمَاءِ ۗ قَالَ لَا عَاصِمَ الْيَوْمَ
مِنَ أَمْرِ اللَّهِ إِلَّا مَنْ رَحِمَ ۗ وَحَالَ بَيْنَهُمَا الْمَوْجُ فَكَانَ مِنَ الْمُغْرَقِينَ ﴿٤٣﴾

“42. Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. dan Nuh memanggil anaknya, sedang anak itu berada di tempat yang jauh terpencil: "Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir."

43. Anaknya menjawab: "Aku akan mencari perlindungan ke gunung yang dapat memeliharaku dari air bah!" Nuh berkata: "Tidak ada yang melindungi hari Ini dari azab Allah selain Allah (saja) yang Maha penyayang". dan gelombang menjadi penghalang antara keduanya; Maka jadilah anak itu termasuk orang-orang yang ditenggelamkan." (QS. Huud/11:42-43).

Pada tafsir Al-Maraghi (1984) dijelaskan bahwa, bahtera tersebut membawa penumpangnya dalam gelombang yang menjulang tinggi, begitu panjang bagai gunung. Gelombang pada lautan tersebut tampak seperti jurang yang dalam bagai lembah yang sangat dalam dan tampak bagai gunung besar.

Balok berpori adalah suatu balok berongga yang memungkinkan air untuk mengalir di dalamnya, oleh sebab itu terjadi hambatan aliran di dalam balok berpori. Sehingga terjadi sirkulasi antara balok berpori dan lapisan air di atasnya. Hukum Darcy menjelaskan tentang kemampuan air yang mengalir pada pori-pori dan sifat-sifat yang mempengaruhinya. Hukum Darcy juga menunjukkan bahwa permeabilitas ditentukan oleh koefisiennya.

Wiryanto (2010b) mengasumsikan bahwa fluida ideal dan alirannya tidak berotasi, sehingga alirannya dapat disajikan sebagai fungsi potensial. Diperoleh model dari penelitian ini yaitu gelombang permukaan yang disebabkan oleh dasar saluran yang tidak datar dan berpori. Teori yang digunakan untuk media fluida adalah teori aliran potensial dan untuk media berpori menggunakan persamaan linear, yaitu persamaan Darcy. Kemudian model tersebut diselesaikan secara numerik dengan metode beda hingga untuk mengamati efek dari parameter. Solusi dari model tersebut digunakan untuk mengamati perubahan bentuk dan perambatan gelombang permukaan fluida. Penelitian ini menunjukkan bahwa perubahan gelombang disebabkan oleh bilangan Froud dan sifat dari media berpori.

Penelitian lain yang dilakukan oleh Wiryanto (2010c) tentang perambatan gelombang monokromatik setelah melalui balok terendam, menghasilkan sebuah solusi analitik yang diselesaikan dengan menggunakan

metode pemisahan variabel. Fungsi potensial ditentukan dari persamaan Laplace dan kondisi batas linear, formula ini diterapkan pada kedalaman air yang berbeda untuk mendapatkan amplitudo gelombang yang ditransmisikan dan direfleksikan. Sehingga solusi yang diperoleh berasal dari persamaan linear air dangkal ketika melinearisasi fungsi hiperbolik.

Wiryanto (2010a) menurunkan sebuah model generasi gelombang berdasarkan arus perairan dangkal dan panjang pendek suatu gelombang. Kemudian model tersebut diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga prediktor-korektor untuk mengamati keadaan permukaan bebas. Kemudian dengan mengembangkan pola Adam-Bashforth sebagai prediktor dan pola Adam-Moulton sebagai korektor. Pada penelitian ini menjelaskan bahwa model dari gelombang yang dihasilkan lebih stabil dibandingkan aliran yang *steady*.

Aini (2014) mengasumsikan gelombang permukaan yang dihasilkan merupakan gelombang linear, dengan tinggi gelombang lebih kecil daripada panjang gelombang dan tidak terjadi interaksi antar gelombang, serta aliran dua dimensi untuk fluida ideal dan tidak berotasi dengan dasar saluran datar. Pemecah gelombang yang digunakan adalah sebuah balok tak berpori dan menggunakan metode separasi variabel untuk menurunkan persamaan Laplace dengan kondisi-kondisi batasnya. Penelitian tersebut menghasilkan solusi dari masalah evolusi gelombang harmonik yang melalui sebuah pemecah gelombang menggunakan metode pemisahan variabel yaitu berupa amplitudo gelombang.

Menurut hasil penelitian yang dilakukan oleh Aini (2014) bahwa dengan menggunakan balok tak berpori yang berukuran kecil dapat mereduksi amplitudo

gelombang secara maksimal. Penurunan amplitudo gelombang setelah melalui pemecah gelombang mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya tinggi balok pemecah gelombang. Sehingga semakin tinggi balok pemecah gelombang maka semakin besar pula penurunan amplitudo gelombang.

Pada penelitian ini akan diteliti tentang suatu gelombang harmonik yang terjadi pada permukaan air dan dasar salurannya berupa balok berpori. Kemudian pada penelitian ini akan dilakukan penurunan persamaan pengatur dengan menggunakan metode pemisahan variabel pada media fluida dan persamaan pengatur untuk fluida di dalam media balok berpori. Dari penurunan persamaan-persamaan tersebut akan diperoleh model matematika. Pada penelitian ini pula diasumsikan bahwa gelombang yang dihasilkan pada permukaan fluida adalah gelombang linear.

Perbedaan antara penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yaitu pada dasar saluran atau pemecah gelombang yang berbeda-beda. Pada penelitian yang dilakukan oleh Wiryanto (2010b), pemecah gelombang yang digunakan berbentuk gundukan dan berpori. Penelitian yang dilakukan oleh Aini (2014), pemecah gelombangnya berupa balok tidak berpori. Sedangkan pada penelitian ini pemecah gelombang yang digunakan adalah dua balok berpori.

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, maka penulis mengambil judul tentang “*Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Dua Balok Berpori*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka diberikan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika pada evolusi gelombang harmonik yang melalui balok berpori?
2. Bagaimana pengaruh ketinggian dan lebar balok terhadap penurunan amplitudo gelombang?
3. Berapa jarak optimal antara dua balok berpori yang dapat meminimalkan amplitudo gelombang?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui model matematika pada evolusi gelombang harmonik yang melalui balok berpori.
2. Untuk mengetahui pengaruh ketinggian dan lebar balok terhadap penurunan amplitudo gelombang.
3. Untuk mengetahui jarak optimal antara dua balok berpori yang dapat meminimalkan amplitudo gelombang.

1.4 Manfaat penelitian

1. Hasil penelitian ini diharapkan agar para peneliti dapat menggunakan metode pemisahan variabel sebagai alat bantu hitung untuk memodifikasi model gelombang pada permukaan fluida yang diakibatkan saluran pemecah gelombang.

2. Penelitian ini diharapkan dapat menjelaskan bagaimana pengaruh ketinggian dan lebar pemecah gelombang terhadap gelombang harmonik pada permukaan fluida.
3. Diharapkan hasil dari penelitian ini dapat digunakan untuk mendesain saluran pemecah gelombang yang berguna untuk mereduksi amplitudo secara optimal.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Amplitudo gelombang diasumsikan cukup kecil jika dibandingkan dengan kedalaman perairan.
2. Diasumsikan bahwa fluida ideal, tak kental dan tak termampatkan.
3. Aliran fluida tidak berotasi.
4. Tidak terjadi interaksi antara gelombang satu dengan lainnya.
5. Pemecah gelombang berupa dua buah balok berpori.
6. Permasalahan ditinjau sebagai dua dimensi.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian deskriptif kualitatif menggunakan metode kajian pustaka. Pada metode ini, peneliti melakukan penelusuran terhadap beberapa sumber yang berhubungan dengan pembahasan dalam penelitian. Beberapa langkah yang dilakukan dalam pelaksanaan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Persamaan pengatur pada media fluida diturunkan dari hukum-hukum kesetimbangan yang terjadi pada aliran fluida.

2. Menentukan kondisi batas dinamik dan kondisi batas kinematik yang terjadi pada permukaan fluida dan pada dasar saluran datar.
3. Melakukan pelinearan terhadap persamaan-persamaan pengatur yang berlaku pada media fluida.
4. Menyelesaikan persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya pada media fluida dengan menggunakan metode pemisahan variabel.
5. Menentukan relasi dispersi gelombang antara frekuensi gelombang dan bilangan gelombang.
6. Melakukan simulasi evolusi gelombang permukaan dari solusi dan relasi dispersi yang diperoleh dengan memodifikasi parameter yang ada untuk melihat pengaruh dari masing-masing parameter terhadap fenomena yang terjadi.
7. Menginterpretasi hasil simulasi.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah memahami intisari dari laporan penelitian ini yang terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu

Bab I Pendahuluan

Pada bagian ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini membahas tentang konsep-konsep yang mendasari bagian pembahasan. Pada bab ini dibahas tentang persamaan kontinuitas,

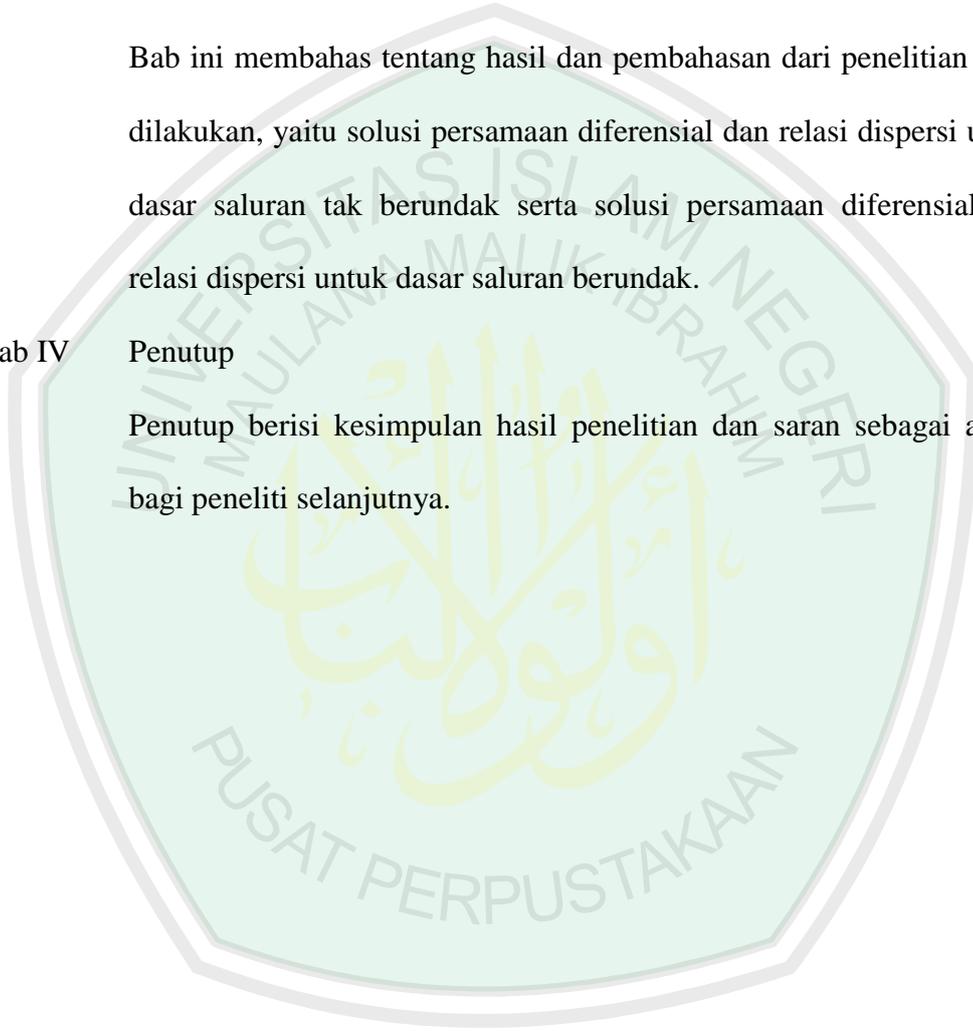
hukum kesetimbangan momentum, persamaan Bernoulli, persamaan Laplace, pemisahan variabel, kondisi batas, teori gelombang linear, metode pemisahan variabel, dan kajian gelombang dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang hasil dan pembahasan dari penelitian yang dilakukan, yaitu solusi persamaan diferensial dan relasi dispersi untuk dasar saluran tak berundak serta solusi persamaan diferensial dan relasi dispersi untuk dasar saluran berundak.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelombang Harmonik

Gelombang adalah sebarang gangguan dari kondisi kesetimbangan yang merambat dari satu daerah ke daerah lainnya. Jika diberikan gerak berulang atau gerak periodik, maka pada setiap partikel akan mengalami gerak periodik pula sewaktu gelombang itu merambat, sehingga diperoleh gelombang periodik. Secara khusus, misalkan gelombang tersebut bergerak ke atas dan ke bawah dalam gerak harmonik sederhana. Gerakan gelombang tersebut sangat teratur, sehingga gelombang tersebut dinamakan dengan gelombang harmonik. Gelombang periodik dengan gerak harmonik sederhana dinamakan dengan gelombang sinusoidal (Young dan Freedman, 2003).

Dari fungsi gelombang dapat diperoleh kecepatan partikel dalam gelombang sinusoidal di suatu titik tertentu, misalkan di titik x . Kemudian dengan menurunkan fungsi gelombang $y(x, t)$ terhadap t , dengan mempertahankan x konstan. Jika fungsi gelombang tersebut adalah

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx),$$

maka

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx) = V(x, t) \quad (2.1)$$

pada persamaan (2.1), dengan $V(x, t)$ laju gelombang.

Persamaan (2.1) tersebut memperlihatkan bahwa kecepatan suatu partikel berubah seiring dengan waktu, seperti pada gerak harmonik sederhana. Laju

partikel maksimum adalah ωA ini dapat lebih dari, kurang dari, atau sama dengan laju gelombang v , bergantung pada amplitudo dan frekuensi gelombang.

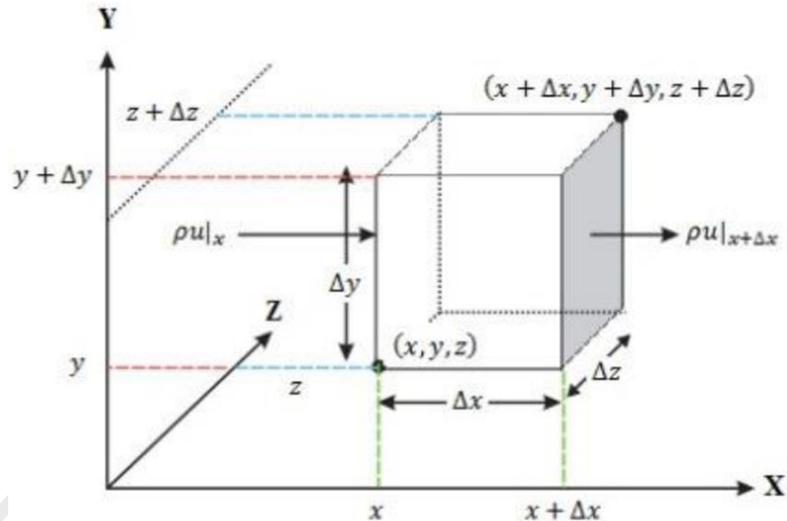
Ketinggian permukaan gelombang harmonik dapat dimisalkan sebagai berikut

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx - \omega t)} \quad (2.2)$$

dengan A adalah amplitudo gelombang transmisi yang nilainya diberikan, k adalah bilangan gelombang yang terkait dengan kedalaman saluran, ω menyatakan frekuensi gelombang, t menyatakan waktu yang diperlukan, dan x menyatakan koordinat yang tegak lurus terhadap z .

2.2 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas mengungkapkan bahwa fluida harus kontinu dan massanya bersifat kekal, yakni massa fluida tidak dapat diciptakan atau dimusnahkan. Syarat dari kekekalan massa fluida adalah dalam suatu volume zat massa selalu konstan, oleh sebab itu laju perubahan massa sama dengan nol. Beberapa bentuk penurunan persamaan kontinuitas untuk volume kontrol secara matematik bahwa laju massa gelombang yang masuk ke dalam suatu daerah tertentu sama dengan laju perubahan massa di daerah tersebut (Olson, 1993). Berdasarkan penjelasan tersebut dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Ilustrasi Kestimbangan Massa

Bila rapat massa fluida dinotasikan dengan ρ dan alirannya hanya memandang satu arah, misal dalam arah sumbu x . Maka rata-rata massa masuk dalam elemen volume setiap satuan waktu yang melintasi bidang x adalah $(\rho u)|_x \Delta y \Delta z$ dan rata-rata massa keluar yang melewati bidang $x + \Delta x$ adalah $(\rho u)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$, dengan u dinyatakan sebagai komponen kecepatan dalam arah sumbu x . Secara keseluruhan vektor kecepatan dalam tiga dimensi dapat dinotasikan sebagai $q = (u, v, w)$. Sedangkan untuk bidang lain yang dilintasi yaitu dalam bidang y dan z dapat dilakukan cara yang sama seperti pada sumbu x . Sehingga diperoleh persamaan kestimbangan massa sebagai berikut:

Perubahan massa = massa masuk – massa keluar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = & [(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\ & + [(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.3)$$

Karena Δy dan Δz tidak bervariasi terhadap x , Δx dan Δz tidak bervariasi terhadap y , Δx dan Δy tidak bervariasi terhadap z , serta Δx , Δy , dan Δz tidak

bervariasi terhadap t , maka persamaan di atas dapat dibagi dengan besaran Δx , Δy , dan Δz , sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{[(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}]}{\Delta x} + \frac{[(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}]}{\Delta y} + \frac{[(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}]}{\Delta z}$$

Dengan mengambil limit volume menuju nol, untuk $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ dan $\Delta z \rightarrow 0$ sehingga diperoleh

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}]}{\Delta x} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}]}{\Delta y} = -\frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}]}{\Delta z} = -\frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

Kemudian diperoleh persamaan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)$$

atau

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (2.4)$$

Karena ρ adalah konstan (ρ tidak berubah-ubah) dan $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (semua turunan ρ adalah nol), maka persamaan (2.4) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) berlaku untuk aliran yang *steady* ataupun *unsteady* (kecepatan bervariasi terhadap waktu sebagaimana posisi pada fluida). Keadaan aliran yang kerapatan massanya (ρ) termasuk dalam persamaan kontinuitas dan dianggap konstan disebut dengan aliran tidak dapat mampat.

Kemudian didefinisikan suatu operator untuk turunan total terhadap waktu t , yaitu sebagai berikut

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.6)$$

Sebelumnya telah didefinisikan untuk $q = (u, v, w)$, sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.7)$$

Selanjutnya dengan menerapkan ρ pada persamaan (2.7), maka diperoleh

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Sehingga persamaan kontinuitas (2.4) dapat ditulis dalam bentuk berikut dengan menggunakan operator turunan total $\left(\frac{D}{Dt}\right)$, yaitu

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot q) \quad (2.8)$$

dengan $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ dan $q = (u, v, w)$.

2.3 Persamaan Laplace

Aliran pada fluida diasumsikan sebagai fluida yang tidak mampat, maka diberikan persamaan berikut

$$\rho(\nabla \cdot q) = 0 \quad (2.9)$$

Sedangkan kecepatan partikel untuk aliran tak berotasi dapat dinyatakan sebagai fungsi kecepatan potensial, yaitu $\phi(x, y, z, t)$ (Holthuijsen, 2007). Berikut adalah bentuk fungsi potensial

$$q = \nabla \phi \quad (2.10)$$

di mana vektor kecepatan q sebagai medan vektor konservatif, yaitu adanya fungsi skalar ϕ yang memenuhi persamaan (2.10).

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (2.10) ke persamaan (2.9), diperoleh persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) dikenal sebagai persamaan Laplace pada media fluida dan merupakan persamaan diferensial parsial orde 2. Persamaan tersebut berasal dari turunan persamaan kesetimbangan massa. Persamaan Laplace pada media fluida ini memerlukan kondisi batas untuk memperoleh solusinya.

Setiap fungsi $\phi(x,y)$ yang memenuhi persamaan Laplace disebut harmonik dan merupakan salah satu potensial kecepatan yang dapat menggambarkan aliran nonrotasi tertentu. Solusi untuk persamaan Laplace tidak terbatas, oleh karena itu untuk memperoleh solusi yang dikehendaki maka perlu menerapkan kondisi-kondisi batas yang sesuai (Olson, 1993).

2.4 Persamaan Momentum

Berdasarkan hukum kedua Newton, teorema momentum hanya dapat diterapkan pada gaya-gaya dari luar dan hasilnya dapat digunakan dalam berbagai keadaan tanpa membutuhkan pengetahuan yang rinci tentang proses-proses internal di dalam fluida. Teorema momentum ini dapat diterapkan pada berbagai aliran baik yang *steady* maupun *unsteady*, berdimensi satu, dua, atau tiga, dapat mampat atau tidak dapat mampat. Seperti dalam kasus partikel-partikel padat atau diskrit, fluida cenderung meneruskan dalam keadaan diam atau gerak secara serempak kecuali bila diganggu oleh gaya-gaya dari luar (Olson, 1993).

Hukum kedua Newton untuk sebuah partikel adalah $F_{total} = ma$, dalam teorema kerja-energi. Teorema tersebut dapat digunakan untuk mengatasi persoalan-persoalan fisika yang terkait dengan hukum kekekalan momentum. Kemudian dengan menggunakan definisi percepatan sebagai turunan dari kecepatan terhadap waktu, maka hukum kedua Newton dapat ditulis sebagai

$$F_{total} = m \frac{dv}{dt} \quad (2.12)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (2.12) diintegrasikan, maka diperoleh

$$\int F_{total} dt = mv \quad (2.13)$$

dengan menggunakan notasi P_m untuk momentum, maka ruas kiri persamaan (2.13) menjadi

$$P_m = mv \quad (2.14)$$

Momentum adalah besaran vektor yang mempunyai besar (mv) dan arah (sama dengan vektor kecepatan \vec{v}) (Young dan Freedman, 2000). Selanjutnya dapat ditulis persamaan

$$F_{total} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2.15)$$

Gaya total (F_{total}) adalah rata-rata perubahan momentum terhadap waktu, kemudian berdasarkan hubungan antara massa dan massa jenis yang dinotasikan sebagai

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.16)$$

dengan ρ adalah massa jenis, dan V adalah volume. Persamaan (2.16) dapat disubstitusikan pada persamaan (2.14), sehingga

$$P_m = (\rho V)v \quad (2.17)$$

Karena akan ditinjau dalam tiga dimensi, maka persamaan (2.17) dapat ditulis dalam bentuk

$$P_m = (\rho\Delta x\Delta y\Delta z)v \quad (2.18)$$

Untuk mengetahui rata-rata perubahan momentum setiap satuan waktu dapat dinotasikan sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_m) = \frac{\partial}{\partial t}[(\rho\Delta x\Delta y\Delta z)v] - \int F_{total} dt \quad (2.19)$$

Secara keseluruhan, kesetimbangan momentum pada elemen volume adalah

Rata-rata perubahan momentum = rata-rata momentum masuk – rata-rata momentum keluar – gaya-gaya yang bekerja

Rapat massa (ρ) fluida dan bergerak dengan kecepatan u melintasi bidang x , maka dalam selang satuan waktu terdapat sebanyak $\rho V|_x = \rho u|_x \Delta y \Delta z$ dan momentum yang melintasi bidang x sebesar $\rho u|_x \Delta y \Delta z \cdot u|_x$. Massa partikel yang melintasi bidang y adalah sebesar $\rho V|_y = \rho v|_y \Delta x \Delta z$ dan momentumnya sebesar $\rho v|_y \Delta x \Delta z \cdot u|_y$. Sedangkan massa partikel yang melintasi bidang z adalah sebesar $\rho V|_z = \rho w|_z \Delta x \Delta y$ dan momentumnya sebesar $\rho w|_z \Delta x \Delta y \cdot u|_z$.

Kontribusi massa adalah komponen yang mempengaruhi perubahan momentum dari arah x maupun dari arah y . Komponen $\rho u^2|_x \Delta y \Delta z$ menyatakan kontribusi massa dari arah x dengan kecepatan sebesar u (arah x), komponen $\rho v u|_y \Delta x \Delta z$ menyatakan kontribusi massa dari arah y dengan kecepatan sebesar u (arah y), dan $\rho w u|_z \Delta x \Delta y$ menyatakan kontribusi massa dari arah z dengan kecepatan sebesar u (arah z).

Rata-rata momentum yang masuk melintasi bidang x adalah $\rho u^2|_x \Delta y \Delta z$ dan yang keluar melintasi bidang $x + \Delta x$ adalah $\rho u^2|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Rata-rata

momentum yang masuk melintasi bidang y adalah $\rho v u|_y \Delta x \Delta z$ dan yang keluar melintasi bidang $y + \Delta y$ adalah $\rho v u|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$. Sedangkan momentum yang masuk melintasi bidang z adalah $\rho w u|_z \Delta x \Delta y$ dan yang keluar melintasi bidang $z + \Delta z$ adalah $\rho w u|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$. Sehingga momentum keseluruhan akibat konveksi pada komponen x adalah

$$\begin{aligned} & [\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [\rho v u|_y - \rho v u|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\ & + [\rho w u|_z - \rho w u|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tekanan fluida (p) didefinisikan sebagai gaya tekan yang diterima setiap satuan luas fluida dan dapat dinotasikan sebagai

$$F_{tekanan} = p|_x \Delta y \Delta z \quad (2.21)$$

Dengan menggunakan hubungan antara gaya gravitasi dan percepatan gravitasi diperoleh persamaan

$$F_{gravitasi} = p g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

Resultan gaya-gaya tersebut dalam arah x adalah

$$[p|_x - p|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + p g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

$p|_x$ menyatakan tekanan yang melintasi bidang x , sedangkan g_x menyatakan percepatan gravitasi dalam arah x .

Sehingga persamaan rata-rata perubahan momentum adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} &= [\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [\rho v u|_y - \rho v u|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\ &+ [\rho w u|_z - \rho w u|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y + [p|_x - p|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z \\ &+ p g_x \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.22)$$

Kemudian persamaan (2.22) dibagi dengan Δx , Δy , dan Δz , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} = & \left[\frac{\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right] + \left[\frac{\rho v u|_y - \rho v u|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \right] \\ & + \left[\frac{\rho w u|_z - \rho w u|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right] + \left[\frac{p|_x - p|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (2.23)$$

Selanjutnya diambil limit menuju nol, yaitu $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, dan $\Delta z \rightarrow 0$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x \Delta y \Delta z) \rightarrow 0} & \left[\frac{\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right] + \left[\frac{\rho v u|_y - \rho v u|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \right] + \left[\frac{\rho w u|_z - \rho w u|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right] \\ & + \left[\frac{p|_x - p|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right] + \rho g_x \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan gerak untuk arah x adalah

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.24)$$

Persamaan gerak untuk arah y adalah

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.25)$$

Sedangkan persamaan gerak untuk arah z adalah

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.26)$$

Selanjutnya jika persamaan (2.24), (2.25), dan (2.26) dikali dengan $\frac{1}{\rho}$ pada kedua ruas, maka diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v u}{\partial y} + \frac{\partial w u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial w v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial v w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z \quad (2.29)$$

Dari persamaan (2.27), (2.28), dan (2.29) dapat ditulis dalam notasi vektor yaitu

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{g} \quad (2.30)$$

dengan $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ dan $\bar{q} = (u, v, w)$. Karena gaya gravitasi hanya bekerja pada arah z maka $\bar{g} = -\nabla gz$.

2.5 Persamaan Bernoulli

Persamaan Bernoulli adalah persamaan yang menghubungkan antara tekanan, laju aliran, dan ketinggian untuk aliran, fluida *incompressible* (yang densitas atau kerapatannya sulit diubah). Persamaan Bernoulli banyak digunakan sebagai alat analisis untuk sistem perpipaan, stasiun pembangkit listrik tenaga air, dan penerbangan pesawat (Young dan Freedman, 2000).

Persamaan Bernoulli tersebut diturunkan dari persamaan momentum (2.30), dengan menulis kembali persamaan momentum dalam bentuk vektor berikut

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z \quad (2.31)$$

Sehingga berdasarkan turunan total berikut $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$, suku pertama dari ruas kiri pada persamaan (2.31) dapat dinotasikan sebagai

$$\frac{D\bar{q}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + F \quad (2.32)$$

dengan menggunakan $F = 0$ untuk aliran fluida yang tidak termampatkan.

Sedangkan suku kedua dari ruas kiri pada persamaan (2.31) memenuhi hubungan berikut

$$\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} \quad (2.33)$$

(pembuktian dapat dilihat pada Lampiran 1) dengan menggunakan hukum kali vektor dari tiga vektor tripel yaitu a , b , dan c yang dapat dituliskan sebagai $a \times (b \times c)$ yang disebut sebagai hasil kali vektor dari vektor tripel dan berlaku $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ (Soemartojo, 1992). Sehingga hukum tersebut juga berlaku untuk persamaan (2.33), yaitu

$$\begin{aligned}\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) &= (\bar{q} \cdot \bar{q})\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} \\ &= \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}\end{aligned}$$

(pembuktian dapat dilihat pada Lampiran 1) kemudian untuk fluida dengan aliran seragam dan tak berotasi ($\nabla \times \bar{q}) = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\bar{q} \times 0 &= \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} \\ \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla &= (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.31) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z \quad (2.34)$$

dengan $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla \phi$ dan $|\bar{q}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, dimana $|\bar{q}|$ menyatakan kecepatan. Karena didefinisikan bahwa $q = \nabla \phi$, maka persamaan (2.34) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) + \left(\frac{1}{2}|\nabla \phi|^2\right)\nabla &= -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z \\ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) + \left(\frac{1}{2}|\nabla \phi|^2\right)\nabla + \frac{1}{\rho}\nabla p + g\nabla z &= 0 \\ \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho}p + gz\right) &= 0\end{aligned} \quad (2.35)$$

Kemudian dengan mengintegrasikan persamaan (2.35) terhadap variabel x, y , dan z diperoleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho} p + gz = f(t)$$

dengan $f(t)$ merupakan fungsi sebarang dari t , yang diperoleh akibat integrasi yang dilakukan terhadap x, y , dan z . Kemudian dengan menggabungkan $f(t)$ dengan ϕ yang berbentuk $\phi - \int f(t) dt$, maka diperoleh bentuk lain seperti persamaan (2.36) berikut

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho} p + gz = 0 \quad (2.36)$$

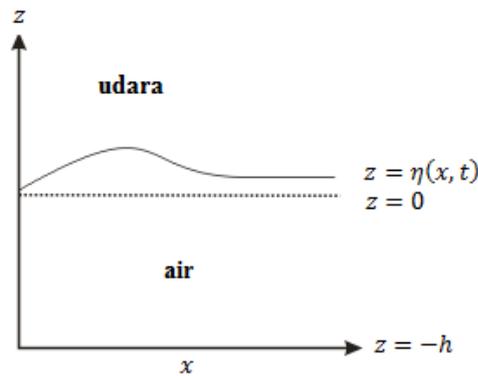
Persamaan (2.36) di atas dikenal sebagai persamaan Bernoulli.

2.6 Kondisi Batas

Kondisi batas digunakan sebagai alat untuk menyelesaikan suatu model. Terdapat dua kondisi batas yang digunakan untuk menyelesaikan model tersebut, yaitu kondisi batas kinematik dan dinamik. Kondisi batas kinematik adalah kondisi batas yang berhubungan dengan gerakan partikel-partikel fluida. Sedangkan kondisi batas dinamik berhubungan dengan gaya-gaya yang bekerja pada fluida (Holthuijsen, 2007).

2.6.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Bebas

Kondisi batas kinematik ini diturunkan berdasarkan ide dasar dari sifat kontinum fluida. Sehingga dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 2.2 Batas-Batas Fluida Bebas

Berdasarkan Gambar 2.2 di atas x dan z menyatakan posisi partikel fluida, $z = -h$ merupakan dasar fluida, $z = 0$ merupakan posisi kesetimbangan, dan $z = \eta(x, t)$ merupakan batas permukaan fluida atau merupakan kurva yang membatasi antara udara dan air (Iffah, 2014). Sehingga persamaan permukaan fluida dalam bentuk implisit adalah

$$F(x, z, t) = z - h - \eta(x, t) = 0 \quad (2.37)$$

Misalkan posisi partikel berada pada koordinat (x, z) dan partikel tersebut tetap pada permukaan, yaitu $F(x, z, t) = 0$ maka dapat dinyatakan dalam operator turunan total yaitu $\frac{DF}{Dt} = 0$. Definisi turunan total tersebut adalah

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Telah didefinisikan kecepatan vektor dua dimensi yaitu $\bar{q} = (u, v)$, sehingga turunan total tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.38)$$

Kemudian substitusi persamaan (2.37) ke persamaan (2.38), sehingga

$$0 = \frac{\partial(z - h - \eta(x, t))}{\partial t} + u \frac{\partial(z - h - \eta(x, t))}{\partial x} + v \frac{\partial(z - h - \eta(x, t))}{\partial z}$$

$$0 = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v$$

dengan $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ yang menyatakan komponen kecepatan ϕ pada arah x dan $v = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

menyatakan komponen kecepatan ϕ pada arah z , sehingga

$$0 = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2.39)$$

2.6.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Bebas

Kondisi batas dinamik pada permukaan ini diturunkan berdasarkan persamaan Bernoulli (2.36), yaitu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho} p + gz = f(t)$$

di mana $f(t)$ adalah fungsi sebarang t yang diperoleh dari hasil integrasi terhadap x, y dan z .

Kemudian kondisi batas dinamik permukaan fluida pada $z = h + \eta(x, t)$, diasumsikan fluida tak kental dan tekanan permukaan diabaikan sehingga $p = 0$.

Maka persamaan Bernoulli menjadi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{\rho} (0) + g(h + \eta(x, t)) = f(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g(h + \eta(x, t)) = f(t) \quad (2.40)$$

Pada keadaan seragam (*uniform*), ruas kiri persamaan (2.40) berlaku kecepatan vertikal $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$, kecepatan horizontal $\frac{\partial \phi}{\partial x} = c$, dan $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ dengan c adalah kecepatan awal, karena tidak terjadi perubahan terhadap waktu maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g(h + \eta(x, t)) &= f(t) \\ 0 + \frac{1}{2} [(c)^2 + 0] + g(h) &= f(t) \\ \frac{1}{2} c^2 + g(h) &= f(t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2.41) ke persamaan (2.36), maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho} p + g(h + \eta(x, t)) &= \frac{1}{2} c^2 + g(h) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho} p + g(h) + g\eta(x, t) &= \frac{1}{2} c^2 + g(h) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho} p + g\eta(x, t) &= \frac{1}{2} c^2 + g(h) - g(h) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + \frac{1}{\rho} p + g\eta(x, t) &= \frac{1}{2} c^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Karena c adalah kecepatan awal ($c = 0$) dan dengan menetapkan $p = 0$ sebagai tekanan, maka persamaan (2.42) dapat ditulis

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\bar{q}|^2 + g\eta(x, t) = 0$$

atau

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad (2.43)$$

Persamaan (2.43) merupakan kondisi batas dinamik fluida pada permukaan bebas sepanjang $\eta(x, t)$.

2.6.3 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Aliran Kaku

Pada dasar saluran hanya berlaku kondisi batas kinematik saja, sedangkan untuk kondisi batas dinamik tidak berlaku karena partikel di dasar saluran tidak bergerak.

Kondisi batas kinematik pada dasar saluran media fluida

$$(x < 0, R_1 < x < R_2, x > L)$$

yaitu $z = -h$ diperoleh dengan menuliskan kondisi tersebut secara implisit sebagai berikut

$$F(x, z, t) = z + h = 0 \quad (2.44)$$

Misalkan posisi partikel berada pada koordinat (x, z) dan partikel tersebut tetap pada permukaan, yaitu $F(x, z, t) = 0$ maka dapat dinyatakan dalam operator turunan total yaitu $\frac{DF}{Dt} = 0$. Definisi turunan total tersebut adalah

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Telah didefinisikan kecepatan vektor dua dimensi yaitu $\bar{q} = (u, v)$, sehingga turunan total tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.45)$$

Kemudian substitusi persamaan (2.44) ke persamaan (2.45), sehingga

$$0 = \frac{\partial(z+h)}{\partial t} + u \frac{\partial(z+h)}{\partial x} + v \frac{\partial(z+h)}{\partial z}$$

$$0 = 0 + 0 + v$$

dengan $v = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ menyatakan komponen kecepatan ϕ pada arah z , sehingga

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.46)$$

2.7 Aliran Fluida pada Media Berpori

Prinsip yang mengatur pergerakan fluida di dalam media berpori disebut dengan hukum Darcy. Media berpori adalah suatu media yang celahnya tidak terisi benda padat atau celahnya terisi oleh fluida, contohnya seperti hamparan pasir di dasar laut, batu karang, dan media buatan manusia.

2.7.1 Persamaan Laplace

Karakteristik untuk media berpori dinyatakan dalam porositas C_r . Porositas menyatakan persentase volume ruang kosong (pori-pori) di dalam volume total V_{tot} . Kemudian volume yang terisi oleh partikel padat di dalam V_{tot} dimisalkan sebagai \bar{V} , maka diperoleh

$$C_r = \frac{V_{tot} - \bar{V}}{V_{tot}} = 1 - \frac{\bar{V}}{V_{tot}}$$

Selanjutnya jika ruang kosong (pori-pori) terisi oleh fluida, maka

$$V_r = V_{tot} - \bar{V} \text{ dan } C_r = \frac{V_r}{V_{tot}}$$

Untuk porositas C_r bernilai antara 0 dan 1. Porositas 0 menyatakan lapisan padat dan porositas 1 menyatakan lapisan fluida (Jamhuri, dkk., 2013).

Kemudian kecepatan partikel untuk aliran fluida tak berotasi di dalam media berpori dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\bar{q} = C_r \nabla \bar{\phi} \quad (2.47)$$

di mana vektor kecepatan \bar{q} sebagai medan vektor konservatif, yaitu adanya fungsi skalar $\bar{\phi}$ yang memenuhi persamaan (2.47).

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (2.47) ke persamaan (2.9), diperoleh persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.48)$$

persamaan (2.48) dikenal sebagai persamaan Laplace untuk media berpori dan merupakan persamaan diferensial parsial orde 2. Persamaan tersebut berasal dari turunan persamaan kesetimbangan massa. Persamaan Laplace untuk media berpori ini memerlukan kondisi batas untuk memperoleh solusinya.

2.7.2 Persamaan Bernoulli

Selanjutnya pada subbab berikut akan dimodifikasi persamaan Bernoulli untuk aliran fluida dalam media berpori. Dengan menggunakan persamaan (2.47) pada persamaan (2.32) dan F merupakan gaya hambat pada media berpori. Gaya hambat tersebut sebanding dengan kecepatan fluida yang dinyatakan dalam bentuk $-f\omega\nabla\bar{\phi}$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + gz \right) - f\omega\nabla\bar{\phi}$$

dengan ω adalah frekuensi gelombang dan f adalah koefisien gesek pada media berpori.

Kemudian dengan menggunakan cara yang sama pada persamaan (2.33) dan dengan memindahkan semua suku pada salah satu ruas, maka diperoleh

$$\nabla \left(C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} C_r^2 |\bar{\phi}|^2 + \frac{1}{\rho} p + gz + f\omega\bar{\phi} \right) = 0 \quad (2.49)$$

Selanjutnya dengan mengintegrasikan persamaan (2.49) terhadap variabel x , y , dan z maka diperoleh

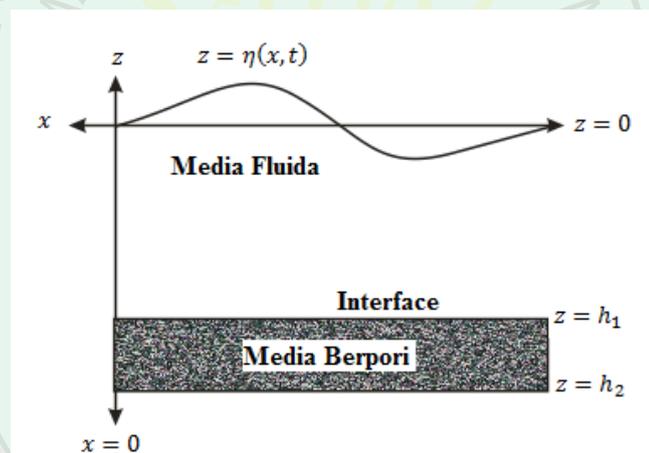
$$C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} C_r^2 |\bar{\phi}|^2 + \frac{1}{\rho} p + gz + f\omega\bar{\phi} = s(t)$$

di mana $s(t)$ merupakan fungsi sebarang dari t yang diperoleh dari integrasi yang dilakukan terhadap x dan z . Kemudian dengan menggabungkan antara $\bar{\phi}$ dan $s(t)$ yang berbentuk $\bar{\phi} - \int s(t) dt$, maka diperoleh

$$C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} C_r^2 |\bar{\phi}|^2 + \frac{1}{\rho} p + gz + f\omega \bar{\phi} = 0 \text{ (Jamhuri, dkk., 2013)} \quad (2.50)$$

2.7.3 Persamaan Pengatur dan Laplace Kedua Media

Pada sebuah saluran terdiri dari dua lapisan atau media, yaitu media fluida dan media berpori. Media berpori berada di dasar saluran dan terbenam oleh media fluida. Sehingga dapat diilustrasikan pada gambar berikut



Gambar 2.3 Perambatan Gelombang di Atas Media Berpori

Berdasarkan Gambar 2.3 di atas, permukaan fluida dalam keadaan tidak ada gangguan, yaitu pada sumbu x koordinat kartesius. Media fluida memiliki kedalaman sebesar h_1 (konstan) dan kedalaman saluran mulai dari permukaan sampai dasar saluran sebesar h_2 (konstan). Sehingga dapat ditentukan ketebalan media berpori ialah $h_p = h_2 - h_1$ dengan $h_2 > h_1$.

Kemudian terjadi suatu gangguan yang berupa gelombang dengan frekuensi ω dari arah kiri menuju ke arah kanan pada saluran. Selanjutnya dengan

menetapkan $x = 0$ dan $0 \leq x$ sebagai posisi awal terjadinya gangguan. Sedangkan $z = \eta(x, t)$ adalah keadaan permukaan fluida setelah terjadi gangguan sepanjang $0 \leq x$ pada saat t .

Selanjutnya dengan menggunakan asumsi aliran pada kedua media tersebut ideal dan tak berotasi, maka kecepatan partikel pada kedua media dapat dinyatakan sebagai fungsi potensial ϕ dan $\bar{\phi}$ yang memenuhi persamaan berikut

$$q = \nabla\phi \quad (2.51)$$

dan

$$\bar{q} = C_r \nabla\bar{\phi} \quad (2.52)$$

di mana q adalah vektor kecepatan partikel di media fluida dan \bar{q} adalah vektor kecepatan partikel untuk media berpori, yang keduanya merupakan medan vektor konservatif, yaitu adanya fungsi skalar ϕ dan $\bar{\phi}$ yang memenuhi persamaan (2.51) dan (2.52). Persamaan pengatur yang digunakan pada permasalahan ini adalah persamaan Laplace untuk kedua media yang diturunkan dari hukum kekekalan massa beserta kondisi batas di *interface* dan dasar saluran.

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2.51) dan (2.52) ke persamaan kontinuitas (2.8), sehingga persamaan untuk kedua media adalah

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \text{ untuk } -h_2 < z < \eta(x, t) \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0, \text{ untuk } -h_1 < z < -h_2 \quad (2.54)$$

yang diikuti oleh kesetimbangan fluks dan tekanan di *interface* (Jamhuri, dkk., 2013).

2.7.4 Kondisi Batas Kinematik pada *Interface*

Kecepatan aliran fluida yang menembus *interface* dari media fluida ke media berpori atau sebaliknya dari media berpori ke media fluida memberikan pengaruh yang sama besar, hal ini dinyatakan oleh kesetimbangan fluks di *interface*. Sehingga dengan memisalkan v_1 sebagai kecepatan partikel fluida dari media fluida ke media berpori melalui *interface*. Fungsi posisi partikel pada *interface* adalah $z = -h_1$, diperoleh dengan menuliskan kondisi tersebut secara implisit sebagai berikut $S(x, z, t) = z + h_1$. Kemudian dengan melakukan turunan total pada S diperoleh

$$\frac{D}{Dt} S(z) = v_1$$

maka $w = v_1$, dimana w merupakan kecepatan vertikal *interface* yang menuju media berpori dan $v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ menyatakan komponen kecepatan ϕ pada arah z .

Selanjutnya untuk fungsi posisi partikel pada *interface* $z = -h_1$ bergerak dengan kecepatan v_2 menuju media fluida, yaitu $\bar{S}(x, z, t) = z + h_1$. Sehingga diperoleh turunan total pada \bar{S} adalah

$$\frac{D}{Dt} \bar{S}(z) = v_2$$

maka $\bar{w} = v_2$, dengan \bar{w} adalah kecepatan vertikal partikel di *interface* yang menuju media fluida dan $v_2 = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}$ menyatakan komponen kecepatan $\bar{\phi}$ pada arah z .

Untuk menjamin hukum kekekalan massa maka harus memenuhi $v_1 = v_2$, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \quad (2.55)$$

Persamaan (2.55) menyatakan kondisi kinematik fluida di *interface* (Jamhuri, dkk., 2013).

2.7.5 Kondisi Batas Dinamik Aliran pada *Interface*

Persamaan Bernoulli digunakan sebagai kesetimbangan tekanan di *interface*. Sehingga untuk aliran media fluida berlaku persamaan (2.36) dan untuk media berpori dinyatakan oleh persamaan (2.50). Karena tekanan pada *interface* harus kontinu, maka suku $\frac{1}{\rho} p + gz$ pada persamaan (2.36) dan (2.50) harus sama, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} C_r^2 |\bar{\phi}|^2 + f \omega \bar{\phi} \quad (2.56)$$

Persamaan (2.56) adalah kondisi batas dinamik pada pertemuan antara media fluida dan media berpori (*interface*) (Jamhuri, dkk., 2013).

2.7.6 Kondisi Batas pada Permukaan

Dengan menulis kembali persamaan (2.39) dan (2.43) untuk kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan bebas, yaitu

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \text{ untuk } z = \eta \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0, \text{ untuk } z = \eta \quad (2.58)$$

2.7.7 Kondisi Batas pada Dasar Saluran Berpori

Sedangkan kondisi batas pada dasar saluran diperoleh dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (2.46), dan dengan menggunakan persamaan (2.52) sebagai kecepatan partikelnya. Maka diperoleh kondisi batas pada dasar saluran berpori adalah

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \quad (2.59)$$

Persamaan (2.59) menyatakan bahwa tidak ada aliran yang melalui dasar saluran.

2.8 Teori Gelombang Linear

Gelombang yang terjadi di alam sangatlah beragam dan tidak dapat dirumuskan secara akurat. Akan tetapi dalam mempelajari fenomena gelombang yang terjadi di alam dilakukan beberapa asumsi. Sehingga dari beberapa asumsi tersebut diperoleh teori-teori gelombang, salah satunya adalah teori gelombang linear atau disebut juga dengan teori gelombang amplitudo kecil. Teori gelombang linear merupakan teori gelombang yang paling sederhana. Teori gelombang linear ini pertama kali diperkenalkan oleh Airy pada tahun 1845 (Zakaria, 2009).

Teori gelombang linear diturunkan dari persamaan Laplace untuk aliran fluida yang tak berotasi. Persamaan Laplace tersebut membutuhkan kondisi batas untuk memperoleh solusinya. Pada teori gelombang linear dibutuhkan kondisi batas di permukaan bebas dan dasar saluran. Kondisi batas di permukaan diturunkan berdasarkan persamaan Bernoulli, sedangkan kondisi batas di dasar saluran diambil dari kecepatan aliran arah vertikal yaitu nol.

2.8.1 Kondisi Batas Kinematik pada Permukaan Fluida

Menurut Ridwan dkk (2008) dalam skripsi yang ditulis oleh Aini (2014), persamaan (2.39) mengandung suku nonlinear $\phi_z \eta_x$ dan dapat disederhanakan dengan ekspansi deret Taylor di sekitar $z = 0$.

$$(\phi_z)_\eta = (\phi_z)_0 + \eta(\phi_{zz})_\eta + \dots$$

dengan melakukan pendekatan terhadap orde pertama, ϕ_z dalam persamaan (2.39) dievaluasi sepanjang garis datar $z = 0$ pada saat linearisasi. Sehingga kondisi batas kinematik pada permukaan fluida dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.60)$$

2.8.2 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan Fluida

Dysthe (2004) menyatakan bahwa gelombang dengan kecuramannya rendah maka memiliki suku nonlinear yang kecil. Oleh karena itu diharapkan dari proses linearisasi yang akan dilakukan, diperoleh aproksimasi yang baik terhadap sifat gelombang. Sehingga dilakukan proses linierisasi untuk kondisi batas (2.43) dengan mengabaikan persamaan kuadrat dan orde suku tertinggi di η dan ϕ berikut

$$\phi(t, x, y, \eta) = \phi(t, x, y, 0) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, y, 0)\eta$$

dengan menyatakan suku yang mengandung ϕ dievaluasi pada $z = 0$ ketika melakukan proses linearisasi. Sehingga persamaan Bernoulli linear untuk aliran *unsteady* adalah

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p + gz = 0$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa fluida tidak dapat mampat, maka kerapatan pada fluida (ρ) adalah konstan. Sehingga persamaan Bernoulli tersebut dapat digunakan sebagai kondisi batas dinamik pada permukaan $z = \eta$ dan $\rho = 0$ berikut

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (2.61)$$

2.8.3 Kondisi Batas Dinamik pada *Interface*

Dengan menggunakan cara yang sama pada subbab sebelumnya, yaitu melakukan proses linearisasi, maka kondisi batas dinamik pada *interface* (2.56) yang digunakan adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + f\omega \bar{\phi} \quad (2.62)$$

Sebagai catatan elevasi gelombang yang melalui saluran tersebut dievaluasi sepanjang garis datar $z = 0$ pada saat dilakukan linearisasi.

2.8.4 Kondisi Batas Kinematik pada Dasar Saluran Media Fluida

Kondisi batas kinematik pada dasar saluran yang digunakan adalah

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.63)$$

Persamaan (2.63) diperoleh berdasarkan penurunan pada subbab sebelumnya.

2.8.5 Kondisi Batas Kinematik Pada Dasar Media Berpori

Kondisi batas kinematik pada dasar media berpori yang digunakan adalah

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \quad (2.64)$$

Persamaan (2.64) diperoleh berdasarkan penurunan pada subbab sebelumnya.

2.9 Metode Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel ini digunakan untuk mencari solusi pada persamaan diferensial parsial. Metode ini sangat penting untuk membedakan antara variabel bebas dituliskan dengan huruf kecil, sedangkan untuk fungsi dituliskan dengan huruf kapital. Misalkan untuk menentukan solusi dari persamaan $u(x, t)$, dapat dituliskan secara terpisah seperti $u(x, t) = X(x)T(t)$. Tujuan menggunakan metode ini yaitu untuk mencari banyaknya solusi pemisahan yang tepat. Kemudian dengan mensubstitusikan dari bentuk pemisahan variabel tersebut kedalam persamaan diferensial akan diperoleh solusi (Strauss, 2007).

Kemudian metode pemisahan variabel ini diterapkan pada persamaan gelombang untuk memperoleh solusi, sehingga

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ untuk } 0 < x < l \quad (2.65)$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t) \quad (2.66)$$

kemudian diberikan kondisi awal yaitu

$$u(x, 0) = \phi(x) \text{ dan } u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2.67)$$

Misalkan untuk solusi dari persamaan (2.65) dan (2.66) dengan cara pemisahan bentuk sebagai berikut

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.68)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi persamaan (2.67) pada persamaan (2.65) menghasilkan

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \quad (2.69)$$

dengan membagi kedua ruas persamaan (2.69) dengan $-c^2X(x)T(t)$, maka diperoleh

$$\frac{X(x)T''(t)}{-c^2X(x)T(t)} = \frac{c^2X''(x)T(t)}{-c^2X(x)T(t)}$$

$$-\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Dalam hal ini ditetapkan λ sebagai konstanta dan harus konstan. Bukti bahwa λ konstan adalah $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$, sehingga terbukti bahwa λ konstan. Selain itu dapat dibuktikan pula bahwa λ tidak tergantung pada x seperti yang ditunjukkan pernyataan $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$ dan λ juga tidak tergantung pada t seperti yang ditunjukkan pernyataan $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$, sehingga terbukti bahwa λ konstan karena tidak tergantung pada variabel x dan t (Strauss, 2007).

Pada akhir pembahasan akan ditunjukkan bahwa $\lambda > 0$, maka dimisalkan bahwa $\lambda = \beta^2$ dimana $\beta > 0$. Kemudian persamaan (2.6) dapat dipisah menjadi

$$T'' + c^2T\beta^2 = 0 \quad (2.70)$$

dan

$$X'' + X\beta^2 = 0 \quad (2.71)$$

Sehingga diperoleh solusi dari persamaan diferensial (2.70) dan (2.71) adalah

$$X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x$$

dan

$$T(t) = A \cos \beta ct + B \sin \beta ct$$

2.10 Kajian Gelombang dalam Al-Quran

Kajian gelombang telah dijelaskan dalam beberapa ayat dalam al-Quran.

Sebagaimana firman Allah Swt. pada surat Yunus ayat ke-22 yaitu

هُوَ الَّذِي يُسَيِّرُكُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ ۗ حَتَّىٰ إِذَا كُنْتُمْ فِي الْفُلِكِ وَجَرَبَ بِهَمِّ بَرِيحٍ طَيِّبَةٍ وَفَرِحُوا بِهَا جَاءَتْهَا رِيحٌ عَاصِفٌ وَجَاءَهُمُ الْمَوْجُ مِنْ كُلِّ مَكَانٍ وَظَنُّوا أَنَّهُمْ أُحِيطَ بِهِمْ ۖ دَعَوُا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ لَئِن أَخَجْتَنَا مِنْ هَذِهِ لَنَكُونَنَّ مِنَ الشَّاكِرِينَ ﴿٢٢﴾

“Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka Telah terkepung (bahaya), Maka mereka berdoa kepada Allah dengan mengikhhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (mereka berkata): "Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan kami dari bahaya ini, Pastilah kami akan termasuk orang-orang yang bersyukur” (QS. Yunus/11:22).

Menurut tafsir Al-Aisar dalam (Al-Jazairi, 2008) dijelaskan bahwa ayat tersebut memperlihatkan kelemahan dan kebutuhan orang-orang musyrik kepada Allah Swt. Sehingga Allah Swt. menunjukkan kekuasaan-Nya dengan menciptakan kendaraan yang dapat digunakan di daratan seperti onta, kuda, dan keledai. Demikian juga di lautan, Allah Swt. juga menciptakan angin agar kapal yang membawa kaum musyrik tersebut bisa berlayar dengan tiupan angin yang baik. Seperti para nelayan yang merasa senang dengan adanya angin yang bersahabat, karena hal tersebut bisa menyelamatkan mereka dari marabahaya. Akan tetapi, angin juga membawa bencana seperti angin badai yang bertiup kencang sehingga menggoncangkan kapal dan penumpangnya.

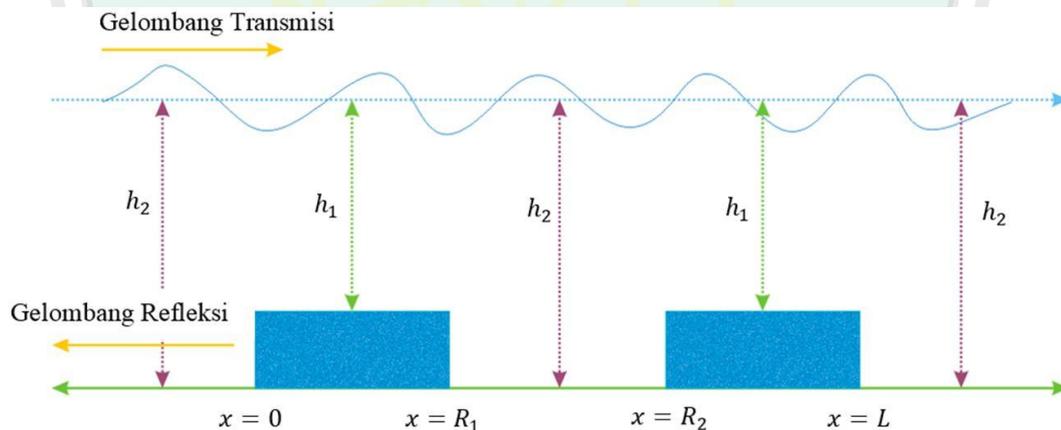
Surat Yunus ayat 22 tersebut membahas kekuasaan Allah Swt. tentang kemudahan-kemudahan menggunakan berbagai jenis kendaraan di darat dan di lautan. Sehingga Allah Swt. menciptakan papan untuk membuat kapal, kain yang

digunakan untuk membuat layar, serta lautan dan angin untuk menggerakkan kapal layar. Allah Swt. menguji keimanan kaum-Nya ketika berada dalam kapal layar. Allah Swt. menciptakan hembusan angin yang baik dan gelombang yang tenang, mereka pun bergembira karenanya. Tiba-tiba datanglah angin badai yang kencang dan gelombang yang menimpa dari berbagai penjuru, sehingga mereka merasa cemas dan ketakutan. Berdasarkan kejadian tersebut dapat diketahui bahwa telah terjadi perubahan gelombang dari gelombang yang tenang berubah menjadi hampasan gelombang yang sangat dahsyat. Perubahan gelombang disebabkan oleh tiupan angin, ketika angin yang berhembus sangat baik maka terjadi gelombang yang tenang. Sedangkan jika angin yang berhembus berupa angin badai maka akan terjadi gelombang yang dapat menggoncangkan kapal yang sedang berlayar. Perubahan gelombang tersebut dalam bahasa ilmiah disebut dengan evolusi gelombang.

BAB III

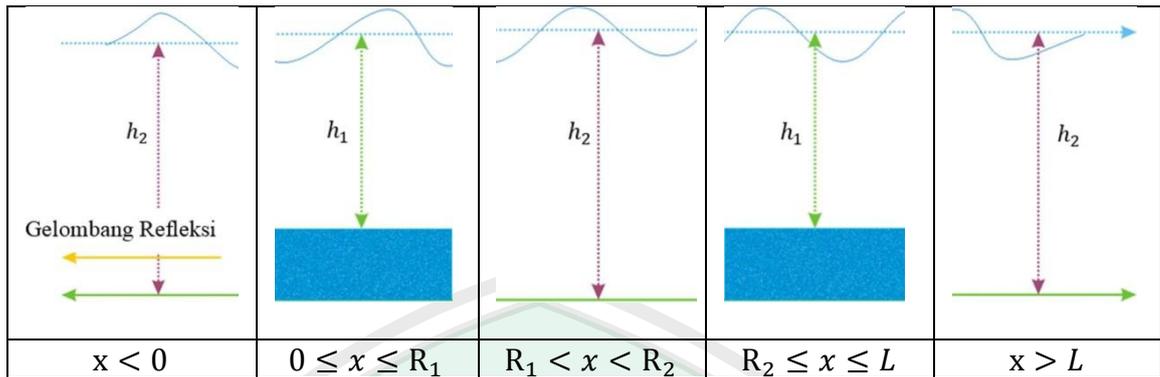
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas penurunan model gelombang permukaan fluida yang dihasilkan oleh aliran melalui dua buah balok berpori. Penurunan model gelombang yaitu dengan mengasumsikan aliran fluida berada pada saluran dua dimensi yang memiliki dasar saluran tidak rata dan memiliki kecepatan seragam. Karena dasar salurannya tidak rata, maka aliran fluida mengalami gangguan berupa dua buah balok berpori, sehingga kecepatan aliran fluida berubah dan menimbulkan gelombang pada permukaan. Gelombang yang dihasilkan merupakan gelombang linear, dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.1 Ilustrasi Gelombang Harmonik Melalui Dua Balok Berpori

Kemudian Gambar 3.1 di atas dibagi menjadi lima ruas berdasarkan struktur saluran, yaitu ruas I, ruas II, ruas III, ruas IV, dan ruas V. Pembagian kelima saluran tersebut dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.2 Pembagian Saluran Berdasarkan Struktur Dasar Saluran

Selanjutnya langkah-langkah penyelesaiannya yaitu, menentukan solusi persamaan Laplace dan relasi dispersi untuk masing-masing ruas saluran. Langkah berikutnya yaitu dengan menggunakan kekontinuan permukaan fluida, kekontinuan fluks massa, solusi persamaan Laplace, dan relasi dispersi yang diperoleh untuk menentukan amplitudo gelombang pada masing-masing domain fluida.

3.1 Solusi dan Relasi Dispersi untuk Ruas I, II, III, IV, dan V

Subbab ini membahas penyelesaian tentang solusi dari persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya pada ruas I di daerah $x < 0$, ruas II di daerah $0 \leq x \leq R_1$, ruas III di daerah $R_1 < x < R_2$, ruas IV di daerah $R_2 \leq x \leq L$, dan pada ruas V di daerah $x > L$.

3.1.1 Solusi pada Ruas I

Pada subsubbab ini dibahas masalah gelombang harmonik yang terjadi pada permukaan fluida dengan dasar salurannya dianggap rata dan tidak ada gelombang yang dipantulkan. Masalah tersebut dapat dijelaskan secara matematis

dengan menggunakan persamaan-persamaan pengatur beserta kondisi-kondisi batas pada permukaan fluida, pada dasar saluran, dan pada fluida itu sendiri, yang selanjutnya persamaan-persamaan tersebut diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel.

Persamaan Laplace merupakan persamaan diferensial orde dua yang diturunkan berdasarkan hukum kesetimbangan massa, hukum tersebut digunakan untuk menurunkan persamaan kontinuitas tiga dimensi terhadap elemen volume yang berbentuk kubus dengan sisi-sisi Δx , Δy , dan Δz . Persamaan Laplace tersebut memerlukan kondisi batas untuk memperoleh solusinya. Pada fluida terdapat tiga kondisi batas yang digunakan, yaitu kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan bebas, serta kondisi batas kinematik pada dasar aliran kaku. Kondisi batas kinematik diturunkan berdasarkan dari sifat kontinum fluida, sedangkan kondisi batas dinamik diturunkan berdasarkan persamaan Bernoulli.

Berikut persamaan Laplace untuk media fluida yang telah diturunkan di bab II

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (3.1)$$

pada $-h_2 < z < 0$ dan $-\infty < x < \infty$. Kemudian kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan adalah

$$\eta_t - \phi_z = 0 \text{ pada } z = 0 \quad (3.2)$$

dan

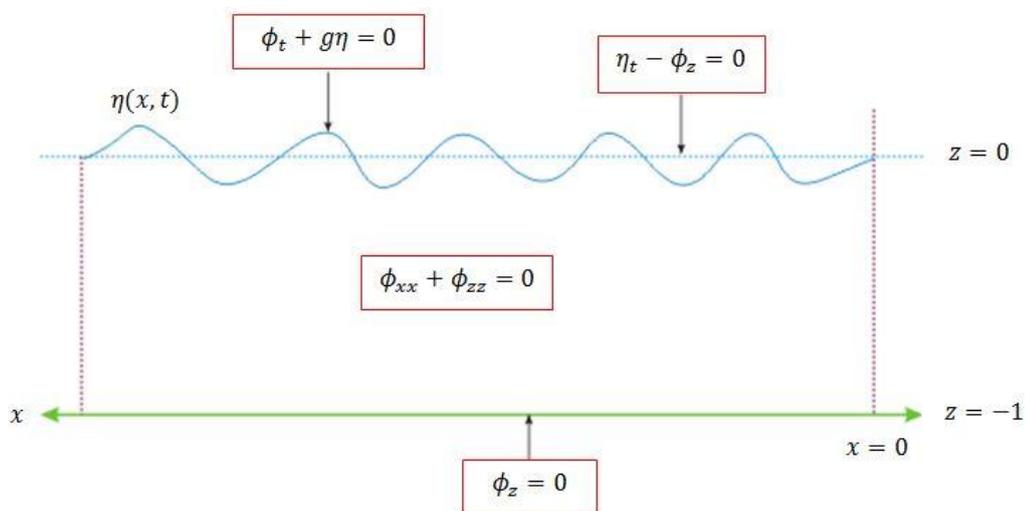
$$\phi_t + g\eta = 0 \text{ pada } z = 0 \quad (3.3)$$

Sedangkan kondisi batas kinematik pada dasar saluran adalah

$$\phi_z = 0 \quad (3.4)$$

pada $z = -h$.

Persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya dapat dilihat pada gambar berikut di daerah $x < 0$



Gambar 3.3 Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Rata di $x < 0$

Kemudian persamaan (3.1) beserta kondisi-kondisi batasnya yaitu persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4) di atas diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel, yaitu $\phi(x, z, t)$ dipisah menjadi hasil perkalian dua buah fungsi $S(x, t)$ dan $F(z)$, sehingga diperoleh fungsi

$$\phi(x, z, t) = S(x, t)F(z) \quad (3.5)$$

Kemudian ditentukan fungsi $S(x, t)$ terlebih dahulu dengan menganggap dasar saluran rata, sehingga perubahan ketinggian permukaan gelombang dapat dimisalkan sebagai

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx-\omega t)} + Be^{-i(-kx-\omega t)} \quad (3.6)$$

dengan A menyatakan amplitudo gelombang transmisi yang diberikan, B menyatakan amplitudo gelombang transmisi, k menyatakan bilangan gelombang, dan ω menyatakan frekuensi gelombang.

Kemudian dari kondisi batas kinematik (3.2), diperoleh

$$\eta_t - S(x, t)F'(z) = 0$$

kedua ruas pada persamaan di atas ditambahkan dengan $S(x, t)F'(z)$ dengan $z = 0$, sehingga

$$\eta_t(x, t) = S(x, t)F'(0)$$

Selanjutnya η diturunkan terhadap t , sehingga diperoleh persamaan (3.7) berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = S(x, t)F'(0) \quad (3.7)$$

Substitusi persamaan (3.6) pada persamaan (3.7), maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} [Ae^{-i(kx-\omega t)}] = S(x, t)F'(0)$$

Setelah diturunkan, ruas kiri menjadi

$$i\omega Ae^{-i(kx-\omega t)} = S(x, t)F'(0)$$

$$i\omega \eta(x, t) = S(x, t)F'(0)$$

Sehingga diperoleh fungsi berikut

$$S(x, t) = \frac{i\omega \eta(x, t)}{F'(0)} \quad (3.8)$$

Selanjutnya dari kondisi batas dinamik (3.3), maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) F(0) + g \eta(x, t) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} S(x, t) F(0) = -g \eta(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) = -\frac{g}{F(0)} \eta(x, t)$$

Dengan melakukan integral pada kedua ruas diperoleh

$$S(x, t) = -\frac{g}{F(0)} \int \eta(x, t) dt \quad (3.9)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.9), maka diperoleh

$$S(x, t) = -\frac{g}{F(0)} \int Ae^{-i(kx-\omega t)} dt$$

$$S(x, t) = -\frac{g}{F(0)} \left(\frac{1}{i\omega} A e^{-i(kx - \omega t)} + C \right)$$

$$S(x, t) = -\frac{g}{i\omega F(0)} \eta(x, t) + C \quad (3.10)$$

dengan C adalah konstanta baru yang diperoleh dari pengintegralan.

Kemudian dari persamaan (3.8) dan (3.10) diperoleh hubungan, yaitu

$$\frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) = -\frac{g}{i\omega F(0)} \eta(x, t) + C$$

$$\frac{i\omega}{F'(0)} \eta(x, t) + \frac{g}{i\omega F(0)} \eta(x, t) = C$$

$$\left(\frac{i\omega}{F'(0)} + \frac{g}{i\omega F(0)} \right) \eta(x, t) = C$$

Ruas kanan dari persamaan di atas adalah konstan, sedangkan ruas kirinya memuat variabel (x, t) . Sehingga persamaan di atas hanya mungkin dipenuhi jika konstan $C = 0$, selanjutnya persamaan di atas menjadi

$$\left(\frac{i\omega}{F'(0)} + \frac{g}{i\omega F(0)} \right) \eta(x, t) = 0$$

Pilih $\eta(x, t) \neq 0$, sehingga

$$\frac{i\omega}{F'(0)} + \frac{g}{i\omega F(0)} = 0 \quad (3.11)$$

Kemudian dari hubungan (3.11) diperoleh

$$\frac{i\omega}{F'(0)} + \frac{g}{i\omega F(0)} = 0$$

$$\frac{i\omega}{F'(0)} = -\frac{g}{i\omega F(0)}$$

$$i^2 \omega^2 F(0) = -g F'(0)$$

Untuk $i^2 = -1$, maka diperoleh

$$-\omega^2 F(0) = -g F'(0)$$

$$F'(0) = \frac{\omega^2 F(0)}{g}$$

dan karena $C = 0$, maka dari persamaan (3.10) diperoleh

$$S(x, t) = -\frac{g}{i\omega F(0)} \eta(x, t) \quad (3.12)$$

F merupakan fungsi dari z yang membutuhkan nilai awal, sehingga dapat dipilih

$F(0) = 1$ diperoleh

$$F'(0) = \frac{\omega^2}{g} \quad (3.13)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.8), diperoleh

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \frac{i\omega g}{\omega^2} \eta(x, t) \\ &= \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Kemudian persamaan (3.14) disubstitusi ke persamaan (3.5), sehingga

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= S(x, t)F(z) \\ &= \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)F(z) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kemudian persamaan (3.1) diselesaikan dengan metode pemisahan variabel sebagai berikut

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0$$

$$S_{xx}(x, t) F(z) + S(x, t) F''(z) = 0$$

$$\frac{ig}{\omega} \eta_{xx}(x, t) F(z) + \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) F''(z) = 0 \quad (3.16)$$

Selanjutnya persamaan (3.16) dikali dengan $\frac{\omega}{ig}$, diperoleh

$$\eta_{xx}(x, t) F(z) + \eta(x, t) F''(z) = 0 \quad \eta_{xx}(x, t) F(z) = -\eta(x, t) F''(z)$$

Maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\frac{\eta_{xx}(x, t)}{\eta(x, t)} = -\frac{F''(z)}{F(z)} \quad (3.17)$$

Pada ruas kiri persamaan (3.17) hanya bergantung pada variabel (x, t) , sedangkan pada ruas kanan persamaan (3.17) hanya bergantung pada variabel z . Kondisi tersebut hanya mungkin dipenuhi jika kedua ruas persamaan tersebut merupakan suatu bilangan konstan. Misalkan bilangan konstan tersebut adalah λ , maka persamaan (3.17) menjadi

$$\frac{\eta_{xx}(x, t)}{\eta(x, t)} = -\frac{F''(z)}{F(z)} = \lambda \quad (3.18)$$

Jika persamaan (3.18) ditulis terpisah, maka diperoleh

$$\frac{\eta_{xx}(x, t)}{\eta(x, t)} = \lambda \quad \text{dan} \quad -\frac{F''(z)}{F(z)} = \lambda$$

Selanjutnya persamaan-persamaan di atas dapat dituliskan menjadi persamaan (3.19) dan (3.20) berikut

$$\eta_{xx}(x, t) - \lambda\eta(x, t) = 0 \quad (3.19)$$

dan

$$F''(z) + \lambda F(z) = 0 \quad (3.20)$$

Jika $\lambda < 0$, misalkan λ sebagai $\lambda = -\beta^2$ dan $\eta_{xx} = -k^2 \eta(x, t)$, maka diperoleh

$$-k^2 \eta(x, t) + \beta^2 \eta(x, t) = 0$$

Kemudian persamaan di atas dikali dengan $\frac{1}{\eta(x, t)}$, diperoleh

$$-k^2 + \beta^2 = 0$$

$$\beta^2 = k^2$$

$$\beta = \pm\sqrt{k^2}$$

$$\beta = \pm k$$

dan

$$F''(z) - k^2F(z) = 0 \quad (3.21)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.21) adalah

$$m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 = k^2$$

$$m = \pm\sqrt{k^2}$$

$$m = \pm k$$

Sehingga solusinya adalah

$$F(z) = c_1e^{kz} + c_2e^{-kz} \quad (3.22)$$

Selanjutnya dengan menggunakan kondisi $F(0) = 1$, diperoleh

$$1 = c_1 + c_2$$

$$c_1 = 1 - c_2 \quad (3.23)$$

Kemudian karena $F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$, diperoleh

$$F'(0) = c_1ke^{k(0)} - c_2ke^{-k(0)}$$

$$\frac{\omega^2}{g} = c_1k - c_2k$$

$$\frac{\omega^2}{gk} = c_1 - c_2 \quad (3.24)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.23) ke persamaan (3.24), maka diperoleh

$$\frac{\omega^2}{gk} = (1 - c_2) - c_2 \frac{\omega^2}{gk} = 1 - 2c_2 \frac{\omega^2}{gk} = 1 - \frac{\omega^2}{gk}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{2gk} \quad (3.25)$$

Kemudian substitusi persamaan (3.25) ke persamaan (3.23), diperoleh

$$c_1 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{2gk} \right) \quad (3.26)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2gk}$$

Selanjutnya substitusi (3.25) dan (3.26) ke solusi (3.22), maka diperoleh

$$\begin{aligned} F(z) &= c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2gk} \right) e^{kz} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{2gk} \right) e^{-kz} \\ &= \frac{1}{2} e^{kz} + \frac{\omega^2}{2gk} e^{kz} + \frac{1}{2} e^{-kz} - \frac{\omega^2}{2gk} e^{-kz} \\ &= \left(\frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2} \right) + \frac{\omega^2}{gk} \left(\frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2} \right) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana, yaitu

$$F(z) = \cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \quad (3.27)$$

Pada persamaan (3.5), $\phi(x, z, t)$ dituliskan sebagai

$$\phi(x, z, t) = S(x, t)F(z)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.14) dan (3.27), maka diperoleh solusi untuk ruas I

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \quad (3.28)$$

Kemudian substitusi persamaan (3.6) ke persamaan (3.28), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \frac{ig}{\omega} (Ae^{-i(kx-\omega t)} + Be^{-i(-kx-\omega t)}) \left[\cosh(kz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Persamaan (3.29) merupakan solusi dari persamaan Laplace pada media fluida dengan dasar saluran yang dianggap rata dan persamaan tersebut digunakan pada ruas I dengan perubahan ketinggian gelombang permukaan adalah $\eta(x, t) =$

$Ae^{-i(kx-\omega t)} + Be^{-i(-kx-\omega t)}$. Kemudian untuk mengetahui persamaan (3.29) merupakan solusi yang valid dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (3.2) dan (3.3) pada $z = 0$.

3.1.2 Solusi pada Ruas II

Permasalahan yang dibahas yaitu evolusi gelombang harmonik yang terjadi pada permukaan fluida dengan dasar saluran berpori. Dasar saluran berpori ini memiliki rongga yang terisi air dan air tersebut mengalir di dalamnya. Sehingga aliran air yang melalui dasar berpori tersebut mengalami suatu hambatan. Selain itu, ada kemungkinan terjadinya sirkulasi antara lapisan berpori ke lapisan di atasnya, maupun sebaliknya. Sirkulasi tersebut terjadi pada sepanjang batas antara kedua lapisan. Sehingga dari permasalahan tersebut dapat dijelaskan secara matematis menggunakan persamaan-persamaan pengatur beserta kondisi-kondisi batas. Kemudian persamaan-persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Berikut adalah persamaan-persamaan yang berpengaruh, persamaan Laplace untuk media fluida

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (3.30)$$

Persamaan Laplace untuk media berpori adalah

$$\bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{zz} = 0 \quad (3.31)$$

Kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida, yaitu

$$\phi_t + g\eta = 0 \quad (3.32)$$

dan

$$\eta_t - \phi_z = 0 \quad (3.33)$$

Sedangkan kondisi pada *interface* atau kondisi batas dinamik pada pertemuan antara media fluida dan media berpori adalah

$$\phi_z = C_r \bar{\phi}_z \quad (3.34)$$

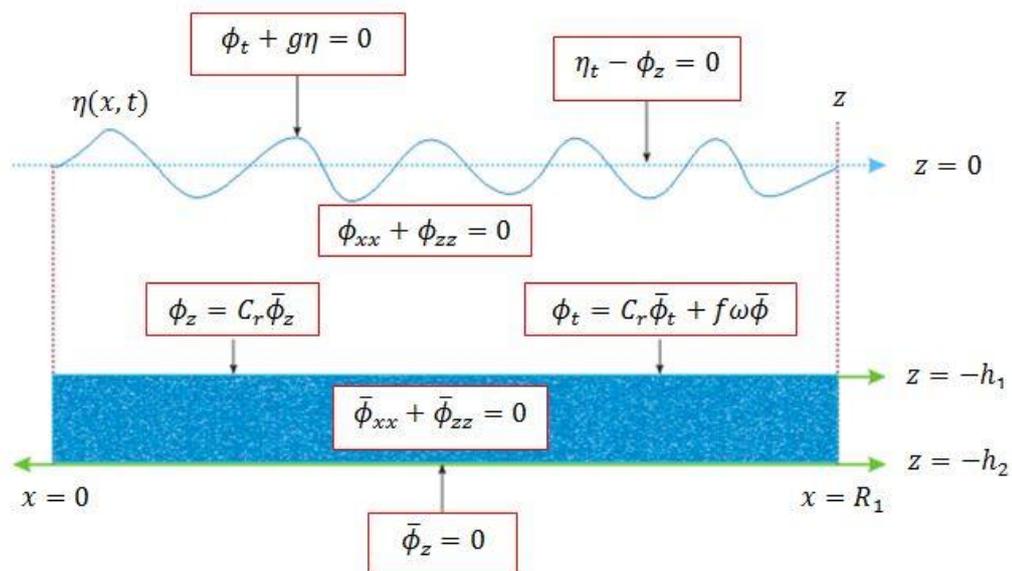
dan

$$\phi_t = C_r \bar{\phi}_t + f\omega \bar{\phi} \quad (3.35)$$

Kondisi batas pada dasar berpori adalah

$$\bar{\phi}_z = 0 \quad (3.36)$$

Persamaan Laplace untuk media fluida dan media berpori beserta kondisi batas dinamik dan kinematik pada daerah $0 \leq x \leq R_1$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.4 Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Berpori di $0 \leq x \leq R_1$

Selanjutnya persamaan (3.30) dan persamaan (3.31) beserta kondisi-kondisi batas tersebut diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel, yaitu $\phi(x, z, t)$ dipisah menjadi hasil perkalian dari dua fungsi $S(x, t)$ dan $F(z)$, sehingga diperoleh fungsi potensial untuk media fluida sebagai berikut

$$\phi(x, z, t) = S(x, t)F(z) \quad (3.37)$$

dan fungsi potensial untuk media berpori sebagai berikut

$$\bar{\phi}(x, z, t) = S(x, t)G(z) \quad (3.38)$$

Selanjutnya perubahan ketinggian permukaan gelombang dengan dasar saluran berpori dapat dimisalkan sebagai berikut

$$\eta(x, t) = Ce^{-i(kx-\omega t)} + De^{-i(-kx-\omega t)}$$

Kemudian dengan menggunakan kondisi batas pada persamaan (3.34) diperoleh

$$\phi_z = C_r \bar{\phi}_z$$

$$S(x, t)F'(z) = C_r \bar{\phi}_z$$

$$\frac{S(x, t)}{C_r} F'(z) = \bar{\phi}_z$$

$$\frac{ig}{\omega C_r} \eta(x, t) F'(z) = \bar{\phi}_z$$

Karena $S(x, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)$, maka persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$\bar{\phi}_z = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \frac{F'(z)}{C_r}$$

$$\bar{\phi}_z = S(x, t) \frac{F'(z)}{C_r}$$

Selanjutnya $\bar{\phi}_z$ diintegrasikan terhadap z , diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \int S(x, t) \frac{F'(z)}{C_r} dz \\ &= S(x, t) \left[\frac{1}{C_r} \int F'(z) dz \right] \\ &= S(x, t) \left[\frac{1}{C_r} (F(z) + C) \right] \\ &= S(x, t) \left[\frac{F(z)}{C_r} + C \right] \end{aligned}$$

$$= S(x, t)G(z)$$

dengan $G(z) = \left(\frac{F(z)}{C_r} + C\right)$.

Karena $S(x, t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x, t)$, maka

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x, t)G(z) \quad (3.39)$$

pada $-h_2 < z < -h_1$.

$G(z)$ dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama untuk memperoleh $F(z)$ pada subbab sebelumnya, sehingga

$$G(z) = E_1 e^{kz} + E_2 e^{-kz} \quad (3.40)$$

pada $-h_2 < z < -h_1$.

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.40) ke persamaan (3.39), diperoleh fungsi potensial untuk media berpori berikut

$$\bar{\phi} = \frac{ig}{\omega}\eta(x, t)(E_1 e^{kz} + E_2 e^{-kz})\bar{\phi}_z = \frac{ig}{\omega}\eta(x, t)(E_1 e^{kz} + E_2 e^{-kz})k \quad (3.41)$$

Dari dua solusi $G(z)$ dan $F(z)$ terdapat konstanta integrasi, yaitu D_1, D_2, E_1 , dan E_2 . Konstanta integrasi tersebut diperoleh dari solusi persamaan Laplace yang dapat ditentukan dengan menggunakan keempat kondisi batas, yaitu $\phi_t + g\eta = 0$, $\eta_t - \phi_z = 0$, $\phi_z = C_r \bar{\phi}_z$, dan $\bar{\phi}_z = 0$.

Selanjutnya untuk mencari konstanta integrasi E_1 dan E_2 , digunakan kondisi batas pada *interface*, yaitu persamaan (3.34) berikut

$$\phi_z = C_r \bar{\phi}_z, \text{ pada } z = -h_1$$

Gunakan $\phi(x, z, t)$ dari persamaan (3.28) dan (3.41), sehingga

$$\frac{ig}{\omega}\eta(x, t) \left[\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right] k = C_r \frac{ig}{\omega}\eta(x, t) [E_1 e^{-kh_1} - E_2 e^{kh_1}] k$$

Kemudian ruas kanan dan kiri pada persamaan tersebut dikalikan dengan

$\frac{\omega}{ig\eta(x,t)k}$, sehingga diperoleh

$$C_r[E_1e^{-kh_1} - E_2e^{kh_1}] = \frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1)$$

$$(C_re^{-kh_1})E_1 - (C_re^{kh_1})E_2 = \frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \quad (3.42)$$

Selanjutnya dengan menggunakan kondisi batas pada persamaan (3.36),

maka

$$\phi_z = 0, \text{ pada } z = -h_2$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{ig}{\omega} \eta(x,t) G'(-h_2) = 0$$

$$\frac{ig}{\omega} \eta(x,t) (E_1e^{-kh_2} - E_2e^{kh_2})k = 0$$

Kemudian kedua ruas pada persamaan di atas dikalikan dengan $\frac{\omega}{ig\eta(x,t)}$, sehingga

diperoleh

$$E_1e^{-kh_2} - E_2e^{kh_2} = 0$$

$$(e^{-kh_2})E_1 - (e^{kh_2})E_2 = 0 \quad (3.43)$$

Sehingga dari persamaan (3.42) dan (3.43) diperoleh persamaan E_1 dan E_2

sebagai berikut

$$E_1 = - \frac{e^{kh_2} \left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right)}{2C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \quad (3.44)$$

dan

$$E_2 = - \frac{e^{-kh_2} \left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right)}{2C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \quad (3.45)$$

Kemudian substitusi persamaan (3.44) dan (3.45) ke persamaan (3.40), sehingga diperoleh solusi

$$G(z) = \left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right) \left(\frac{\cosh(kh_2 + kz)}{C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \right) \quad (3.46)$$

Pada persamaan (3.32), $\bar{\phi}(x, z, t)$ dituliskan sebagai

$$\bar{\phi}(x, z, t) = S(x, t)G(z)$$

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right) \left(\frac{\cosh(kh_2 + kz)}{C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \right) \right] \quad (3.47)$$

Substitusi $\eta(x, t) = Ce^{-i(kx-\omega t)} + De^{-i(-kx-\omega t)}$ ke persamaan (3.47), diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, z, t) = & \frac{ig}{\omega} \left(Ce^{-i(kx-\omega t)} \right. \\ & \left. + De^{-i(-kx-\omega t)} \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sinh(kh_1) \right) \left(\frac{\cosh(kh_2 + kz)}{C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \right) \right] \quad (3.48) \end{aligned}$$

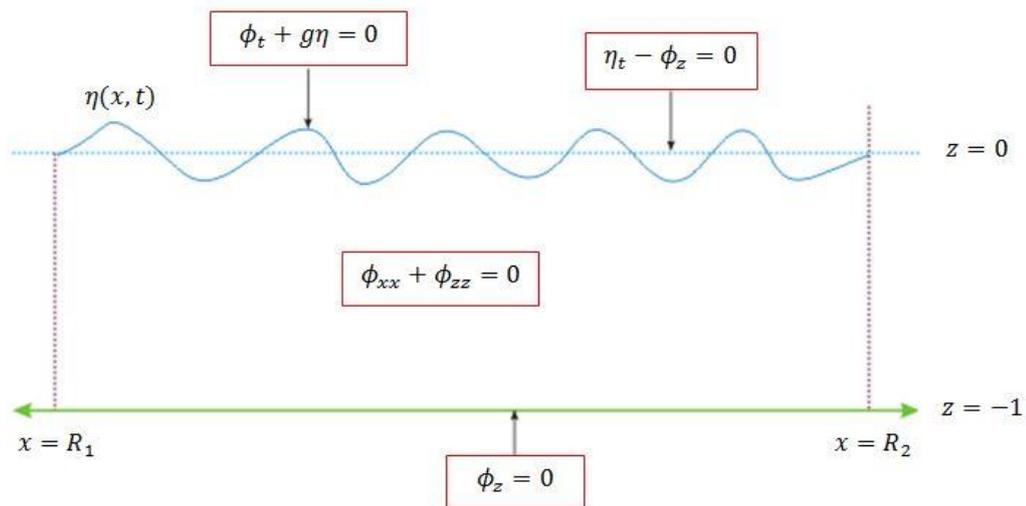
Persamaan (3.48) merupakan solusi dari persamaan Laplace pada media berpori.

Persamaan tersebut digunakan pada ruas II dengan dasar saluran berupa balok berpori yang perubahan ketinggian permukaan gelombangnya dimisalkan sebagai

$$\eta(x, t) = Ce^{-i(kx-\omega t)} + De^{-i(-kx-\omega t)}.$$

3.1.3 Solusi pada Ruas III

Pada subsubbab ini ditentukan solusi persamaan Laplace pada ruas saluran III di daerah $R_1 < x < R_2$, yaitu dengan cara yang sama untuk menentukan solusi pada ruas saluran I di daerah $x < 0$. Persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.5 Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Rata di $R_1 < x < R_2$

Kemudian persamaan (3.1) beserta kondisi-kondisi batasnya yaitu pada persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4) diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel dengan cara yang sama pada subsubbab sebelumnya untuk mencari fungsi potensial pada ruas III. Karena dasar saluran pada ruas III dianggap rata, perubahan ketinggian permukaan gelombang dapat dimisalkan sebagai

$$\eta(x, t) = Ee^{-i(kx-\omega t)} + Fe^{-i(-kx-\omega t)}$$

Sehingga diperoleh solusi pada ruas III

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \quad (3.49)$$

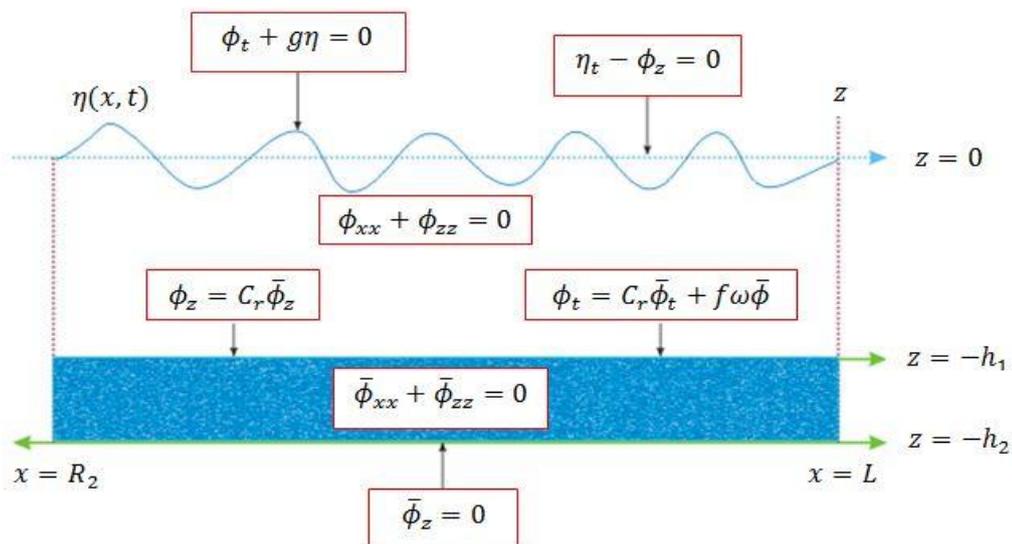
Selanjutnya substitusi $\eta(x, t) = Ee^{-i(kx-\omega t)} + Fe^{-i(-kx-\omega t)}$ ke persamaan (3.49), diperoleh solusi

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} (Ee^{-i(kx-\omega t)} + Fe^{-i(-kx-\omega t)}) \left[\cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \quad (3.50)$$

Persamaan (3.50) merupakan solusi dari persamaan Laplace pada media fluida dengan dasar saluran yang dianggap rata dan persamaan tersebut digunakan pada ruas III dengan perubahan ketinggian gelombang permukaan adalah $\eta(x, t) = Ee^{-i(kx-\omega t)} + Fe^{-i(-kx-\omega t)}$. Kemudian untuk mengetahui persamaan (3.50) merupakan solusi yang valid dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (3.2) dan (3.3) pada $z = 0$.

3.1.4 Solusi pada Ruas IV

Pada subsubbab ini ditentukan solusi persamaan Laplace pada ruas saluran IV di daerah $R_2 \leq x \leq L$, yaitu dengan cara yang sama untuk menentukan solusi pada ruas saluran II di daerah $0 \leq x \leq R_1$. Persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya dapat dilihat pada Gambar 3.7 berikut



Gambar 3.6 Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Berpori di $R_2 \leq x \leq L$

Selanjutnya persamaan (3.30) dan (3.31) beserta kondisi-kondisi batas

tersebut diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel. Perubahan ketinggian permukaan gelombang dengan dasar saluran berpori dapat dimisalkan sebagai berikut

$$\eta(x, t) = Ge^{-i(kx-\omega t)} + He^{-i(-kx-\omega t)}$$

Kemudian dengan cara yang sama dengan subsubbab sebelumnya untuk memperoleh solusi pada ruas IV, maka diperoleh solusi untuk ruas IV berikut

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right) \left(\frac{\cosh(kh_2 + kz)}{C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \right) \right] \quad (3.51)$$

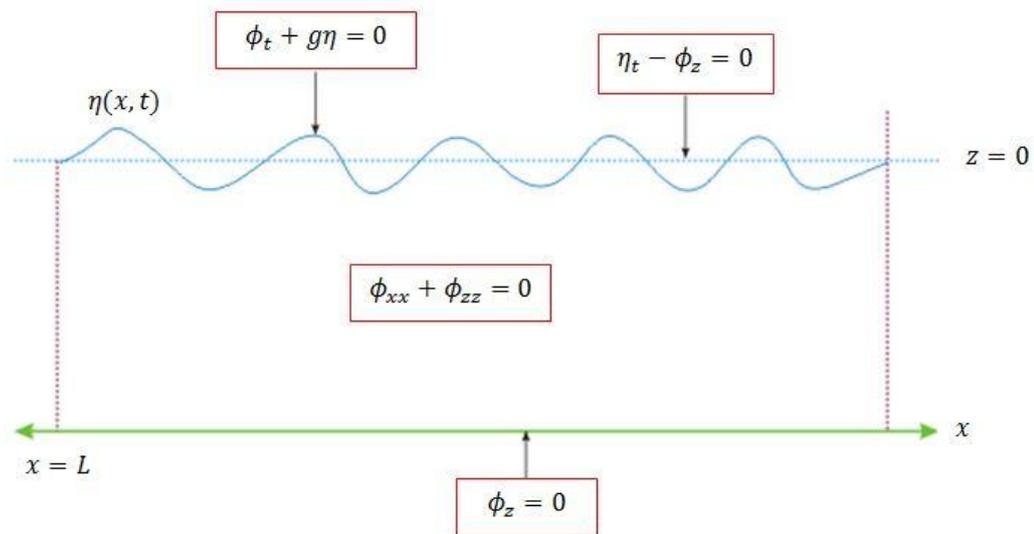
Substitusi $\eta(x, t) = Ge^{-i(kx-\omega t)} + He^{-i(-kx-\omega t)}$ ke persamaan (3.51), diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} & \left(Ge^{-i(kx-\omega t)} \right. \\ & \left. + He^{-i(-kx-\omega t)} \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sinh(kh_1) \right) \left(\frac{\cosh(kh_2 + kz)}{C_r \sinh(kh_2 - kh_1)} \right) \right] \quad (3.52) \end{aligned}$$

Persamaan (3.52) merupakan solusi dari persamaan Laplace pada media berpori. Persamaan tersebut digunakan pada ruas IV yang dasar salurannya berupa balok berpori dan perubahan ketinggian permukaan gelombangnya dapat dimisalkan sebagai $\eta(x, t) = Ge^{-i(kx-\omega t)} + He^{-i(-kx-\omega t)}$.

3.1.5 Solusi pada Ruas V

Pada subsubbab ini ditentukan solusi persamaan Laplace pada ruas saluran V di daerah $x > L$, yaitu dengan cara yang sama untuk menentukan solusi pada ruas saluran I di daerah $x < 0$ dan ruas III di daerah $R_1 < x < R_2$. Persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.7 Perambatan Gelombang Melalui Dasar Saluran Rata di $x > L$

Kemudian persamaan (3.1) beserta kondisi-kondisi batasnya yaitu pada persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4) di atas diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel dengan cara yang sama pada subsubbab sebelumnya untuk mencari fungsi potensial pada ruas III. Karena dasar saluran pada ruas III dianggap rata, perubahan ketinggian permukaan gelombang dapat dimisalkan sebagai

$$\eta(x, t) = Ie^{-i(kx - \omega t)}$$

Sehingga diperoleh solusi pada ruas V

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[\cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \quad (3.53)$$

Kemudian substitusi $\eta(x, t) = Ie^{-i(kx - \omega t)}$ ke persamaan (3.53), diperoleh solusi

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} (Ie^{-i(kx - \omega t)}) \left[\cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \quad (3.54)$$

Persamaan (3.54) merupakan solusi dari persamaan Laplace pada media fluida dengan dasar saluran yang dianggap rata dan persamaan tersebut digunakan pada

ruas V dengan perubahan ketinggian gelombang permukaan adalah $\eta(x, t) = Ie^{-i(kx - \omega t)}$. Kemudian untuk mengetahui persamaan (3.54) merupakan solusi yang valid dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (3.2) dan (3.3) pada $z = 0$.

3.1.6 Relasi Dispersi untuk Ruas I, III, dan V

Kemudian dicari persamaan dispersi gelombang dari kondisi batas (3.4), diperoleh

$$\phi_z = 0$$

Dengan menulis kembali persamaan (3.5) diperoleh

$$S(x, t)F'(z) = 0$$

Kemudian dari persamaan (3.14) dan dengan turunan dari persamaan (3.27) diperoleh persamaan

$$\frac{ig}{\omega} \eta(x, t) \left[k \sinh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} k \cosh(kz) \right] = 0$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\frac{ig}{\omega} \eta(x, t)$ dan k , maka

$$\sinh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \cosh(kz) = 0$$

Kedua ruas pada persamaan di atas dikurangi dengan $\sinh(kz)$, sehingga

$$\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kz) = -\sinh(kz)$$

Kemudian dengan membuat ω^2 di salah satu ruas, maka

$$\omega^2 = -(gk) \frac{\sinh(kz)}{\cosh(kz)}$$

$$\omega^2 = -(gk) \tanh(kz)$$

Sehingga pada $z = -h$ diperoleh

$$\begin{aligned}\omega^2 &= -(gk) \tanh(-kh) \\ &= (gk) \tanh(kh)\end{aligned}\quad (3.55)$$

Persamaan (3.55) dikenal dengan persamaan dispersi gelombang, dengan ω adalah frekuensi gelombang yang selalu bernilai positif dan k adalah bilangan gelombang. Persamaan dispersi ini menyatakan hubungan antara frekuensi gelombang (ω) dan bilangan gelombang (k). Persamaan (3.55) ini digunakan untuk mengamati perambatan gelombang harmonik dengan dasar saluran yang dianggap rata pada ruas I, III, dan V. Karena ruas I, III, dan V memiliki karakteristik dan struktur kedalaman yang sama, maka dengan cara yang sama diperoleh persamaan dispersi yang sama pula.

3.1.7 Relasi Dispersi untuk Ruas II dan IV

Selanjutnya untuk mencari hubungan dispersi antara frekuensi gelombang (ω) dan bilangan gelombang (k) yaitu dengan menggunakan kondisi batas (3.35). Kemudian dengan menggunakan pemisalan (3.37) dan (3.38) pada kondisi batas (3.40), diperoleh

$$\begin{aligned}\phi_t &= C_r \bar{\phi}_t + f\omega \bar{\phi}, \text{ pada } z = -h_1 \\ -g\eta(x, t)F(-h_1) &= -C_r g\eta(x, t)G(-h_1) + f\omega \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)G(-h_1)\end{aligned}$$

atau persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$F(-h_1) = C_r G(-h_1) - ifG(-h_1)$$

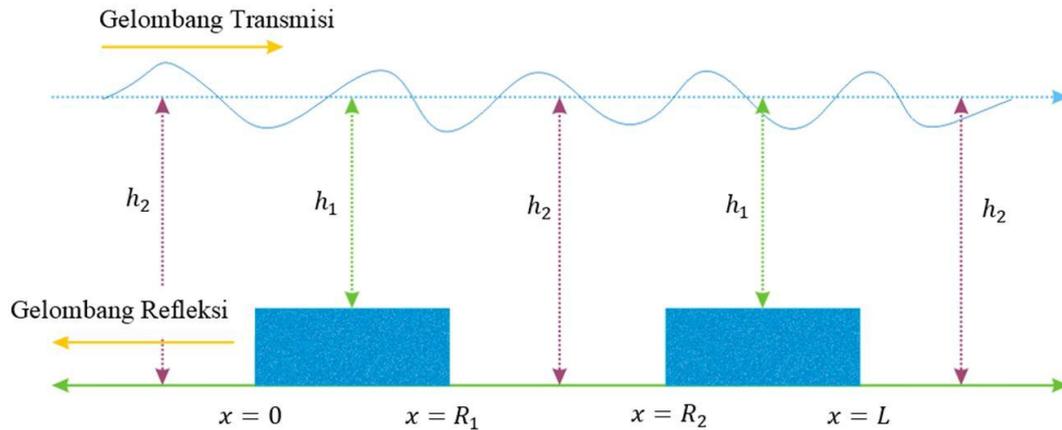
Kemudian substitusi $F(-h_1)$ dan $G(-h_1)$ ke persamaan di atas dengan membuat ω^2 berada di salah satu ruas, sehingga diperoleh hubungan dispersi dalam bentuk berikut

$$\omega^2 = gk \frac{\left(C_r \left(\frac{\cosh(kh_2 - kh_1)}{C_r \sinh(kh_1 - kh_2)} \right) + if \left(\frac{\cosh(kh_2 - kh_1)}{C_r \sinh(kh_1 - kh_2)} \right) \right) - \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1)}{\sinh(kh_1) - \cosh(kh_1)} \quad (3.56)$$

Persamaan (3.56) dikenal dengan persamaan dispersi gelombang, dengan ω adalah frekuensi gelombang yang selalu bernilai positif dan k adalah bilangan gelombang. Pada persamaan (3.56) dapat dilihat bahwa ketebalan balok berpori $h_2 - h_1$, gaya hambat aliran (f), dan porositas (C_r) mempengaruhi hubungan dispersi antara frekuensi gelombang (ω) dan bilangan gelombang (k). Berdasarkan hubungan tersebut dapat digunakan untuk mengamati perubahan gelombang harmonik yang merambat pada permukaan dengan dasar saluran berupa balok berpori pada ruas II dan IV, karena ruas II dan IV memiliki karakteristik dan kedalaman saluran yang sama.

3.2 Model Gelombang Harmonik yang Melalui Dua Balok Berpori

Model gelombang harmonik yang melalui dua balok berpori dapat dibagi menjadi lima daerah berdasarkan struktur dasar saluran. Daerah I pada domain $x < 0$, daerah II pada domain $0 \leq x \leq R_1$, daerah III pada domain $R_1 < x < R_2$, daerah IV pada domain $R_2 \leq x \leq L$, dan daerah V pada domain $x > L$. Pembagian daerah-daerah tersebut dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.8 Perambatan Gelombang Melalui Dua Balok Berpori

Berdasarkan Gambar 3.8 di atas, dapat dilihat bahwa gelombang datang yang merambat dari kiri ke kanan merupakan gelombang harmonik

$$\eta(x, t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$$

Kemudian ketika gelombang melewati dasar saluran yang berbeda kedalamannya, akan terjadi proses penyebaran gelombang bolak-balik berupa gelombang yang diteruskan (gelombang transmisi) dan gelombang yang dipantulkan (gelombang refleksi). Proses penyebaran gelombang yang berupa gelombang transmisi dan gelombang refleksi secara berturut-turut dapat dituliskan dalam persamaan $\eta(x, t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$ dan $\eta(x, t) = Be^{-i(-kx-\omega t)}$.

Sehingga keseluruhan gelombang yang merambat dapat ditulis dalam persamaan berikut

$$\eta(x, t) = \begin{cases} Ae^{-i(k_2x-\omega t)} + Be^{-i(-k_2x-\omega t)}; & \text{untuk } x < 0 \\ Ce^{-i(k_1x-\omega t)} + De^{-i(-k_1x-\omega t)}; & \text{untuk } 0 \leq x \leq R_1 \\ Ee^{-i(k_2x-\omega t)} + Fe^{-i(-k_2x-\omega t)}; & \text{untuk } R_1 < x < R_2 \\ Ge^{-i(k_1x-\omega t)} + He^{-i(-k_1x-\omega t)}; & \text{untuk } R_2 \leq x \leq L \\ Ie^{-i(k_2x-\omega t)}; & \text{untuk } x > L \end{cases} \quad (3.57)$$

dengan A, C, E, G , dan I adalah amplitudo gelombang transmisi, sedangkan B, D, F , dan H adalah amplitudo gelombang refleksi, k_1 dan k_2 adalah bilangan

gelombang yang berkaitan dengan kedalaman saluran, yaitu h_1 , dan h_2 . Sedangkan ω menyatakan frekuensi gelombang.

Selanjutnya ditentukan nilai amplitudo B, C, D, E, F, G, H , dan I . Untuk nilai amplitudo A diberikan sebagai amplitudo awal, dengan pertimbangan gelombang harmonik harus kontinu karena dalam kenyataannya fluida terus mengalir, terutama pada domain $x = 0, x = R_1, x = R_2$, dan $x = L$. Sehingga dapat dituliskan dalam hubungan berikut

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta(x, t) \quad (3.58)$$

$$\lim_{x \rightarrow R_1^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow R_1^+} \eta(x, t) \quad (3.59)$$

$$\lim_{x \rightarrow R_2^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow R_2^+} \eta(x, t) \quad (3.60)$$

$$\lim_{x \rightarrow L^-} \eta(x, t) = \lim_{x \rightarrow L^+} \eta(x, t) \quad (3.61)$$

Kemudian untuk mencari kekontinuan permukaan fluida pada $x = 0$, maka dapat menggunakan persamaan (3.58). Substitusi fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati nol dari arah kiri pada daerah I ($x < 0$) dan fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati nol dari arah kanan pada daerah II ($0 \leq x \leq R_1$), sehingga diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (Ae^{-i(k_2x - \omega t)} + Be^{-i(-k_2x - \omega t)}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (Ce^{-i(k_1x - \omega t)} + De^{-i(-k_1x - \omega t)})$$

$$Ae^{-i(k_2(0) - \omega t)} + Be^{-i(-k_2(0) - \omega t)} = Ce^{-i(k_1(0) - \omega t)} + De^{-i(-k_1(0) - \omega t)}$$

$$Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = Ce^{i\omega t} + De^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t}(A + B) = e^{i\omega t}(C + D)$$

$$A + B = C + D \quad (3.62)$$

Selanjutnya untuk mencari kekontinuan permukaan fluida pada $x = R_1$, maka dapat menggunakan persamaan (3.59). Kemudian substitusi fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati R_1 dari arah kiri pada daerah II ($0 \leq x \leq R_1$) dan fungsi $\eta(x, t)$

yang mendekati R_1 dari arah kanan pada daerah III ($R_1 < x < R_2$), sehingga diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow R_1^-} (C e^{-i(k_1 x - \omega t)} + D e^{-i(-k_1 x - \omega t)}) = \lim_{x \rightarrow R_1^+} (E e^{-i(k_2 x - \omega t)} + F e^{-i(-k_2 x - \omega t)})$$

$$C e^{-i(k_1 R_1 - \omega t)} + D e^{-i(-k_1 R_1 - \omega t)} = E e^{-i(k_2 R_1 - \omega t)} + F e^{-i(-k_2 R_1 - \omega t)}$$

$$e^{i\omega t} (C e^{-ik_1 R_1} + D e^{ik_1 R_1}) = e^{i\omega t} (E e^{-ik_2 R_1} + F e^{ik_2 R_1})$$

$$C e^{-ik_1 R_1} + D e^{ik_1 R_1} = E e^{-ik_2 R_1} + F e^{ik_2 R_1} \quad (3.63)$$

Kemudian mencari kekontinuan permukaan fluida pada $x = R_2$, maka dapat menggunakan persamaan (3.52). Kemudian substitusi fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati R_2 dari arah kiri pada daerah III ($R_1 < x < R_2$) dan fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati R_2 dari arah kanan pada daerah IV ($R_2 \leq x \leq L$), sehingga diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow R_2^-} (E e^{-i(k_2 x - \omega t)} + F e^{-i(-k_2 x - \omega t)}) = \lim_{x \rightarrow R_2^+} (G e^{-i(k_1 x - \omega t)} + H e^{-i(-k_1 x - \omega t)})$$

$$E e^{-i(k_2 R_2 - \omega t)} + F e^{-i(-k_2 R_2 - \omega t)} = G e^{-i(k_1 R_2 - \omega t)} + H e^{-i(-k_1 R_2 - \omega t)}$$

$$e^{i\omega t} (E e^{-ik_2 R_2} + F e^{ik_2 R_2}) = e^{i\omega t} (G e^{-ik_1 R_2} + H e^{ik_1 R_2})$$

$$E e^{-ik_2 R_2} + F e^{ik_2 R_2} = G e^{-ik_1 R_2} + H e^{ik_1 R_2} \quad (3.64)$$

Selanjutnya untuk mencari kekontinuan permukaan fluida pada $x = L$, maka dapat menggunakan persamaan (3.61). Kemudian substitusi fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati L dari arah kiri pada daerah IV ($R_2 < x < L$) dan fungsi $\eta(x, t)$ yang mendekati L dari arah kanan pada daerah V ($x > L$), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow L^-} (Ge^{-i(k_1x-\omega t)} + He^{-i(-k_1x-\omega t)}) &= \lim_{x \rightarrow L^+} (Ie^{-i(k_2x-\omega t)}) \\
Ge^{-i(k_1L-\omega t)} + He^{-i(-k_1L-\omega t)} &= Ie^{-i(k_2L-\omega t)} \\
e^{i\omega t}(Ge^{-ik_1L} + He^{ik_1L}) &= e^{i\omega t}(Ie^{-ik_2L}) \\
Ge^{-ik_1L} + He^{ik_1L} &= Ie^{-ik_2L} \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Untuk kondisi selanjutnya yaitu kenyataan bahwa fluks massa (Q) bersifat kontinu. Fluks massa (Q) adalah perkalian antara kecepatan partikel dengan kedalaman saluran. Sehingga fluks massa (Q) yang melintasi daerah pertama ($x < 0$) dengan kecepatan untuk kedalaman h_2 sampai dengan fluks massa (Q) yang melintasi daerah kelima ($x > L$) dengan kecepatan untuk kedalaman h_5 sebagai berikut

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q = \lim_{x \rightarrow 0^+} Q \tag{3.66}$$

$$\lim_{x \rightarrow R_1^-} Q = \lim_{x \rightarrow R_1^+} Q \tag{3.67}$$

$$\lim_{x \rightarrow R_2^-} Q = \lim_{x \rightarrow R_2^+} Q \tag{3.68}$$

$$\lim_{x \rightarrow L^-} Q = \lim_{x \rightarrow L^+} Q \tag{3.69}$$

dengan fluks massa adalah $Q = \int_{-h}^0 \phi_x dz$.

Selanjutnya sebelum melakukan analisis terhadap kekontinuan fluks massa, akan ditentukan fungsi potensial untuk masing-masing ruas. Fungsi potensial untuk daerah I ($x < 0$) adalah

$$\begin{aligned}
\phi(x, z, t) &= S(x, t)F(z) \\
&= \frac{ig}{\omega} \eta(x, t)F(z) \\
&= \frac{ig}{\omega} [Ae^{-i(k_2x-\omega t)} + Be^{-i(-k_2x-\omega t)}] \left[\cosh(k_2z) + \frac{\omega^2}{gk_2} \sinh(k_2z) \right] \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Kemudian fungsi potensial untuk daerah II ($0 \leq x \leq R_1$) adalah

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} [Ce^{-i(k_1x-\omega t)} + De^{-i(-k_1x-\omega t)}] \left[\cosh(k_1z) + \frac{\omega^2}{gk_1} \sinh(k_1z) \right] \quad (3.71)$$

dan

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} [Ce^{-i(k_1x-\omega t)} + De^{-i(-k_1x-\omega t)}] \left[\left(\frac{\omega^2}{gk_1} \cosh(k_1h_1) - \sinh(k_1h_1) \right) \left(\frac{\cosh(k_1h_2+k_1z)}{C_r \sinh(k_1h_1-k_1h_2)} \right) \right] \quad (3.72)$$

Untuk daerah III ($R_1 < x < R_2$), fungsi potensialnya sama dengan fungsi potensial pada daerah I, yaitu

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} [Ee^{-i(k_2x-\omega t)} + Fe^{-i(-k_2x-\omega t)}] \left[\cosh(k_2z) + \frac{\omega^2}{gk_2} \sinh(k_2z) \right] \quad (3.73)$$

Fungsi potensial pada daerah IV ($R_2 \leq x \leq L$) sama dengan fungsi potensial pada daerah II, yaitu

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} [Ge^{-i(k_1x-\omega t)} + He^{-i(-k_1x-\omega t)}] \left[\cosh(k_1z) + \frac{\omega^2}{gk_1} \sinh(k_1z) \right] \quad (3.74)$$

dan

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} [Ge^{-i(k_1x-\omega t)} + He^{-i(-k_1x-\omega t)}] \left[\left(\frac{\omega^2}{gk_1} \cosh(k_1h_1) - \sinh(k_1h_1) \right) \left(\frac{\cosh(k_1h_2+k_1z)}{C_r \sinh(k_1h_1-k_1h_2)} \right) \right] \quad (3.75)$$

Sedangkan fungsi potensial pada daerah V ($x > L$) sama dengan fungsi potensial pada daerah I dan daerah III, yaitu

$$\phi(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} [Ie^{-i(k_2x-\omega t)}] \left[\cosh(k_2z) + \frac{\omega^2}{gk_2} \sinh(k_2z) \right] \quad (3.76)$$

Selanjutnya dengan menurunkan persamaan (3.28) terhadap x , maka diperoleh fungsi potensial untuk media fluida

$$\phi_x = \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \left[\cosh(kz) + \frac{\omega^2}{gk} \sinh(kz) \right] \quad (3.77)$$

dan dengan menurunkan persamaan (3.52) terhadap x , diperoleh fungsi potensial untuk media berpori adalah

$$\bar{\phi}(x, z, t) = \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \left[\left(\frac{\omega^2}{gk} \cosh(kh_1) - \sinh(kh_1) \right) \left(\frac{\cosh(kh_2 + kz)}{C_r \sinh(kh_1 - kh_2)} \right) \right] \quad (3.78)$$

Dengan menggunakan definisi fluks massa pada daerah I ($x < 0$) diperoleh fluks massa sebagai berikut

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{-h_2}^0 \phi_x dz \\ &= \int_{-h_2}^0 \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \left[\cosh(k_2 z) + \frac{\omega^2}{gk_2} \sinh(k_2 z) \right] dz \\ &= \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \int_{-h_2}^0 \left[\cosh(k_2 z) + \frac{\omega^2}{gk_2} \sinh(k_2 z) \right] dz \\ &= \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \left(\frac{1}{k_2} \sinh(k_2 z) + \frac{\omega^2}{gk_2} \frac{1}{k_2} \cosh(k_2 z) \right) \Big|_{-h_2}^0 \\ &= \frac{ig}{\omega} \eta_x(x, t) \left\{ \left[\frac{\omega^2}{gk_2^2} \right] + \left[\frac{1}{k_2} \sinh(k_2 h_2) + \frac{\omega^2}{gk_2} \frac{1}{k_2} \cosh(k_2 h_2) \right] \right\} \\ &= \frac{ig}{\omega k_2} \eta_x(x, t) \left\{ \left[\frac{\omega^2}{gk_2} \right] + \left[\sinh(k_2 h_2) - \frac{\omega^2}{gk_2} \cosh(k_2 h_2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Kemudian substitusi persamaan dispersi (3.34) ke persamaan (3.79) di atas, sehingga

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{ig}{\omega k_2} \eta_x(x, t) \left\{ \left[\frac{\omega^2}{gk_2} \right] + \left[\frac{\omega^2}{gk_2} \cosh(k_2 h_2) - \frac{\omega^2}{gk_2} \cosh(k_2 h_2) \right] \right\} \\ &= \frac{ig}{\omega k_2} \eta_x(x, t) \left[\frac{\omega^2}{gk_2} \right] \\ &= \frac{i\omega}{k_2^2} (ik_2 B e^{-i(-k_2 x - \omega t)} - ik_2 A e^{-i(k_2 x - \omega t)}) \\ &= \frac{\omega}{k_2} (A e^{-ik_2 x} - B e^{ik_2 x}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Selanjutnya untuk fluks massa pada daerah II ($0 < x < R_1$) dapat didefinisikan sebagai $Q_2 = Q_{2a} + Q_{2b}$, dimana $Q_{2a} = \int_{-h_1}^0 \phi_x dz$ dan $Q_{2b} = \int_{-h_2}^{-h_1} \bar{\phi}_x dz$. Dengan menggunakan fungsi potensial pada persamaan (3.77), Q_{2a} dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama untuk memperoleh Q_1 , sehingga dapat diperoleh

$$Q_{2a} = \frac{\omega}{k_1} (C e^{-ik_1 x} - D e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \quad (3.81)$$

Kemudian dengan menggunakan fungsi potensial pada persamaan (3.78), diperoleh Q_{2b} adalah

$$Q_{2b} = \left(\frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right) (C e^{-ik_1 x} - D e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \quad (3.82)$$

Sehingga dari persamaan (3.81) dan persamaan (3.82) diperoleh Q_2 , yaitu

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_{2a} + Q_{2b} \\ &= \frac{\omega}{k_1} (C e^{-ik_1 x} - D e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} + \left(\frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right) (C e^{-ik_1 x} - D e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \\ &= \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (C e^{-ik_1 x} - D e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Sedangkan untuk fluks massa pada daerah III ($R_1 < x < R_2$) adalah berikut

$$Q_3 = \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2 x} - F e^{ik_2 x}) e^{i\omega t} \quad (3.84)$$

Fluks massa pada daerah IV ($R_2 \leq x \leq L$) adalah berikut

$$Q_4 = \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1 x} - H e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \quad (3.85)$$

dan fluks massa pada daerah V ($x > L$) adalah berikut

$$Q_5 = \frac{\omega}{k_2} (I e^{-ik_2 x}) e^{i\omega t} \quad (3.86)$$

Sehingga untuk mencari kekontinuan fluks massa di $x < 0$, yaitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q = \lim_{x \rightarrow 0^+} Q$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q_1 = \lim_{x \rightarrow 0} Q_2$$

dengan Q_1 adalah fluks massa yang mendekati nol dari arah kiri dan Q_2 adalah fluks massa yang mendekati nol dari arah kanan, maka kekontinuan fluks massa menjadi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\omega}{k_2} (Ae^{-ik_2x} - Be^{ik_2x}) e^{i\omega t} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (Ce^{-ik_1x} - De^{ik_1x}) e^{i\omega t} \right)$$

$$\frac{\omega}{k_2} (Ae^{-ik_2(0)} - Be^{ik_2(0)}) e^{i\omega t} =$$

$$\left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (Ce^{-ik_1(0)} - De^{ik_1(0)}) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\omega}{k_2} (A - B) = (C - D) \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] \quad (3.87)$$

Kemudian untuk mencari kekontinuan fluks massa di $(0 \leq x \leq R_1)$ dan $(R_1 < x < R_2)$, yaitu

$$\lim_{x \rightarrow R_1^-} Q = \lim_{x \rightarrow R_1^+} Q$$

$$\lim_{x \rightarrow R_1} Q_2 = \lim_{x \rightarrow R_1} Q_3$$

dengan Q_2 adalah fluks massa yang mendekati R_1 dari arah kiri dan Q_3 adalah fluks massa yang mendekati R_1 dari arah kanan, maka kekontinuan fluks massa menjadi

$$\lim_{x \rightarrow R_1} \left(\left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (Ce^{-ik_1x} - De^{ik_1x}) e^{i\omega t} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow R_1} \left(\frac{\omega}{k_2} (Ee^{-ik_2x} - Fe^{ik_2x}) e^{i\omega t} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (C e^{-ik_1(R_1)} - D e^{ik_1(R_1)}) e^{i\omega t} = \\
& \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2(R_1)} - F e^{ik_2(R_1)}) e^{i\omega t} \\
& \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (C e^{-ik_1(R_1)} - D e^{ik_1(R_1)}) = \\
& \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2(R_1)} - F e^{ik_2(R_1)}) \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama untuk memperoleh fluks massa pada persamaan sebelumnya, sehingga diperoleh kekontinuan fluks massa di daerah $(R_1 < x < R_2)$ dan $(R_2 \leq x \leq L)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow R_2^-} Q &= \lim_{x \rightarrow R_2^+} Q \\
\lim_{x \rightarrow R_2} Q_3 &= \lim_{x \rightarrow R_2} Q_4
\end{aligned}$$

dengan Q_3 adalah fluks massa yang mendekati R_2 dari arah kiri dan Q_4 adalah fluks massa yang mendekati R_2 dari arah kanan, maka kekontinuan fluks massa adalah

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow R_2} \left(\frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2 x} - F e^{ik_2 x}) e^{i\omega t} \right) &= \lim_{x \rightarrow R_2} \left(\left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1 x} - H e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \right) \\
&= \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2(R_2)} - F e^{ik_2(R_2)}) e^{i\omega t} = \\
& \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1(R_2)} - H e^{ik_1(R_2)}) e^{i\omega t} \\
&= \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2(R_2)} - F e^{ik_2(R_2)}) = \\
& \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1(R_2)} - H e^{ik_1(R_2)}) \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Untuk kekontinuan fluks massa di $x > L$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow L^-} Q &= \lim_{x \rightarrow L^+} Q \\
\lim_{x \rightarrow L} Q_4 &= \lim_{x \rightarrow L} Q_5
\end{aligned}$$

dengan Q_4 adalah fluks massa yang mendekati L dari arah kiri dan Q_5 adalah fluks massa yang mendekati L dari arah kanan, maka kekontinuan fluks massa adalah

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow L} \left(\left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{c_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega c_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1 x} - H e^{ik_1 x}) e^{i\omega t} \right) = \\ & \lim_{x \rightarrow L} \left(\frac{\omega}{k_2} (I e^{-ik_2 x}) e^{i\omega t} \right) \\ & \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{c_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega c_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1(L)} - H e^{ik_1(L)}) e^{i\omega t} = \\ & \frac{\omega}{k_2} (I e^{-ik_2(L)}) e^{i\omega t} \\ & \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{c_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega c_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1(L)} - H e^{ik_1(L)}) = \\ & \frac{\omega}{k_2} (I e^{-ik_2(L)}) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Amplitudo gelombang transmisi dan refleksi B, C, D, E, F, G, H , dan I dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan linear dari kekontinuan permukaan fluida dan balok berpori pada persamaan (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), serta kekontinuan fluks massa yaitu pada persamaan (3.87), (3.88), (3.89), (3.90). Selanjutnya persamaan-persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} & m_{38} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} & m_{48} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & m_{67} & m_{68} \\ m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} & m_{78} \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & m_{84} & m_{85} & m_{86} & m_{87} & m_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{bmatrix}$$

Dengan memisalkan amplitudo A adalah amplitudo awal yaitu dengan diberikan nilai 1, dari persamaan (3.62) berikut

$$A + B = C + D$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H , dan I sebagai berikut

$$m_{11} = 1, m_{12} = -1, m_{13} = -1, m_{14} = 0, m_{15} = 0, m_{16} = 0, m_{17} = 0, m_{18} = 0$$

Dari persamaan (3.63) berikut

$$C e^{-ik_1 R_1} + D e^{ik_1 R_1} = E e^{-ik_2 R_1} + F e^{ik_2 R_1}$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$m_{21} = 0, m_{22} = e^{-ik_1 R_1}, m_{23} = e^{ik_1 R_1}, m_{24} = -e^{-ik_2 R_1}, m_{25} = -e^{ik_2 R_1}, m_{26} = 0, m_{27} = 0, m_{28} = 0$$

Dari persamaan (3.64) berikut

$$E e^{-ik_2 R_2} + F e^{ik_2 R_2} = G e^{-ik_1 R_2} + H e^{ik_1 R_2}$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$m_{31} = 0, m_{32} = 0, m_{33} = 0, m_{34} = e^{-ik_2 R_2}, m_{35} = e^{ik_2 R_2}, m_{36} = -e^{-ik_1 R_2}, m_{37} = -e^{ik_1 R_2}, m_{38} = 0$$

Dari persamaan (3.65) berikut

$$G e^{-ik_1 L} + H e^{ik_1 L} = I e^{-ik_2 L}$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$m_{41} = 0, m_{42} = 0, m_{43} = 0, m_{44} = 0, m_{45} = 0, m_{46} = e^{-ik_1 L}, m_{47} = e^{ik_1 L}, m_{48} = -e^{ik_2 L}$$

Dari persamaan (3.87) berikut

$$\frac{\omega}{k_2} (A - B) = (C - D) \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right]$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$m_{51} = \frac{\omega}{k_2}, m_{52} = \frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1), m_{53} = - \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{54} = 0, m_{55} = 0, m_{56} = 0, m_{57} = 0, m_{58} = 0$$

Dari persamaan (3.88) berikut

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (C e^{-ik_1(R_1)} - D e^{ik_1(R_1)}) \\ & = \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2(R_1)} - F e^{ik_2(R_1)}) \end{aligned}$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$\begin{aligned} m_{61} = 0, m_{62} = e^{-ik_1 R_1} \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{63} = \\ -e^{ik_1 R_1} \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{64} = -\frac{\omega}{k_2} e^{-ik_2 R_1}, m_{65} = \\ \frac{\omega}{k_2} e^{ik_2 R_1}, m_{66} = 0, m_{67} = 0, m_{68} = 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.89) berikut

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{k_2} (E e^{-ik_2(R_2)} - F e^{ik_2(R_2)}) = \\ & \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1(R_2)} - H e^{ik_1(R_2)}) \end{aligned}$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$\begin{aligned} m_{71} = 0, m_{72} = 0, m_{73} = 0, m_{74} = \frac{\omega}{k_2} e^{-ik_2 R_2}, m_{75} = -\frac{\omega}{k_2} e^{ik_2 R_2}, m_{76} = \\ -e^{-ik_1 R_2} \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{77} = e^{ik_1 R_2} \left[\frac{\omega}{k_1} + \right. \\ \left. \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{78} = 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.90) berikut

$$\left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right] (G e^{-ik_1(L)} - H e^{ik_1(L)}) = \frac{\omega}{k_2} (I e^{-ik_2(L)})$$

diperoleh konstanta untuk B, C, D, E, F, G, H, dan I sebagai berikut

$$\begin{aligned} m_{81} = 0, m_{82} = 0, m_{83} = 0, m_{84} = 0, m_{85} = 0, m_{86} = e^{-ik_1 L} \left[\frac{\omega}{k_1} + \right. \\ \left. \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{87} = -e^{ik_1 L} \left[\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{C_r k_1} \cosh(k_1 h_1) - \right. \\ \left. \frac{g}{\omega C_r} \sinh(k_1 h_1) \right], m_{88} = 0 \end{aligned}$$

dan

$$S_1 = -A, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0, S_5 = \frac{\omega}{k_2}A, S_6 = 0, S_7 = 0, S_8 = 0$$

Selanjutnya jika dimisalkan

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} & m_{38} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} & m_{48} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & m_{67} & m_{68} \\ m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} & m_{78} \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & m_{84} & m_{85} & m_{86} & m_{87} & m_{88} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{bmatrix}, \text{ dan } S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{bmatrix}$$

maka untuk memperoleh nilai X , dapat menggunakan cara berikut

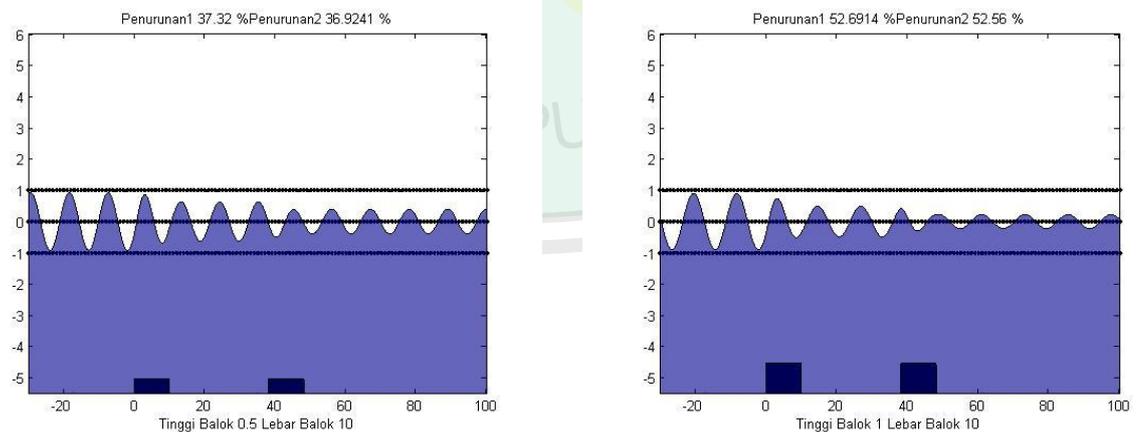
$$X = M^{-1}S$$

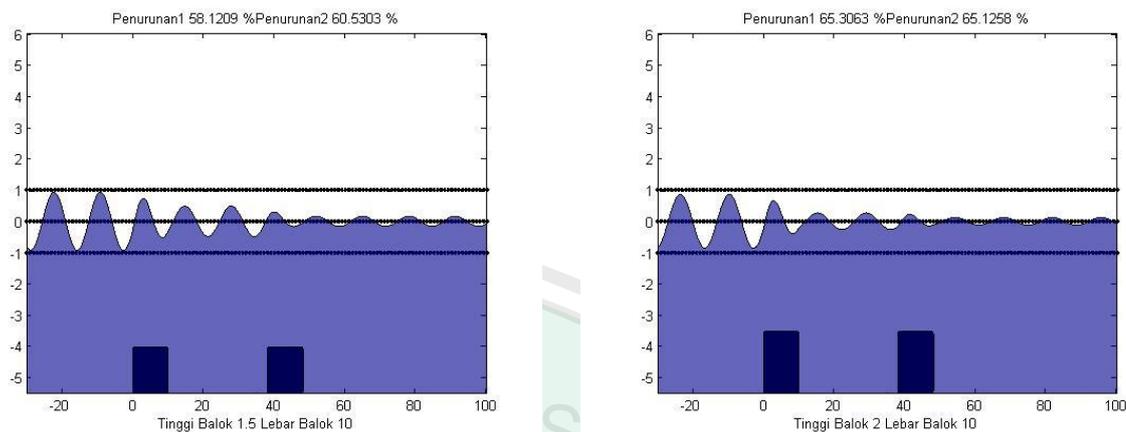
Untuk mempermudah mendapatkan solusi dari masalah evolusi gelombang yang melalui dua balok berpori yaitu berupa amplitudo gelombang dapat menggunakan bantuan program, karena jika menggunakan cara manual dikhawatirkan terjadi kesalahan dalam perhitungannya dan waktu yang dibutuhkan cukup lama. Kemudian jika diberikan nilai amplitudo gelombang transmisi $A = 0.5$, pada $t = 5$, $x = -30$ sampai 100 , dan lebar balok $L = 40 \text{ cm}$. Kemudian diberikan nilai frekuensi gelombang $\omega = 2$, gravitasi $g = 10 \text{ m/s}^2$, porositas pada balok berpori $C_r = 0.5$, koefisien gesek $f = 1$, kedalaman pada daerah I, III, dan V (h_2) = 3.5 m , serta kedalaman pada daerah II dan IV (h_1) = 1.0 m . Dari persamaan dispersi untuk dasar saluran tak berundak (3.29) dan persamaan dispersi untuk dasar saluran berundak (3.48) diperoleh nilai $k_1 = 0.5789 - 0.1187i$ dan $k_2 = 0.4389$. Setelah mensubstitusi parameter-parameter tersebut diperoleh nilai amplitudo gelombang refleksi $B = -0.1500 - 0.2879i$, nilai amplitudo gelombang transmisi $C = 0.8553 - 0.2840i$, nilai amplitudo gelombang refleksi $D = -0.0053 - 0.0038i$, nilai amplitudo

gelombang transmisi $E = -0.1005 - 0.0426i$, nilai amplitudo gelombang refleksi $F = 0.0505 - 0.0120i$, nilai amplitudo gelombang transmisi $G = -6.7555 + 7.2669i$, nilai amplitudo gelombang refleksi $H = (1.0998e - 04) + (2.0868e - 04i)$, dan nilai amplitudo gelombang transmisi $I = -0.1008 - 0.0102i$.

3.3 Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Tinggi Balok Berpori

Pada subbab ini dimodifikasi tinggi balok berpori pemecah gelombang untuk mengetahui seberapa besar pengaruhnya terhadap penurunan amplitudo gelombang setelah melewati dua buah balok berpori tersebut. Sehingga diberikan nilai amplitudo gelombang transmisi $A = 1 \text{ m}$, frekuensi gelombang $\omega = 2$, porositas $C_r = 0.5$, gravitasi $g = 10 \text{ m/s}^2$, koefisien gesek $f = 1$, sehingga hasil simulasinya dapat dilihat pada Gambar 3.9 berikut





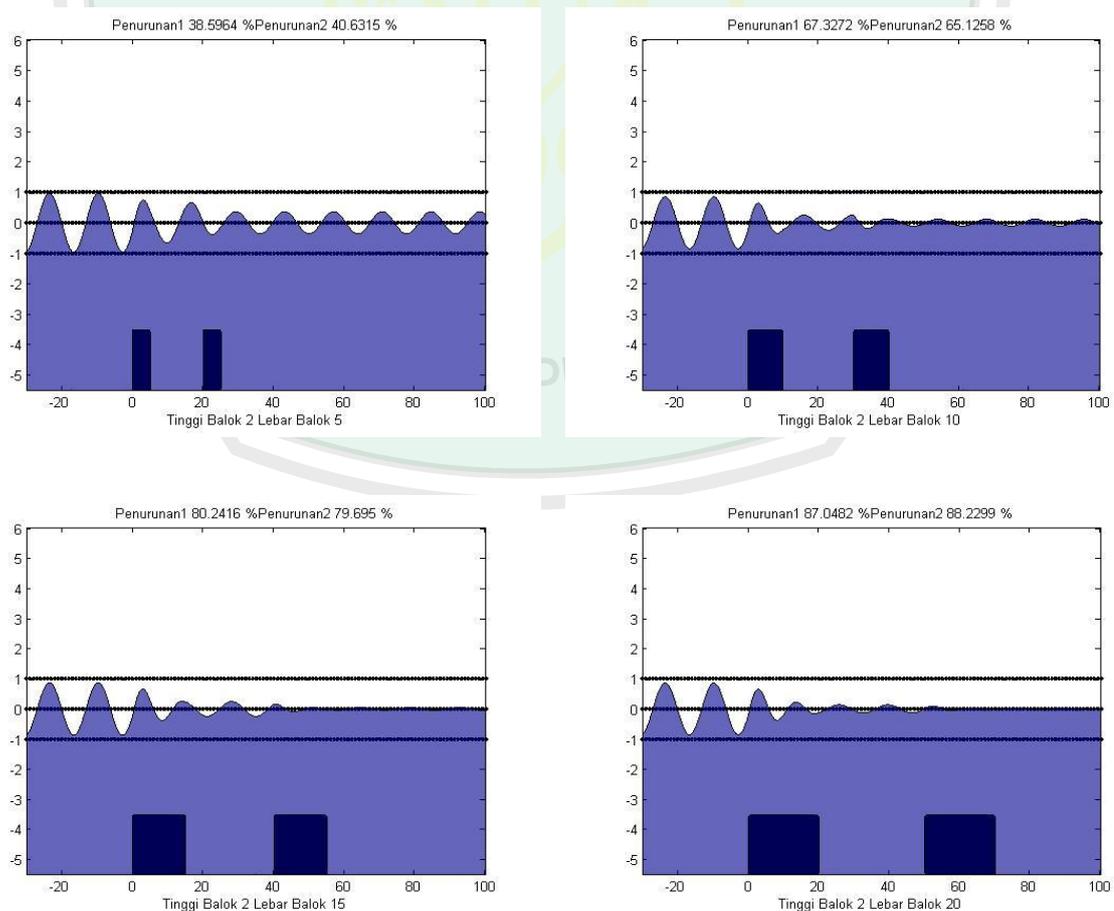
Gambar 3.9 Simulasi dengan Memodifikasi Tinggi Dua Balok Berpori

Berdasarkan hasil simulasi di atas dapat dilihat bahwa dengan tinggi balok 0.5 m dan lebar 10 m dapat mereduksi amplitudo gelombang sebesar 37.32% dan 36.92% . Karena pada subbab ini hanya memodifikasi tinggi balok berpori, maka lebar dari balok berpori tersebut tidak dimodifikasi atau tetap. Dengan tinggi balok 1 m dapat mereduksi amplitudo gelombang sebesar 52.69% dan 52.56% . Selanjutnya dengan tinggi balok 1.5 m dapat mereduksi amplitudo gelombang sebesar 58.12% dan 60.53% . Sedangkan dengan tinggi balok 2 m dapat mereduksi amplitudo gelombang sebesar 65.30% dan 65.12% .

Sehingga dari beberapa simulasi di atas yaitu dengan memodifikasi tinggi balok berpori dapat diketahui bahwa penurunan amplitudo gelombang yang paling besar terjadi ketika tinggi balok berpori tersebut sebesar 2 m yang mampu mereduksi sebesar 65.30% dan 65.12% .

3.4 Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Lebar Balok Berpori

Selanjutnya dilakukan modifikasi pada lebar balok berpori pemecah gelombang untuk mengetahui seberapa besar pengaruhnya terhadap penurunan amplitudo gelombang setelah melalui kedua balok berpori tersebut. Sehingga diberikan nilai amplitudo gelombang transmisi $A = 1 \text{ m}$, frekuensi gelombang $\omega = 2$, porositas $C_r = 0.5$, gravitasi $g = 10 \text{ m/s}^2$, koefisien gesek $f = 1$, kedalaman pada daerah I (h_2) sama dengan kedalaman pada daerah III (h_2) dan kedalaman pada daerah V (h_2) yaitu sebesar 3 m , kemudian untuk kedalaman pada daerah II (h_1) sama dengan kedalaman pada daerah IV (h_1) yaitu sebesar 1 m , sehingga hasil simulasinya dapat dilihat pada Gambar 3.10 berikut



Gambar 3.10 Simulasi dengan Memodifikasi Lebar Dua Balok Berpori

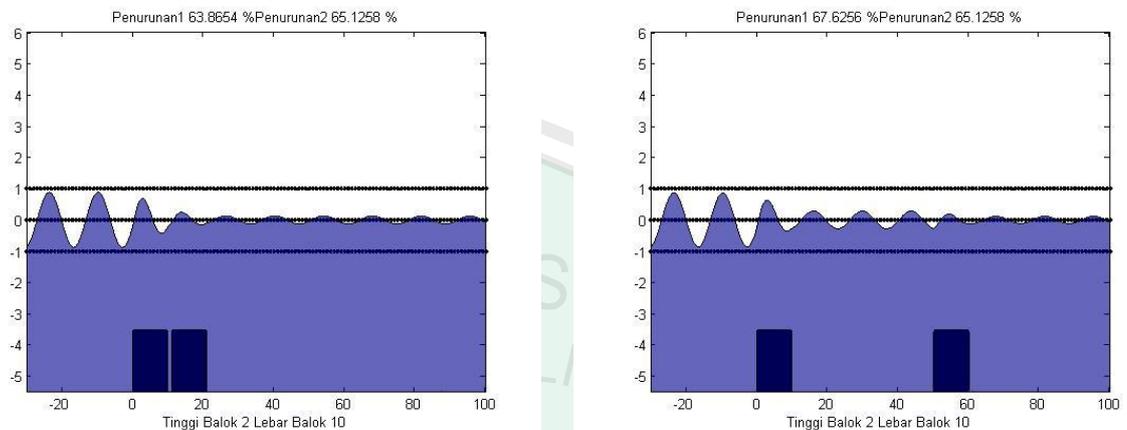
Berdasarkan hasil simulasi yang memodifikasi lebar balok berpori di atas yaitu dengan lebar balok 5 m dan tinggi balok sebesar 2 m dapat mereduksi amplitudo gelombang sebesar 38.59% dan 40.63%. Karena pada subbab ini hanya memodifikasi lebar balok, maka tinggi balok tersebut tidak dimodifikasi atau tetap. Dengan lebar balok 10 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 67.32% dan 65.12%, dengan lebar balok 15 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 80.24% dan 79.69%, sedangkan dengan lebar balok 20 m mampu mereduksi amplitudo gelombang sebesar 87.04% dan 88.22%.

Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan yaitu dengan memodifikasi lebar balok berpori dapat diketahui bahwa penurunan amplitudo gelombang yang paling besar terjadi pada lebar kedua balok berpori tersebut sebesar 20 m yaitu penurunannya sebesar 87.04% dan 88.22%.

3.5 Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Jarak Kedua Balok Berpori

Selanjutnya dilakukan simulasi evolusi gelombang permukaan dengan memodifikasi jarak antara kedua balok berpori untuk mengetahui seberapa besar pengaruhnya terhadap penurunan amplitudo gelombang setelah melalui kedua balok tersebut. Sehingga diberikan nilai amplitudo gelombang transmisi $A = 1$ m, frekuensi gelombang $\omega = 2$, porositas $C_r = 0.5$, gravitasi $g = 10$ m/s², koefisien gesek $f = 1$, kedalaman pada daerah I (h_2) sama dengan kedalaman pada daerah III (h_2) dan kedalaman pada daerah V (h_2) yaitu sebesar 3 m, kemudian untuk kedalaman pada daerah II (h_1) sama dengan kedalaman pada

daerah IV (h_1) yaitu sebesar 1 m, sehingga hasil simulasinya dapat dilihat pada Gambar 3.11 berikut



Gambar 3.11 Simulasi Evolusi Gelombang Permukaan dengan Memodifikasi Jarak

Berdasarkan hasil simulasi di atas yaitu dengan memodifikasi jarak kedua balok berpori tersebut terjadi perubahan penurunan amplitudo gelombang, dapat dilihat pada Gambar 3.11 bahwa terjadi penurunan amplitudo gelombang sebesar 63.86% dan 65.12%, pada Gambar 3.11 pula terjadi penurunan amplitudo gelombang sebesar 67.62% dan 65.12% dengan lebar balok 10 m dan tinggi balok 2 m.

3.6 Gelombang dalam Islam

Pengertian gelombang secara umum telah dijelaskan pada bab II yaitu, gelombang adalah sebarang gangguan dari kondisi kesetimbangan yang merambat dari satu daerah ke daerah lainnya. Pada penelitian ini dibahas tentang gelombang yang terjadi pada permukaan fluida, seperti gelombang yang terjadi di permukaan laut atau dapat disebut ombak. Gelombang yang terjadi di permukaan laut ini dibangkitkan oleh tiupan angin dan terjadi perubahan bentuk gelombang. Perubahan bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium disebut dengan

evolusi gelombang. Penjelasan tentang gelombang telah dijelaskan dalam al-Quran surat ar-Ruum ayat 46 berikut:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيحَ مُبَشِّرَاتٍ لِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ
وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

“Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur” (QS. ar-Ruum/30:46).

Menurut tafsir Al-Aisar dalam (Al-Jazairi, 2008) ayat tersebut membahas tentang penetapan ketuhanan Allah Swt. keadilan-Nya, dan rahmat-Nya. Pada ayat tersebut yang menunjukkan ketuhanan Allah Swt. adalah Allah Swt. mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira kepada seluruh hamba-Nya dengan menurunkan hujan sebagai sumber kehidupan untuk seluruh negeri dan seluruh makhluk. Selain itu, angin juga merupakan sarana agar kapal dapat berlayar di lautan. Melalui angin dan lautan tersebut Allah Swt. menunjukkan ketuhanan-Nya agar seluruh hamba-Nya bersyukur dengan cara beriman, taat, dan mengesakan Allah Swt. dalam beribadah.

Pada tafsir tersebut dijelaskan bahwa angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan hujan dan juga untuk meniup kapal agar dapat berlayar di lautan. Makna angin yang dimaksud ayat tersebut adalah gelombang. Berdasarkan penjelasan tersebut dapat diketahui bahwa segala sesuatu yang diciptakan Allah Swt. memiliki manfaat masing-masing. Sebagaimana firman Allah Swt. tentang pemanfaatan perairan laut bagi kehidupan manusia dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 164 berikut:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَّاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيْحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu dia hidupan bumi sesudah mati (kering)-nya dan dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan.” (QS al Baqarah/02:164).

Menurut tafsir Al-Maraghi (1984) surat al-Baqarah ayat 164 tersebut membahas tentang beberapa fenomena alam yang menunjukkan keesaan Allah Swt. Fenomena alam yang pertama adalah benda-benda langit yang terdiri dari beberapa jenis atau kelompok, salah satu benda langit yang paling dekat dengan manusia adalah tata surya yang mempunyai matahari sebagai sumber adanya kehidupan di bumi. Fenomena kedua adalah bahwa segala sesuatu yang ada di bumi berupa benda-benda padat. Fenomena ketiga yaitu pergantian antara siang dan malam. Fenomena keempat adalah pengetahuan tentang tabiat air laut dan kaidah-kaidah gaya tarik, tabiat udara, angin, awan, dan listrik yang merupakan penggerak utama kapal-kapal di masa sekarang. Fenomena kelima adalah tentang turunnya hujan yang menjadi sebab kehidupan di alam. Fenomena keenam adalah mengendalikan arah angin atau fungsi angin bagi kehidupan. Fenomena ketujuh adalah mendung yang berkelompok dengan ketebalan di udara untuk kepentingan hujan di beberapa negara secara teratur.

Berdasarkan penjelasan tafsir di atas perairan laut sangat bermanfaat bagi kehidupan. Secara umum perairan laut dimanfaatkan sebagai alat transportasi,

usaha perikanan, usaha pertambangan, sumber bahan baku obat-obatan dan kosmetik, sumber energi, rekreasi serta pendidikan dan penelitian. Pada pendidikan dan penelitian informasi tentang gerakan air laut sangat diperlukan dalam bidang pelayaran, terutama untuk kapal atau perahu yang menggunakan layar.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III dapat disimpulkan bahwa solusi dari masalah evolusi gelombang harmonik yang melalui dua balok berpori berupa amplitudo gelombang dapat diperoleh dengan menggunakan bantuan program, karena jika menggunakan cara manual dikhawatirkan terjadi kesalahan dalam perhitungannya dan waktu yang dibutuhkan cukup lama.

Pada penelitian ini balok pemecah gelombang yang digunakan adalah balok berpori dan terendam, maka tinggi balok berpori tersebut harus kurang dari permukaan gelombang. Sehingga semakin besar tinggi balok berpori pemecah gelombang, maka semakin besar pula penurunan amplitudo gelombang yang dihasilkan. Semakin besar lebar balok berpori pemecah gelombang, maka penurunan amplitudo gelombang yang dihasilkan semakin besar pula.

Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan pada pembahasan tersebut yaitu dengan memodifikasi jarak kedua balok berpori terjadi perubahan penurunan amplitudo gelombang. Semakin lebar jarak kedua balok berpori tersebut, maka semakin besar pula penurunan amplitudo gelombang yang dihasilkan.

4.2 Saran

Pada penelitian ini difokuskan pada evolusi gelombang harmonik yang melalui dua balok berpori menggunakan teori gelombang linear. Untuk penelitian

selanjutnya disarankan agar dilakukan penelitian evolusi gelombang harmonik yang melalui dua balok berpori menggunakan teori gelombang nonlinear untuk mengetahui bagaimana pengaruhnya terhadap penurunan amplitudo gelombang.



DAFTAR PUSTAKA

- Aini, K.N. 2014. *Penerapan Metode Pemisahan Variabel pada Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Sebuah Pemecah Gelombang*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Al-Jazairi, S. 2008. *Tafsir al-Quran Al-Aisar (Jilid 5)*. Jakarta: Darus Sunnah.
- Al-Maraghi, AM. 1984. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi 2*. Semarang: CV. Toha Putra.
- Ault, J & Ayres, JR, Ph.D, F. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga.
- Dysthe, K.B. 2004. *Water Waves and Oceanic Currents*. Lecture Notes on Linier Wave Theory, 3-4.
- Holthuijsen, L.H. 2007. *Waves in Oceanic and Coastal Waters*. New York: Cambridge University Press.
- Iffah, U. 2014. Perambatan Gelombang Monokromatik pada Dasar Berundak. *MATHunesa*, 3: 5-10.
- Jamhuri, M., Kusumastuti, A., & Suharleni, F. 2013. *Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Pemecah Gelombang Berpori*. Laporan Penelitian. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Olson, R.M. 1993. *Dasar-dasar Mekanika Fluida Teknik Edisi Kelima*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Soemartojo, N. 1992. *Analisa Vektor Edisi Keempat*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Strauss, W.A. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Wiryanto, L. 2010a. A Solitary-like Wave Generated by Flow Passing a Bump. *Proceeding of the 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Application (ICMSA2010)* (hlm.1-9). Malaysia: Universiti Tunku Abdul Rahman.
- Wiryanto, L. 2010b. Unsteady Waves Generated by Flow Over a Porous Layer. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 2:1-5.
- Wiryanto, L. 2010c. Wave Propagation Over a Submerged Bar. *ITBJ.Sci*, 3:81-89.

- Young, H.D. & Freedman, R.A. 2000. *Fisika Universitas Edisi Kesepuluh Jilid 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Young, H.D. & Freedman, R.A. 2003. *Fisika Universitas Edisi Kesepuluh Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Zakaria, A. 2009. *Dasar Teori dan Aplikasi Program Interaktif Berbasis Web untuk Menghitung Panjang Gelombang dan Pasang Surut (Edisi Pertama)*. Lampung: Magister Teknik Sipil Universitas Lampung.



LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

1. Pembuktian

$$q \times (\nabla \times q) = (q \cdot q)\nabla - (q \cdot \nabla)q$$

dengan diberikan

$$q = (ui + vj + wk) \quad \text{dan} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (\nabla \times q) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= i \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= i \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} q \times (\nabla \times q) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{vmatrix} \\ &= i \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad - j \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ &\quad + k \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad + j \left[w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + k \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\
&= i \left[v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
&\quad + j \left[w \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&\quad + k \left[u \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
&= i \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\
&\quad + j \left[u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\
&\quad + k \left[u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
&= i \left[\frac{\partial}{\partial x} (uu + vv + ww) - u \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
&\quad + j \left[\frac{\partial}{\partial y} (uu + vv + ww) - v \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
&\quad + k \left[\frac{\partial}{\partial z} (uu + vv + ww) - w \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
&= i \left[\frac{\partial}{\partial x} (q \cdot q) - u (q \cdot \nabla) \right] + j \left[\frac{\partial}{\partial y} (q \cdot q) - v (q \cdot \nabla) \right] \\
&\quad + k \left[\frac{\partial}{\partial z} (q \cdot q) - w (q \cdot \nabla) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} (q \cdot q) i - ui(q \cdot \nabla) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} (q \cdot q) j - vj(q \cdot \nabla) \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial z} (q \cdot q) k - wk(q \cdot \nabla) \right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} (q \cdot q) i + \frac{\partial}{\partial y} (q \cdot q) j + \frac{\partial}{\partial z} (q \cdot q) k \right] \\
&\quad - [ui(q \cdot \nabla) + vj(q \cdot \nabla) + wk(q \cdot \nabla)] \\
&= (q \cdot q) \left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right] - (q \cdot \nabla) [ui + vj + wk] \\
&= (q \cdot q) \nabla - (q \cdot \nabla) q
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$q \times (\nabla \times q) = (q \cdot q) \nabla - (q \cdot \nabla) q$$

2. Selanjutnya pada point berikut ini akan dibuktikan

$$(q \cdot q) \nabla = \left(\frac{1}{2} |q|^2 \right) \nabla$$

akan dibuktikan $(q \cdot q) \nabla$, yaitu

$$\begin{aligned}
(q \cdot q) \nabla &= (ui + vj + wk) \cdot (ui + vj + wk) \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\
&= (uu + vv + ww) \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} i (uu + vv + ww) + \frac{\partial}{\partial y} j (uu + vv + ww) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} k (uu + vv + ww) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(2 \frac{\partial}{\partial x} uu + 2 \frac{\partial}{\partial x} vv + 2 \frac{\partial}{\partial x} ww \right) i \right. \\
&\quad + \left(2 \frac{\partial}{\partial y} uu + 2 \frac{\partial}{\partial y} vv + 2 \frac{\partial}{\partial y} ww \right) j \\
&\quad \left. + \left(2 \frac{\partial}{\partial z} uu + 2 \frac{\partial}{\partial z} vv + 2 \frac{\partial}{\partial z} ww \right) k \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} |q|^2 \right) \nabla$$

Sehingga terbukti bahwa

$$(q \cdot q) \nabla = \left(\frac{1}{2} |q|^2 \right) \nabla$$



Lampiran 2

```
clc,clear
%Simulasi untuk Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Serangkaian
Balok Berpori
```

```
A = 1;
R1 = 10;
R2 = 11;
L = 21;
w = 2;
Cr = 0.5;
h1 = 1;
h2 = 3;
f = 1;
g = 10;
tinggibalok = h2-h1;
```

```
k1 = fsolve(@(k1) myFun1(k1,Cr,h1,h2,f,w,g), 0.1);
k2 = fsolve(@(k2) myFun2(w,g,k2,h2), 0.1);
```

```
load solusi_sistem
```

```
B = sol.B;
C = sol.C;
D = sol.D;
E = sol.E;
F = sol.F;
G = sol.G;
H = sol.H;
I = sol.I;
```

```
varB = symvar(B);
varC = symvar(C);
varD = symvar(D);
varE = symvar(E);
varF = symvar(F);
varG = symvar(G);
varH = symvar(H);
varI = symvar(I);
```

```
B = subs(B,varB,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
B = double(B);
```

```
C = subs(C,varC,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
C = double(C);
```

```
D = subs(D,varD,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
D = double(D);
```

```
E = subs(E,varE,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
E = double(E);
```

```
F = subs(F,varF,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
F = double(F);
```

```

G = subs(G,varG,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
G = double(G);

H = subs(H,varH,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
H = double(H);

I = subs(I,varI,[Cr,L,R1,R2,h1,k1,k2,w]);
I = double(I);

x = -30:0.1:100;
t = 0:0.1:5;

M = length(x);
N = length(t);
u = zeros(M,N);

figure(1),clf
for n=1:N
    for j=1:M
        P = eta(x(j),t(n),R1,R2,L,w,k1,k2,A,B,C,D,E,F,G,H,I);
        u(j,n) = sqrt(real(P)^2 + imag(P)^2);
        u(j,n) = real(P);
    end
    tinggi1 = abs(A);
    tinggi2 = abs(E);
    penurunan1 = tinggi1 - tinggi2;
    persen1 = (penurunan1/tinggi1)*100;

    tinggi3 = abs(I);
    penurunan2 = tinggi2 - tinggi3;
    persen2 = (penurunan2/tinggi2)*100;

    area(x,real(u(:,n)),-5.5)
    ylim([-5.5 6])
    alpha(0.6)
    hold on
    xb = -100:1:100;
    plot(xb,0,'k.',xb,A,'k.',xb,-A,'k.');
```

```

    hold off

    rectangle('Position',[0,-
5.5,R1,tinggibalok],'Curvature',[0.1,0.1],'LineWidth',1,'FaceColor
','k')
    rectangle('Position',[R2,-
5.5,R1,tinggibalok],'Curvature',[0.1,0.1],'LineWidth',1,'FaceColor
','k')
    xlabel(['Tinggi Balok',' ',num2str(tinggibalok),' ','Lebar
Balok',' ',num2str(R1)])

    pause(0.1)
    title(['Penurunan',' ',num2str(persen1),' ','%', ' '
,num2str(persen2),' ','%'])
    title(['Penurunan1',' ',num2str(persen1),' ','
%', 'Penurunan2',' ',num2str(persen2),' ','%'])
end

```

RIWAYAT HIDUP

Israfatul Furaidah, lahir di kota Bondowoso pada tanggal 29 Januari 1992, biasa dipanggil Iis, tinggal di Sokleh Utara RT 016 RW 004 Desa Sukosari Kidul Kecamatan Sumber Wringin. Anak pertama dari Bapak Sumarno dan Budiwanti Widiastutik.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Sukosari Lor 01 pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke MTs Nurul Jadid dan lulus pada tahun 2007. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MA Nurul Jadid dan lulus tahun 2010. Selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2010, mengambil Jurusan Matematika.

Selama menempuh pendidikan tingkat dasar, dia selalu meraih ranking 10 besar di kelasnya. Selama menempuh pendidikan di MTS Nurul Jadid dia pernah mengikuti kursus intensif untuk mata pelajaran Bahasa Inggris yang dilaksanakan oleh LPBA (Lembaga Pengembangan Bahasa Asing) dan menjadi bintang kelas pada gelombang ke II. Dan selama menempuh pendidikan di MA Nurul Jadid penulis mengambil program Unggulan IPA.





KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Israfatul Furaidah
NIM : 10610064
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Dua Balok Berpori
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	11 Agustus 2014	Konsultasi Masalah	1.
2.	5 Desember 2014	Konsultasi Bab I dan II	2.
3.	21 Januari 2015	Konsultasi Bab III	3.
4.	22 Januari 2015	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	27 Januari 2015	Acc Bab I, II, dan III untuk Seminar Proposal	5.
6.	27 Januari 2015	Acc Agama untuk Seminar Proposal	6.
7.	11 September 2015	Konsultasi Bab III	7.
8.	20 Oktober 2015	Konsultasi Bab III	8.
9.	30 November 2015	Konsultasi Bab III	9.
10.	21 Desember 2015	Konsultasi Bab III	10.
11.	07 Januari 2016	Konsultasi Kajian Agama Bab I, II, dan III	11.
12.	11 Januari 2016	Revisi Agama Bab I dan II	12.
13.	13 Januari 2016	Konsultasi Bab III dan IV	13.
14.	13 Januari 2016	Konsultasi Agama	14.
15.	14 Januari 2016	Konsultasi Agama	15.

Malang, 12 Januari 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001