DIMENSI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MOHAMMAD AGUS KHOLILURROHMAN
NIM. 18610086

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

DIMENSI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MOHAMMAD AGUS KHOLILURROHMAN
NIM. 18610086

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

DIMENSI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mohammad Agus Kholilurrohman
NIM. 18610086

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

DIMENSI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Mohammad Agus Kholilurrohman
NIM. 18610086

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 2 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dewi Ismiarti, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIDT. 19870505201608012058	NIP. 197206041999032001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005

DIMENSI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Mohammad Agus Kholilurrohman
NIM. 18610086

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 16 Juni 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Mohammad Agus Kholilurrohman
NIM	: 18610086
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Dimensi dari Grup Dihedral

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 7 Juni 2022
Yang membuat peryataan,

Mohammad Agus Kholilurrohman
NIM. 18610086

MOTO

TENANG, KALEM, KUASAI
Jika hati kita sudah bisa “TENANG”
Maka kita bisa berpikir dengan “KALEM”
Hingga masalah apapun bisa kita “KUASAI”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta yaitu Bapak Kriyatim dan Ibu Khotimah, yang tidak pernah putus dalam memanjatkan do’a dan memberikan restu serta nasihat kepada penulis.

Kakak penulis Ummi Sholihah dan Edi Fitrayanto, yang telah memberikan dukungan serta nasihat.

Ina Maya Sabara, Devi Amelia Rahmah dan Mochammad Bagus Vicky Wichaksono, yang telah menemani dan memberi semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Santri-santri TPQ Nurul Huda Dinoyo yang telah mengajari penulis tentang sabar dan istiqomah.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan, nikmat dan anugerah-Nya sehingga skripsi yang berjudul "Dimensi dari Grup Dihedral" ini dapat terselesaikan dengan baik. Meskipun masih jauh dari kata sempurna. Shalawat serta salam semoga tetap tercurah kepada nabi Muhammad ﷺ yang syafa'atnya kita nanti-nantikan pada hari akhir kelak.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan terlibat dalam proses pembuatan skripsi ini, terkhusus kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ibu Dewi Ismiarti, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberi bimbingan, arahan, perbaikan, serta saran yang membangun demi kebaikan skripsi ini.
5. Ibu Evawati Alisah, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Penguji yang telah memberi banyak masukan dan saran yang membangun.
7. Ibu Intan Nisfulaila, M.Si, selaku Anggota Penguji 1 yang telah memberi masukan dan saran yang membangun.
8. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberi banyak motivasi dan nasihat kepada penulis.
9. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
10. Kedua orang tua penulis Bapak Kriyatim dan Ibu Khotimah, yang tidak pernah putus dalam memanjatkan do'a dan memberikan restu serta nasihat kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada penulis maupun pembaca.

Malang, 1 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Kholilurrohman, Mohammad Agus. 2022. **Dimensi dari Grup Dihedral**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dewi Ismiarti, M.Si (II) Evawati Alisah, M.Pd

Kata Kunci: Dimensi, Grup Dihedral, Kelas Konjugasi, Subgrup Normal

Grup dapat dipandang sebagai perumuman dari ruang vektor. Oleh karena itu, beberapa peneliti mengembangkan konsep basis dan dimensi pada grup. Dimensi dari suatu grup hingga G, dinotasikan dengan $dim(G)$, adalah minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun G. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi dari grup dihedral dan menentukan apakah pada grup dihedral berlaku dimensi subgrup normal kurang dari atau sama dengan dimensi grup. Langkah-langkah yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut: Pertama, mendaftar kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n}, menentukan kelas konjugasi yang membangun grup dihedral D_{2n}, dan menentukan minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3,4,5,6,7,8$. Selanjutnya, membuat dugaan dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Dengan cara yang sama dapat dicari dimensi setiap subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3,4,5,6,7,8$. Kemudian, membuat dugaan dimensi setiap subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Diberikan $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$, diperoleh dimensi dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$dim(D_{2n}) = \begin{cases} 1, & n\ ganjil \\ 2, & n\ genap \end{cases}$$

Selanjutnya, jika N adalah sebarang subgrup normal dari grup dihedral D_{2n}, maka berlaku

$$dim(N) \leq dim(D_{2n}).$$

ABSTRACT

Kholilurrohman, Mohammad Agus. 2022. **The Dimension of Dihedral Group**. Thesis. Mathematic Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dewi Ismiarti, M.Si (II) Evawati Alisah, M.Pd

Keyword: Dimensions, Dihedral Groups, Conjugacy Classes, Normal Subgroups

Groups can be viewed as a generalization of vector spaces. Some researchers have developed the concept of bases and dimensions in groups. The dimension of a finite group G, denoted by $dim(G)$, is the minimal number of conjugacy classes in G which generate G. This study aims to determine the dimension of dihedral groups and determine whether in dihedral group the dimension of normal subgroup is less than or equal to the dimension of the group. The steps of this study are as follows: first, find the conjugacy classes of dihedral group D_{2n}, determine some conjugacy classes which generate dihedral group D_{2n}, and determine the minimal number of conjugacy classes which generate dihedral group D_{2n} for $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Furthermore, we make conjecture about the dimension of dihedral group D_{2n} for $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. In the same way, we can find the dimension of each normal subgroups of dihedral group D_{2n} for $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Moreover, we make a conjecture about the dimension of each normal subgroups of dihedral group D_{2n} for $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Given $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$, we obtained the dimension of dihedral group D_{2n} is

$$dim(D_{2n}) = \begin{cases} 1, & n\ odd \\ 2, & n\ even \end{cases}$$

Furthermore, if N is any normal subgroup of dihedral group D_{2n} then

$$dim(N) \leq dim(D_{2n}).$$

مستخلص البحث

خليل الرحمن، محمد أجوس. ٢٠٢٢. **الأبعاد من المجموعة ثنائية السطوح**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (1)ديوي اسميارتي، الماجستير (2)أيفاواتي أليسة، الماجستير

الكلمات المفتاحية: الأبعاد، المجموعة ثنائية السطوح، فئة الاقتران، المجموعة الفرعية العادية

يمكن عرض المجموعات كتعميم للمساحات المتجهة. طور بعض الباحثين مفهوم القواعد والأبعاد في مجموعات. أبعاد المجموعة المحدودة G، التي يُشار إليها بواسطة $dim(G)$، هي الحد الأدنى لعدد فئات الاقتران في G التي تولد G. تهدف هذه الدراسة إلى تحديد أبعاد المجموعات ثنائية السطوح وتحديد ما إذا كان في المجموعة ثنائية السطوح أبعاد المجموعة الفرعية العادية أقل من أو يساوي بُعد المجموعة. خطوات هذه الدراسة هي كما يلي: أولاً ، ابحث عن فئات الاقتران لمجموعة ثنائية السطوح D_{2n}، وحدد بعض فئات الاقتران التي تولد مجموعة ثنائية السطوح D_{2n} ، وحدد الحد الأدنى لعدد فئات الاقتران التي تولد مجموعة ثنائية السطوح D_{2n} لـ $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. علاوة على ذلك ، فإننا نضع تخمينًا حول أبعاد المجموعة ثنائية السطوح D_{2n} لـ $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. بالطريقة نفسها، يمكننا إيجاد أبعاد كل مجموعة فرعية عادية من المجموعة ثنائية السطوح D_{2n} لـ $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. علاوة على ذلك، نقوم بعمل تخمين حول أبعاد كل مجموعة فرعية طبيعية من المجموعة ثنائية السطوح D_{2n} لـ $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. بالنظر إلى $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$، حصلنا على بُعد المجموعة ثنائية السطوح D_{2n} هي:

$$dim(D_{2n}) = \begin{cases} 1, & n \text{ وتري} \\ 2, & n \text{ شفعي} \end{cases}$$

علاوة على ذلك ، إذا كانت N هي أي مجموعة فرعية طبيعية من المجموعة ثنائية السطوح D_{2n} إذن $dim(N) \leq dim(D_{2n})$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang vektor merupakan suatu struktur aljabar. Ruang vektor adalah himpunan takkosong yang dibentuk oleh sekumpulan objek yang disebut vektor yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan suatu bilangan yang dinamakan skalar. Skalar yang sering digunakan adalah bilangan riil, bilangan kompleks, dan bilangan rasional. Operasi penjumlahan pada himpunan takkosong tersebut harus memenuhi sifat-sifat tertentu yaitu komutatif dan asosiatif. Sedangkan perkalian skalar pada himpunan takkosong tersebut bersifat asosiatif dan distributif. Adapun himpunan tak kosong tersebut harus mengandung identitas terhadap penjumlahan, identitas terhadap perkalian skalar, serta terdapat invers terhadap penjumlahan (Roman, 2005).

Pada ruang vektor terdapat konsep basis dan dimensi. Sebelum mengenal pengertian dimensi pada suatu ruang vektor, akan dikenalkan terlebih dahulu pengertian basis. Basis adalah himpunan di suatu ruang vektor yang memenuhi sifat bebas linier dan merentang atau membangun. Kemudian, pengertian dimensi adalah banyaknya vektor pada suatu basis. Jika banyak vektor dalam basis suatu ruang vektor takhingga maka dimensi dari ruang vektor tersebut adalah takhingga. Sedangkan untuk ruang vektor nol yang tidak memiliki basis, maka dimensi dari ruang vektor tersebut adalah nol (Roman, 2005).

Grup juga merupakan salah satu jenis struktur aljabar. Grup adalah himpunan takkosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memiliki sifat-sifat tertentu. Operasi biner pada himpunan tersebut harus bersifat tertutup dan asosiatif. Sedangkan himpunan tak kosong tersebut harus mempunyai elemen identitas dan mengandung invers. Lebih lanjut, grup yang bersifat komutatif disebut grup abel. Grup dikatakan hingga jika banyak anggotanya berhingga. Sebaliknya, grup dikatakan takhingga jika banyak anggotanya tak berhingga.

Grup dapat dipandang sebagai perumuman dari ruang vektor. Beberapa peneliti mengembangkan konsep dimensi pada grup. Menurut Robinson (1982) yang dikutip dalam Kaplan & Lev (2003) menyebutkan bahwa berdasarkan Teorema basis Burnside, untuk p-grup G dengan p adalah bilangan prima, maka dimensi dari grup dengan G adalah dimensi dari ruang vektor $G/\Phi(G)$ atas lapangan F^p. Akan tetapi, konsep tersebut tidak berlaku untuk grup secara umum, hanya berlaku untuk p-grup. Hal ini disebabkan karena untuk mencari dimensi dari p-grup dibutuhkan subgrup Frattini. Namun demikian terdapat grup yang tidak dapat menjadi subgrup Frattini dari sebarang grup. Adapun subgrup Frattini dari grup $G,$ dinotasikan dengan $\Phi(G)$, adalah irisan dari semua subgrup maksimal dari G (Hobby, 1960).

Pada tahun 2003, perumuman konsep dimensi pada grup hingga kemudian dikembangkan lagi oleh Gil Kaplan & Arieh Lev. Perumuman tersebut dipelajari melalui kelas-kelas konjugasi. Kemudian, dengan memperhatikan himpunan pembangun yang terdiri dari kelas-kelas konjugasi, terdapat kemungkinan bahwa konsep dimensi dapat diperumum untuk sebarang grup hingga. Dimensi dari suatu grup hingga adalah minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun grup tersebut.

Salah satu jenis dari grup hingga adalah grup dihedral. Grup dihedral adalah grup simetri dari segi-n beraturan yang terdiri dari unsur rotasi dan unsur refleksi (Dummit & Foote, 2004). Grup dihedral merupakan grup yang menarik untuk dibahas karena banyak muncul di alam seperti pada struktur molekul air atau struktur kristal. Selain di alam, representasi dari grup ini juga banyak dijadikan sebagai karya seni misalnya dekorasi lantai atau dinding.

Berbicara ruang vektor dan grup tidak terlepas dari himpunan, karena ruang vektor dan grup merupakan himpunan dengan sifat-sifat tertentu. Dalam al-Qur'an juga telah dibahas mengenai himpunan. Salah satunya dalam surat fathir ayat 1, yang berbunyi

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ فَاطِرِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ جَاعِلِ الْمَلٰۤىِٕكَةِ رُسُلًاۙ اُولِيْٓ اَجْنِحَةٍ مَّثْنٰى وَثُلٰثَ وَرُبٰعَۗ يَزِيْدُ فِى الْخَلْقِ
مَا يَشَاۤءُۗ اِنَّ اللّٰهَ عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ ۝١

"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang Dia kehendaki. Sungguh, Allah Mahakuasa atas segala sesuatu" (Q.S Fathir/35:1).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa terdapat pengelompokan malaikat berdasarkan banyak sayapnya. Hal ini dapat diartikan bahwa terdapat himpunan malaikat yang bersayap dua, bersayap tiga, dan bersayap empat. Meskipun memiliki banyak sayap yang berbeda-beda, tetapi memiliki fungsi yang sama yaitu untuk menyampaikan apa yang diperintahkan oleh Allah SWT dengan cepat.

Kemudian, kata أَجْنِحَةٍ merupakan bentuk jamak dari kata جَنَاحُ yang secara harfiah diartikan sebagai sayap. Menurut Chodjim (2008), kata جَنَاحُ dapat diterjemahkan sebagai kekuatan. Kekuatan ini berhubungan dengan kecepatan dan kemampuan gerak dalam menyampaikan apa yang diperintahkan oleh Allah SWT. Terdapat malaikat yang bergerak dalam satu jalur dalam satu waktu, ada yang bergerak dalam dua jalur, tiga jalur, empat jalur seperti menembus satu ruang ke ruang yang lain tanpa merusak batas-batas di sekelilingnya. Hal ini dapat diartikan bahwa Allah SWT menjelaskan tentang dimensi dari himpunan, dalam hal ini adalah himpunan malaikat.

Berdasarkan paparan di atas, permasalahan yang dapat dikaji dan dikembangkan dalam hal ini adalah konsep dimensi dari grup hingga, khususnya pada grup dihedral. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengangkat judul "**Dimensi dari Grup Dihedral**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan dimensi dari grup dihedral?
2. Apakah pada grup dihedral berlaku dimensi subgrup normal kurang dari atau sama dengan dimensi grup?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menentukan dimensi dari grup dihedral.
2. Untuk mengetahui pada grup dihedral berlaku dimensi subgrup normal kurang dari atau sama dengan dimensi grup.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat:

a. Bagi penulis

1. Menambah pengetahuan dan keilmuan mengenai hal-hal yang berkaitan dengan dimensi dari grup dihedral.
2. Mengembangkan wawasan keilmuan mengenai dimensi dari grup hingga, khususnya grup dihedral.

b. Bagi pembaca

1. Sebagai sarana informasi mengenai dimensi dari grup dihedral.
2. Sebagai bahan informasi dalam melakukan kajian lebih lanjut mengenai dimensi dari grup hingga, khususnya grup dihedral.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah pada definisi dimensi yang digunakan. Dimensi grup adalah minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun grup.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Grup

Definisi 2.1

Misalkan A adalah himpunan takkosong. Operasi biner $*$ pada A adalah suatu pemetaan dari $A \times A$ ke A,

$$* : A \times A \rightarrow A$$

(Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh

Operasi penjumlahan $(+)$ pada himpunan bulat adalah operasi biner karena

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(a, b) \rightarrow c \in \mathbb{Z}$$

adalah pemetaan.

Definisi 2.2

Misalkan G adalah himpunan takkosong dengan operasi $*$, dinotasikan sebagai $(G,*)$, disebut grup jika memenuhi empat syarat (Gilbert & Gilbert, 2015):

1. G tertutup terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

3. G memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku

$$a * e = e * a = a$$

4. G memuat invers, yaitu untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sehingga

$$a * b = b * a = e$$

Selanjutnya, G disebut grup abel (komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk $a, b \in G$ (Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ merupakan suatu grup.

Teorema 2.1

Misalkan $(G,*)$ adalah grup, maka

1. Elemen identitas di G bersifat tunggal
2. Untuk setiap $a \in G$, a^{-1} bersifat tunggal
3. Jika $a \in G$ maka $(a^{-1})^{-1} = a$
4. Jika $a, b \in G$ maka $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
5. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku:
   (i) Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ (Sifat kanselasi kiri)
   (ii) Jika $a * c = b * c$ maka $a = b$ (Sifat kanselasi kanan)

(Gilbert & Gilbert, 2015).

Bukti

1. Misalkan e_1 dan e_2 merupakan elemen identitas di G.

   Karena e_2 elemen identitas di G maka $e_1 * e_2 = e_1$.

   Karena e_1 elemen identitas di G maka $e_1 * e_2 = e_2$. Sehingga,

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

Jadi, elemen identitas di G bersifat tunggal

2. Ambil sebarang $a \in G$, Misalkan e merupakan elemen identitas di G

   Asumsikan b dan c merupakan invers dari a di G, maka

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
b &= b * e && \text{[Sifat identitas]}\\
&= b * (a * c) && \text{[Subtitusi } e = a * c\text{]}\\
&= (b * a) * c && \text{[Sifat asosiatif]}\\
&= e * c && \text{[Subtitusi } b * a = e\text{]}\\
&= c && \text{[Sifat identitas]}
\end{aligned}
$$

Jadi, invers dari a bersifat tunggal.

3. Untuk setiap $a \in G$ maka terdapat $a^{-1} \in G$. Berdasarkan definisi elemen identitas maka $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$, maka dapat dikatakan bahwa a adalah invers dari a^{-1}. Karena invers bersifat tunggal maka diperoleh $(a^{-1})^{-1} = a$.
4. Ambil sebarang $a, b \in G$ maka terdapat $a^{-1}, b^{-1} \in G$.

   Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= \left((a * b) * b^{-1}\right) * a^{-1} && \text{[Sifat asosiatif]}\\
&= \left(a * (b * b^{-1})\right) * a^{-1} && \text{[Sifat asosiatif]}\\
&= (a * e) * a^{-1} && \text{[Sifat invers]}\\
&= a * a^{-1} && \text{[Sifat identitas]}\\
&= e && \text{[Sifat invers]}
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang senada,

$$
\begin{aligned}
(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * \left(a^{-1} * (a * b)\right) && \text{[Sifat asosiatif]}\\
&= b^{-1} * \left((a^{-1} * a) * b\right) && \text{[Sifat asosiatif]}\\
&= b^{-1} * (e * b) && \text{[Sifat invers]}\\
&= b^{-1} * b && \text{[Sifat identitas]}\\
&= e && \text{[Sifat invers]}
\end{aligned}
$$

Sehingga, dengan sifat ketunggalan invers, diperoleh $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

5. (i) Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dengan $a * b = a * c$ maka

	$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$	[$*$ Operasi]
$\Leftrightarrow$	$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$	[Sifat asosiatif]
$\Leftrightarrow$	$e * b = e * c$	[Sifat invers]
$\Leftrightarrow$	$b = c$	[Sifat identitas]

Jadi, jika $a * b = a * c$ maka $b = c$.

Selanjutnya,

(ii) Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dengan $a * c = b * c$ maka

	$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$	[$*$ Operasi]
$\Leftrightarrow$	$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$	[Sifat asosiatif]
$\Leftrightarrow$	$a * e = b * e$	[Sifat invers]
$\Leftrightarrow$	$a = b$	[Sifat identitas]

Jadi, jika $a * c = b * c$ maka $a = b$

Jadi, teorema tersebut terbukti.

2.1.2 Subgrup

Definisi 2.3

Misalkan G adalah suatu grup dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$. Himpunan H disebut suatu subgrup dari G, dinotasikan $H \leq G$, jika H juga merupakan grup terhadap operasi di G. Jika $H = \{e\}$ atau $H = G$ maka H disebut subgrup trivial (Gilbert & Gilbert, 2015).

Teorema 2.2

Misalkan $(G,*)$ grup dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$. Himpunan H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:

1. Jika $a, b \in H$ maka $a * b \in H$
2. Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

(Gilbert & Gilbert, 2015).

Bukti

Untuk membuktikan teorema tersebut, harus dibuktikan dari dua arah.

Misalkan $(G,*)$ grup dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$.

$(\Longrightarrow)$ Jika $H \leq G$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$.

Karena H adalah subgrup maka H memenuhi syarat-syarat grup. Sehingga karena H bersifat tertutup maka $a * b \in H$. Selanjutnya untuk $a \in H$, karena H memuat invers dari setiap elemennya, maka berlaku $a^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$. Dengan demikian kondisi 1 dan 2 sudah terpenuhi.

$(\Longleftarrow)$ Jika $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$, untuk setiap $a, b \in H$ maka maka $H \leq G$.

Karena $H \subseteq G$, maka sifat asosiatif di G berlaku juga di H. Kemudian karena $H \neq \emptyset$ maka terdapat $a \in H$, berdasarkan kondisi 2 terdapat $a^{-1} \in H$. Perhatikan bahwa, berdasarkan kondisi 1 diperoleh $e = a * a^{-1} \in H$ sehingga H memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers. Selanjutnya, berdasarkan kondisi 1 maka H tertutup. Jadi, terbukti bahwa H merupakan subgrup dari G.

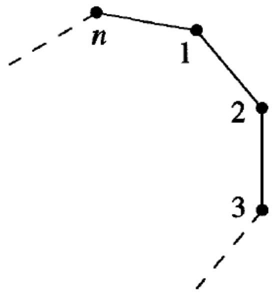
Dengan demikian, teorema tersebut terbukti.

Contoh

Masing-masing $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Oleh karena itu $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$.

2.1.3 Grup Dihedral

Diberikan segi-n beraturan yang berpusat di titik asal pada bidang-xy dan setiap sudutnya diberi label secara berurutan searah jarum jam dari 1 sampai n seperti pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Pelabelan pada Segi-n Beraturan

Segi-n beraturan dengan n sisi mempunyai $2n$ simetri yang berbeda yaitu n simetri rotasi dan n simetri refleksi. Selanjutnya, masing-masing simetri dideskripsikan dengan mengorespondensikan permutasi σ pada $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (Dummit & Foote, 2004).

Misalkan r merupakan rotasi yang searah jarum jam terhadap titik asal sejauh $\frac{2\pi}{n}$ radian maka σ permutasi yang memetakkan titik i ke $i + 1$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$, dan $\sigma(n) = 1$. Misalkan pula s merupakan refleksi terhadap sumbu simetri yang melalui titik 1 dan titik asal. Himpunan dari permutasi-permutasi tersebut yang dilengkapi dengan operasi komposisi memenuhi aksioma-aksioma pada grup. Oleh karena itu, didefinisikan suatu grup D_{2n} seperti yang dinyatakan dalam Definisi 2.4 (Dummit & Foote, 2004).

Definisi 2.4

Misalkan n bilangan bulat dan $n \geq 3$. Grup dihedral D_{2n} adalah grup dengan operasi komposisi dari simetri-simetri pada segi$-n$ beraturan (Dummit & Foote, 2004).

Grup dihedral D_{2n} dapat disederhanakan menggunakan beberapa notasi dan hitungan yang akan menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n}. Elemen identitas dari D_{2n} dinotasikan dengan 1. Selanjutnya, grup dihedral D_{2n} secara umum memiliki sifat sebagai berikut:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ merupakan elemen-elemen yang berbeda dan $r^n = 1$.

   Oleh karena itu, $|r| = n$.
2. $|s| = 2$.
3. $s \neq r^i$ untuk setiap i.
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk setiap $0 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $i \neq j$ jadi

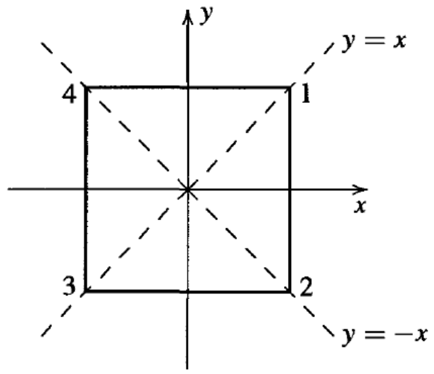
   $$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\},$$

   yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^j r^i$ untuk $j \in \{0,1\}, 0 \leq i \leq n - 1\}$
5. $rs = sr^{-1}$, hal ini menunjukkan bahwa D_{2n} tidak abel.
6. $r^i s = sr^{-i}$, untuk setiap $0 \leq i \leq n$

(Dummit & Foote, 2004).

Contoh

Misalkan $n = 4$, digambarkan suatu segi empat beraturan (persegi) pada bidang-xy. Sumbu-sumbu simetrinya adalah garis $x = 0$ (sumbu-y), $y = 0$ (sumbu-x), $y = x, y = -x$.



Gambar 2.2 Sumbu-sumbu Simetri pada Segi Empat Beraturan

Persegi tersebut diputar sebesar 90° searah jarum jam, maka menghasilkan permutasi sebagai berikut:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sedangkan refleksinya menghasilkan permutasi sebagai berikut:

$$a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, setiap permutasi dinotasikan sebagai berikut:

1. $a_1 = r \circ r \circ r \circ r = 1$
2. $a_2 = r$

3. $a_3 = r \circ r = r^2$
4. $a_4 = r \circ r \circ r = r^3$
5. $a_5 = s$
6. $a_8 = s \circ r = sr$
7. $a_7 = s \circ r^2 = sr^2$
8. $a_6 = s \circ r^3 = sr^3$

Sehingga diperoleh $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

Jika elemen-elemen di D_8 dioperasikan dengan operasi komposisi "$\circ$" maka diperoleh grup dihedral D_8. Selanjutnya hasil operasi komposisi dari D_8 disajikan pada tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* dari D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

2.1.4 Grup yang Dibangun oleh Subhimpunan

Definisi 2.5

Misalkan G adalah grup dan Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah subhimpunan dari G maka subgrup yang dibangun oleh X adalah

$$H = \langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \left\{ x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \middle| x_i \in X, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(Dummit & Foote, 2004).

Contoh

Diberikan grup dihedral $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Misalkan pula $X = \{r^2, sr\}$ adalah subhimpunan dari D_6. Subgrup yang dibangun oleh X dapat ditentukan dengan memperhatikan perkalian berikut

1. $(r^2)^2 \circ (sr)^2 = r$
2. $(r^2)^5 \circ (sr)^1 = s$

Karena $\langle r, s\rangle \subseteq \langle r^2, sr\rangle \subseteq \langle X\rangle = \langle r, s\rangle$, sehingga subgrup yang dibangun oleh X adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\} = D_6$.

Definisi 2.6

Misalkan G adalah suatu grup. Grup G disebut grup siklis jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^k | \; k \in \mathbb{Z}\}$. Selanjutnya, H dikatakan dibangun oleh a, dinotasikan dengan $H = \langle a\rangle$, atau a adalah pembangun dari H (Dummit & Foote, 2004).

Contoh

Misalkan n bilangan bulat dan $n \geq 3$ maka $D_{2n} = \langle s, r: r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1}\rangle$. Misalkan pula $N = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\} \leq D_{2n}$ maka $N = \langle r\rangle$ (Dummit & Foote, 2004).

Bukti

Akan ditunjukkan setiap $a \in N$ berlaku

$$a = r^k \text{ untuk } k \in \mathbb{Z}.$$

Perhatikan bahwa

$$r^n = 1, r^{n+1} = r, r^{n+2} = r^2, \ldots$$

$$r^{-1} = r^{n-1}, r^{-2} = r^{n-2}, \ldots$$

Secara umum, untuk menuliskan setiap $a \in N$ dalam bentuk r^k untuk $0 \leq k \leq n-1$ digunakan Algoritma Pembagian, yaitu

$$i = nq + k, \text{ untuk } 0 \leq k < n.$$

Sehingga

$$a = r^{nq+k} = (r^n)^q r^k = 1^q r^k = r^k.$$

Karena setiap $a \in N$ dapat dituliskan sebagai $a = r^k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$, maka dapat disimpukan bahwa $N = \langle r \rangle$.

Teorema 2.3

Setiap grup siklis adalah grup abel (Muchlisah, 2005).

Bukti

Misalkan G merupakan grup siklis dan $a \in G$ merupakan pembangun dari G, sehingga $G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ambil sebarang $x, y \in G$ maka $x = a^p$ dan $y = a^q$ untuk suatu $p, q \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $xy = yx$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} xy &= a^p a^q && [\text{Subtitusi } xy] \\ &= a^{p+q} && [\text{Sifat perpangkatan di } G] \\ &= a^{q+p} && [\text{Sifat komutatif di } \mathbb{Z}] \\ &= a^q a^p && [\text{Sifat perpangkatan di } G] \\ &= yx && [\text{Subtitusi } yx] \end{aligned}$$

Karena $xy = yx$ maka terbukti bahwa G merupakan grup abel.

Jadi, teorema tersebut terbukti.

2.1.5 Subgrup Normal

Definisi 2.7

Misalkan H adalah subgrup dari grup G. Untuk setiap a di G,

$$aH = \{x \in G | x = ah, h \in H\}$$

adalah koset kiri dari H di G dan a disebut wakil koset dari aH. Begitu juga untuk Ha disebut koset kanan dari H di G dan a disebut wakil koset dari Ha,

$$Ha = \{x \in G | x = ha, h \in H\}$$

(Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh

Diberikan grup D_6 dan $H = \{1, s\}$ adalah subgrup dari D_6.

Koset kanan dari H di D_6 adalah

1. $H1 = Hs = H$
2. $Hr = Hsr = \{r, sr\}$
3. $Hr^2 = Hsr^2 = \{r^2, sr^2\}$

Sedangkan koset kiri dari H di D_6 adalah

1. $1H = sH = H$
2. $rH = sr^2H = \{r, sr^2\}$
3. $r^2H = srH = \{r^2, sr\}$

Jadi, koset kanan dari H di D_6 adalah $H, \{r, sr\}, \{r^2, sr^2\}$ dan koset kiri dari H di D_6 adalah $H, \{r, sr^2\}, \{r^2, sr\}$.

Definisi 2.8

Misalkan N adalah subgrup dari G. Himpunan N disebut subgrup normal dari G, dinotasikan dengan $N \trianglelefteq G$, jika $aN = Na$ untuk setiap $a \in G$ (Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh

Diberikan grup D_6 dan $N = \{1, r, r^2\}$ adalah subgrup dari D_6.

Koset kanan dari N di D_6 adalah

1. $N1 = Nr = Nr^2 = \{1, r, r^2\} = N$

2. $Ns = Nsr = Nsr^2 = \{s, sr, sr^2\}$

Sedangkan koset kiri dari N di D_6 adalah

1. $1N = rN = r^2N = \{1, r, r^2\} = N$
2. $Ns = Nsr = Nsr^2 = \{s, sr, sr^2\}$

Karena $aN = Na$ untuk setiap $a \in D_6$ maka H adalah subgrup normal dari D_6.

Selanjutnya, berdasarkan Tarnauceanu (2015), semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil berbentuk

(i) $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d \geq 1$ dan $d|n$,

(ii) D_{2n}

Sedangkan semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap adalah sebagai berikut:

(i) $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$, untuk $d \geq 1$ dan $d|n$,

(ii) $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$,

(iii) $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$,

(iv) D_{2n}

Contoh

Diberikan grup dihedral $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Semua subgrup normal dari D_6 adalah

1. $\{1, r, r^2\}$
2. $\{1\}$
3. D_6.

Diberikan grup dihedral $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Semua subgrup normal dari D_8 adalah

1. $\{1, r, r^2, r^3\}$,

2. $\{1, r^2\}$,
3. $\{1\}$
4. $\{1, r^2, s, sr^2\}$,
5. $\{1, r^2, sr, sr^3\}$,
6. D_8.

2.1.6 Kelas Konjugasi

Definisi 2.9

Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$ maka $b \in G$ disebut suatu konjugat dari a jika $b = gag^{-1}$ untuk suatu $g \in G$. Selanjutnya, b dan a dikatakan saling konjugat (James & Liebeck, 2001).

Contoh

Diberikan grup $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ maka konjugat dari r pada grup D_6 adalah r dan r^2.

Teorema 2.4

Misalkan G grup dan $a, b \in G$. Relasi konjugasi $\mathcal{R}$ pada G yang didefinisikan

dengan $b\mathcal{R}a \Leftrightarrow b = gag^{-1}$ untuk suatu $g \in G$

merupakan suatu relasi ekivalen (Gallian, 2012).

Bukti

1. Ambil sebarang $a \in G$ jelas bahwa $a\mathcal{R}a$ karena terdapat elemen identitas $e \in G$ sehingga $eae^{-1} = eae = a$. Dengan demikian $\mathcal{R}$ bersifat refleksif.
2. Ambil sebarang $a, b \in G$ dengan $b\mathcal{R}a$ maka terdapat $g \in G$ yang memenuhi $b = gag^{-1}$

Perhatikan bahwa

$$b = gag^{-1}$$

$$g^{-1}bg = a$$

artinya, $a\mathcal{R}b$. Jadi, $\mathcal{R}$ bersifat simetris

3. Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dengan $b\mathcal{R}a$ dan $a\mathcal{R}c$ maka tedapat $g, h \in G$ yang memenuhi $b = gag^{-1}$ dan $a = hch^{-1}$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} b &= gag^{-1} \\ &= g(hch^{-1})g^{-1} && \text{[Subtitusi } a = hch^{-1}\text{]} \\ &= (gh)c(h^{-1}g^{-1}) && \text{[Sifat asosiatif]} \\ &= (gh)c(gh)^{-1} && \text{[Sifat invers hasil kali pada grup]} \\ &= mcm^{-1}, m \in G && \text{[Sifat ketertutupan pada grup]} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $b = mcm^{-1}$, untuk suatu $m \in G$. Oleh karena itu, $b\mathcal{R}c$. Dengan demikian $\mathcal{R}$ bersifat transitif.

Jadi, $\mathcal{R}$ merupakan suatu relasi ekivalen pada G.

Definisi 2.10

Kelas ekivalen dari relasi konjugasi pada suatu grup disebut kelas konjugasi.

Misalkan G adalah grup dan $a \in G$ maka kelas konjugasi dari a adalah

$$[a] = \{gag^{-1} | g \in G\}$$

(James & Liebeck, 2001).

Contoh

Diberikan grup $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kelas konjugasi dari $s \in D_6$ pada grup D_6 dapat diperoleh dengan meninjau semua hasil kali $gsg^{-1}, g \in G$ sebagai berikut:

1. $1 \circ s \circ 1^{-1} = 1 \circ s \circ 1 = s$
2. $r \circ s \circ r^{-1} = r \circ s \circ r^2 = sr$
3. $r^2 \circ s \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ s \circ r = sr^2$
4. $s \circ s \circ s^{-1} = s \circ s \circ s = s$
5. $sr \circ s \circ sr^{-1} = sr \circ s \circ sr = sr^2$
6. $sr^2 \circ s \circ (sr^2)^{-1} = sr^2 \circ s \circ sr^2 = sr$

Jadi, diperoleh $[s] = \{s, sr, sr^2\}$.

Selanjutnya, berdasarkan Conrad (2017), semua kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} adalah sebagai berikut:

1. Jika $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil, maka
   (i) $[1] = \{1\}$
   (ii) $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$
   (iii) $[s] = \left\{sr^i \mid 0 \leq i \leq n-1\right\} = \{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$
2. Jika $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap, maka
   (i) $[1] = \{1\}$
   (ii) $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$
   (iii) $[s] = \left\{sr^{2i} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, sr^4, \dots sr^{n-2}\}$
   (iv) $[sr] = \left\{sr^{2i+1} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$

Contoh

1. Kelas konjugasi dari $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ adalah
   a. $[1] = \{1\}$
   b. $[r] = \{r, r^2\} = [r^2]$
   c. $[s] = \{s, sr, sr^2\} = [sr] = [sr^2]$
2. Kelas konjugasi $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ adalah
   a. $[1] = \{1\}$
   b. $[r] = \{r, r^3\} = [r^3]$
   c. $[r^2] = \{r^2\}$
   d. $[s] = \{s, sr^2\} = [sr^2]$
   e. $[sr] = \{sr, sr^2\} = [sr^2]$

2.1.7 Dimensi dari Grup

Definisi 2.11

Misalkan G merupakan grup, dimensi dari G, dinotasikan $dim(G)$, adalah minimal dari banyaknya kelas konjugasi dari G yang membangun G (Kaplan & Lev, 2003).

Contoh

Misalkan $n = 3$ maka $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian, akan ditunjukkan dimensi dari grup D_6 adalah 1. Untuk menunjukkannya pilih kelas konjugasi $[s]$ dari D_6. Perhatikan bahwa $[s] = \{s, sr, sr^2\}$ sehingga diperoleh

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, sr^2 \rangle$$

Elemen $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$, sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle$.

Jadi, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_6 = \langle r, s \rangle$. Karena minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_6 adalah 1 maka diperoleh $dim(D_6) = 1$.

2.2 Kajian Agama

Kajian mengenai himpunan sudah dijelaskan dalam al-Qur'an. Misalnya penggolongan malaikat berdasarkan banyak sayapnya. Dimana golongan juga merupakan himpunan, karena himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang terdefinisi (Nurdin & Nufus, 2018). Allah SWT berfirman dalam surat Fathir ayat 1 yang berbunyi

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ فَاطِرِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ جَاعِلِ الْمَلٰۤىِٕكَةِ رُسُلًاۙ اُولِيْٓ اَجْنِحَةٍ مَّثْنٰى وَثُلٰثَ وَرُبٰعَۗ يَزِيْدُ فِى الْخَلْقِ مَا يَشَاۤءُۗ اِنَّ اللّٰهَ عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ ١

"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang Dia kehendaki. Sungguh, Allah Mahakuasa atas segala sesuatu". (Q.S. Fathir/35: 1).

Menurut (Ghoffar & al-Atsari, 2004), Allah SWT menjadikan malaikat memiliki sayap untuk menyampaikan apa yang diperintahkan oleh Allah SWT dengan cepat. Di antara malaikat tersebut ada yang memiliki dua sayap, tiga sayap, dan empat sayap. Menurut (Shihab, 2002), firman-Nya: *Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang Dia kehendaki*, penambahan ini dapat mencakup beberapa aspek. Ada yang ditambah kekuatan fisiknya, atau spiritual dan kecerdasannya. Penggalan ayat ini mengisyaratkan juga terdapat malaikat yang memiliki sayap lebih dari empat.

Malaikat memiliki perbedaan dan persamaan dalam hal sifat. Hal ini seperti yang telah difirmankan Allah SWT pada ayat 6 surat at-Tahrim yang berbunyi,

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوْا قُوْٓا اَنْفُسَكُمْ وَاَهْلِيْكُمْ نَارًا وَّقُوْدُهَا النَّاسُ وَالْحِجَارَةُ عَلَيْهَا مَلٰۤىِٕكَةٌ غِلَاظٌ شِدَادٌ لَّا يَعْصُوْنَ اللّٰهَ مَآ اَمَرَهُمْ وَيَفْعَلُوْنَ مَا يُؤْمَرُوْنَ ٦

“Wahai orang-orang yang beriman, peliharalah diri kalian dan keluarga kalian dari api neraka yang bahan bakarnya adalah manusia dan batu; penjaganya malaikat-malaikat yang kasar, keras, dan tidak durhaka kepada Allah terhadap apa yang Dia perintahkan kepada mereka dan selalu mengerjakan apa yang diperintahkan” (Q.S. At-Tahrim/66: 6).

Menurut (Ghoffar & al-Atsari, 2004), dalam firman-Nya: “*penjaganya malaikat-malaikat yang kasar”*, maksudnya adalah sifat malaikat sangat kasar, telah dihilangkan dari hatinya rasa kasihan terhadap orang-orang yang kafir kepada Allah SWT. Kemudian maksud dari “*yang keras”* adalah susunan tubuh mereka sangat keras, tebal, dan penampilannya menakutkan. Menurut (Az-Zuhaili, 2013), pada penggalan ayat: “*Dan tidak durhaka kepada Allah terhadap apa yang Dia perintahkan kepada mereka dan selalu mengerjakan apa yang diperintahkan”* menjelaskan bahwa kalimat pertama untuk menunjukkan ketaatan pada masa lampau. Sedangkan kalimat kedua menunjukkan ketaatan di masa mendatang.

Dalam al-Qur’an, Allah SWT secara tersirat telah menjelaskan tentang representasi dari grup dihedral. Salah satunya yang termaktub dalam Surat Yasin ayat 40 yang berbunyi

لَا الشَّمْسُ يَنْۢبَغِيْ لَهَآ اَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا الَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ ۗوَكُلٌّ فِيْ فَلَكٍ يَّسْبَحُوْنَ ٤٠

“Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malam pun tidak dapat mendahului siang. Dan masing-masing beredar pada garis edarnya” (Q.S. Yasin/36: 40).

Menurut (Al-Qarni, 2007), matahari tidak akan pernah menyusul bulan begitupula sebaliknya. Demikian pula malam tidak akan mendahului siang, begitu juga sebaliknya. Malam, siang, Matahari, bulan, telah memiliki tempat peredaran masing-masing dan tidak akan bertabrakan satu sama lain. Allah telah mengetahui peredaran dan ketentuan tempat mereka.

Tubuh manusia juga diciptakan dalam keadaan yang seimbang antara bagian demi bagian sehingga menjadi bentuk yang sempurna. Hal ini dijelaskan oleh Allah SWT dalam surat Al-Infithaar ayat 7 yang berbunyi

الَّذِيْ خَلَقَكَ فَسَوّٰىكَ فَعَدَلَكَۙ ٧

"Yang telah menciptakan kamu, lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang" (Q.S. Al-Infithaar/82: 7).

Menurut (Al-Atsari, 2004), Allah menjadikan dalam bentuk yang sempurna setiap detailnya yaitu, sepasang tangan yang sama panjangnya, sepasang kaki yang sama panjangnya, sepasang jari-jemari yang sama panjangnya antara yang kiri dan yang kanan, demikian seterusnya. Dalam penggalan ayat *"dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang"* artinya, menjadikan tubuhmu tegak lurus dalam bentuk yang sempurna. Tegak lurus dalam hal ini menerangkan bahwa manusia adalah spesies yang berjalan tegak lurus dengan kedua kaki. Struktur tubuh semacam ini memudahkan berbagai aktivitas manusia. Selain struktur tubuh yang sempurna, manusia juga dianugerahi akal yang sempurna pula, sehingga manusia memiliki akal yang kreatif, inovatif dan konstruktif sebagai khalifah di muka bumi.

2.3 Kajian Teori Dimensi dari Grup Dihedral

Untuk mencari dimensi dari grup digedral, akan dicari terlebih dahulu semua kelas konjugasi pada D_{2n}. Adapun semua kelas konjugasi dari D_{2n} adalah sebagai berikut:

a. Jika $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil, maka

   (i) $[1] = \{1\}$

   (ii) $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$

(iii) $[s] = \left\{sr^i | 0 \leq i \leq n-1\right\} = \{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$

b. Jika $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap, maka

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$

(iii) $[s] = \left\{sr^{2i} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, sr^4, \dots sr^{n-2}\}$

(iv) $[sr] = \left\{sr^{2i+1} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$

Berikutnya, akan dicari kelas konjugasi yang membangun D_{2n}. Kemudian, dicari minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{2n}. Minimal dari banyaknya kelas konjugasi tersebut dikatakan dimensi dari suatu grup dihedral.

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai sifat-sifat dimensi dari D_{2n}. Salah satu sifat dimensi dari ruang vektor terhadap subruangnya adalah: Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan Misalkan pula S adalah subruang dari V, maka $dim(S) \leq dim(V)$. Dalam hal ini, akan digunakan subgrup normal sebagai padanan dari subruang. Berikut adalah semua subgrup normal dari D_{2n}:

a. Jika $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil, maka

(i) $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ dengan $d \geq 1$ dan $d|n$,

(ii) D_{2n}.

b. Jika $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap, maka

(i) $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ dengan $d \geq 1$dan $d|n$,

(ii) $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$,

(iii) $\{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$,

(iv) D_{2n}

Selanjutnya, dicari dimensi dari setiap subgrup normal dari D_{2n} dan akan disimpulkan apakah sifat dimensi subgrup normal dari grup dihedral berpadanan dengan sifat dimensi subruang pada ruang vektor.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau studi pustaka, yaitu proses pengumpulan data maupun informasi dengan mengkaji berbagai macam sumber literatur seperti artikel jurnal, buku, dan sebagainya yang menjelaskan mengenai dimensi dari grup hingga, khususnya grup dihedral.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang ditempuh peneliti sebelum memulai penelitian ini adalah:

1. Mencari literatur utama yang akan dijadikan rujukan utama dalam menentukan topik pembahasan.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung yang berkaitan dengan pembahasan.
3. Mempelajari dan memahami konsep yang berhubungan dengan konsep dimensi dari grup hingga.
4. Mempelajari dan memahami konsep-konsep yang berhubungan dengan grup dihedral.
5. Mengumpulkan dan memahami hubungan dimensi dari ruang vektor terhadap subruangnya.
6. Mempelajari dan memahami mengenai konsep subgrup normal dari grup dihedral.

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam untuk penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan kelas-kelas konjugasi pada grup dihedral D_{2n}, $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$
   a. Menentukan kelas konjugasi yang membangun grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$ dengan cara:
      (i) Mendaftar semua kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
      (ii) Membangun grup dari beberapa kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
      (iii) Menentukan minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$
   b. Membuat dugaan dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil kemudian membuktikannya.
   c. Menentukan kelas konjugasi yang membangun grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$ dengan cara:
      (i) Mendaftar semua kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
      (ii) Membangun grup dari beberapa kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
      (iii) Menentukan minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$
   d. Membuat dugaan dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap kemudian membuktikannya.

2. Menentukan dimensi subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$

   a. Mendaftar semua subgrup normal dari D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.

   b. Menentukan kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$ dengan cara:

      (i) Mendaftar semua kelas konjugasi subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.

      (ii) Membangun grup dari beberapa kelas konjugasi subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.

      (iii) Menentukan minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.

   c. Membuat dugaan dimensi setiap subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil kemudian membuktikannya.

   d. Menentukan kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$ dengan cara:

      (i) Mendaftar semua kelas konjugasi subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.

      (ii) Membangun grup dari beberapa kelas konjugasi subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.

      (iii) Menentukan minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.

e. Membuat dugaan dimensi setiap subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap kemudian membuktikannya.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Dimensi dari Grup Dihedral D_{2n}

Pada bagian ini akan ditentukan dimensi dari grup dihedral D_{2n}. Untuk menentukan dimensi dari D_{2n} akan ditinjau melalui dua kasus yaitu untuk n ganjil dan n genap. Dalam menentukan dimensi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil secara umum, terlebih dahulu akan ditinjau dimensi beberapa grup dihedral tertentu antara lain D_6, D_{10}, D_{14}. Selanjutnya untuk menentukan dimensi dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap, terlebih dahulu akan ditinjau dimensi beberapa grup dihedral tertentu antara lain D_8, D_{12}, D_{16}.

4.1.1 Dimensi dari Grup Dihedral D_6

Untuk mencari dimensi dari $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, pertama akan dicari semua kelas konjugasinya. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_6:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r, r^2\}$
3. $[s] = \{s, sr, sr^2\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_6. Untuk itu, ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibangun oleh kelas konjugasi $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, sr^2 \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$ sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle$. Jadi, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_6 = \langle r, s \rangle$. Artinya, $[s]$ membangun D_6. Oleh karena itu, D_6 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Sehingga diperoleh $dim(D_6) = 1$.

4.1.2 Dimensi dari Grup Dihedral D_{10}

Untuk mencari dimensi dari $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$, pertama akan dicari semua kelas konjugasi dari D_{10}. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_{10}:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r, r^4\}$
3. $[r^2] = \{r^2, r^3\}$
4. $[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Berikutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{10}. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh kelas $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 \rangle$$

Perhatikan bahwa elemen $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$ sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle$.

Jadi, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_{10} = \langle r, s \rangle$. Artinya, $[s]$ membangun D_{10}. Karena D_{10} memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja, maka diperoleh $dim(D_{10}) = 1$.

4.1.3 Dimensi dari Grup Dihedral D_{14}

Untuk mencari dimensi dari

$D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$, pertama akan dicari semua kelas konjugasi dari D_{14}. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_{14}:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r, r^6\}$
3. $[r^2] = \{r^2, r^5\}$
4. $[r^3] = \{r^3, r^4\}$

5. $[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{14}. Oleh sebab itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibangun oleh kelas konjugasi $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6 \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$ sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle$

Jadi, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_{14} = \langle r, s \rangle$. Artinya, $[s]$ membangun D_{14}. Oleh karena itu, D_{14} memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, diperoleh $dim(D_{14}) = 1$.

4.1.4 Dimensi dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n Ganjil

Berdasarkan perhitungan dimensi grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3, 5, 7$ diperoleh dugaan bahwa dimensi dari grup dihedral untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil adalah 1. Selanjutnya, hasil ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1

Dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil adalah 1.

Bukti

Misalkan $n \geq 3$ dan n ganjil perhatikan grup dihedral

$$D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Untuk mencari dimensi dari D_{2n}, pertama akan dicari semua kelas konjugasi dari D_{2n}. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_{2n}:

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$

(iii) $[s] = \left\{sr^i | 0 \leq i \leq n-1\right\} = \{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{2n}. Oleh karena itu, ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, \dots, sr^{n-1} \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$ sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle$. Jadi, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_{2n} = \langle r, s \rangle$. Artinya $[s]$ membangun D_{2n}. Karena D_{2n} untuk n ganjil memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja, maka diperoleh $dim(D_{2n}) = 1$. Jadi, teorema tersebut terbukti.

4.1.5 Dimensi dari Grup Dihedral D_8

Untuk mencari dimensi dari $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, pertama, akan dicari semua kelas konjugasi dari D_8. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_8:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r, r^3\}$
3. $[r^2] = \{r^2\}$
4. $[s] = \{s, sr^2\}$
5. $[sr] = \{sr, sr^3\}$

Kemudian, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_8. Oleh karena itu, ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun satu kelas konjugasi.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah

$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\}$, oleh karena itu $[1]$ tidak membangun D_8.

2. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r, r^3 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r, r^3 \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$, oleh sebab itu $[r]$ tidak membangun D_8.

3. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah

$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$, artinya, $[r^2]$ tidak membangun D_8.

4. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr^2 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle s, sr^2 \rangle = \{1, r^2, s, sr^2\}$, oleh karena itu maka $[s]$ tidak membangun D_8.

5. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah

$$\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^3 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle sr, sr^3 \rangle = \{1, r^2, sr, sr^3\}$, artinya $[sr]$ tidak membangun D_8.

Karena D_8 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $dim(D_8) > 1$. Selanjutnya akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle [r], [s] \rangle = \langle r, r^3, s, sr^2 \rangle.$$

Karena $r, s \in \langle [r], [s] \rangle$ maka $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [r], [s] \rangle \subseteq D_8 = \langle r, s \rangle$. Oleh karena itu $[r]$ dan $[s]$ membangun D_8. Karena $dim(D_8) > 1$ dan D_8 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi maka $dim(D_8) = 2$.

4.1.6 Dimensi pada Grup Dihedral D_{12}

Untuk mencari dimensi dari

$D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$, pertama dicari terlebih dahulu semua kelas konjugasi dari D_{12}. Adapun semua kelas konjugasi dari D_{12} adalah sebagai berikut:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r, r^5\}$
3. $[r^2] = \{r^2, r^4\}$
4. $[r^3] = \{r^3\}$
5. $[s] = \{s, sr^2, sr^4\}$
6. $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5\}$

Selanjutnya, dicari minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{12}. Untuk itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah

$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$

   Perhatikan bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\}$, artinya $[1]$ tidak membangun D_{12}.

2. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r, r^5 \rangle.$$

   Perhatikan bahwa $\langle r, r^5 \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$, artinya,$[r]$ tidak membangun D_{12}.

3. Himpunan yang dibangun $[r^2]$ adalah

$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2, r^4 \rangle.$$

   Perhatikan bahwa $\langle r^2, r^4 \rangle = \{1, r^2, r^4\}$, oleh karena itu$[r^2]$ tidak membangun D_{12}.

4. Himpunan yang dibangun oleh $[r^3]$ adlah

$$\langle [r^3] \rangle = \langle r^3 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r^3 \rangle = \{1, r^3\}$, oleh karena itu $[r^3]$ tidak membangun D_{12}.

5. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr^2, sr^4 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle s, sr^2, sr^4 \rangle = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$, artinya $[s]$ tidak membangun D_{12}.

6. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah

$$\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^3, sr^5 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle sr, sr^3, sr^5 \rangle = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$, artinya $[sr]$ tidak membangun D_{12}.

Karena D_{12} tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $dim(D_{12}) > 1$. Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle [r], [s] \rangle = \langle r, r^5, s, sr^2, sr^4 \rangle.$$

Karena $r, s \in \langle [r], [s] \rangle$ maka $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [r], [s] \rangle \subseteq D_{12} = \langle r, s \rangle$. Oleh karena itu $[r]$ dan $[s]$ membangun D_{12}. Karena $dim(D_{12}) > 1$ dan D_{12} memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi maka diperoleh $dim(D_{12}) = 2$.

4.1.7 Dimensi pada Grup Dihedral D_{16}

Untuk mencari dimensi dari $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$, pertama, akan dicari semua kelas konjugasi dari D_{16}. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_{16}:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r, r^7\}$
3. $[r^2] = \{r^2, r^6\}$
4. $[r^3] = \{r^3, r^5\}$
5. $[r^4] = \{r^4\}$
6. $[s] = \{s, sr^2, sr^4, sr^6\}$
7. $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{16}. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah
$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\}$, artinya $[1]$ tidak membangun D_{16}.
2. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah
$$\langle [r] \rangle = \langle r, r^7 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle r, r^7 \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$, oleh karena itu $[r]$ tidak membangun D_{16}.
3. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah
$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2, r^6 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r^2, r^6 \rangle = \{1, r^2, r^4, r^6\}$, oleh karena itu $[r^2]$ tidak membangun D_{16}.

4. Himpunan yang dibangun oleh $[r^3]$ adalah

$$\langle [r^3] \rangle = \langle r^3, r^5 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r^3, r^5 \rangle = \{1, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$, artinya $[r^3]$ tidak membangun D_{16}.

5. Himpunan yang dibangun oleh $[r^4]$ adalah

$\langle [r^4] \rangle = \langle r^4 \rangle$.

Perhatikan bahwa $\langle r^4 \rangle = \{1, r^4\}$, oleh karena itu $[r^4]$ tidak membangun D_{16}.

6. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adala

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr^2, sr^4, sr^6 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle s, sr^2, sr^4, sr^6 \rangle = \{1, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$, artinya, $[s]$ tidak membangun D_{16}.

7. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah

$$\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^3, sr^5, sr^7 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle sr, sr^3, sr^5, sr^7 \rangle = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$, oleh karena itu $[sr]$ tidak membangun D_{16}.

Karena D_{16} tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $di\,m(D_{16}) > 1$. Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle [r], [s] \rangle = \langle r, r^7, s, sr^2, sr^4, sr^6 \rangle.$$

Karena $r, s \in \langle [r], [s] \rangle$, maka $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [r], [s] \rangle \subseteq D_{16} = \langle r, s \rangle$. Oleh karena itu $[r]$ dan $[s]$ membangun D_{16}. Karena $dim(D_{16}) > 1$ dan D_{16} memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi maka diperoleh $dim(D_{16}) = 2$.

4.1.8 Dimensi dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n Genap

Berdasarkan perhitungan dimensi grup dihedral D_{2n} dengan $n = 4, 6, 8$ diperoleh dugaan bahwa dimensi dari grup dihedral untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap adalah 2. Selanjutnya, hasil ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2

Dimensi dari grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap adalah 2.

Bukti

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap, perhatikan grup dihedral

$$D_{2n} = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}.$$

Untuk mencari dimensi dari D_{2n}, pertama akan dicari semua kelas konjugasi dari D_{2n}. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari D_{2n}:

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r] = \{r, r^{n-1}\}$untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$

(iii) $[s] = \left\{sr^{2i} : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, sr^4, \ldots sr^{n-2}\}$

(iv) $[sr] = \left\{sr^{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^3, sr^5, \ldots, sr^{n-1}\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun D_{2n}. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Andaikan D_{2n} dibangun oleh satu kelas konjugasi maka r dan s terdapat dalam satu kelas konjugasi. Artinya, $r = gsg^{-1}$ untuk suatu $g \in D_{2n}$. Misalkan $g = s^i r^j$ dengan $i \in \{0,1\}$ dan $0 \leq j \leq n - 1$. Diperoleh

$$rr^{-1} = gsg^{-1}r^{-1}$$

Karena r^{-1} adalah invers dari r dan $g = s^i r^j$ maka

$$1 = (s^i r^j)s(s^i r^j)^{-1}r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = s^i r^j s r^{-j} s^{-i} r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = s^i s r^{-j} r^{-j} s^{-i} r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = s^i s r^{-2j} s^{-i} r^{n-1}$$

Jika $i = 0$ maka

$$1 = sr^{-2j}r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = sr^{n-2j-1}$$

Jika $i = 1$ maka

$$1 = ssr^{-2j}sr^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = sr^{2j}r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = sr^{n+2j-1}$$

Di lain sisi, karena pada grup dihedral $s \neq r^i$ untuk sebarang i maka $sr^{n-2j-1} \neq s^2 = 1$ dan $sr^{n+2j-1} \neq s^2 = 1$. Oleh karena itu, terjadi kontradiksi.

Dengan demikian r dan s tidak berada dalam satu kelas konjugasi. Jadi, D_{2n} tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi. Oleh karena itu, $dim(D_{2n}) > 1$.

Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle [r], [s] \rangle = \langle r, r^{n-1}, s, sr^2, sr^4, \dots sr^{n-2} \rangle.$$

Karena $r, s \in \langle [r], [s] \rangle$ maka $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [r], [s] \rangle \subseteq D_{2n} = \langle r, s \rangle$. Oleh karena itu $[r]$ dan $[s]$ membangun D_{2n}. Karena $dim(D_{2n}) > 1$ dan D_{2n} memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi maka diperoleh $dim(D_{2n}) = 2$. Jadi, teorema tersebut terbukti.

4.2 Hubungan Dimensi Subgrup Normal dengan Grup pada Grup Dihedral D_{2n}

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai hubungan dimensi subgrup normal dengan dimensi dari grup pada grup dihedral. Sebelum itu, akan dijelaskan terlebih dahulu hubungan dimensi dari subruang dengan dimensi dari ruang vektor. Hal ini sebagai acuan untuk mencari hubungan dimensi dari subgrup dengan dimensi dari grup pada dihedral. Salah satu hubungan dimensi dari ruang vektor terhadap subruangnya adalah: Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan Misalkan pula S adalah subruang dari V, maka $dim(S) \leq dim(V)$.

Selanjutnya, akan dicari hubungan dimensi dari subgrup normal dengan grup pada grup dihedral yang berpadanan dengan hubungan di atas. Dalam hal ini, akan digunakan subgrup normal sejati sebagai padanan dari subruang.

4.2.1 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_6

Untuk mencari dimensi dari semua subgrup normal sejati dari D_6, pertama akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_6. Subgrup normal sejati dari D_6 yaitu $H_1 = \{1\}$ dan $H_2 = \{1, r, r^2\}$. Selanjutnya, akan dicari semua kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal.

a. Kelas konjugasi dari H_1 yaitu hanya $[1] = \{1\}$.

   Jelas bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\} = H_1$. Dengan demikian, $dim(H_1) = 1$.

b. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_2:

   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r] = \{r\}$
   3. $[r^2] = \{r^2\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_2. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle[r]\rangle = \langle r\rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r\rangle = \{1, r, r^2\} = H_2.$$

Artinya $[r]$ membangun H_2. Oleh karena itu, H_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_2) = 1$.

Sehingga diperoleh, dimensi dari sebarang subgrup normal sejati H dari D_6 adalah 1. Karena $dim(D_6)$ adalah 1 maka dapat disimpulkan bahwa $dim(H) \leq dim(D_6)$.

4.2.2 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{10}

Untuk mencari dimensi dari semua subgrup normal sejati dari D_{10}, pertama, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_{10}. Adapaun subgrup normal sejati dari D_{10} yaitu $H_1 = \{1\}$ dan $H_2 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$. Kemudian, akan dicari semua kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal.

a. Kelas konjugasi dari H_1 yaitu hanya $[1] = \{1\}$.

   Jelas bahwa $\langle 1\rangle = \{1\} = H_1$. Dengan demikian, $dim(H_1) = 1$.

b. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_2:

   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r] = \{r\}$
   3. $[r^2] = \{r^2\}$
   4. $[r^3] = \{r^3\}$
   5. $[r^4] = \{r^4\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_2. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4\} = H_2.$$

Artinya $[r]$ membangun H_2. Oleh karena itu, H_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_2) = 1$.

Sehingga diperoleh, dimensi dari sebarang subgrup normal sejati H dari D_{10} adalah 1. Karena $dim(D_{10})$ adalah 1 maka dapat disimpulkan bahwa $dim(H) \leq dim(D_{10})$.

4.2.3 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{14}

Untuk mencari dimensi dari semua subgrup normal sejati dari D_{14}, pertama, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_{14}. Adapaun subgrup normal sejati dari D_{14} yaitu $H_1 = \{1\}$ dan $H_2 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$. Kemudian, akan dicari semua kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal.

a. Kelas konjugasi dari H_1 yaitu hanya $[1] = \{1\}$.

   Jelas bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\} = H_1$. Dengan demikian, $dim(H_1) = 1$.

b. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_2:

   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r] = \{r\}$
   3. $[r^2] = \{r^2\}$
   4. $[r^3] = \{r^3\}$
   5. $[r^4] = \{r^4\}$

6. $[r^5] = \{r^5\}$
7. $[r^6] = \{r^6\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_2. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = H_2.$$

Artinya $[r]$ membangun H_2. Oleh karena itu, H_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_2) = 1$.

Sehingga diperoleh, dimensi dari sebarang subgrup normal sejati H dari D_{14} adalah 1. Karena $dim(D_{14})$ adalah 1 maka dapat disimpulkan bahwa $dim(H) \leq dim(D_{14})$.

4.2.4 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n Ganjil

Berdasarkan perhitungan dimensi setiap subgrup normal dari dihedral D_{2n} dengan $n = 3, 5, 7$, diperoleh dugaan bahwa hubungan dimensi dari sebarang subgrup normal H dari D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil adalah 1. Sehingga diperoleh, $dim(H) \leq dim(D_{2n})$. Selanjutnya, hasil ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.3

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil. Diberikan grup dihedral D_{2n} dan H adalah sebarang subgrup normal dari D_{2n}, maka $dim(H) \leq dim(D_{2n})$.

Bukti

Misalkan H adalah sebarang subgrup normal sejati dari D_{2n}, maka

$$H = N_d = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\} = \langle r^d \rangle$$

untuk suatu $d|n$ dan $d \geq 1$. Karena H siklis maka H komutatif. Oleh karena itu, $[r^d] = \{r^d\}$. Perhatikan himpunan yang dibangun oleh kelas konjugasi $[r^d]$ adalah

$$\langle [r^d] \rangle = \langle r^d \rangle = H$$

Dengan demikian, $dim(H) = 1$. Jadi, $dim(H) \leq dim(D_{2n})$ untuk sebarang subgrup normal H.

4.2.5 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_8

Untuk mencari dimensi dari setiap subgrup normal sejati dari D_8, pertama, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_8. Sebelum itu, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_8. Berikut adalah semua subgrup normal dari D_8:

1. $H_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$
2. $H_2 = \{1\}$
3. $H_3 = \{1, r^2\}$
4. $H_4 = \{1, r^2, s, sr^2\}$
5. $H_5 = \{1, r^2, sr, sr^3\}$

Selanjutnya, untuk menentukan dimensi dari setiap subgrup normal sejati dari D_8 terlebih dahulu dicari semua kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal.

a. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_1:
   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r] = \{r\}$
   3. $[r^2] = \{r^2\}$

4. $[r^3] = \{r^3\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_1. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\} = H_1.$$

Artinya $[r]$ membangun H_1. Oleh karena itu, H_1 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_1) = 1$.

b. Kelas konjugasi dari H_2 yaitu hanya $[1] = \{1\}$.

   Jelas bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\} = H_2$. Dengan demikian, $dim(H_2) = 1$.

c. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_3:

   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r^2] = \{r^2\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_3. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah

$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\} = H_3.$$

Artinya $[r^2]$ membangun H_3. Oleh karena itu, H_3 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_3) = 1$.

d. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_4:

   1. $[1] = \{1\}$

2. $[r^2] = \{r^2\}$
3. $[s] = \{s\}$
4. $[sr^2] = \{sr^2\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_4. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah
$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle [1] \rangle = \{1\}$, artinya $[1]$ tidak membangun H_4.
2. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah
$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$, artinya $[r^2]$ tidak membangun H_4.
3. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah
$$\langle [s] \rangle = \langle s \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle s \rangle = \{1, s\}$, artinya $[s]$ tidak membangun H_4.
4. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^2]$ adalah
$$\langle [sr^2] \rangle = \langle sr^2 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle sr^2 \rangle = \{1, sr^2\}$, artinya $[sr^2]$ tidak membangun H_4.

Karena H_4 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $dim(H_4) > 1$. Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[s]$ adalah
$$\langle [r^2], [s] \rangle = \langle r^2, s \rangle.$$

Karena $r^2, s \in \langle [r^2], [s] \rangle$ maka $\langle r^2, s \rangle \subseteq \langle [r^2], [s] \rangle \subseteq H_4 = \langle r^2, s \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[s]$ membangun H_4. Karena $dim(H_4) > 1$ dan H_4 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi, maka $dim(H_4) = 2$.

e. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_5:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^2] = \{r^2\}$
3. $[sr] = \{sr\}$
4. $[sr^3] = \{sr^3\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_5. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah
$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\}$, artinya $[1]$ tidak membangun H_5.
2. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah
$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$, artinya $[r^2]$ tidak membangun H_5.
3. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah
$$\langle [sr] \rangle = \langle sr \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle sr \rangle = \{1, sr\}$, artinya $[sr]$ tidak membangun H_5.
4. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^3]$ adalah
$$\langle [sr^3] \rangle = \langle sr^3 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle sr^3 \rangle = \{1, sr^3\}$, artinya $[sr^3]$ tidak membangun H_5.

Karena H_5 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $dim(H_5) > 1$. Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[sr]$ adalah

$$\langle [r^2], [sr] \rangle = \langle r^2, sr \rangle.$$

Karena $r^2, sr \in \langle [r^2], [sr] \rangle$ maka $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [r^2], [sr] \rangle \subseteq H_5 = \langle r^2, sr \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[sr]$ membangun H_5. Karena $dim(H_5) > 1$ dan H_5 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi, maka $dim(H_5) = 2$.

Karena dimensi dari D_8 adalah 2. Dengan demikian, diperoleh:

1. $dim(H_1) < dim(D_8)$
2. $dim(H_2) < dim(D_8)$
3. $dim(H_3) < dim(D_8)$
4. $dim(H_4) = dim(D_8)$
5. $dim(H_5) = dim(D_8)$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa sebarang subgrup normal sejati *H* dari D_8 berlaku $dim(H) \leq dim(D_8)$.

4.2.6 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{12}

Untuk mencari dimensi dari setiap subgrup normal sejati dari D_{12}, pertama, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_{12}. Sebelum itu, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_{12}. Berikut adalah semua subgrup normal dari D_{12}:

1. $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$
2. $H_2 = \{1\}$
3. $H_3 = \{1, r^2, r^4\}$
4. $H_4 = \{1, r^3\}$
5. $H_5 = \{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$

6. $H_6 = \{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$

Kemudian, untuk menentukan dimensi dari setiap subgrup normal sejati dari D_{12} terlebih dahulu dicari kelas-kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal.

a. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_1:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r] = \{r\}$
3. $[r^2] = \{r^2\}$
4. $[r^3] = \{r^3\}$
5. $[r^4] = \{r^4\}$
6. $[r^5] = \{r^5\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_1. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} = H_1.$$

Artinya $[r]$ membangun H_1. Oleh karena itu, H_1 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_1) = 1$.

b. Kelas konjugasi dari H_2 yaitu hanya $[1] = \{1\}$.

Jelas bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\} = H_2$. Dengan demikian, $dim(H_2) = 1$.

c. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_3:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^2] = \{r^2\}$

3. $[r^4] = \{r^4\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_3. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah

$$\langle[r^2]\rangle = \langle r^2 \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{1, r^2, r^4\} = H_3.$$

Artinya $[r^2]$ membangun H_3. Oleh karena itu, H_3 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_3) = 1$.

d. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_4:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^3] = \{r^3\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_4. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r^3]$ adalah

$$\langle[r^3]\rangle = \langle r^3 \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r^3 \rangle = \{1, r^3\} = H_4.$$

Artinya $[r^3]$ membangun H_4. Oleh karena itu, H_4 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_4) = 1$.

e. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_5:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^2] = \{r^2, r^4\}$
3. $[s] = \{s, sr^2, sr^4\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_5. Untuk itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr^2, sr^4 \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r^2 = s \circ sr^2 \in \langle [s] \rangle$.

Jadi, $\langle r^2, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq H_5 = \langle r^2, s \rangle$. Artinya $[s]$ membangun H_5. Oleh karena itu, H_5 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_5) = 1$.

f. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_6:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^2] = \{r^2, r^4\}$
3. $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_6. Untuk itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah

$$\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^3, sr^5 \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r^2 = sr \circ sr^3 \in \langle [sr] \rangle$.

Jadi, $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [sr] \rangle \subseteq H_6 = \langle r^2, sr \rangle$. Artinya $[sr]$ membangun H_6. Oleh karena itu, H_6 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_6) = 1$.

Karena dimensi dari D_{12} adalah 2. Dengan demikian, diperoleh

1. $dim(H_1) < dim(D_{12})$
2. $dim(H_2) < dim(D_{12})$
3. $dim(H_3) < dim(D_{12})$

4. $dim(H_4) < dim(D_{12})$
5. $dim(H_5) < dim(D_{12})$
6. $dim(H_6) < dim(D_{12})$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa sebarang subgrup normal sejati H dari D_{12} berlaku $dim(H) < dim(D_{12})$.

4.2.7 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{16}

Untuk mencari dimensi dari setiap subgrup normal sejati dari D_{16}, pertama, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_{16}. Sebelum itu, akan dicari semua subgrup normal sejati dari D_{16}. Berikut adalah semua subgrup normal dari D_{16}:

1. $H_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$
2. $H_2 = \{1\}$
3. $H_3 = \{1, r^2, r^4, r^6\}$
4. $H_4 = \{1, r^4\}$
5. $H_5 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$
6. $H_6 = \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$

Selanjutnya, untuk menentukan dimensi dari setiap subgrup normal sejati dari D_{16} terlebih dahulu dicari semua kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal.

a. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_1:
   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r] = \{r\}$
   3. $[r^2] = \{r^2\}$
   4. $[r^3] = \{r^3\}$
   5. $[r^4] = \{r^4\}$

6. $[r^5] = \{r^5\}$
7. $[r^6] = \{r^6\}$
8. $[r^7] = \{r^7\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_1. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\} = H_1.$$

Artinya $[r]$ membangun H_1. Oleh karena itu, H_1 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_1) = 1$.

b. Kelas konjugasi dari H_2 yaitu hanya $[1] = \{1\}$.

   Jelas bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\} = H_2$. Dengan demikian, $dim(H_2) = 1$.

c. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_3:

   1. $[1] = \{1\}$
   2. $[r^2] = \{r^2\}$
   3. $[r^4] = \{r^4\}$
   4. $[r^6] = \{r^6\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_3. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah

$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r^2 \rangle = \{1, r^2, r^4, r^6\} = H_3.$$

Artinya $[r^2]$ membangun H_3. Oleh karena itu, H_3 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_3) = 1$.

d. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_4:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^4] = \{r^4\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_4. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu. Himpunan yang dibangun oleh $[r^4]$ adalah

$$\langle [r^4] \rangle = \langle r^4 \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r^4 \rangle = \{1, r^4\} = H_4.$$

Artinya $[r^4]$ membangun H_4. Oleh karena itu, H_4 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(H_4) = 1$.

e. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_5:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^2] = \{r^2, r^6\}$
3. $[r^4] = \{r^4\}$
4. $[s] = \{s, sr^4\}$
5. $[sr^2] = \{sr^2, sr^6\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_5. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah

$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle[1]\rangle = \{1\}$, artinya $[1]$ tidak membangun H_5.

2. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah

$$\langle[r^2]\rangle = \langle r^2, r^6\rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r^2, r^6\rangle = \{1, r^2, r^4, r^6\}$, artinya $[r^2]$ tidak membangun H_5.

3. Himpunan yang dibangun oleh $[r^4]$ adalah

$$\langle[r^4]\rangle = \langle r^4\rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle r^4\rangle = \{r^4\}$, artinya $[1]$ tidak membangun H_5.

4. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah

$$\langle[s]\rangle = \langle s, sr^4\rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle s, sr^4\rangle = \{1, s, sr^4\}$, artinya $[s]$ tidak membangun H_5.

5. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^2]$ adalah

$$\langle[sr^2]\rangle = \langle sr^2, sr^6\rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle sr^2, sr^6\rangle = \{1, sr^2, sr^6\}$, artinya $[sr^2]$ tidak membangun H_5.

Karena H_5 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $dim(H_5) > 1$. Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle[r^2], [s]\rangle = \langle r^2, s, sr^4\rangle.$$

Karena $r^2, s \in \langle[r^2], [s]\rangle$ maka $\langle r^2, s\rangle \subseteq \langle[r^2], [s]\rangle \subseteq H_5 = \langle r^2, s\rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[s]$ membangun H_5. Karena $dim(H_5) > 1$ dan H_5 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi, maka $dim(H_5) = 2$.

f. Berikut adalah semua kelas konjugasi dari H_6:

1. $[1] = \{1\}$
2. $[r^2] = \{r^2, r^6\}$
3. $[r^4] = \{r^4\}$
4. $[sr] = \{sr, sr^5\}$
5. $[sr^3] = \{sr^3, sr^7\}$

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun H_6. Oleh karena itu, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi terlebih dahulu.

1. Himpunan yang dibangun oleh $[1]$ adalah
$$\langle [1] \rangle = \langle 1 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle 1 \rangle = \{1\}$, artinya $[1]$ tidak membangun H_6.
2. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ adalah
$$\langle [r^2] \rangle = \langle r^2, r^6 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle r^2, r^6 \rangle = \{1, r^2, r^4, r^6\}$, artinya $[r^2]$ tidak membangun H_6.
3. Himpunan yang dibangun oleh $[r^4]$ adalah
$$\langle [r^4] \rangle = \langle r^4 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle r^4 \rangle = \{1, r^4\}$, artinya $[r^4]$ tidak membangun H_6.
4. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah
$$\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^5 \rangle.$$
Perhatikan bahwa $\langle sr, sr^5 \rangle = \{1, sr, sr^5\}$, artinya $[sr]$ tidak membangun H_6.
5. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^3]$ adalah

$$\langle [sr^3] \rangle = \langle sr^3, sr^7 \rangle.$$

Perhatikan bahwa $\langle sr^3, sr^7 \rangle = \{1, sr^3, sr^7\}$, artinya $[sr^3]$ tidak membangun H_6.

Karena H_6 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka $dim(H_6) > 1$. Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[sr]$ adalah

$$\langle [r^2], [sr] \rangle = \langle r^2, r^6, sr, sr^5 \rangle.$$

Karena $r^2, sr \in \langle [r^2], [sr] \rangle$ maka $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [r^2], [sr] \rangle \subseteq H_6 = \langle r^2, sr \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[sr]$ membangun H_6. Karena $dim(H_6) > 1$ dan H_6 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi, maka $dim(H_6) = 2$.

Karena dimensi dari D_{16} adalah 2. Dengan demikian, diperoleh

1. $dim(H_1) < dim(D_{16})$
2. $dim(H_2) < dim(D_{16})$
3. $dim(H_3) < dim(D_{16})$
4. $dim(H_4) < dim(D_{16})$
5. $dim(H_5) = dim(D_{16})$
6. $dim(H_6) = dim(D_{16})$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa sebarang subgrup normal sejati H dari D_{16} berlaku $dim(H) \leq dim(D_{16})$.

4.2.8 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n Genap

Berdasarkan perhitungan dimensi setiap subgrup normal dari dihedral D_{2n} dengan $n = 4, 6, 8$, diperoleh dugaan bahwa hubungan dimensi dari sebarang subgrup normal H dari D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap adalah 1 atau 2.

Sehingga diperoleh, $dim(H) \leq dim(D_{2n})$. Selanjutnya, hasil ini dinyatakan dalam Teorema 4.4 dan Teorema 4.5. Untuk membuktikan kedua teorema tersebut, pertama akan dibuktikan dulu beberapa lemma berikut.

Lemma 4.1

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$, n genap dan $\frac{n}{2}$ ganjil.

a. Kelas konjugasi dari $N' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} \trianglelefteq D_{2n}$ adalah sebagai berikut:

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

(iii) $[s] = \left\{sr^{4i}, sr^{n-4i} \middle| \, 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

b. Kelas konjugasi dari $N'' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} \trianglelefteq D_{2n}$ adalah sebagai berikut:

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

(iii) $[sr] = \left\{sr^{4i+1}, sr^{n-4i+1} \middle| \, 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Bukti

a. Berikut akan ditunjukkan semua kelas konjugsi dari N':

1. Akan dicari kelas konjugasi dari $1 \in N'$.

   Ambil sebarang $a \in N'$

   Perhatikan bahwa $a \circ 1 \circ a^{-1} = 1$

   Jadi, $[1] = \{1\}$.

2. Akan dicari kelas konjugasi dari $r^{2k} \in N'$ dengan $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ r^{2k} \circ r^{n-2i} = r^{2k}$

Ambil sebarang $sr^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ r^{2k} \circ sr^{2i} = r^{-2k} = r^{n-2k}$.

Jadi, $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$.

3. Akan dicari kelas konjugasi dari $s \in N'$

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ s \circ r^{n-2i} = sr^{n-4i}$.

   Ambil sebarang $sr^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ s \circ sr^{2i} = sr^{4i}$.

   Jadi, $[s] = \left\{sr^{4i}, sr^{n-4i} |\ 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

b. Berikut akan ditunjukkan semua kelas konjugsi dari N'':

1. Akan dicari kelas konjugasi dari $1 \in N''$.

   Ambil sebarang $a \in N''$.

   Perhatikan bahwa $a \circ 1 \circ a^{-1} = 1$.

   Jadi, $[1] = \{1\}$.

2. Akan ditunjukkan kelas konjugasi dari $r^{2k} \in N''$

   dengan $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ r^{2k} \circ r^{n-2i} = r^{n+2k} = r^{2k}$

   Sehingga, elemen r^{2k} saling berkonjugasi dengan elemen r^{2k}.

   Ambil sebarang $sr^{2i} \in N_4$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ r^{2k} \circ sr^{2i} = r^{-2k} = r^{n-2k}$.

Sehingga, elemen r^{2k} saling berkonjugasi dengan elemen r^{n-2k}.

Jadi, $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$.

3. Akan dicari kelas konjugasi dari $sr \in N''$

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ sr \circ r^{n-2i} = sr^{n-4i+1}$.

   Ambil sebarang $sr^{2i+1} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i+1} \circ sr \circ sr^{2i+1} = sr^{4i+1}$.

   Jadi, $[sr] = \left\{sr^{4i+1}, sr^{n-4i+1} \middle|\, 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Dengan demikian, lemma tersebut terbukti.

Lemma 4.2

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}, n$ genap dan $\frac{n}{2}$ genap.

a. Kelas konjugasi dari $N' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} \trianglelefteq D_{2n}$ adalah sebagai berikut:

   (i) $[1] = \{1\}$

   (ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

   (iii) $[s] = \left\{sr^{4i}, sr^{n-4i} \middle| 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^4, \dots, sr^{n-4}\}$.

   (iv) $[sr^2] = \left\{sr^{4i+2}, sr^{n-4i-2} \middle| 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr^2, sr^6, \dots, sr^{n-2}\}$.

b. Kelas konjugasi dari $N'' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} \trianglelefteq D_{2n}$ adalah sebagai berikut:

   (i) $[1] = \{1\}$

   (ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

   (iii) $[sr] = \left\{sr^{4i-1}, sr^{n-4i+1} \middle|\, 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^5, \dots, sr^{n-3}\}$.

(iv) $[sr^3] = \left\{sr^{4i-3}, sr^{n-4i+3} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr^3, sr^7, \dots, sr^{n-1}\}$.

Bukti

a. Berikut akan ditunjukkan semua kelas konjugsi dari N':

1. Akan dicari kelas konjugasi dari $1 \in N'$.

   Ambil sebarang $a \in N'$

   Perhatikan bahwa $a \circ 1 \circ a^{-1} = 1$

   Jadi, $[1] = \{1\}$.

2. Akan dicari kelas konjugasi dari $r^{2k} \in N'$ dengan $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ r^{2k} \circ r^{n-2i} = r^{n+2k} = r^{2k}$

   Ambil sebarang $sr^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ r^{2k} \circ sr^{2i} = r^{-2k} = r^{n-2k}$.

   Jadi, $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$.

3. Akan dicari kelas konjugasi dari $s \in N'$

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ s \circ r^{n-2i} = sr^{n-4i}$

   Ambil sebarang $sr^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ s \circ sr^{2i} = sr^{4i}$.

   Jadi, $[s] = \left\{sr^{4i}, sr^{n-4i} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^4, \dots, sr^{n-4}\}$.

4. Akan dicari kelas konjugasi dari $sr^2 \in N'$

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ sr^2 \circ r^{n-2i} = sr^{n-4i+2}$.

Ambil sebarang $sr^{2i} \in N'$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ sr^2 \circ sr^{2i} = sr^{n+4i-2} = sr^{4i-2}$.

Jadi, $[sr^2] = \left\{sr^{4i-2}, sr^{n-4i+2} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr^2, sr^6, \dots, sr^{n-2}\}$.

b. Berikut akan dicari semua kelas konjugasi dari N'':

1. Akan dicari kelas konjugasi dari $1 \in N''$.

   Ambil sebarang $a \in N''$

   Perhatikan bahwa $a \circ 1 \circ a^{-1} = 1$

   Jadi, $[1] = \{1\}$.

2. Akan dicari kelas konjugasi dari $r^{2k} \in N''$ dengan $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ r^{2k} \circ r^{n-2i} = r^{n+2k} = r^{2k}$

   Ambil sebarang $sr^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ r^{2k} \circ sr^{2i} = r^{-2k} = r^{n-2k}$.

   Jadi, $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$.

3. Akan dicari kelas konjugasi dari $sr \in N''$

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ sr \circ r^{n-2i} = sr^{n-4i+1}$

   Ambil sebarang $sr^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

   Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ sr \circ sr^{2i} = sr^{n+4i-1} = sr^{4i-1}$.

   Jadi, $[sr] = \left\{sr^{4i-1}, sr^{n-4i+1} | \ 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^5, \dots, sr^{n-3}\}$.

4. Akan dicari kelas konjugasi dari $sr^3 \in N''$

   Ambil sebarang $r^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

Perhatikan bahwa $r^{2i} \circ sr^3 \circ r^{n-2i} = sr^{n-4i+3}$.

Ambil sebarang $sr^{2i} \in N''$ dengan $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

Perhatikan bahwa $sr^{2i} \circ sr^3 \circ sr^{2i} = sr^{4i+n-3} = sr^{4i-3}$.

Jadi, $[sr^3] = \left\{sr^{4i-3}, sr^{n-4i+3} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr^3, sr^7, \dots, sr^{n-1}\}$.

Dengan demikian, lemma tersebut terbukti.

Teorema 4.4

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$, n genap dan $\frac{n}{2}$ ganjil. Diberikan grup dihedral D_{2n} dan Misalkan pula N adalah sebarang subgrup normal sejati dari D_{2n}, maka $dim(N) < dim(D_{2n})$.

Bukti

Semua subgrup normal sejati dari D_{2n} untuk n genap adalah sebagai berikut:

(i) $N_d = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d|n$

(ii) $N' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$

(iii) $N'' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$

Misalkan H adalah sebarang subgrup normal sejati dari D_{2n}, maka

$$H = N_d = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\} = \langle r^d \rangle$$

untuk suatu $d|n$ dan $d \geq 1$. Karena H siklis maka H komutatif. Oleh karena itu, $[r^d] = \{r^d\}$. Perhatikan himpunan yang dibangun oleh kelas konjugasi $[r^d]$ adalah

$$\langle [r^d] \rangle = \langle r^d \rangle = H$$

Dengan demikian, $dim(N_d) = 1$.

Berikutnya, akan dicari dimensi dari N'. Berdasarkan Lemma 4.1 maka kelas konjugasi dari N' adalah

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$

(iii) $[s] = \left\{sr^{4i}, sr^{n-4i} \middle| \, 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun N'. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr^2, \dots, sr^{n-2} \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r^2 = s \circ sr^2 \in \langle [s] \rangle$ sehingga $r^2, s \in \langle [s] \rangle$.

Jadi, $\langle r^2, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq N' = \langle r^2, s \rangle$. Artinya $[s]$ membangun N'. Oleh karena itu, N' memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(N') = 1$.

Selanjutnya, akan dicari dimensi dari N''. Berdasarkan Lemma 4.1 maka kelas konjugasi dari N'' adalah

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$

(iii) $[sr] = \left\{sr^{4i+1}, sr^{n-4i+1} \middle| \, 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun N''. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$ adalah

$$\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^3, \dots, sr^{n-1} \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r^2 = sr \circ sr^3 \in \langle [sr] \rangle$ sehingga $r^2, sr \in \langle [sr] \rangle$.

Jadi, $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [sr] \rangle \subseteq N'' = \langle r^2, sr \rangle$. Artinya $[sr]$ membangun N''. Oleh karena itu, N'' memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, $dim(N'') = 1$.

Sehingga diperoleh, dimensi dari sebarang subgrup normal sejati N dari D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}, n$ genap dan $\frac{n}{2}$ ganjil adalah 1. Karena $dim(D_{2n})$ untuk n genap adalah 2 maka dapat disimpulkan bahwa $dim(N) < dim(D_{2n})$.

Teorema 4.5

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$, n genap dan $\frac{n}{2}$ genap. Diberikan grup dihedral D_{2n} dan Misalkan pula N adalah sebarang subgrup normal sejati dari D_{2n}, maka $dim(N) \leq dim(D_{2n})$.

Bukti

Semua subgrup normal sejati dari D_{2n} untuk n genap adalah sebagai berikut:

(i) $N_d = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d|n$

(ii) $N' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$,

(iii) $N'' = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$

Misalkan H adalah sebarang subgrup normal sejati dari D_{2n}, maka

$$H = N_d = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\} = \langle r^d \rangle$$

untuk suatu $d|n$ dan $d \geq 1$. Karena H siklis maka H komutatif. Oleh karena itu, $[r^d] = \{r^d\}$. Perhatikan himpunan yang dibangun oleh kelas konjugasi $[r^d]$ adalah

$$\langle [r^d] \rangle = \langle r^d \rangle = H$$

Dengan demikian, $dim(N_d) = 1$.

Berikutnya, akan dicari dimensi dari N'. Berdasarkan Lemma 4.2 maka kelas konjugasi dari N' adalah

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

(iii) $[s] = \left\{sr^{4i}, sr^{n-4i} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^4, \dots, sr^{n-4}\}$.

(iv) $[sr^2] = \left\{sr^{4i-2}, sr^{n-4i+2} | 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr^2, sr^6, \dots, sr^{n-2}\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun N'. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Andaikan N' dibangun oleh satu kelas konjugasi maka r^2 dan s terdapat dalam satu kelas konjugasi. Artinya, $r^2 = gsg^{-1}$ untuk suatu $g \in N'$. Misalkan $g = s^i r^{2j}$ dengan $i \in \{0,1\}$ dan $0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$. Diperoleh

$$r^2 r^{n-2} = gsg^{-1} r^{n-2}$$

Karena r^{n-2} adalah invers dari r^2 dan $g = s^i r^j$ maka

$$1 = (s^i r^{2j}) s (s^i r^{2j})^{-1} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s^i r^{2j} s r^{-2j} s^{-i} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s^i s r^{-2j} r^{-2j} s^{-i} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s^i s r^{-4j} s^{-i} r^{n-2}$$

Jika $i = 0$ maka

$$1 = s r^{-4j} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s r^{n-4j-2}$$

Jika $i = 1$ maka

$$1 = s s r^{-4j} s r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s r^{4j} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s r^{n+4j-2}$$

Di lain sisi, karena pada grup dihedral $s \neq r^i$ untuk sebarang i maka $sr^{n-4j-2} \neq s^2 = 1$ dan $sr^{n+4j-2} \neq s^2 = 1$. Oleh karena itu, terjadi kontradiksi.

Dengan demikian r^2 dan s tidak berada dalam satu kelas konjugasi. Jadi, N' tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi. Oleh karena itu, $dim(N') > 1$.

Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle [r^2],[s]\rangle = \langle r, r^{n-1}, s, sr^2, sr^4, \dots sr^{n-2}\rangle.$$

Karena $r^2, s \in \langle [r^2],[s]\rangle$ maka $\langle r^2, s\rangle \subseteq \langle [r^2],[s]\rangle \subseteq D_{2n} = \langle r^2, s\rangle$. Oleh karena itu $[r^2]$ dan $[s]$ membangun N'. Karena $dim(N') > 1$ dan N' memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi maka diperoleh $dim(N') = 2$.

Berikutnya, akan dicari dimensi dari N''. Berdasarkan Lemma 4.2 maka kelas konjugasi dari N'' adalah

(i) $[1] = \{1\}$

(ii) $[r^{2k}] = \{r^{2k}, r^{n-2k}\}$ untuk $1 \le k \le \frac{n}{2} - 1$

(iii) $[sr] = \left\{sr^{4i-1}, sr^{n-4i+1} \mid 0 \le i \le \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr, sr^5, \dots, sr^{n-3}\}$.

(iv) $[sr^3] = \left\{sr^{4i-3}, sr^{n-4i+3} \mid 0 \le i \le \frac{n}{2} - 1\right\} = \{sr^3, sr^7, \dots, sr^{n-1}\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal banyaknya kelas konjugasi yang membangun N''. Untuk itu, akan ditinjau terlebih dahulu himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Andaikan N'' dibangun oleh satu kelas konjugasi maka r^2 dan sr terdapat dalam satu kelas konjugasi. Artinya, $r^2 = gsrg^{-1}$ untuk suatu $g \in N'$. Misalkan $g = s^i r^{2j+1}$ dengan $i \in \{0,1\}$ dan $0 \le j \le \frac{n}{2} - 1$. Diperoleh

$$r^2 r^{n-2} = gsg^{-1} r^{n-2}$$

Karena r^{n-2} adalah invers dari r^2 dan $g = s^i r^j$ maka

$$1 = (s^i r^{2j+1}) s (s^i r^{2j+1})^{-1} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s^i r^{2j+1} s r^{-2j-1} s^{-i} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s^i s r^{-2j-1} r^{-2j-1} s^{-i} r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = s^i s r^{-4j-1} s^{-i} r^{n-2}$$

Jika $i = 0$ maka

$$1 = sr^{-4j-1}r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = sr^{n-4j-3}$$

Jika $i = 1$ maka

$$1 = ssr^{-4j-1}sr^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = sr^{4j+1}r^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = sr^{n+4j-1}$$

Di lain sisi, karena pada grup dihedral $s \neq r^i$ untuk sebarang i maka $sr^{n-4j-3} \neq s^2 = 1$ dan $sr^{n+4j-1} \neq s^2 = 1$ Oleh karena itu, terjadi kontradiksi.

Dengan demikian r^2 dan sr tidak berada dalam satu kelas konjugasi. Jadi, N'' tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi. Oleh karena itu, $dim(N'') > 1$.

Selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[sr]$ adalah

$$\langle [r^2], [sr] \rangle = \langle r^2, r^{n-2}, sr, sr^5, \ldots, sr^{n-1} \rangle.$$

Karena $r^2, sr \in \langle [r^2], [sr] \rangle$ maka $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [r^2], [sr] \rangle \subseteq N'' = \langle r^2, sr \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[sr]$ membangun N''. Karena $dim(N'') > 1$. dan N'' memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari dua kelas konjugasi, maka $dim(N'') = 2$.

Sehingga diperoleh dimensi dari sebarang subgrup normal sejati N dari D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$, dan n genap adalah 1 atau 2. Karena $dim(D_{2n})$ untuk n genap adalah 2 maka dapat disimpulkan bahwa $dim(N) \leq dim(D_{2n})$.

4.3 Integrasi Agama

Kajian mengenai himpunan sudah dijelaskan dalam Al-Qur'an. Salah satunya dalam surat Fathir ayat 1. Allah SWT menjadikan malaikat memiliki sayap untuk menyampaikan apa yang diperintahkan oleh Allah SWT dengan cepat. Diantara malaikat tersebut ada yang memiliki dua sayap, tiga sayap, dan empat sayap. Hal ini merepresentasikan himpunan malaikat berdasarkan banyak sayapnya. Selain dalam al-Qur'an, penjelasan mengenai banyaknya sayap malaikat juga diceritakan dalam beberapa hadits. Salah satunya dalam hadits yang diriwayatkan oleh Bukhori 3232 dan Muslim 174. 'Abdullah bin Mas'ud mengatakan:

"Sesungguhnya Nabi Shallahu 'alaihi wa sallam melihat jibril dengan 600 sayap" (HR. Bukhari 3232 dan Muslim 174).

Hadits ini mengisyaratkan bahwa terdapat himpunan malaikat yang memiliki sayap lebih dari empat. Meskipun malaikat memiliki banyak sayap yang berbeda-beda, tetapi memiliki fungsi yang sama yaitu untuk menyampaikan apa yang diperintahkan oleh Allah SWT dengan cepat.

Kemudian, kata أَجْنِحَةٍ merupakan bentuk jamak dari kata جَنَاحُ yang secara harfiah, memang diartikan sebagai sayap. Akan tetapi kata tersebut juga dapat diartikan sebagai kekuatan. Kekuatan ini berhubungan dengan kecepatan dan kemampuan gerak dalam menyampaikan apa yang diperintahkan oleh Allah SWT. Terdapat malaikat yang bergerak dalam satu jalur dalam satu waktu, ada yang bergerak dalam dua jalur, tiga jalur, empat jalur seperti menembus satu ruang ke ruang yang lain tanpa merusak batas-batas di sekelilingnya. Lebih lanjut, terdapat malaikat yang berkemampuan untuk bergerak dalam 600 jalur dalam satu kali waktu. Hal ini dapat artikan bahwa Allah SWT menjelaskan tentang dimensi dari himpunan, dalam hal ini adalah himpunan malaikat.

Selanjutnya, dalam hal sifat, setiap himpunan malaikat memiliki perbedaan dan kesamaan. Perbedaan dan kesamaan sifat ini dijelaskan dalam al-Qur’an, yaitu dalam surat at-Tahrim ayat 6. Allah SWT menjelaskan bahwa malaikat penjaga neraka memiliki sifat yang kasar dan keras. Akan tetapi sifat ini hanya berlaku untuk himpunan malaikat tertentu saja. Sedangkan secara umum setiap himpunan malaikat memiliki sifat tidak pernah durhaka kepada Allah dan selalu mengerjakan apa yang Allah perintahkan. Hal ini menunjukkan bahwa himpunan dengan syarat tertentu memiliki perbedaan dan kesamaan. Jika dihubungkan dengan pembahasan dalam penelitian ini, ruang vektor dan grup hingga masing-masing merupakan himpunan dengan perbedaan syarat. Akan tetapi kedua himpunan tersebut juga memiliki kesamaan sifat. Salah satunya adalah konsep dimensi.

Salah satu jenis grup hingga adalah grup dihedral. Secara tersirat Allah SWT telah menjelaskan mengenai representasi dari grup dihedral. Salah satunya pada surat Yasin ayat 40 yang menjelaskan mengenai sistem tata surya. Matahari tidak akan pernah menyusul bulan, begitupula sebaliknya. Demikian pula malam tidak akan mendahului siang, begitu juga sebaliknya. Malam, siang, matahari, bulan, telah memiliki tempat peredaran masing-masing dan tidak akan bertabrakan satu sama lain. Allah telah mengetahui peredaran dan ketentuan tempat mereka. Hal ini merupakan representasi dari grup dihedral dimana matahari sebagai pusat. Sedangkan benda-benda angkasa seperti planet, meteor, asteroid dan sebagainya berada di sekeliling matahari, seolah-olah sudah diurutkan berdasarkan urutannya.

Kemudian, benda-benda angkasa tersebut berotasi mengelilingi matahari sesuai garis edarnya.

Representasi grup dihedral juga terdapat dalam susunan tubuh manusia. Manusia diciptakan dalam keadaan yang seimbang antara bagian demi bagian sehingga menjadi bentuk yang sempurna. Allah SWT dalam surat Al-Infithaar ayat 7 menjelaskan tentang penciptaan susunan tubuh manusia yang seimbang dan simetri. Allah menjadikan dalam bentuk yang sempurna setiap detailnya yaitu, sepasang tangan yang sama panjangnya, sepasang kaki yang sama panjangnya, sepasang jari-jemari yang sama panjangnya antara yang kiri dan yang kanan, demikian seterusnya. Susunan yang simetri semacam ini merupakan representasi dari grup dihedral.

Allah SWT juga berfirman dalam surat al-Qamar ayat 49 yang berbunyi

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ ۝

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran (Q.S. al-Qamar/54: 49).

Allah SWT menjelaskan bahwa segala sesuatu diciptakan sesuai dengan ukurannya. Keseimbangan ukuran ini menjadikan bentuk fisik yang sempurna pada setiap makhluq-Nya. Misalnya dapat dijumpai dalam *kingdom plantae* (dunia tumbuhan) dan *kingdom animalia* (dunia binatang). Salah satu contoh dalam dunia tumbuhan, terdapat *Hibiscus rosa-sinensis L.* atau kembang sepatu. Kembang sepatu memiliki bentuk bunga simetri radial, yaitu memiliki banyak bidang simetri. Sedangkan dalam dunia binatang terdapat *asteroidea* atau bintang laut. Bintang laut juga termasuk jenis simetri radial, umumnya memiliki lima lengan. Hal ini menunjukkan bahwa representasi grup dihedral juga banyak ditemukan di alam.

Keseimbangan ciptaan Allah tidak hanya berlaku pada hal yang super besar seperti tata surya, tidak hanya berlaku pada makhluq hidup, akan tetapi berlaku sampai pada tingkat molekuler. Salah satu contohnya terdapat pada molekul kristal air. Allah SWT telah menjelaskan tentang air dalam surat

اَللّٰهُ الَّذِيْ خَلَقَ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضَ وَاَنْزَلَ مِنَ السَّمَاۤءِ مَاۤءً فَاَخْرَجَ بِهٖ مِنَ الثَّمَرٰتِ رِزْقًا لَّكُمْۚ وَسَخَّرَ لَكُمُ
الْفُلْكَ لِتَجْرِيَ فِى الْبَحْرِ بِاَمْرِهٖۚ وَسَخَّرَ لَكُمُ الْاَنْهٰرَ ٣٢

"Allahlah yang telah menciptakan langit dan bumi, menurunkan air (hujan) dari langit, lalu dengan (air hujan) itu Dia mengeluarkan berbagai buah-buahan sebagai rezeki untukmu. Dia juga telah menundukkan kapal bagimu agar berlayar di lautan dengan kehendak-Nya. Dia pun telah menundukkan sungai-sungai bagimu" (Q.S Ibrahim/14: 32).

Maha besar Allah yang telah menciptakan air yang mempunyai banyak manfaat bagi kehidupan manusia. Selain bermanfaat bagi manusia, air juga memiliki sifat yang unik. Sifat air dapat dipahami dengan memahami struktur dan ikatan molekul air. Molekul air terdiri dari 2 atom hidrogen dan 1 atom oksigen. Jika air dibekukan pada suhu $-25°C$, maka akan terbentuk kristal air. Kristal air yang sempurna akan membentuk heksagon yang indah. Bentuk heksagon ini menunjukkan bahwa kristal air juga merepresentasikan grup dihedral.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Diberikan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$, berdasarkan hasil pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan antara lain:

1. Dimensi dari grup dihedral D_{2n} dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan semua kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n}.
   b. Membangun grup dari himpunan kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n}.
   c. Menentukan minimal dari banyaknya kelas konjugasi yang membangun grup dihedral.

   Sehingga diperoleh dimensi dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$dim(D_{2n}) = \begin{cases} 1, & n \ ganjil \\ 2, & n \ genap \end{cases}$$

2. Misalkan N adalah sebarang subgrup normal dari grup dihedral D_{2n}, maka berlaku

$$dim(N) \leq dim(D_{2n}).$$

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Penelitian selanjutnya diharapkan mampu untuk mengkaji tentang sifat dimensi dari grup yang berpadanan dengan sifat dimensi pada ruang vektor. Salah satunya adalah sifat: Misalkan S dan T adalah subruang dari suatu ruang vektor V

maka $dim(S) + dim(T) = dim(S + T) + dim(S \cap T)$. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji apakah sifat tersebut berlaku pada grup.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Atsari, A. I. (2004). *Terjemah Tafsir Juz 'Amma.* Solo: At-Tibyan.

Al-Qarni, A. (2007). *Tafsir muyassar.* Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qur'an dan Terjemahnya. (2019). Jakarta: Kementrian Agama RI.

Az-Zuhaili, W. (2013). *Tafsir Al-Wasith.* Jakarta: Gema Insani.

Chodjim, A. (2008). *Alfatihah: Membuka Mata Batin dengan Surah Pembuka.* Jakarta: PT. Ikrar Mandiriabadi.

Conrad, K. (2017). Dihedral Groups.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra, Thrid Edition.* United States of America: John Wiley and Sons, Inc.

Gallian, J. A. (2012). *Contemporary Abstract Algebra, 8th Edition.* Canada: Cengange Learning.

Ghoffar, M. A., & al-Atsari, A. I. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir: Jilid 6.* Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2015). *Elements of Modern Algebra, Eighth Edition.* Stamford: Cengange Learning.

Hobby, C. R. (1960). The Frattini Subgroup of a p-Group. *Pacific Journal of Mathematics*, 209-212.

James, G., & Liebeck, M. (2001). *Representations and Characters of Groups, Second Edition.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kaplan, G., & Lev, A. (2003). On the Dimension and Basis Concepts in Finite Grooups. *Communications in Algebra*, 2707-2717.

Muchlisah, N. (2005). *Teori Grup dan Terapannya.* Surakarta: LPP UNS dan UNS Press.

Nurdin, E., & Nufus, H. (2018). *Teori Himpunan.* Riau: Modul Struktur Aljabar.

Roman, S. (2005). *Advanced Linier Algebra, Second Edition.* California: Springer Science+Bussiness.

Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an.* Jakarta: Lentera Hati.

Tarnauceanu, M. (2015). Classifying fuzzy normal subgroups of finite groups. *Iranian Journal of Fuzzy System*, 107-115.

RIWAYAT HIDUP

Mohammad Agus Kholilurrohman lahir di Gresik pada tanggal 17 Agustus 2000. Laki-laki yang biasa dipanggil Agus ini beralamat di Jalan Banyu Biru RT/RW 030/008 Desa Lowayu, Kec. Dukun, Kab. Gresik, anak bungsu dari dua bersaudara yakni dari pasangan Bapak Kriyatim dan Ibu Khotimah.

Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita Persatuan Lowayu dan lulus pada tahun 2006. Setelah itu, penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri Lowayu dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya penulis menempuh jenjang pendidikan menengah pertama di MTs Hidayatussalam Lowayu dan lulus pada tahun 2015. Kemudian, penulis melanjutkan jenjang pendidikan menengah atas di MA Matholi'ul Anwar Simo Lamongan dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2018.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif dalam mengembangkan kemampuan akademiknya. Salah satu contohnya adalah penulis pernah menjadi Asisten Laboratorium Terapan. Selain itu, penulis juga menjadi pengurus di komunitas Serambi Matematika Aktif (SeMatA) bidang aljabar dan pengurus komunitas Al-Farazi Matematika bidang Bahasa Arab.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Mohammad Agus Kholilurrohman
NIM	: 18610086
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Dimensi dari Grup Dihedral
Pembimbing I	: Dewi Ismiarti, M.Si
Pembimbing II	: Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Januari 2022	Konsultasi Bab I, II dan III	1.
2	31 Januari 2022	Revisi Bab I, II dan III	2.
3.	10 Februari 2022	Konsultasi Kajian Agama (Bab I dan Bab II)	3.
4.	17 Februari 2022	ACC Kajian Agama (Bab I dan Bab II)	4.
5.	1 Maret 2022	ACC Bab I, II dan III	5.
6.	7 April 2022	Konsultasi Bab IV	6.
7.	12 April 2022	Revisi I Bab IV	7.
8.	27 April 2022	Revisi II Bab IV & Konsultasi Bab V	8.
9.	7 Mei 2022	ACC Bab IV & Revisi Bab V	9.
10.	20 Mei 2022	Konsultasi Kajian Agama (Bab IV)	10.
11.	20 Mei 2022	Revisi Kajian Agama (Bab IV)	11.
12.	2 Juni 2022	ACC Seluruh Bab, Kajian agama dan Konsultasi Abstrak	12.
13.	2 Juni 2022	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 20 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr.Elly Susanti, M.Sc
NIP.197411292000122005