

**SKEMA NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI DUA DIMENSI
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA
PUSAT-SAUL'YEV EKSPLISIT**

SKRIPSI

**OLEH
FITRIA IMROATUL MUFIDA
NIM. 15610094**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**SKEMA NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI DUA DIMENSI
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA
PUSAT-SAUL'YEV EKSPLISIT**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Fitria Imroatul Mufida
NIM. 15610094**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**SKEMA NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI DUA DIMENSI
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA
PUSAT-SAUL'YEV EKSPLISIT**

SKRIPSI

**Oleh
Fitria Imroatul Mufida
NIM. 15610094**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

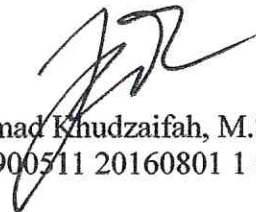
Malang, 17 Juni 2022

Dosen Pembimbing I



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II



Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Efy Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**SKEMA NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI DUA DIMENSI
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA
PUSAT-SAUL'YEV EKSPLISIT**

SKRIPSI

**Oleh
Fitria Imroatul Mufida
NIM. 15610094**

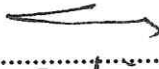
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 20 Juni 2022

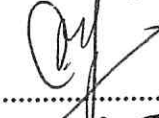
Ketua Penguji : Juhari, M.Si

.....



Anggota Penguji I : Dr. Usman Pagalay, M.Si

.....


Anggota Penguji II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

.....


Anggota Penguji III : Muhammad Khudzaifah, M.Si

.....


Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitria Imroatul Mufida

NIM : 15610094

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Skema Numerik Persamaan Difusi Dua Dimensi dengan

Menggunakan Metode Beda Hingga Pusat-Saul'yev Eksplisit

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan maka saya bersedia menerima sanksi perilaku tersebut.

Malang, 20 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,



Fitria Imroatul Mufida
NIM. 15610094

MOTO

غيرك ذنوب أكبر من أثقل الآخرة في ذنوبك أصغر إن

“Sesungguhnya paling kecilnya dosamu di akhirat nanti akan sangat membebanimu dari pada dosa-dosa besar yang di lakukan orang lain”

-HA

PERSEMBAHAN

Dengan rasa bersyukur yang tak terhingga kepada sang pencipta Allah SWT,

penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Untuk Ibu Siti Nasiah dan Almarhum Bapak Mustaqim yang senantiasa memberikan doa dan limpahan kasih sayang yang tak ternilai, serta ketiga adik saya yang selalu memberikan semangat. Tidak lupa untuk Bapak Huda yang telah membiayai saya kuliah setelah bapak saya meninggal dunia dan memberikan perhatian serta semangat dalam mengerjakan skripsi ini.

Last but not least, I wanna thank me for believing in me, I wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having no days off, I wanna thank me for never quitting, I wanna thank me for always being a giver and tryna give more than I receive, I wanna thank me for tryna do more right than wrong, I wanna thank me for just being me at all times

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul “Skema Numerik Persamaan Difusi Dua Dimensi dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Pusat-Saul'yev Eksplisit”. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang yakni agama Islam. Semoga penulis dan pembaca tergolong sebagai orang-orang yang mendapat syafaat kelak di hari kiamat, aamiin.

Dalam penyelesaiannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah mendukung dan membantu secara langsung maupun tidak langsung, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang ditujukan:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim serta dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasehat, pembelajaran, saran dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasehat dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Juhari, M.Si., sebagai dosen penguji Seminar Proposal, Seminar Hasil, dan Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan masukan, arahan dan nasehat kepada penulis.
7. Dr. Usman Pagalay, M.Si., sebagai dosen penguji Seminar Hasil dan Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan masukan, arahan dan nasehat kepada penulis.

8. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingan selama ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang dengan ikhlasnya membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Program Studi Matematika.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 20 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN COVER	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Definisi Istilah	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Identifikasi Persamaan	8
2.2 Nilai Awal dan Kondisi Batas	12
2.3 Metode Beda Hingga	13
2.4 Skema Saul'yev Eksplisit	16
2.5 Analisis Kestabilan dan Konsistensi	18
2.5.1 Analisis Kestabilan	18
2.5.2 Analisis Konsistensi	23
2.6 Kajian Integrasi	24
BAB III METODE PENELITIAN	
3.1 Jenis Penelitian	25
3.2 Tahapan Penelitian	25
3.2.1 Konstruksi Skema Saul'yev Eksplisit	25
3.2.2 Analisis Kestabilan dan Konsistensi	25
3.2.3 Simulasi	26
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1 Konstruksi Skema Saul'yev Eksplisit	27
4.2 Analisis Kestabilan dan Konsistensi	30
4.2.1 Analisis Kestabilan	30
4.2.2 Analisis Konsistensi	37
4.3 Simulasi	41
4.4 Kajian Integrasi	57

BAB V PENUTUP	
5.1 Kesimpulan.....	60
5.2 Saran.....	61
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Selisih Nilai $u(x, y, t)$ Saat $t = 0.000$, $t = 0,001$ dan $x = 0$	46
Tabel 4.2	Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.00)$ di Tabel 4.1	47
Tabel 4.3	Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.001)$ di Tabel 4.1	47
Tabel 4.4	Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.1	47
Tabel 4.5	Validasi Orde Error (Δt^2) Tabel 4.1	47
Tabel 4.6	Selisih Nilai $u(x, y, t)$ Saat $t = 0.011$, $t = 0,012$ dan $x = 0$	49
Tabel 4.7	Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.011)$ di Tabel 4.6	49
Tabel 4.8	Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0,012)$ di Tabel 4.6	50
Tabel 4.9	Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.6	50
Tabel 4.10	Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.6	50
Tabel 4.11	Selisih Nilai $u(x, y, t)$ Saat $t = 0.017$, $t = 0,018$ dan $x = 0$	54
Tabel 4.12	Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.017)$ di Tabel 4.11	54
Tabel 4.13	Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0,018)$ di Tabel 4.11 ..	54
Tabel 4.14	Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.11	54
Tabel 4.15	Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.11	55

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Nilai Awal dan Kondisi Batas Skema Saul'yev Eksplisit.....	30
Gambar 4.2	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.000)$	45
Gambar 4.3	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.001)$	45
Gambar 4.4	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-5, y, t)$	46
Gambar 4.5	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-4.8, y, t)$	46
Gambar 4.6	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -5, t)$	46
Gambar 4.7	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -4.8, t)$	46
Gambar 4.8	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.011)$	48
Gambar 4.9	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.012)$	48
Gambar 4.10	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-2.8, y, t)$	49
Gambar 4.11	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-2.6, y, t)$	49
Gambar 4.12	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -2.8, t)$	49
Gambar 4.13	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -2.6, t)$	49
Gambar 4.14	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.05)$	51
Gambar 4.15	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(5, y, t)$	51
Gambar 4.16	Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, 5, t)$	51
Gambar 4.17	Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.000)$	52
Gambar 4.18	Grafik Skema dengan Fungsi $u(-5, y, t)$	52
Gambar 4.19	Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, -5, t)$	52
Gambar 4.20	Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.017)$	53
Gambar 4.21	Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.018)$	53
Gambar 4.22	Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.6, y, t)$	53
Gambar 4.23	Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.4, y, t)$	53
Gambar 4.24	Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.6, y, t)$	54
Gambar 4.25	Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.4, y, t)$	54
Gambar 4.26	Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.05)$	56
Gambar 4.27	Grafik Skema dengan Fungsi $u(5, y, t)$	56
Gambar 4.28	Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, 5, t)$	56

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini memiliki makna sebagai berikut:

$\frac{\partial u}{\partial t}$: Turunan pertama terhadap waktu (t)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Turunan kedua terhadap ruang (x)
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$: Turunan kedua terhadap ruang (y)
n	: Indeks yang menyatakan waktu di t
r	: Indeks yang menyatakan ruang di x
s	: Indeks yang menyatakan ruang di y
Δt	: Perubahan waktu di t
Δx	: Perubahan ruang di x
Δy	: Perubahan ruang di y
$g(x, y, t)$: fungsi yang diketahui (persamaan yang diteliti)
D	: koefisien difusi
∇	: turunan kedua dalam <i>cartesian</i> yang menunjukkan koordinat ruang
W_x	: jumlah batas iterasi yang diambil dalam arah x
W_y	: jumlah batas iterasi yang diambil dalam arah y
W_t	: jumlah batas iterasi yang diambil dalam arah t
λ	: nilai error
\bar{u}	: fungsi aproksimasi
ξ	: persamaan kuadrat yang merupakan hasil dari substitusi dan penyederhanaan ρ
f	: fungsi yang sudah diketahui (di kondisi batas)

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Simulasi $g(x, y, t) = 0$ plot x dan y
Lampiran 2	Simulasi $g(x, y, t) = 0$ plot x dan t
Lampiran 3	Simulasi $g(x, y, t) = 0$ plot t dan y
Lampiran 4	Simulasi $g(x, y, t) \neq 0$ plot x dan y
Lampiran 5	Simulasi $g(x, y, t) \neq 0$ plot x dan t
Lampiran 6	Simulasi $g(x, y, t) \neq 0$ plot t dan y
Lampiran 7	Nilai Tabel

ABSTRAK

Mufida, Fitria Imroatul, 2022. **Skema Numerik Persamaan Difusi Dua Dimensi dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Pusat-Saul'yev Eksplisit**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. Pembimbing (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si

Kata Kunci: Persamaan Difusi, Metode Beda Hingga, Saul'yev Eksplisit, Kestabilan Von Neumann, Konsistensi Deret Taylor

Persamaan difusi merupakan representasi dari fenomena proses peluruhan partikel dari zat yang berkonsentrasi tinggi ke zat yang berkonsentrasi rendah. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi skema numerik dari persamaan difusi dua dimensi. Skema numerik dilakukan dengan mendiskritisasi persamaan menggunakan metode beda pusat untuk turunan waktu dan metode Saul'yev eksplisit untuk turunan ruangnya. Keakurasian skema numerik diperoleh dengan menggunakan *Von Neumann* untuk analisis kestabilan dan Deret Taylor untuk analisis konsistensi. Hasil yang diperoleh adalah skema numerik tidak stabil sehingga nilai *error* pemotongan dan konsistensi tidak dapat dijelaskan karena skema numerik tidak stabil di semua kondisi.

ABSTRACT

Mufida, Fitria Imroatul, 2022. **Numerical Schematic of Two-Dimensional Diffusion Equations using the Finite Difference Method Center- Saul'yev Explicit.** thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Supervisor (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Sc. Supervisor (II) Muhammad Khudzaifah, M.Sc.

Keywords: Diffusion Equation, Finite Difference Method, Explicit Saul'yev, Von Neumann Stability, Taylor Series Consistency

The diffusion equation is a representation of the phenomenon of the decay of particles from a substance of high concentration to a substance of low concentration. This study aims to construct a numerical scheme of the two-dimensional diffusion equation. The numerical scheme is carried out by discretizing the equation using the central difference method for the time derivative and the explicit Saul'yev method for the space derivative. The accuracy of the numerical scheme is obtained by using Von Neumann for stability analysis and Taylor series for consistency analysis. The result obtained is a stable numerical scheme is unstable so the truncation error value and consistency cannot be explained because the numerical scheme is unstable in all conditions.

مستخلص البحث

المفيدة، فطرى إمراة. ٢٠٢٢. المخطط العددي لمعادلات الانتشار ثنائي الأبعاد يستخدم طريقة الاختلاف اللامتناهي بين المركز والشاؤل. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١) أري كوسوماستوتي، الماجستير. المشرف (٢) محمد خديفة، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: معادلة الانتشار، طريقة الاختلاف المحدودة، صريح Saul' yev ، اتساق سلسلة تايلور (Taylor)

معادلة الانتشار هي تمثيل لظاهرة اضمحلال الجسيمات من مادة عالية التركيز إلى مادة منخفضة التركيز. تهدف هذه الدراسة إلى بناء مخطط عددي لمعادلة الانتشار ثنائي الأبعاد. يتم تنفيذ المخطط العددي عن طريق تكتم المعادلة باستخدام طريقة الاختلاف المركزي لمشتقة الوقت وطريقة Saul' yev الصريحة لمشتقة الفضاء. يتم الحصول على دقة المخطط العددي باستخدام فون نيومان لتحليل الاستقرار وسلسلة تايلور (Taylor) تحليل الاتساق النتيجة التي تم الحصول عليها هي أن المخطط العددي المستقر غير مستقر لذلك لا يمكن تفسير قيمة خطأ الاقتران والاتساق لأن المخطط العددي غير مستقر في جميع الظروف.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Difusi (pembauran) menurut Nag (2007) merupakan peristiwa mengalirnya atau berpindahya suatu zat dalam dari bagian konsentrasi tinggi ke bagian yang konsentrasi rendah, yang dalam matematisnya dapat dijabarkan sebagai proses peluruhan partikel dari x_n menuju x_{n+1} dan y_n menuju y_{n+1} . Salah satu contoh sederhana dari difusi adalah pemberian gula pada cairan teh tawar yang lambat laun cairan akan menjadi manis. Masalah difusi dalam penelitian ini difokuskan pada penelitian Umar Ali dan Farah Aini Abdullah (2018), di mana masalah difusi disajikan dalam persamaan diferensial parsial dengan dua dimensi. Model matematika yang disajikan pada penelitian tersebut memuat variabel bebas x , y , dan t , sedangkan variabel tak bebasnya adalah $u(x, y, t)$. Model tersebut juga mempertimbangkan fungsi $g(x, y, t)$ dalam kontribusinya sebagai fungsi yang diketahui.

A. R. Soheili, M. B. Niasar, dan M. Arezoomandan (2011) menjelaskan dalam penelitiannya bahwa sejumlah metode numerik telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial difusi dua dimensi salah satunya skema Saul'yev. Skema Saul'yev mengubah skema yang tampaknya implisit menjadi skema eksplisit serta berguna dalam dimensi yang lebih tinggi karena mengurangi perhitungan yang diperlukan dengan jumlah yang besar. Saul'yev merupakan modifikasi dari pendekatan beda hingga pusat yang bersifat eksplisit tidak memerlukan skema sistem besar persamaan simultan pada setiap langkah waktu, tetapi stabil tanpa syarat pada persamaan panas (Towler & Yang, 1978).

Persamaan difusi dua dimensi telah dikaji oleh beberapa peneliti secara analitik maupun secara numerik. Hayman (1988) melakukan analisis persamaan difusi dua dimensi dengan menggunakan pendekatan beda hingga. W. Dai (1997) memodifikasi analisa persamaan difusi dengan menggunakan skema ADI-Peaceman Rachford dan mendapatkan kesimpulan bahwa skema yang diperoleh stabil di semua kondisi. Shuying Zhai dan Xinlong Feng (2016) mengkaji persamaan difusi dua dimensi yang dimodifikasi dengan metode ADI kompak. Skema yang diperoleh (M1 dan M2) stabil tanpa syarat dan menghasilkan hasil yang hampir sama. Sedangkan skema (M3) stabil secara kondisional, tetapi menghasilkan hasil terbaik pada jumlah grid yang rendah.

Modifikasi dalam skema Saul'yev dan MacCormack (Li & Jackson, 2007) diberi nama berturut-turut skema Saul'yevc dan MacCormack yang mampu meningkatkan akurasi prediksi. Skema MacCormackc menunjukkan peningkatan konsumsi waktu tetapi masih lebih cepat daripada skema implisit. Siu A. Chin (2014) memodifikasi skema tipe Saul'yev dari persamaan semi diskrit splitting eksponensial yang menunjukkan bahwa skema eksplisit orde kedua baru juga dibentuk dan diturunkan dari skema Saul'yev untuk mendekati persamaan adveksi-difusi. Pourghanbar & Ranjbar (2016) menunjukkan bahwa skema perbedaan hingga Saul'yev kontinu dengan hasil yang didasarkan pada studi tentang stabilitas, monotonitas, dan konsistensi skema. Berdasarkan studi penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa Saul'yev bersifat eksplisit, konsisten, serta dapat meningkatkan akurasi prediksi.

Penelitian dilakukan dengan mendekati turunan waktu pada persamaan difusi dua dimensi dengan metode beda hingga pusat, sementara turunan ruang pada

persamaan difusi dua dimensi dengan beda hingga Saul'yev eksplisit. Pendekatan beda hingga dipilih dalam penelitian ini karena mudah digunakan dalam penyelesaian masalah fisik yang mempunyai bentuk geometri teratur, seperti interval dalam satu dimensi, kotak dalam dua dimensi atau kubik dalam tiga dimensi (Li & Jackson, 2007). Pembaruan pada penelitian ini dibandingkan dengan penelitian sebelumnya yaitu penggunaan pendekatan Saul'yev yang eksplisit pada persamaan difusi dua dimensi dengan menggunakan turunan beda pusat untuk turunan waktu. Hal ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman terhadap tahapan-tahapan dalam konstruksi skema dari persamaan difusi dua dimensi dengan menggunakan metode beda pusat untuk turunan waktu dan Saul'yev eksplisit untuk turunan ruang. Selain itu, dilakukan juga simulasi untuk mengetahui penerapan skema dari modifikasi persamaan difusi beda hingga pusat Saul'yev eksplisit sebagai hasil penelitian yang telah dilakukan dengan menggunakan software Matlab.

Allah Swt berfirman dalam al-Quran surah Yunus ayat 61 yang artinya:

“Kamu tidak berada dalam suatu keadaan dan tidak membaca suatu ayat dari Al Quran dan kamu tidak mengerjakan suatu pekerjaan, melainkan Kami menjadi saksi atasmu di waktu kamu melakukannya. Tidak luput dari pengetahuan Tuhanmu biarpun sebesar zarah (atom) di bumi ataupun di langit. tidak ada yang lebih kecil dan tidak (pula) yang lebih besar dari itu, melainkan (semua tercatat) dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh).”

Adanya penyebutan langit dan bumi dianalogikan sebagai objek penelitian. Langit yang luasnya tidak terbatas dapat diinterpretasikan sebagai objek makroskopis yang terdiri dari komponen-komponen yang sangat besar seperti bintang, planet, tata surya. Peristiwa fisis yang terjadi di alam semesta termasuk dalam peristiwa difusi. Sedangkan bumi merupakan hamparan yang terlingkup dan sangat kecil sehingga dianggap sebagai objek mikroskopis layaknya objek

kuantum. Serta penyebutan zarah juga berarah pada fenomena fisis berukuran mikroskopis (As-Suyuthi & Al-Mahali, 2003).

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam tahapan konstruksi skema numerik untuk persamaan difusi dua dimensi, maka penelitian ini akan dituangkan ke dalam skripsi yang diberi judul “Skema Numerik Persamaan Difusi Dua Dimensi dengan Menggunakan Metode Bada Hingga Pusat-Saul’yev Eksplisit”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana konstruksi skema numerik persamaan difusi dua dimensi dengan menerapkan beda hingga pusat untuk turunan waktu dan Saul’yev eksplisit untuk turunan ruang?
2. Bagaimana analisis kestabilan dan konsistensi skema numerik persamaan difusi dua dimensi yang sudah diperoleh?
3. Bagaimana simulasi hasil penelitian dari skema numerik yang dibangkitkan dengan menggunakan skema *Forward Time Center Space*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengkonstruksi skema numerik persamaan difusi dua dimensi dengan menerapkan beda hingga pusat untuk turunan waktu dan Saul’yev eksplisit untuk turunan ruang.

2. Analisis kestabilan dan konsistensi skema numerik persamaan difusi dua dimensi dengan beda pusat waktu dan eksplisit Saul'yev pada beda ruangnya.
3. Melakukan simulasi hasil penelitian dari skema skema numerik yang sudah diperoleh.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka manfaat penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan keilmuan, khususnya tahapan dalam mengkonstruksi skema Saul'yev kedalam persamaan difusi dua dimensi.
2. Menambah wawasan keilmuan, khususnya tahapan mencari titik kestabilan dan konsistensi terhadap persamaan difusi dua dimensi dengan skema yang sudah diperoleh.
3. Menambah wawasan keilmuan, khususnya tahapan membuat simulasi hasil penelitian dari skema solusi numerik yang sudah diperoleh.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model persamaan yang digunakan adalah persamaan difusi dua dimensi yang merujuk dari penelitian Umar Ali dan Farah Aini Abdullah (2018) sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y, t)$$

2. Nilai awal dan kondisi batas sebagai berikut (Dehghan, 2001):

Nilai awal

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B$$

Dengan $\forall A, B \in Z^+$

Kondisi batas

$$u(0, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

di mana $f(x, y)$ adalah fungsi yang diketahui.

3. Analisis kestabilan dari skema yang diperoleh menggunakan *Von Neumann*.
4. Analisis konsistensi dari skema yang diperoleh menggunakan Deret Taylor.

1.6 Definisi Istilah

Berdasarkan fokus dan rumusan masalah penelitian, maka uraian istilah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Kestabilan : Keadaan stabil yang menggambarkan keadaan yang tidak berubah-ubah (Fletcher, 1991).
2. Konsistensi : Keserasian dalam artian hasil yang diperoleh terdiri dari persamaan diferensial parsial asli ditambah sisa. Sebuah persamaan dikatakan konsisten dengan persamaan diferensial jika dalam batas spasi grid cenderung nol (Fletcher, 1991).

3. *Forward Time Center Space* (FTCS) : Metode beda hingga maju yang diterapkan untuk turunan waktu dan metode beda hingga pusat untuk turunan ruang.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Identifikasi Persamaan

Persamaan difusi adalah salah satu persamaan diferensial parsial yang menggambarkan dinamika kepadatan dalam difusi melalui suatu material. Difusi menurut Nag (2007) merupakan peristiwa mengalirnya atau berpindahannya suatu zat pelarut dari bagian zat yang berkonsentrasi tinggi ke bagian zat yang berkonsentrasi lebih rendah. Difusi disebabkan oleh adanya gradien konsentrasi yaitu perbedaan konsentrasi antar dua zat. Komponen pada zat pelarut akan bergerak ke arah zat terlarut untuk menyamakan konsentrasi dan menghapuskan gradien. Dengan kata lain, difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata dan mencapai keadaan setimbang.

Pada umumnya persamaan difusi dinyatakan sebagai berikut (Tveito, Langtangen, Nielsen, & Cai, 2010):

$$\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad (2.1)$$

dengan D adalah konstanta positif yang menunjukkan parameter yang mempengaruhi terjadinya proses difusi atau disebut koefisien difusi, u merupakan potensial skalar yang mewakili besaran fisika suhu (konsentrasi zat terlarut), karena suhu bergantung pada koordinat ruang dan waktu di mana $\nabla^2 u$ adalah bentuk turunan kedua dalam *cartesian* bentuknya (Tveito, Langtangen, Nielsen, & Cai, 2010):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

sedangkan $\nabla^2 u$ menunjukkan koordinat ruang dan t adalah waktu. Persamaan difusi yang dibahas dalam penelitian ini adalah persamaan difusi yang dirujuk dari penelitian Umar Ali dan Farah Aini Abdullah (2018) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y, t) \quad (2.3)$$

persamaan diferensial parsial linier yang terdiri dari empat suku. Suku pertama merupakan turunan parsial pertama fungsi u terhadap t , suku kedua dan ketiga adalah turunan parsial kedua dari fungsi u terhadap masing-masing x dan y , dan suku terakhir adalah fungsi x , y , dan t .

Persamaan diferensial parsial dijumpai dalam praktek persamaan difusi, Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang melibatkan turunan parsial dari fungsi sembarang yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas. Variabel bebas yang terlibat biasanya adalah waktu dan satu atau lebih koordinat ruang (Kreyszig, 1991). Beberapa hal penting berkaitan dengan persamaan diferensial parsial yang perlu diketahui:

1. Orde

Orde dari suatu persamaan diferensial adalah orde dari turunan tertingginya.

Persamaan (2.3) memiliki orde turunan tertinggi 2, yaitu terhadap x dan terhadap y .

2. Derajat

Derajat adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi (orde). Persamaan (2.3) memiliki derajat 1.

3. Variabel

Persamaan (2.3) memiliki tiga variabel bebas dan satu variabel terikat yang meliputi variabel bebas ruang (x dan y), variabel bebas waktu (t), dan variabel terikat u .

4. Dimensi

Dimensi dalam suatu persamaan adalah banyaknya variabel bebas ruang. Persamaan (2.3) termasuk persamaan diferensial parsial dua dimensi karena mempunyai dua variabel bebas ruang.

5. Kategori persamaan linier

Persamaan diferensial parsial menurut nilai koefisiennya dibagi menjadi tiga yaitu (Salih, 2014):

- Persamaan disebut eliptik jika semua nilai eigen $\lambda_{1,2,3}$ dari Z bukan nol dan memiliki tanda yang sama.
- Persamaan disebut hiperbolik jika semua nilai eigen $\lambda_{1,2,3}$ dari Z bukan nol dan bertanda sama kecuali salah satu nilai eigennya.
- Persamaan disebut parabola jika salah satu nilai eigen $\lambda_{1,2,3}$ dari Z adalah nol. Ini berarti bahwa matriks koefisien Z adalah singular.

Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan tiga variabel bebas (x, y, t):

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + D \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + E \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + G \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + H \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + I \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial u}{\partial y} + N \frac{\partial u}{\partial t} + Pu + Q = W \quad (2.4)$$

dengan $A, B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N$, dan P adalah koefisien dari fungsi turunan, Q adalah konstanta, dan W adalah fungsi terhadap x, y , dan t .

Dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & F & G \\ G & J & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + [L \quad M \quad N] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + Pu + Q = 0 \quad (2.5)$$

diaplikasikan ke persamaan (2.3), sehingga

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + g(x, y, t) = 0$$

matriks dari koefisien turunan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dinyatakan sebagai matriks

Z. Selanjutnya dicari persamaan karakteristik nilai eigen dari matriks Z sehingga diperoleh $\lambda_{1,2,3}$, sebagai berikut:

$$|Z - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) = 0$$

diperoleh $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 0$ dengan ini dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.3) termasuk persamaan parabolik.

6. Persamaan diferensial homogen tak homogen

Berdasarkan persamaan umum pada persamaan (2.4) disebut persamaan non homogen apabila $W(x, y, t) \neq 0$, dan disebut sebagai persamaan homogen apabila $W(x, y, t) = 0$. Oleh karena itu jelas bahwa persamaan (2.3) termasuk persamaan homogen.

2.2 Nilai Awal dan Kondisi Batas

Victor Henner, dkk (2013) menjelaskan bahwa untuk masalah persamaan diferensial parsial ada kondisi tambahan yang harus dipenuhi untuk menemukan skema khususnya. Skema khusus digunakan untuk menggambarkan perilaku persamaan. Kondisi tambahan yang dimaksud antara lain:

- Memastikan skemanya tunggal; yaitu, tidak boleh ada lebih dari satu fungsi berbeda yang memenuhi persamaan, masalah nilai awal, dan kondisi batas.
- Memastikan stabilitas skema; yaitu, perubahan kecil pada variabel bebas tidak berpengaruh secara signifikan terhadap skema persamaan diferensial. Dengan kata lain kestabilan skema pada umumnya bergantung pada masalah nilai awal kondisi batas, dan koefisien persamaan yang ada dalam persamaan.

Skema yang memenuhi syarat awal dan syarat batas akan dicoba dicari dalam persamaan difusi dua dimensi, dimana persamaan difusi dua dimensi ditentukan pada waktu $t = 0$. Peristiwa difusi yang mula-mula belum berubah atau konsentrasi peluruhan belum berubah akan didefinisikan sebagai fungsi $f(x, y)$ ketika zat mulai luruh. Sehingga dalam penelitian ini persamaan diberi nilai awal

untuk ketergantungan terhadap waktu dan kondisi batas untuk ketergantungan terhadap ruang sebagai berikut (Dehghan, 2001):

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B,$$

di mana $\forall A, B \in Z^+$ dan fungsi $f(x, y)$ dinyatakan fungsi sembarang yang sudah diketahui.

Dalam persamaan difusi memiliki dua variabel ruang yang berarti memiliki panjang $x = 0, x = 1, y = 0,$ dan $y = 1,$ dalam artian memiliki kondisi batas sebagai berikut:

Kondisi batas

$$u(0, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

2.3 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Secara umum, metode beda hingga adalah metode yang mudah diaplikasikan dalam penyelesaian problem fisis. Skema numerik menggunakan metode beda hingga dari suatu persamaan diferensial parsial dapat diwujudkan dalam bentuk diagram stensil yang mempunyai bentuk geometri teratur, yakni interval untuk persamaan diferensial parsial satu dimensi, domain kotak untuk persamaan diferensial parsial dua dimensi, dan kubik untuk persamaan diferensial parsial ruang tiga dimensi (Li & Jackson, 2007).

Metode beda hingga memetakan suatu variabel bebas dalam persamaan

diferensial parsial dalam suatu *grid* terbatas pada variabel terikat (Causon & Mingham, 2010). Metode beda hingga memanfaatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunannya. Pendekatan turunan menggunakan rumusan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang akan digunakan untuk menentukan fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (tengah) (Ross, 1984).

Bentuk umum dari deret Taylor dengan variabel x, y , dan t (Duistermaat & Kolk, 2006):

$$\begin{aligned} f(x, y, t) = & f(x_0, y_0, t_0) + (x - x_0)f'(x_0) \\ & + (y - y_0)f'(y_0) + (t - t_0)f'(t_0) \\ & + \frac{1}{2}((x - x_0)^2 f''(x_0) + (y - y_0)^2 f''(y_0) + (t - t_0)^2 f''(t_0)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan ekspansi deret Taylor di sekitar x, y , dan t sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, t_0 + \Delta t) = & f(x_0, y_0, t_0) + \Delta x f'(x_0) \\ & + \Delta y f'(y_0) + \Delta t f'(t_0) \\ & + \frac{1}{2}(\Delta x^2 f''(x_0) + \Delta y^2 f''(y_0) + \Delta t^2 f''(t_0)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} f(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y, t_0 - \Delta t) = & f(x_0, y_0, t_0) - \Delta x f'(x_0) \\ & - \Delta y f'(y_0) - \Delta t f'(t_0) \\ & + \frac{1}{2}(\Delta x^2 f''(x_0) + \Delta y^2 f''(y_0) + \Delta t^2 f''(t_0)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Jika titik diskrit pada x, y , dan t secara berurutan dinyatakan dengan menggunakan indeks r, s , dan n maka berdasarkan ekspansi dari deret Taylor tersebut, diperoleh:

Turunan pertama persamaan beda maju pada ruang (x)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{r+1,s}^n - u_{r,s}^n}{\Delta x}, \quad (2.9)$$

Turunan pertama persamaan beda maju pada ruang (y)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{r,s+1}^n - u_{r,s}^n}{\Delta y}, \quad (2.10)$$

Turunan pertama persamaan beda maju pada waktu (t)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^n}{\Delta t}, \quad (2.11)$$

Turunan pertama persamaan beda mundur pada ruang (x)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{r,s}^n - u_{r-1,s}^n}{\Delta x}, \quad (2.12)$$

Turunan pertama persamaan beda mundur pada ruang (y)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{r,s}^n - u_{r,s-1}^n}{\Delta y}, \quad (2.13)$$

Turunan pertama persamaan beda mundur pada waktu (t)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (2.14)$$

Turunan pertama persamaan beda pusat pada ruang (x)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{r+1,s}^n - u_{r-1,s}^n}{2\Delta x}, \quad (2.15)$$

Turunan pertama persamaan beda pusat pada ruang (y)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{r,s+1}^n - u_{r,s-1}^n}{2\Delta y}, \quad (2.16)$$

Turunan pertama persamaan beda pusat pada waktu (t)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (2.17)$$

Sedangkan untuk pendekatan turunan kedua beda pusat dengan menjumlahkan persamaan (2.6) dan (2.7) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, t_0 + \Delta t) + f(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y, t_0 - \Delta t) = \\ 2f(x_0, y_0, t_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x^2 f''(x_0) + \Delta y^2 f''(y_0) + \Delta t^2 f''(t_0)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

sehingga diperoleh turunan kedua persamaan beda pusat pada ruang (x)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{r+1,s}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r-1,s}^n}{\Delta x^2}, \quad (2.19)$$

turunan kedua persamaan beda pusat pada ruang (y)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{r,s+1}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r,s-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (2.20)$$

dan turunan kedua persamaan beda pusat pada waktu (t)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{r,s}^{n+1} - 2u_{r,s}^n + u_{r,s}^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.21)$$

2.4 Skema Saul'yev Eksplisit

A. R. Soheili, M. B. Niasar dan M Arezoomandan (2011) menjelaskan bahwa penyelesaian metode beda hingga eksplisit arah bolak-balik menggunakan dua pendekatan yang diterapkan untuk perhitungan yang berjalan dalam arah bergantian dari kanan ke kiri dan kiri ke kanan dengan masing-masing pendekatan eksplisit dalam arah perhitungannya masing-masing.

Metode eksplisit arah bolak-balik pertama kali diperkenalkan oleh Saul'yev untuk memecahkan masalah nilai awal yang melibatkan persamaan difusi panas satu dimensi. Prinsipnya adalah menggunakan dua persamaan beda hingga, yang satu eksplisit ketika perhitungan berlangsung dalam satu arah, sedangkan yang lain eksplisit untuk perhitungan yang dilakukan dalam arah bolak-balik. Diterapkan pada persamaan parabola, teknik Saul'yev stabil tanpa syarat dan karena eksplisit, tidak memerlukan skema sistem besar persamaan simultan pada setiap langkah waktu, tidak seperti kebanyakan metode stabil tanpa syarat lainnya (Soheili, Niasar, & Arezoomandan, 2011). Saul'yev telah memperkenalkan dua pendekatan asimetris untuk turunan kedua dari dua variabel bebas, persamaan yang digunakan sebagai berikut (Tavakoli & Davami, 2006):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{r+1,s}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r-1,s}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{r,s+1}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r,s-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\end{aligned}\quad (2.22)$$

untuk $n = 1, 2, 3, \dots, W_t$, $r = 1, 2, 3, \dots, W_x$, dan $s = 1, 2, 3, \dots, W_t$ (Darvishi, 2003).

Dengan W_x , W_y , dan W_t batas iterasi yang diambil dalam arah masing-masing x , y , dan t .

Dalam menerapkan metode Saul'yev pada persamaan difusi turunan waktu didekati dengan turunan pertama persamaan beda maju seperti persamaan (2.11) dan turunan ruang didekati secara bergantian dengan persamaan (2.22) sebagai berikut (Hellevik, 2020):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{u_r^{n+1} - u_r^n}{\Delta t} = \left(\frac{u_{r+1}^n - u_r^n - u_r^{n+1} + u_{r-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

$$u_r^{n+1} - u_r^n = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{r+1}^n - u_r^n - u_r^{n+1} + u_{r-1}^{n+1})$$

dimana $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Diperoleh:

$$u_r^{n+1} - u_r^n = \mu(u_{r+1}^n - u_r^n - u_r^{n+1} + u_{r-1}^{n+1}),$$

dengan mengumpulkan suku-suku $u_{r,s}^{n+1}$ di ruas kiri, maka:

$$u_r^{n+1} - u_r^n = \mu(u_{r+1}^n - u_r^n - u_r^{n+1} + u_{r-1}^{n+1})$$

$$u_r^{n+1} + \mu(u_r^{n+1}) = u_r^n - \mu u_r^n + \mu u_{r+1}^n + \mu u_{r-1}^{n+1}$$

diperoleh:

$$(1 + \mu)u_r^{n+1} = (1 - \mu)u_r^n + \mu(u_{r+1}^n + u_{r-1}^{n+1}).$$

sehingga diperoleh skema numerik sebagai berikut:

$$u_r^{n+1} = \frac{(1 - \mu)u_r^n + \mu(u_{r+1}^n + u_{r-1}^{n+1})}{(1 + \mu)} \quad (2.24)$$

2.5 Analisis Kestabilan dan Konsistensi

2.5.1 Analisis Kestabilan

Leif Rune Hellevik (2020) dalam bukunya menjelaskan bahwa analisis Von Neumann biasa digunakan untuk menentukan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu skema numerik stabil. Analisis *Von Neumann* paling banyak digunakan karena pada umumnya mudah diterapkan secara langsung. Akan tetapi, analisis *Von Neumann* hanya dapat digunakan untuk menemukan syarat stabilitas pada masalah nilai awal persamaan linier dengan koefisien konstan, sementara pada kenyataannya permasalahan biasanya juga melibatkan koefisien variabel, nonlinier, dan memiliki kondisi batas yang rumit.

Dimisalkan sebuah persamaan diferensial parsial parabolik sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

Dasar analisis kestabilan Von Neumann merupakan skema analitik dari persamaan diferensial parsial parabolik pada persamaan (2.25) dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Secara garis besar, prinsip metode pemisahan variabel adalah menyederhanakan persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan diferensial biasa, sementara skema dari persamaan diferensial parsial sebelumnya merupakan hasil kali dari skema analitik dari persamaan diferensial biasa tersebut. Demikian sehingga $u(x, t)$ merupakan skema analitik persamaan (2.25) merupakan hasil perkalian dari $f(t)$ (sebagai

skema analitik dari persamaan diferensial biasa bergantung t) dan $\varphi(x)$ (sebagai skema analitik dari persamaan diferensial biasa bergantung x). Secara matematis, penjelasan di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$u(x, t) = f(t)\varphi(x) \quad (2.26)$$

Selanjutnya jika persamaan (2.26) diturunkan satu kali terhadap t dan dua kali terhadap x , diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(t)}{dt}\varphi(x) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \quad (2.28)$$

Jika persamaan (2.27) dan (2.28) disubstitusikan pada persamaan (2.25), maka diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt}\varphi(x) &= f(t)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \\ \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{f(t)} &= \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \frac{1}{\varphi(x)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Jelas terlihat bahwa masing-masing ruas pada persamaan (2.29) hanya bergantung pada satu variabel bebas x atau t . Selanjutnya misalkan kedua ruas disamadengankan dengan konstanta yang sama, yakni $-k^2$, maka akan didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{f(t)} &= -k^2 \\ \frac{df(t)}{dt} + k^2 f(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

dan

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \frac{1}{\varphi(x)} = -k^2$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0 \quad (2.31)$$

Dengan menggunakan teori persamaan diferensial biasa, skema analitik dari persamaan diferensial biasa pada persamaan (2.30) dan (2.31) secara berturut-turut dituliskan sebagai berikut.

$$f(t) = e^{-k^2t}$$

dan

$$\varphi(x) = M \sin(kx) + N \cos(kx),$$

sehingga skema umum dari persamaan diferensial parsial (2.25) dapat dituliskan

$$u(x, t) = e^{-k^2t}(M \sin(kx) + N \cos(kx)) \quad (2.32)$$

Dimana M dan N adalah koefisien yang nilainya dapat ditentukan dengan menggunakan nilai awal dan kondisi batas. Karena persamaan (2.25) merupakan persamaan diferensial parsial linear, maka jumlahan dari skemanya juga merupakan skema, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-k^2t}(M \sin(kx) + N \cos(kx)) \quad (2.33)$$

Persamaan (2.33) merupakan deret Fourier, yang memiliki bentuk lain berupa eksponensial, yang dituliskan pada persamaan di bawah ini sebagai berikut:

$$u(x, t) = e^{-k^2t}e^{ikx} \quad (2.34)$$

Bentuk diskrit dari persamaan (2.33) adalah

$$u(x_r, t_n) = e^{-k^2t_n}e^{ikx_r} \quad (2.35)$$

di mana

$$\begin{aligned} x_r &= r\Delta x, r = 1, 2, 3 \dots, Bx \\ t_n &= n\Delta t, n = 1, 2, 3 \dots, Bt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sehingga

$$u(x_r, t_n) = e^{-k^2 n \Delta t} e^{ikr \Delta x} \quad (2.37)$$

Demikian bentuk diskrit skema pada titik x_r pada level waktu $n + 1$ adalah

$$u(x_r, t_{n+1}) = e^{-k^2 t_{n+1}} e^{ikx_r} \quad (2.38)$$

Dengan membagi persamaan (2.38) dan (2.37) maka diperoleh *amplification factor* analitik sebagai berikut:

$$\lambda_a = \frac{u(x_r, t_{n+1})}{u(x_r, t_n)} = e^{-k^2 \Delta t} \quad (2.39)$$

Berdasarkan persamaan (2.38), maka persamaan (2.37) dapat ditulis dalam bentuk

$$u(x_r, t_n) = \lambda_a^n e^{ikr \Delta x}$$

Sementara itu, ρ_r^n disajikan sebagai error dari persamaan tersebut, dituliskan sebagai

$$\rho_r^n = \lambda^n e^{ikr \Delta x}. \quad (2.40)$$

Agar ρ_r^n tidak tumbuh secara eksponensial, maka haruslah $|\lambda| \leq 1$. Syarat inilah yang disebut sebagai syarat kestabilan Von Neumann dari skema numerik.

Contoh skema analisis kestabilan metode beda hingga yang diterapkan terhadap persamaan (2.25), di mana persamaan (2.10) diterapkan terhadap turunan waktu dan persamaan (2.18) diterapkan terhadap turunan ruang, sebagai berikut:

$$\frac{u_r^{n+1} - u_r^n}{\Delta t} = \left(\frac{u_{r+1}^n - 2u_r^n + u_{r-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

$$u_r^{n+1} - u_r^n = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{r+1}^n - 2u_r^n + u_{r-1}^n)$$

di mana $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, maka diperoleh skema numerik:

$$u_r^{n+1} = \mu(u_{r+1}^n - 2u_r^n + u_{r-1}^n) + u_r^n \quad (2.41)$$

Selanjutnya analisis kestabilan Von Neumann dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (2.39) dengan $u_r^n \cong \rho_r^n$ ke dalam persamaan (2.40), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x)} &= \mu \lambda^n e^{i(k_x \cdot (r+1) \cdot \Delta x)} \\ &\quad - 2\mu \lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x)} \\ &\quad + \mu \lambda^n e^{i(k_x \cdot (r-1) \cdot \Delta x)} \\ &\quad + \lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x)},\end{aligned}\tag{2.42}$$

persamaan (2.41) dibagi dengan persamaan (2.39) dengan tujuan supaya persamaan lebih sederhana, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu e^{ik_x \Delta x} - 2\mu + \mu^{-ik_x \Delta x} + 1 \\ &= (1 - 2\mu) + \mu(e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x}) \\ &= (1 - 2\mu) + \mu((\cos k_x \Delta x + i \sin k_x \Delta x) + (\cos k_x \Delta x - i \sin k_x \Delta x)) \\ &= (1 - 2\mu) + \mu(2 \cos(k_x \Delta x)) \\ &= (1 - 2\mu) + 2\mu(\cos k_x \Delta x) \\ &= 1 - 2\mu(1 - \cos k_x \Delta x) \\ &= 1 - 2\mu \left(2 \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}\right) \\ &= 1 - 4\mu \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Karena λ mengandung $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)$ selanjutnya diambil titik diskritnya yaitu $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) = 0$, dan $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) = 1$ yang menghasilkan nilai λ berbeda-beda sebagai berikut (Nikmah, 2015):

- Saat $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) = -1$, diperoleh

$$|\lambda| \leq 1$$

$$\left|1 - 4\mu \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}\right| \leq 1$$

$$|1 - 4\mu| \leq 1$$

- Saat $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) = 0$, diperoleh

$$|\lambda| \leq 1$$

$$\left|1 - 4\mu \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}\right| \leq 1$$

$$1 \leq 1$$

- Saat $\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) = 1$, diperoleh

$$|\lambda| \leq 1$$

$$\left|1 - 4\mu \sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}\right| \leq 1$$

$$|1 - 4\mu| \leq 1$$

Berdasarkan penguraian di atas dapat diambil kesimpulan bahwa persamaan (2.26) stabil di semua kondisi jika dan hanya jika nilai Δt lebih kecil daripada Δx .

2.5.2 Analisis Konsistensi

Fletcher (1991) menyatakan bahwa suatu persamaan beda dikatakan konsisten dengan persamaan diferensial yang dihipotesiskan jika selisih antara persamaan beda dengan persamaan diferensial menuju nilai nol ketika lebar grid yang digunakan juga menuju nol. Selisih antara persamaan diferensial parsial yang dihipotesiskan dengan persamaan bedanya disebut *truncation term*. Jika nilai *truncation term* semakin menuju nol ketika Δx , Δy dan Δt menuju nol maka dikatakan persamaan beda yang dibuat konsisten dengan persamaan yang dihipotesiskan.

2.6 Kajian Integrasi

Allah SWT berfirman dalam al-Quran surah Al-Anbiya' ayat 30 yang artinya:

“Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. Dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka mengapakah mereka tiada juga beriman?”

Ayat ini mengungkapkan konsep penciptaan planet, termasuk bumi yang belakangan dikuatkan oleh penemuan ilmu pengetahuan mutakhir dengan teori sebelumnya. Konsep ini menyatakan bahwasannya pada dasarnya bumi dan langit merupakan satu kesatuan yang berkesinambungan satu sama lain. Kata Al-Fatq pada ayat ini berarti pemisah, yaitu pemisahan bumi dari langit yang sebelumnya menyatu. Namun, meskipun hal ini terjadi bumi dan langit masih tetap ada sampai sekarang. Hal ini membuktikan bahwa Allah memisahkan langit dan bumi bukan dengan tujuan menghancurkan namun, menciptakan suatu keseimbangan alam semesta yang lain (As-Suyuthi & Al-Mahali, 2003).

Kesetimbangan dan kestabilan yang dimaksudkan dalam di dalam al-Qur'an lebih ke pengertian kesetimbangan atau kestabilan dinamis. Sebagai gambaran mudahnya adalah proses terjadinya suatu difusi. Difusi terjadi karena adanya perpindahan zat yang berkonsentrasi tinggi ke zat yang berkonsentrasi lebih rendah namun, akan terus melakukan pergerakan meskipun derajat konsentrasinya adalah nol. Nol di sini menandakan bahwa partikel yang mengalami difusi telah berada pada keadaan yang setimbang

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini bersifat kualitatif. Metode penelitian kualitatif adalah penelitian yang digunakan untuk menyelidiki, menemukan, menggambarkan, dan menjelaskan kualitas atau keistimewaan dari sebuah peristiwa dengan mengkaji referensi yang berkaitan dengan penelitian ini.

3.2 Tahapan Penelitian

3.2.1 Konstruksi Skema Saul'yev Eksplisit

Konstruksi skema numerik persamaan difusi dua dimensi dengan menggunakan beda hingga pusat dan Saul'yev eksplisit dengan langkah-langkah berikut:

1. Mendefinisikan turunan pertama terhadap waktu dengan menggunakan pendekatan beda hingga pusat dan turunan kedua terhadap ruang dengan menggunakan pendekatan beda hingga Saul'yev.
2. Mensubstitusikan hasil dari langkah pertama pada persamaan difusi dua dimensi.
3. Mendapatkan skema numerik dengan mengumpulkan suku $u_{r,s}^{n+1}$ di ruas kiri. Di mana $n = 1, 2, 3, \dots, W_t$, $r = 1, 2, 3, \dots, W_x$, dan $s = 1, 2, 3, \dots, W_y$.

3.2.2 Analisis Kestabilan dan Konsistensi

A. Analisis Kestabilan

1. Mendefinisikan kestabilan Von Neumann untuk persamaan difusi dua dimensi $\lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)}$.
2. Mensubstitusikan kestabilan Von Neumann pada skema numerik yang sudah didapatkan.
3. Analisis kriteria syarat kestabilan λ demikian sehingga $|\lambda| \leq 1$.

B. Analisis Konsistensi

1. Menjabarkan ekspansi deret Taylor
2. Mensubstitusikan hasil ekspansi deret Taylor ke dalam bentuk diskrit persamaan difusi dua dimensi

3.2.3 Simulasi

Simulasi hasil skema numerik persamaan difusi dua dimensi untuk menunjukkan grafik persamaan difusi dua dimensi yang didasarkan pada perubahan nilai parameter yang terlibat yaitu x , y , dan t dengan membangkitkan metode *Forward Time Center Space* (FTCS) menggunakan aplikasi *Matlab*.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Konstruksi Skema Saul'yev Eksplisit

Langkah-langkah untuk membuat konstruksi skema Saul'yev terhadap persamaan difusi dua dimensi akan dijelaskan pada sub-bab ini. Persamaan difusi dua dimensi yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y, t) \quad (4.1)$$

Dalam penelitian ini persamaan diberi nilai awal untuk ketergantungan terhadap waktu dan kondisi batas untuk ketergantungan terhadap ruang sebagai berikut (Dehghan, 2001):

Nilai awal

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B$$

dengan $\forall A, B \in Z^+$ dan $f(x, y) = e^{\frac{-x^2+y^2}{10}}$.

Kondisi batas

Kondisi batas

$$u(0, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(1, y, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

Diskritisasi persamaan (4.1) berturut-turut dipartisi dengan lebar selang Δx , Δy , dan Δt . Aturan diskritisasi dilakukan berdasarkan rumus (Darvishi, 2003):

$$x_r = x_0 + r \cdot \Delta x; r = 0, 1, 2, 3, \dots, W_x$$

$$y_s = y_0 + s \cdot \Delta y; s = 0, 1, 2, 3, \dots, W_y$$

$$t_n = t_0 + n \cdot \Delta t; n = 0, 1, 2, 3, \dots, W_t$$

$u_{r,s}^n$ merupakan aproksimasi beda hingga dari nilai u pada titik $x = x_r$, $y = y_s$, dan $t = t_n$, dinotasikan sebagai $u(x_r, y_s, t_n)$.

Dalam menerapkan skema Saul'yev pada persamaan difusi dua dimensi pada penelitian ini, peneliti menggunakan turunan pertama persamaan beda pusat untuk turunan waktu sedangkan turunan ruangnya menggunakan skema Saul'yev A sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{r+1,s}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r-1,s}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{r,s+1}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r,s-1}^{n+1}}{\Delta y^2}. \quad (4.4)$$

Substitusi persamaan (4,2), (4,3), dan (4,4) ke dalam persamaan (4,1),

maka

$$\begin{aligned} \frac{u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{u_{r+1,s}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r-1,s}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{u_{r,s+1}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r,s-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + g_{r,s}^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1} &= \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} (u_{r+1,s}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r-1,s}^{n+1}) \\ &+ \frac{2\Delta t}{\Delta y^2} (u_{r,s+1}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r,s-1}^{n+1}) + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n \end{aligned} \quad (4.6)$$

di mana $\mu_x = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}$ dan $\mu_y = \frac{2\Delta t}{\Delta y^2}$ (Soheili dan Arezoomandan, 2011). Diperoleh:

$$\begin{aligned} u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1} &= \mu_x (u_{r+1,s}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r-1,s}^{n+1}) \\ &+ \mu_y (u_{r,s+1}^n - u_{r,s}^n - u_{r,s}^{n+1} + u_{r,s-1}^{n+1}) + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

dengan mengumpulkan suku-suku $u_{r,s}^{n+1}$ di ruas kiri, maka:

$$u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1} = \mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) - \mu_x(u_{r,s}^n + u_{r,s}^{n+1}) \\ + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}) - \mu_y(u_{r,s}^n + u_{r,s}^{n+1}) + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n$$

$$u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1} = \mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}) \\ - \mu_x(u_{r,s}^n + u_{r,s}^{n+1}) - \mu_y(u_{r,s}^n + u_{r,s}^{n+1}) + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n$$

$$u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1} = \mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}) \\ - \mu_x u_{r,s}^n - \mu_x u_{r,s}^{n+1} - \mu_y u_{r,s}^n - \mu_y u_{r,s}^{n+1} + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n$$

$$u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^{n-1} = \mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}) \\ - u_{r,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^{n+1}(\mu_x + \mu_y) + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n$$

diperoleh:

$$u_{r,s}^{n+1} + u_{r,s}^{n+1}(\mu_x + \mu_y) = \mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}) \\ - u_{r,s}^n(\mu_x + \mu_y) + u_{r,s}^{n-1} + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n$$

$$u_{r,s}^{n+1}(\mu_x + \mu_y + 1) = \mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}) \\ - u_{r,s}^n(\mu_x + \mu_y) + u_{r,s}^{n-1} + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n$$

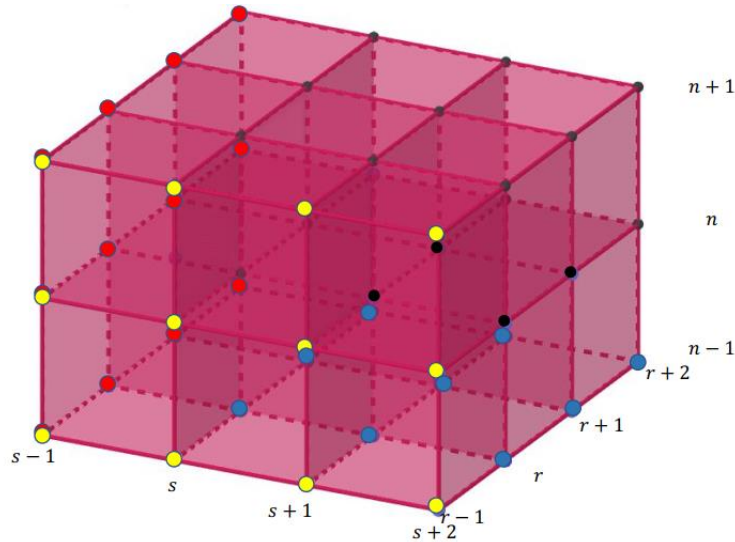
Sehingga diperoleh skema numerik

$$u_{r,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} \\ - \left(\frac{u_{r,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right) \quad (4.8)$$

Saul'yev eksplisit ini terlihat seperti skema implisit karena memiliki dua suku yang memiliki indeks $n + 1$. Namun jika diperhatikan indeks ruangnya, salah satu dari keduanya sudah terisi oleh kondisi batas.

Pada Gambar (4.1) masalah nilai awal, semua grid pada tingkat waktu ke- $(n - 1)$ sudah terisi oleh nilai awal (semua tingkat ruang). Lingkaran biru merupakan nilai awal, sementara pada semua grid pada $(s - 1)$ dan $(r - 1)$ sudah terisi oleh kondisi batas (semua tingkat waktu). Lingkaran merah merupakan kondisi batas pada $(s - 1)$ dan lingkaran kuning merupakan kondisi batas pada

$(r - 1)$. Sehingga bisa disimpulkan bahwa Saul'yev yang digunakan untuk mendekati turunan kedua terhadap ruang ruang dapat dinyatakan sebagai bentuk eksplisit.



Gambar 4.1 Nilai Awal dan Kondisi Batas Skema Saul'yev Eksplisit

4.2 Analisis Kestabilan dan Konsistensi

4.2.1 Analisis Kestabilan

Selanjutnya skema numerik pada skema (4.8) akan dilakukan analisis kestabilan untuk mendapatkan syarat kestabilan skema tersebut. Analisis kestabilan akan dilakukan dengan menggunakan kestabilan Von Neumann, yakni prosedur yang memang sudah umum digunakan untuk mendapatkan syarat kestabilan skema numerik persamaan diferensial parsial.

Untuk melakukan analisis kestabilan, suku terakhir skema (4.8) dihilangkan sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\bar{u}_{r,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(\bar{u}_{r+1,s}^n + \bar{u}_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(\bar{u}_{r,s+1}^n + \bar{u}_{r,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{\bar{u}_{r,s}^n(\mu_x + \mu_y) - \bar{u}_{r,s}^{n-1}}{\mu_x + \mu_y + 1} \right) \quad (4.9)$$

Dengan memandang persamaan (4.9) maka analisis kestabilan dengan Von Neumann dilakukan dengan memisalkan

$$u_{r,s}^n = \lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)}$$

Sehingga pada persamaan (4.9) dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)} &= \frac{\mu_x (\lambda^n e^{i(k_x \cdot (r+1) \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)})}{\mu_x + \mu_y + 1} \\ &+ \frac{\mu_x (\lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot (r-1) \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)})}{\mu_x + \mu_y + 1} \\ &+ \frac{\mu_y (\lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot (s+1) \cdot \Delta y)})}{\mu_x + \mu_y + 1} \\ &+ \frac{\mu_y (\lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot (s-1) \cdot \Delta y)})}{\mu_x + \mu_y + 1} \\ &- \frac{(\mu_x + \mu_y) (\lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)})}{\mu_x + \mu_y + 1} \\ &+ \frac{(\lambda^{n-1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)})}{\mu_x + \mu_y + 1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)} (\mu_x + \mu_y + 1) &= \mu_x \lambda^n e^{i(k_x \cdot (r+1) \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)} \\ &+ \mu_x \lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot (r-1) \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)} \\ &+ \mu_y \lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot (s+1) \cdot \Delta y)} \\ &+ \mu_y \lambda^{n+1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot (s-1) \cdot \Delta y)} \\ &- (\mu_x + \mu_y) \lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)} \\ &+ \lambda^{n-1} e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dibagi dengan $\lambda^n e^{i(k_x \cdot r \cdot \Delta x + k_y \cdot s \cdot \Delta y)}$ sehingga persamaan dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \lambda (\mu_x + \mu_y + 1) &= \mu_x e^{i(k_x \cdot \Delta x)} + \mu_x \lambda e^{-i(k_x \cdot \Delta x)} \\ &+ \mu_y e^{i(k_y \cdot \Delta y)} + \mu_y \lambda e^{-i(k_y \cdot \Delta y)} \\ &- \mu_x - \mu_y + \lambda^{-1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) dikali dengan λ untuk menghilangkan pecahan, jadi:

$$\begin{aligned}
\lambda^2(\mu_x + \mu_y + 1) &= \lambda \cdot \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} + \lambda^2 \cdot \mu_x e^{-i(k_x \Delta x)} \\
&\quad + \lambda \cdot \mu_y e^{i(k_y \Delta y)} + \lambda^2 \cdot \mu_y e^{-i(k_y \Delta y)} \\
&\quad - \lambda \cdot \mu_x - \lambda \cdot \mu_y + 1 \\
\lambda^2(\mu_x + \mu_y + 1) - \lambda \cdot \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \lambda^2 \cdot \mu_x e^{-i(k_x \Delta x)} \\
- \lambda \cdot \mu_y e^{i(k_y \Delta y)} - \lambda^2 \cdot \mu_y e^{-i(k_y \Delta y)} \\
+ \lambda \cdot \mu_x + \lambda \cdot \mu_y - 1 &= 0 \\
\lambda^2(\mu_x + \mu_y - \mu_x \cdot e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y \cdot e^{-i(k_y \Delta y)} + 1) \\
+ \lambda(\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)}) - 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Demikian λ merupakan skema persamaan $\xi(\lambda)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda) &= \lambda^2(\mu_x + \mu_y - \mu_x \cdot e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y \cdot e^{-i(k_y \Delta y)} + 1) \\
&\quad + \lambda(\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)}) - 1.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Demikian λ merupakan skema dari persamaan kuadrat berikut:

$$\xi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{4.15}$$

dengan

$$\begin{aligned}
a &= \mu_x + \mu_y - \mu_x \cdot e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y \cdot e^{-i(k_y \Delta y)} + 1, \\
b &= \mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)} \\
c &= -1.
\end{aligned}$$

Misalkan didefinisikan $\lambda_{1,2}$ sebagai skema dari persamaan (4.15)

dengan melakukan faktorisasi persamaan (4.15) dengan menggunakan rumus

ABC sebagai berikut:

$$\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \tag{4.16}$$

dengan

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.17}$$

Menurut kestabilan Von Neumann, skema numerik stabil jika $|\lambda_i| < 1$, dengan demikian agar skema numerik (4.8) stabil, haruslah $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$.

Dituliskan sebagai berikut.

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1$$

$$\left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right| \leq 1$$

$$\lambda_{1,2} = \left| \frac{-(\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)}) \pm \sqrt{(\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)})^2 + 4(\mu_x + \mu_y - \mu_x \cdot e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y \cdot e^{-i(k_y \Delta y)} + 1)}}{2(\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{-i(k_y \Delta y)} + 1)} \right| \leq 1$$

Karena $e^{i(k_x \Delta x)} = \cos(k_x \Delta x) + i \sin(k_x \Delta x)$, $e^{-i(k_x \Delta x)} = \cos(k_x \Delta x) - i \sin(k_x \Delta x)$,
 $e^{i(k_y \Delta y)} = \cos(k_y \Delta y) + i \sin(k_y \Delta y)$, dan $e^{-i(k_y \Delta y)} = \cos(k_y \Delta y) - i \sin(k_y \Delta y)$ jadi diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \left| \begin{array}{l} \frac{-(\mu_x + \mu_y - \mu_x(\cos(k_x \Delta x) + i \sin(k_x \Delta x)) - \mu_y(\cos(k_y \Delta y) + i \sin(k_y \Delta y)))}{2(\mu_x + \mu_y - \mu_x(\cos(k_x \Delta x) - i \sin(k_x \Delta x)) - \mu_y(\cos(k_y \Delta y) - i \sin(k_y \Delta y)) + 1)} \\ \pm \frac{\left(\left(\mu_x + \mu_y - \mu_x(\cos(k_x \Delta x) + i \sin(k_x \Delta x)) - \mu_y(\cos(k_y \Delta y) + i \sin(k_y \Delta y)) \right) \right)^2}{2(\mu_x + \mu_y - \mu_x(\cos(k_x \Delta x) - i \sin(k_x \Delta x)) - \mu_y(\cos(k_y \Delta y) - i \sin(k_y \Delta y)) + 1)} \\ + \frac{4(\mu_x + \mu_y - \mu_x(\cos(k_x \Delta x) - i \sin(k_x \Delta x)) - \mu_y(\cos(k_y \Delta y) - i \sin(k_y \Delta y)) + 1)}{2(\mu_x + \mu_y - \mu_x(\cos(k_x \Delta x) - i \sin(k_x \Delta x)) - \mu_y(\cos(k_y \Delta y) - i \sin(k_y \Delta y)) + 1)} \end{array} \right| \leq 1$$

terlihat bahwa λ_1 dan λ_2 masing-masing mengandung $\cos(k_x \Delta x)$, $\sin(k_x \Delta x)$, $\cos(k_y \Delta y)$, dan $\sin(k_y \Delta y)$ selanjutnya nilai $\cos(k_x \Delta x) \in [-1, 1]$, $\sin(k_x \Delta x) \in [-1, 1]$, $\cos(k_y \Delta y) \in [-1, 1]$, dan $\sin(k_y \Delta y) \in [-1, 1]$. Karena panjangnya uraian, diskrit perhitungan nilai λ_1 dan λ_2 dilakukan dengan cara di bawah ini.

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1$$

$$\left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \leq 1$$

$$-2a + b \leq \pm \sqrt{b^2 + 4a} \leq 2a + b$$

$$4a^2 - 4ab + b^2 \leq b^2 + 4a \leq 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$4a^2 - 4ab \leq 4a \leq 4a^2 + 4ab$$

$$4a(a - b) \leq 4a \leq 4a(a + b)$$

$$a - b \leq 1 \leq a + b \quad (4.18)$$

Berdasarkan persamaan (4.18), perlu diperiksa apakah a dan b memenuhi $a - b \leq 1$ dan $a + b \geq 1$ diuraikan sebagai berikut:

A. Kasus I ($a - b \leq 1$)

$$\begin{aligned} a - b &= (\mu_x + \mu_y - \mu_x \cdot e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y \cdot e^{-i(k_y \Delta y)} + 1) \\ &\quad - (\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)}) \\ &= \mu_x (e^{i(k_x \Delta x)} - e^{-i(k_x \Delta x)}) + \mu_y (e^{i(k_y \Delta y)} - e^{-i(k_y \Delta y)}) + 1 \\ &= 2i\mu_x \sin(k_x \Delta x) + 2i\mu_y \sin(k_y \Delta y) + 1 \end{aligned}$$

sehingga

$$a - b \leq 1$$

$$2i\mu_x \sin(k_x \Delta x) + 2i\mu_y \sin(k_y \Delta y) + 1 \leq 1 \quad (4.19)$$

terlihat bahwa persamaan (4.20a) mengandung $\sin(k_x \Delta x)$ dan $\sin(k_y \Delta y)$, sehingga dapat diuraikan dengan mensubstitusikan $\sin(k_x \Delta x) = -1$, $\sin(k_x \Delta x) = 0$, $\sin(k_x \Delta x) = 1$, $\sin(k_y \Delta y) = -1$, $\sin(k_y \Delta y) = 0$, dan $\sin(k_y \Delta y) = 1$ sebagai berikut:

1. Substitusi $\sin(k_x \Delta x) = -1$ dan $\sin(k_y \Delta y) = -1$ ke dalam persamaan

(4.20a), maka diperoleh

$$2i\mu_x \sin(k_x \Delta x) + 2i\mu_y \sin(k_y \Delta y) + 1 \leq 1$$

$$-2i\mu_x - 2i\mu_y + 1 \leq 1$$

$$-2i\mu_x \leq 2i\mu_y$$

2. Substitusi $\sin(k_x \Delta x) = -1$ dan $\sin(k_y \Delta y) = 1$ ke dalam persamaan

(4.19), maka diperoleh

$$2i\mu_x \sin(k_x \Delta x) + 2i\mu_y \sin(k_y \Delta y) + 1 \leq 1$$

$$-2i\mu_x + 2i\mu_y + 1 \leq 1$$

$$-2i\mu_x \leq -2i\mu_y$$

3. Substitusi $\sin(k_x \Delta x) = 1$ dan $\sin(k_y \Delta y) = -1$ ke dalam persamaan (4.19), maka diperoleh

$$2i\mu_x \sin(k_x \Delta x) + 2i\mu_y \sin(k_y \Delta y) + 1 \leq 1$$

$$2i\mu_x - 2i\mu_y + 1 \leq 1$$

$$2i\mu_x \leq 0$$

4. Substitusi $\sin(k_x \Delta x) = 1$ dan $\sin(k_y \Delta y) = 1$ ke dalam persamaan (4.19), maka diperoleh

$$2i\mu_x \sin(k_x \Delta x) + 2i\mu_y \sin(k_y \Delta y) + 1 \leq 1$$

$$2i\mu_x + 2i\mu_y + 1 \leq 1$$

$$2i\mu_x \leq -2i\mu_y$$

B. Kasus II ($a + b \geq 1$)

$$\begin{aligned} a + b &= \left(\mu_x + \mu_y - \mu_x \cdot e^{-i(k_x \Delta x)} - \mu_y \cdot e^{-i(k_y \Delta y)} + 1 \right) \\ &\quad + \left(\mu_x + \mu_y - \mu_x e^{i(k_x \Delta x)} - \mu_y e^{i(k_y \Delta y)} \right) \\ &= 2\mu_x + 2\mu_y - \mu_x (e^{-i(k_x \Delta x)} + e^{i(k_x \Delta x)}) - \mu_y (e^{-i(k_y \Delta y)} + e^{i(k_y \Delta y)}) + 1 \\ &= 2\mu_x + 2\mu_y - \mu_x (2 \cos(k_x \Delta x)) - \mu_y (2 \cos(k_y \Delta y)) + 1 \\ &= 2 \left(\mu_x + \mu_y - \mu_x (\cos(k_x \Delta x)) - \mu_y (\cos(k_y \Delta y)) \right) + 1 \\ &= 2 \left(\mu_x (1 - \cos(k_x \Delta x)) + \mu_y (1 - \cos(k_y \Delta y)) \right) + 1 \end{aligned}$$

sehingga

$$a + b \geq 1$$

$$2 \left(\mu_x (1 - \cos(k_x \Delta x)) + \mu_y (1 - \cos(k_y \Delta y)) \right) + 1 \geq 1 \quad (4.20)$$

terlihat bahwa persamaan (4.20b) mengandung $\cos(k_x\Delta x)$ dan $\cos(k_y\Delta y)$, sehingga dapat diuraikan dengan mensubstitusikan $\cos(k_x\Delta x) = -1$, $\cos(k_x\Delta x) = 0$, $\cos(k_x\Delta x) = 1$, $\cos(k_y\Delta y) = -1$, $\cos(k_y\Delta y) = 0$, dan $\cos(k_y\Delta y) = 1$ secara bergantian sebagai berikut:

1. Substitusi $\cos(k_x\Delta x) = -1$ dan $\cos(k_y\Delta y) = -1$ ke dalam persamaan

(4.20), maka diperoleh

$$2\left(\mu_x(1 - \cos(k_x\Delta x)) + \mu_y(1 - \cos(k_y\Delta y))\right) + 1 \geq 1$$

$$4\mu_x + 4\mu_y + 1 \geq 1$$

$$4\mu_x \geq -4\mu_y$$

2. Substitusi $\cos(k_x\Delta x) = -1$ dan $\cos(k_y\Delta y) = 0$ ke dalam persamaan

(4.20), maka diperoleh

$$2\left(\mu_x(1 - \cos(k_x\Delta x)) + \mu_y(1 - \cos(k_y\Delta y))\right) + 1 \geq 1$$

$$4\mu_x + 2\mu_y + 1 \geq 1$$

$$4\mu_x \geq -2\mu_y$$

3. Substitusi $\cos(k_x\Delta x) = 0$ dan $\cos(k_y\Delta y) = -1$ ke dalam persamaan

(4.20), maka diperoleh

$$2\left(\mu_x(1 - \cos(k_x\Delta x)) + \mu_y(1 - \cos(k_y\Delta y))\right) + 1 \geq 1$$

$$2\mu_x + 4\mu_y + 1 \geq 1$$

$$2\mu_x \geq -4\mu_y$$

4. Substitusi $\cos(k_x \Delta x) = 0$ dan $\cos(k_y \Delta y) = 0$ ke dalam persamaan (4.20), maka diperoleh

$$2 \left(\mu_x (1 - \cos(k_x \Delta x)) + \mu_y (1 - \cos(k_y \Delta y)) \right) + 1 \geq 1$$

$$2\mu_x + 2\mu_y + 1 \geq 1$$

$$2\mu_x \geq -2\mu_y$$

5. Substitusi $\cos(k_x \Delta x) = 1$ dan $\cos(k_y \Delta y) = 1$ ke dalam persamaan (4.20b), maka diperoleh

$$2 \left(\mu_x (1 - \cos(k_x \Delta x)) + \mu_y (1 - \cos(k_y \Delta y)) \right) + 1 \geq 1$$

$$1 \geq 1$$

Dari uraian $a - b \leq 1$ dan $a + b \geq 1$ dapat ditarik kesimpulan bahwa skema (4.8) tidak stabil di semua kondisi.

4.2.2 Analisis Konsistensi

Analisis konsistensi akan dilakukan dengan mendekati setiap suku pada skema pada skema (4.8) dengan ekspansi deret Taylor. Berikut ini disajikan penerapan ekspansi deret Taylor dari masing-masing unsur dalam skema numerik pada skema (4.8)

$$u_{r,s}^{n+1} = u_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots$$

$$u_{r,s}^{n-1} = u_{r,s}^n - \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots$$

$$u_{r+1,s}^n = u_{r,s}^n + \Delta x u_x|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_{r,s}^n + \dots$$

$$\begin{aligned}
u_{r-1,s}^{n+1} &= u_{r,s}^n - \Delta x u_x|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n \\
&\quad - \Delta x \Delta t u_{xt}|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_{r,s}^n \\
&\quad - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{r,s-1}^{n+1} &= u_{r,s}^n - \Delta y u_y|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy}|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n \\
&\quad - \Delta y \Delta t u_{yt}|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy}|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt}|_{r,s}^n \\
&\quad - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots
\end{aligned}$$

$$u_{r,s+1}^n = u_{r,s}^n + \Delta y u_y|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy}|_{r,s}^n + \dots$$

Untuk memudahkan perhitungan, dilakukan perhitungan $u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}$ dan

$u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1}$ terlebih dahulu.

$$u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(u_{r,s}^n + \Delta x u_x|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_{r,s}^n + \dots \right) \\
&\quad + \left(u_{r,s}^n - \Delta x u_x|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n \right. \\
&\quad - \Delta x \Delta t u_{xt}|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_{r,s}^n \\
&\quad \left. - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2u_{r,s}^n + \Delta x^2 u_{xx}|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt}|_{r,s}^n \\
&+ \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_{r,s}^n \\
&\quad + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
&u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1} \\
&= \left(u_{r,s}^n + \Delta y u_y|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy}|_{r,s}^n + \dots \right) \\
&+ \left(u_{r,s}^n - \Delta y u_y|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy}|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n \right. \\
&- \Delta y \Delta t u_{yt}|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy}|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt}|_{r,s}^n \\
&\left. - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n + \dots \right) \\
&= 2u_{r,s}^n + \Delta y^2 u_{yy}|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt}|_{r,s}^n \\
&+ \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt}|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt}|_{r,s}^n \\
&\quad + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n \dots
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Substitusikan persamaan (4.21) dan (4.22) pada skema (4.8)

$$\begin{aligned}
&u_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n = \\
&\frac{\mu_x \left(2u_{r,s}^n + \Delta x^2 u_{xx}|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt}|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n \right)}{\mu_x + \mu_y + 1} \\
&+ \frac{\mu_y \left(2u_{r,s}^n + \Delta y^2 u_{yy}|_{r,s}^n + \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt}|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt}|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt}|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n \right)}{\mu_x + \mu_y + 1} \\
&\quad - \frac{u_{r,s}^n (\mu_x + \mu_y) + \left(u_{r,s}^n - \Delta t u_t|_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_{r,s}^n \right) + 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_x + \mu_y + 1) \left(u_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& - \mu_x \left(2u_{r,s}^n + \Delta x^2 u_{xx} |_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt} |_{r,s}^n \right. \\
& \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& - \mu_y \left(2u_{r,s}^n + \Delta y^2 u_{yy} |_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt} |_{r,s}^n \right. \\
& \left. + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) + u_{r,s}^n (\mu_x + \mu_y) \\
& - \left(u_{r,s}^n - \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_x + \mu_y + 1) \left(u_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& - \mu_x \left(2u_{r,s}^n + \Delta x^2 u_{xx} |_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt} |_{r,s}^n \right. \\
& \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& - \mu_y \left(2u_{r,s}^n + \Delta y^2 u_{yy} |_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt} |_{r,s}^n \right. \\
& \left. + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& + \left(u_{r,s}^n (\mu_x + \mu_y) - \left(u_{r,s}^n - \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) - 2\Delta t \right. \\
& \left. \cdot g_{r,s}^n \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_x + \mu_y + 1) \left(u_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& - \mu_x \left(2u_{r,s}^n + \Delta x^2 u_{xx} |_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt} |_{r,s}^n \right. \\
& \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& - \mu_y \left(2u_{r,s}^n + \Delta y^2 u_{yy} |_{r,s}^n + \Delta t u_t |_{r,s}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt} |_{r,s}^n \right. \\
& \left. + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n \right) + u_{r,s}^n (\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^n \\
& + \Delta t u_t |_{r,s}^n - \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{r,s}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{r,s}^n - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_x \left(\Delta x^2 u_{xx} \Big|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& -\mu_y \left(\Delta y^2 u_{yy} \Big|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt} \Big|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& -2\Delta t \cdot g_{r,s}^n = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Demikian diperoleh *error* pemotongan skema numerik (4.8) adalah $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2)$, dan skema dikatakan konsisten jika memenuhi

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} -\mu_x \left(\Delta x^2 u_{xx} \Big|_{r,s}^n - \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& -\mu_y \left(\Delta y^2 u_{yy} \Big|_{r,s}^n - \Delta y \Delta t u_{yt} \Big|_{r,s}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{r,s}^n - \frac{3}{6} \Delta y \Delta t^2 u_{ytt} \Big|_{r,s}^n \right) \\
& -2\Delta t \cdot g_{r,s}^n = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Persamaan (4.24) akan terpenuhi jika $\Delta x, \Delta y$ dan Δt bernilai sangat kecil. Hal ini dikarenakan turunan u dikalikan dengan nilai $\Delta x, \Delta y$ dan Δt yang sangat kecil, sehingga hasilnya sangat kecil berapapun nilai turunan u . Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa persamaan (4.24) terpenuhi dan *error* pemotongan mendekati nol. Hasil analisis konsistensi dan *error* pemotongan ini tidak bisa dijelaskan dengan nilai numeris u karena skema (4.8) tidak stabil di semua kondisi.

4.3 Simulasi

Simulasi skema numerik pada skema (4.8) dibagi menjadi dua bagian, bagian pertama jika $g(x, y, t) = 0$, dan bagian kedua jika $g(x, y, t) \neq 0$, yakni $g(x, y, t) = \left(\frac{5\gamma}{6} + t^3 + 2\pi t^4\right) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ diketahui dalam penelitian Shuying Zhai dan Xinlong Feng (2016) nilai dari $\gamma = 1$. Kedua simulasi dilakukan dengan nilai awal dan kondisi batas yang sama, sebagai berikut:

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{10}} \\ u(0, y, t) = 0 \\ u(1, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 \\ u(x, 1, t) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5 \\ t \in [0, 0.05] \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u(x, y, 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{10}} \\ u(0, y, t) = 0 \\ u(1, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 \\ u(x, 1, t) = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \Delta x = \Delta y = 0.2 \\ \Delta t = 0.001 \end{array} \quad (4.25)$$

$$\mu_x = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{2(0,001)}{(0,2)^2} = 0,05$$

$$\mu_y = \frac{2\Delta t}{\Delta y^2} = \frac{2(0,001)}{(0,2)^2} = 0,05$$

disubstitusikan ke dalam skema (4.8)

$$u_{r,s}^{n+1} = \frac{0,05(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + 0,05(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1})}{1,1} - \left(\frac{u_{r,s}^n(0,1) - u_{r,s}^{n-1} - 0,02 \left(\left(\frac{5}{6} + t^3 + 2\pi t^4 \right) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \right)}{1,1} \right)$$

Skema (4.8) merupakan skema dua langkah yang memerlukan dua nilai awal, yakni saat $t = 0$ dan $t = 0.001$. Nilai awal pertama, yaitu $u(x, y, 0)$ disajikan pada persamaan (4.25). Sementara nilai awal kedua $u(x, y, 0.001)$ akan dibangkitkan dengan menggunakan skema *Forward Time Central Space* (FTCS) untuk persamaan difusi dua dimensi yang sudah umum digunakan, dirumuskan sebagai berikut (Rezzolla, 2020) di mana:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{r+1,s}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r-1,s}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{r,s+1}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r,s-1}^n}{\Delta y^2}$$

kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (4.1) maka diperoleh:

$$\frac{u_{r,s}^{n+1} - u_{r,s}^n}{\Delta t} = \frac{u_{r+1,s}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r-1,s}^n}{\Delta x} + \frac{u_{r,s+1}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r,s-1}^n}{\Delta y^2} + g_{r,s}^n$$

$$u_{r,s}^{n+1} = \left(\frac{u_{r+1,s}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r-1,s}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{r,s+1}^n - 2u_{r,s}^n + u_{r,s-1}^n}{\Delta y^2} + g_{r,s}^n \right) \Delta t + u_{r,s}^n \quad (4.26)$$

Skema numerik dilakukan diskritisasi nilai awal terhadap skema yang sudah diperoleh sebagai berikut:

1. $u(x, y, 0) = f(x, y)$

Di mana fungsi $f(x, y)$ dinyatakan sebagai $e^{\frac{-x^2+y^2}{10}}$

Dan kondisi batasnya

2. $u(0, y, t) = 0 \approx u_{0,s}^n$

3. $u(1, y, t) = 0 \approx u_{1,s}^n$

4. $u(x, 0, t) = 0 \approx u_{r,0}^n$

5. $u(x, 1, t) = 0 \approx u_{r,1}^n$

Sehingga dilakukan iterasi dengan n dan s tetap sebagai berikut:

1. $r = 0$

$$u_{0,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{1,s}^n + u_{-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{0,s+1}^n + u_{0,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{0,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{0,s}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{0,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

2. $r = 1$

$$u_{1,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{2,s}^n + u_{0,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{1,s+1}^n + u_{1,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{1,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{1,s}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{1,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

3. $r = 2$

$$u_{2,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{3,s}^n + u_{1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{2,s+1}^n + u_{2,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{2,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{2,s}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{2,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

4. $r = W_x$

$$u_{W_x,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{W_x+1,s}^n + u_{W_x-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{W_x,s+1}^n + u_{3W_x,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{W_x,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{W_x,s}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{W_x,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

Sedangkan iterasi dengan n dan r tetap sebagai berikut:

1. $s = 0$

$$u_{r,0}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,0}^n + u_{r-1,0}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,1}^n + u_{r,-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,0}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,0}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,0}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

2. $s = 1$

$$u_{r,1}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,1}^n + u_{r-1,1}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,2}^n + u_{r,0}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,1}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,1}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,1}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

3. $s = 2$

$$u_{r,2}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,2}^n + u_{r-1,2}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,3}^n + u_{r,1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,2}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,2}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,2}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

4. $s = W_y$

$$u_{r,W_y}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,W_y}^n + u_{r-1,W_y}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,W_y+1}^n + u_{r,W_y-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,W_y}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,W_y}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,W_y}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

Sedangkan iterasi dengan r dan s tetap sebagai berikut:

1. $n = 1$

$$u_{r,s}^2 = \frac{\mu_x(u_{r+1,s}^1 + u_{r-1,s}^2) + \mu_y(u_{r,s+1}^1 + u_{r,s-1}^2)}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,s}^1(\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^0 - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^1}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

2. $n = 2$

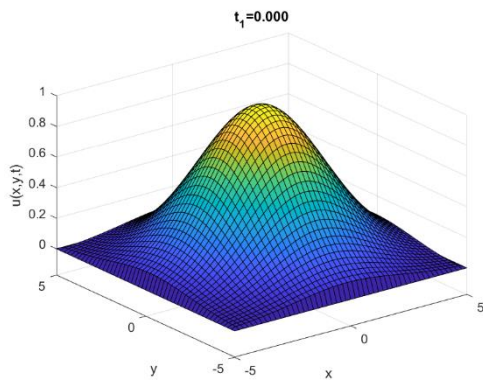
$$u_{r,s}^3 = \frac{\mu_x(u_{r+1,s}^2 + u_{r-1,s}^3) + \mu_y(u_{r,s+1}^2 + u_{r,s-1}^3)}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,s}^2(\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^1 - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^2}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

3. $n = W_t$

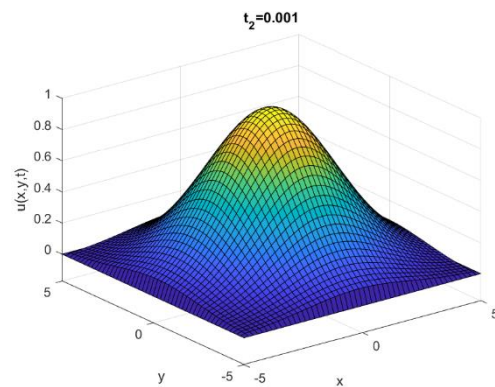
$$u_{r,s}^{W_t+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,s}^{W_t} + u_{r-1,s}^{W_t+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^{W_t} + u_{r,s-1}^{W_t+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,s}^{W_t}(\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^{W_t-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^{W_t}}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

A. Simulasi dengan $g(x, y, t) = 0$

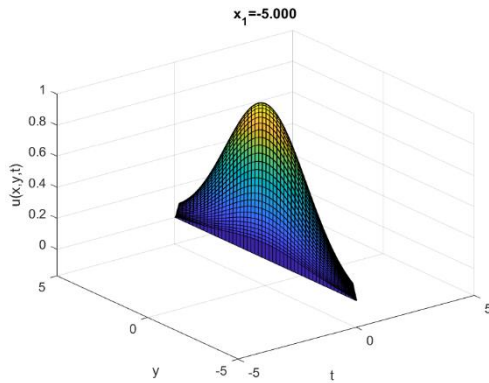
Gambar (4.2) berikut ini merupakan grafik skema persamaan difusi dua dimensi dengan nilai awal dan kondisi batas sesuai persamaan (4.25) terhadap persamaan (4.26) saat $t = 0$ dan $t = 0.001$.



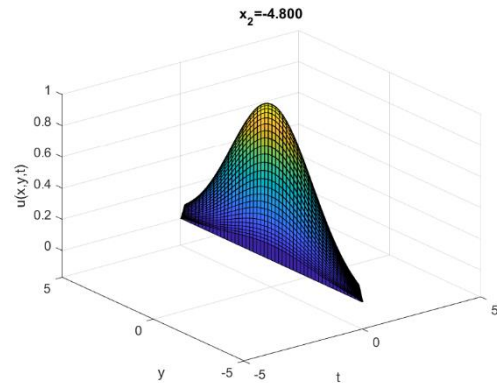
Gambar 4. 2 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.000)$



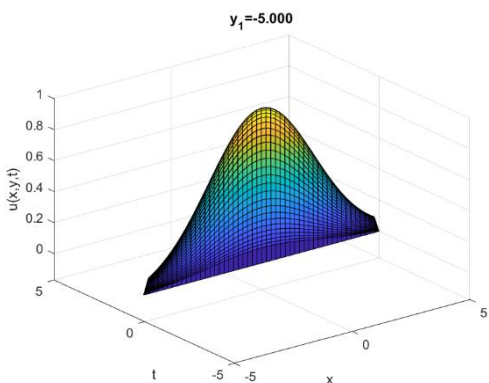
Gambar 4. 3 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.001)$



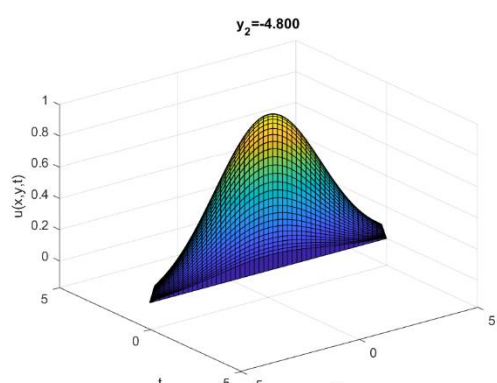
Gambar 4. 4 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-5, y, t)$



Gambar 4. 5 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-4.8, y, t)$



Gambar 4. 6 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -5, t)$



Gambar 4. 7 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -4.8, t)$

Nilai u tidak bisa dilihat secara visual dari kedua gambar tersebut, sehingga disajikan nilai $u(x, y, 0)$ dan $u(x, y, 0.001)$, di beberapa titik disajikan pada Tabel 4.1 yang diperoleh dari Matlab (Lampiran 7) sebagai berikut.

Tabel 4.1 Selisih Nilai $u(x, y, t)$ Saat $t = 0.000$, $t = 0.001$ dan $x = 0$

Δy	$u(x, y, 0)$	$u(x, y, 0.001)$	Selisih
$x = 0, y = -3$	0.406569659740599	0.406553312506682	0.000016347233916
$x = 0, y = -1$	0.904837418035960	0.904512259793172	0.000325158242787
$x = 0, y = 0$	1.000000000000000	0.999600798934399	0.000399201065600
$x = 0, y = 1$	0.904837418035960	0.904512259793172	0.000325158242787
$x = 0, y = 3$	0.406569659740599	0.406553312506682	0.000016347233916

Tabel 4.2 Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.00)$ di Tabel 4.1

$\left(\frac{\text{kolom}}{\text{baris}}\right)^2$	$x = 0, y = -3$	$x = 0, y = -1$	$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 0, y = 3$
$x = 0, y = -3$	–	4,95303242439512	6,04964746441295	4,95303242439512	1
$x = 0, y = -1$	0,201896517994655	–	1,22140275816017	1	0,201896517994655
$x = 0, y = 0$	1,65298888221586	8,18730753077983	–	8,18730753077983	1,65298888221586
$x = 0, y = 1$	0,201896517994655	1	1,22140275816017	–	0,201896517994655
$x = 0, y = 3$	1	4,95303242439512	6,04964746441295	4,95303242439512	–

Tabel 4.3 Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.001)$ di Tabel 4.1

$\left(\frac{\text{kolom}}{\text{baris}}\right)^2$	$x = 0, y = -3$	$x = 0, y = -1$	$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 0, y = 3$
$x = 0, y = -3$	–	4,94987130373337	6,04530450296119	4,94987130373337	1
$x = 0, y = -1$	0,202025454529649	–	1,22130538998087	1	0,202025454529649
$x = 0, y = 0$	0,165417639344745	0,818796026123872	–	0,818796026123872	0,165417639344745
$x = 0, y = 1$	0,202025454529649	1	1,22130538998087	–	0,202025454529649
$x = 0, y = 3$	1	4,94987130373337	6,04530450296119	4,94987130373337	–

Tabel 4.4 Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.1

	$\left(\frac{0,000}{0,001}\right)^2$
$x = 0, y = -3$	1,00008042026504
$x = 0, y = -1$	1,00071909846209
$x = 0, y = 0$	1,00079888047027
$x = 0, y = 1$	1,00071909846209
$x = 0, y = 3$	1,00008042026504

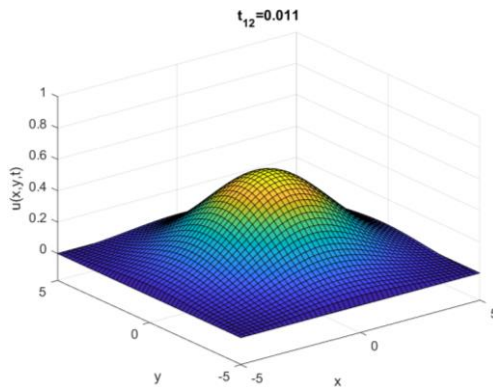
Tabel 4.5 Validasi Orde Error (Δt^2) Tabel 4.1

	$\left(\frac{0,001}{0,000}\right)^2$
$x = 0, y = -3$	0,999919586201858
$x = 0, y = -1$	0,999281418268924
$x = 0, y = 0$	9,99201757230289
$x = 0, y = 1$	0,999281418268924
$x = 0, y = 3$	0,999919586201858

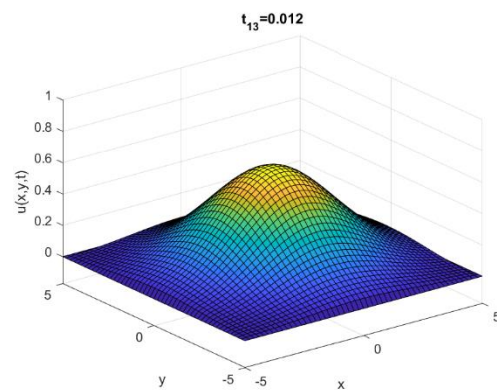
Berdasarkan data numeris pada Tabel 4.1, dapat diketahui dengan jelas bahwa nilai $u(x, y, t)$ mengalami penurunan dari $t = 0$ sampai $t = 0.001$. Hal ini sesuai dengan profil grafik skema persamaan difusi, di mana nilai u akan terus mengalami penurunan sampai stabil ke titik 0. Dari Tabel 4.2, 4.3, 4.4, dan 4.5 dapat disimpulkan bahwa skema di persamaan (4.8)

tidak konsisten karena hasil dari pembagian tabel di atas tidak memenuhi syarat. Di sini peneliti menunjukkan salah satu nilai tabel yang tidak konsisten di t tetap yaitu di Tabel 4.3 bahwa nilai $\left(\frac{0.904512259793172}{0.406553312506682}\right)^2 = 4,94987130373337$ tidak ekuivalen dengan $\Delta y \rightarrow \left(\frac{-1}{-3}\right)^2 = 9 = 0,1111111111$. Untuk x dan y tetap di titik $x = 0$ dan $y = -3$ yaitu di Tabel 4.5 bahwa nilai $\left(\frac{0.406553312506682}{0.406569659740599}\right)^2 = 0,999919586201858$ tidak ekuivalen dengan $\Delta t \rightarrow \left(\frac{0,001}{0,000}\right)^2$ tidak terdefinisi hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema (4.8) memenuhi kriteria $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2)$.

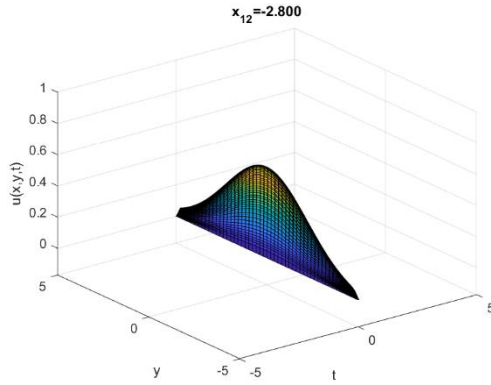
Selanjutnya disajikan gambar skema persamaan difusi dua dimensi pada $t = 0.011$ dan $t = 0.012$ untuk menunjukkan secara signifikan ketidakstabilan skema numerik (4.26). Secara visual, terlihat bahwa grafik skema justru naik, menunjukkan ketidakstabilan skema numerik. Hal ini didukung oleh data numeris yang disajikan pada Tabel 4.6.



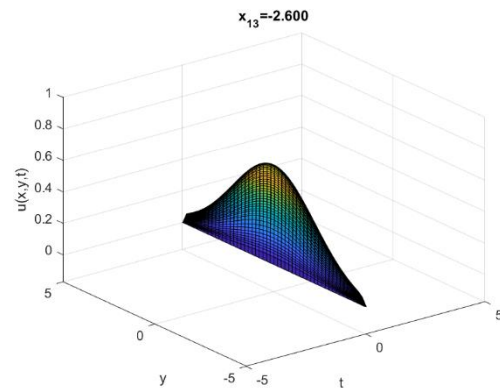
Gambar 4. 8 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.011)$



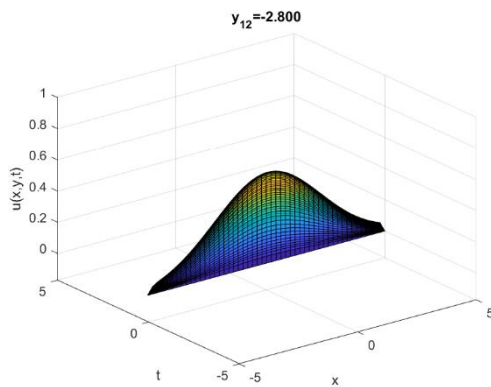
Gambar 4. 9 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.012)$



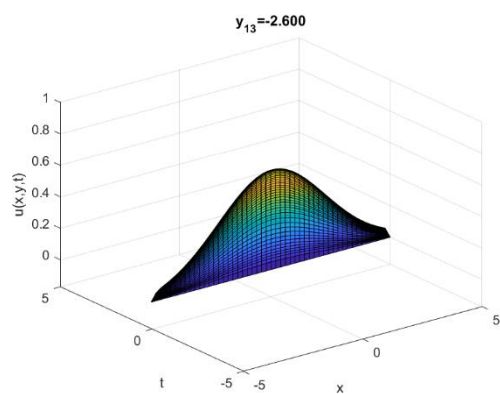
Gambar 4. 10 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-2.8, y, t)$



Gambar 4. 11 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(-2.6, y, t)$



Gambar 4. 12 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -2.8, t)$



Gambar 4. 13 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, -2.6, t)$

Tabel 4.6 Selisih Nilai $u(x, y, t)$ Saat $t = 0.011, t = 0.012$ dan $x = 0$

Δy	$u(x, y, 0.011)$	$u(x, y, 0.012)$	Selisih
$x = 0, y = -3$	0.229015537290379	0.250650169849234	0.021634632558855
$x = 0, y = -1$	0.519332453157444	0.566355315467507	0.047022862310063
$x = 0, y = 0$	0.579717639480908	0.631216583362203	0.051498943881295
$x = 0, y = 1$	0.530051924817504	0.576319156020068	0.046267231202564
$x = 0, y = 3$	0.243527392216423	0.264149014647467	0.020621622431045

Tabel 4.7 Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.011)$ di Tabel 4.6

$\left(\frac{\text{kolom}}{\text{baris}}\right)^2$	$x = 0, y = -3$	$x = 0, y = -1$	$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 0, y = 3$
$x = 0, y = -3$	-	5,14234286804348	6,40771423462147	5,35681856115501	1,13074777361762
$x = 0, y = -1$	0,194463890421308	-	1,24606903877248	1,04170777768327	0,219889611142915
$x = 0, y = 0$	0,15606189093092	0,802523751801996	-	0,835995234027701	0,176466635716694
$x = 0, y = 1$	0,186677967264283	0,959962113582342	1,19617906812955	-	0,211085695867552
$x = 0, y = 3$	0,884370523057216	4,54773645195116	5,66679358927336	4,73741243285126	-

Tabel 4.8 Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0, 012)$ di Tabel 4.6

$\left(\frac{\text{kolom}}{\text{baris}}\right)^2$	$x = 0, y = -3$	$x = 0, y = -1$	$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 0, y = 3$
$x = 0, y = -3$	-	5,10554320019936	6,34192050400901	5,2867661885059	1,11061103291031
$x = 0, y = -1$	0,195865544720286	-	1,24216371409047	1,0354953393205	0,217530434933338
$x = 0, y = 0$	0,157680942132254	0,805046861904359	-	0,833622273436557	0,175122194011774
$x = 0, y = 1$	0,189151546397896	0,965721391518969	1,19958407046582	-	0,210073794321549
$x = 0, y = 3$	0,900405245731749	4,59705787976956	5,71029848982344	4,76023200908796	-

Tabel 4.9 Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.6

	$\left(\frac{0,011}{0,012}\right)^2$
$x = 0, y = -3$	0,834822005997743
$x = 0, y = -1$	0,840839225189715
$x = 0, y = 0$	0,843482797967187
$x = 0, y = 1$	0,84588382718949
$x = 0, y = 3$	0,8499583532637

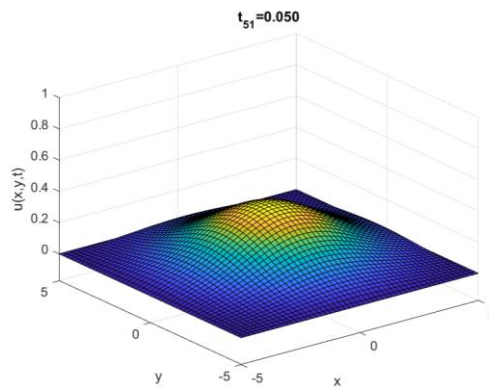
Tabel 4.10 Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.6

	$\left(\frac{0,012}{0,013}\right)^2$
$x = 0, y = -3$	1,19786013403521
$x = 0, y = -1$	1,18928799946788
$x = 0, y = 0$	1,1855606331392
$x = 0, y = 1$	1,18219543613048
$x = 0, y = 3$	1,17652823360129

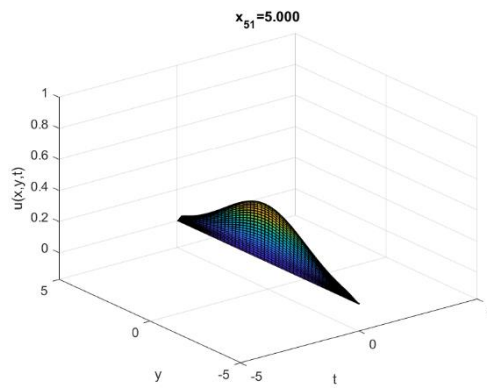
Dari Tabel 4.7, 4.8, 4.9, dan 4.10 dapat disimpulkan bahwa skema di persamaan (4.8) tidak konsisten karena hasil dari pembagian tabel di atas tidak memenuhi syarat. Di sini peneliti menunjukkan salah satu nilai tabel yang tidak konsisten di t tetap yaitu di Tabel 4.7 bahwa nilai $\left(\frac{0,519332453157444}{0,229015537290379}\right)^2 = 5,14234286804348$ tidak ekuivalen dengan $\Delta x \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)^2$ yang artinya tidak terdefinisi sedangkan $\Delta y \rightarrow \left(\frac{-1}{-3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0,1111111$. Untuk x dan y tetap di titik $x = 0$ dan $y = -3$ yaitu di Tabel 4.10 bahwa nilai $\left(\frac{0,250650169849234}{0,229015537290379}\right)^2 = 1,19786013403521$ tidak ekuivalen dengan $\Delta t \rightarrow \left(\frac{0,012}{0,011}\right)^2 = 1,09090$ hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema (4.8) memenuhi kriteria $O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2)$.

Grafik skema terakhir yakni pada waktu $t = 0.05$ ditunjukkan pada

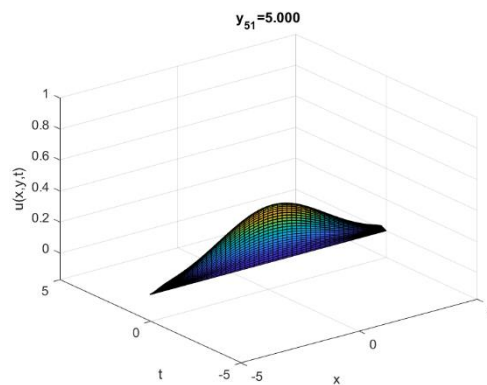
Gambar 4.6.



Gambar 4.14 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, y, 0.05)$



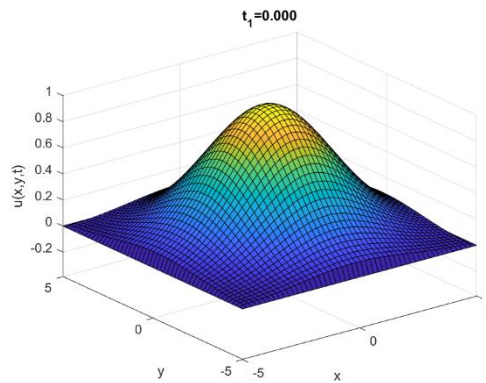
Gambar 4.15 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(5, y, t)$



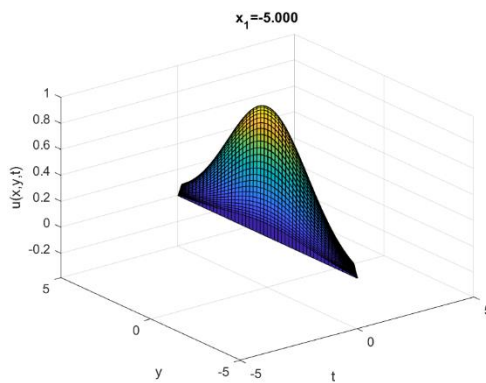
Gambar 4.16 Grafik Skema tanpa Fungsi $u(x, 5, t)$

B. Simulasi dengan $g(x, y, t) \neq 0$

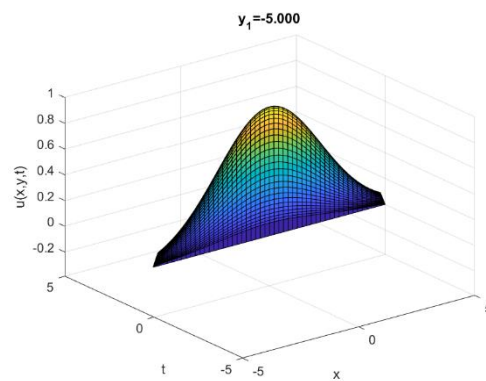
Gambar 4.7 berikut ini merupakan grafik skema persamaan difusi dua dimensi dengan nilai awal dan kondisi batas sesuai persamaan (4.25) terhadap persamaan (4.26) saat $t = 0$ dan $t = 0.001$, dengan $g(x, y, t) = \left(\frac{5y}{6} + t^3 + 2\pi t^4\right) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.



Gambar 4.17 Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.000)$

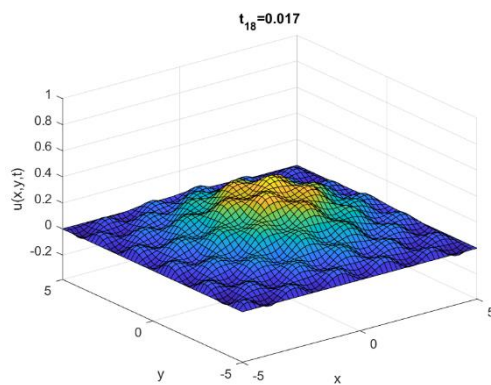


Gambar 4.18 Grafik Skema dengan Fungsi $u(-5, y, t)$

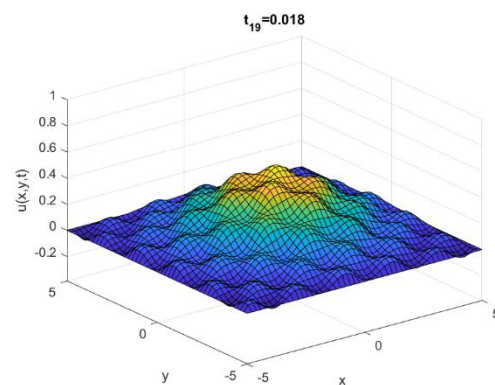


Gambar 4.19 Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, -5, t)$

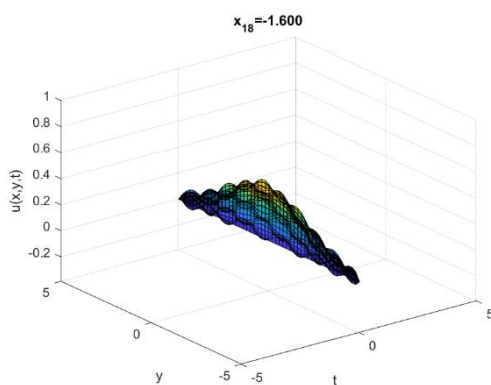
Nilai $u(x, y, 0)$ dan $u(x, y, 0.001)$ pada simulasi kedua ini sama dengan nilai $u(x, y, 0)$ dan $u(x, y, 0.001)$ di simulasi $g(x, y, t) = 0$, mengingat nilai u pada $t = 0$ dan $t = 0.001$ dibangkitkan oleh nilai awal yang sama. Selanjutnya disajikan gambar skema persamaan difusi dua dimensi dengan $g(x, y, t)$ pada $t = 0.017$ dan $t = 0.018$ untuk menunjukkan secara signifikan ketidakstabilan skema numerik (4.26). Secara visual, terlihat bahwa grafik skema justru naik, menunjukkan ketidakstabilan skema numerik yang digunakan. Hal ini didukung oleh data numeris yang disajikan pada Tabel 4.11 yang di dapat dari Matlab (Lampiran 7.).



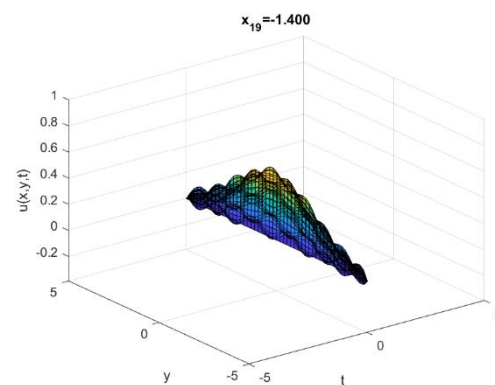
Gambar 4. 20 Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.017)$



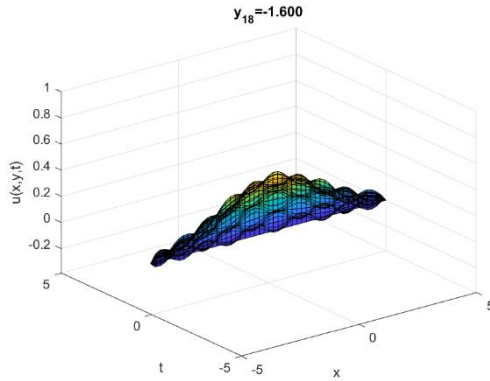
Gambar 4. 21 Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.018)$



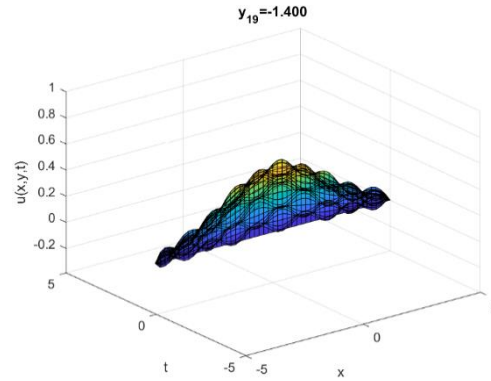
Gambar 4. 22 Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.6, y, t)$



Gambar 4. 23 Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.4, y, t)$



Gambar 4.24 Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.6, y, t)$



Gambar 4.25 Grafik Skema dengan Fungsi $u(-1.4, y, t)$

Tabel 4.11 Selisih Nilai $u(x, y, t)$ Saat $t = 0.017$, $t = 0.018$ dan $x = 0$

Δy	$u(x, y, 0.017)$	$u(x, y, 0.018)$	Selisih
$x = 0, y = -3$	0.143682968135050	0.178611231285824	0.034928263150775
$x = 0, y = -1$	0.346886559174939	0.425367486840792	0.078480927665853
$x = 0, y = 0$	0.417427460870310	0.506626457423169	0.089198996552859
$x = 0, y = 1$	0.359285709991021	0.437455147606692	0.078169437615671
$x = 0, y = 3$	0.160484919656753	0.195007837456121	0.034522917799369

Tabel 4.12 Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.017)$ di Tabel 4.11

$\left(\frac{\text{kolom}}{\text{baris}}\right)^2$	$x = 0, y = -3$	$x = 0, y = -1$	$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 0, y = 3$
$x = 0, y = -3$	-	5,82860149498035	8,44017498287925	6,25272468567675	1,24754975880971
$x = 0, y = -1$	0,171567742426929	-	1,44806176750084	1,07276585833869	0,214039295684242
$x = 0, y = 0$	0,118480955907725	0,690578276730466	-	0,740828797786811	0,147810887966226
$x = 0, y = 1$	0,159930278441768	0,932169860018313	1,34983953510912	-	0,199520980296398
$x = 0, y = 3$	0,801571234284155	4,67203929448186	6,76540147860077	5,01200424393692	-

Tabel 4.13 Validasi Orde Error (Δy^2) Ketika $u(x, y, 0.018)$ di Tabel 4.11

$\left(\frac{\text{kolom}}{\text{baris}}\right)^2$	$x = 0, y = -3$	$x = 0, y = -1$	$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 0, y = 3$
$x = 0, y = -3$	-	5,67167130588025	8,04559567139973	5,99859489936490	1,192028403
$x = 0, y = -1$	0,176314871943165	-	1,41855817050933	1,057641492	0,210172335246405
$x = 0, y = 0$	0,124291605102003	0,704941130218830	-	0,745574988398751	0,148159123549331
$x = 0, y = 1$	0,166705706382319	0,945499971	1,34124670966722	-	0,198717936967720
$x = 0, y = 3$	0,838906185	4,75800013749481	6,74949997032777	5,03225836207450	-

Tabel 4.14 Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.11

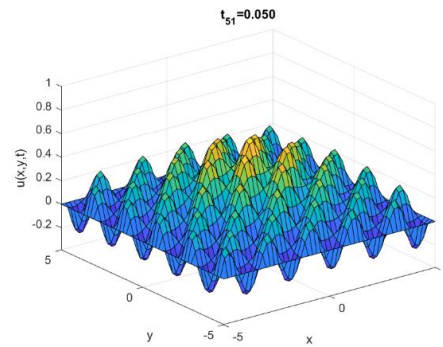
	$\left(\frac{0,017}{0,018}\right)^2$
$x = 0, y = -3$	0,64713226411192
$x = 0, y = -1$	0,665037848392618
$x = 0, y = 0$	0,678869504415601
$x = 0, y = 1$	0,674547948410202
$x = 0, y = 3$	0,677273878631248

Tabel 4.15 Validasi Orde Error (Δt^2) di Tabel 4.11

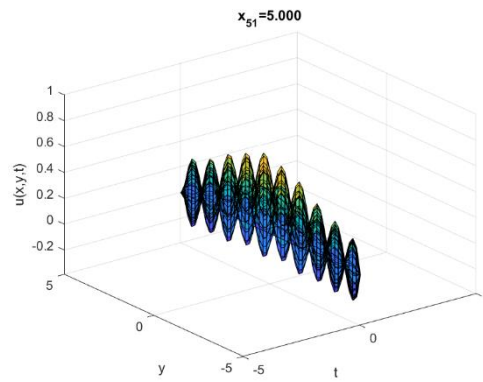
	$\left(\frac{0,018}{0,017}\right)^2$
$x = 0, y = -3$	1,54527915768862
$x = 0, y = -1$	1,50367381708722
$x = 0, y = 0$	1,47303714999077
$x = 0, y = 1$	1,48247430350479
$x = 0, y = 3$	1,47650755706240

Dari Tabel 4.12, 4.13, 4.14, dan 4.15 dapat disimpulkan bahwa skema di persamaan (4.8) tidak konsisten karena hasil dari pembagian tabel di atas tidak memenuhi syarat. Di sini peneliti menunjukkan salah satu nilai tabel yang tidak konsisten di t tetap yaitu di Tabel 4.12 bahwa nilai $\left(\frac{0,359285709991021}{0,143682968135050}\right)^2 = 6,25272468567675$ tidak ekuivalen dengan $\Delta x \rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)^2$ yang artinya tidak terdefinisi sedangkan $\Delta y \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9 = 0,1111111111$. Untuk x dan y tetap di titik $x = 0$ dan $y = 3$ yaitu di Tabel 4.14 bahwa nilai $\left(\frac{0,178611231285824}{0,143682968135050}\right)^2 = 0,677273878631248$ tidak ekuivalen dengan $\Delta t \rightarrow \left(\frac{0,018}{0,017}\right)^2 = 1,058823529$ hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema (4.8) memenuhi kriteria ($\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t^2$).

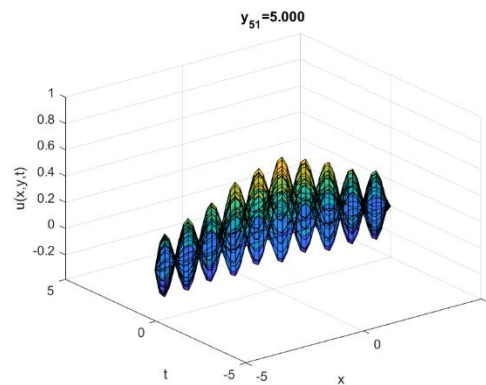
Grafik skema terakhir yakni pada waktu $t = 0.05$ ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. 26 Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, y, 0.05)$



Gambar 4. 27 Grafik Skema dengan Fungsi $u(5, y, t)$



Gambar 4. 28 Grafik Skema dengan Fungsi $u(x, 5, t)$

4.4 Kajian Integrasi

Dalam Al-Qur'an, Jika sains dikaitkan dengan fenomena alam, maka ada lebih dari 750 ayat menjelaskan tentang fenomena alam. Salah satunya adalah Surah al-Fatir, ayat 41 yang artinya sebagai berikut:

"Sungguh, Allah yang menahan langit dan Bumi agar tidak lenyap; dan jika keduanya akan lenyap." (QS. Fatir 35: Ayat 41).

Dalam ayat tersebut, menjelaskan tentang kesetimbangan benda langit. Menurut Shihab (2002) dalam Tafsir Al-Mishbah, kata *yumsiku* pada mulanya berarti memegang sesuatu dengan tangan sehingga yang dipegang itu tidak terlepas atau berpecah. Ayat al-Fatir tersebut mengilustrasikan kemantapan berjalannya sistem alam raya di bawah kendali Allah SWT, seperti halnya sesuatu yang dipegang sehingga tidak dapat lepas atau tercecer, kecuali jika yang memegang melepaskannya.

Sebuah sistem mengenai pengaturan dan pemeliharaan langit dan Bumi menerangkan bahwa adanya semacam gaya penahan yang membawa kepada sistem yang seimbang. Gaya yang dimaksud disini adalah gaya gravitasi. Dalam buku Fisika dan Al-Qur'an, gravitasi adalah sebuah interaksi antara sebuah benda yang bermassa m dengan benda lain di sekitarnya. Praktisnya, gaya terjadi di setiap benda yang memiliki massa dengan benda lain yang juga memiliki massa di alam ini.

Secara ontologi kestimbangan benda langit pada Q.S Fatir: 41 Allah menyebutkan pada kalimat secara tetap di dalam jagat ini. Berarti Allah dapat menahan langit dan Bumi sehingga tidak terlepas (hilang) sedangkan kesetimbangan benda langit diakibatkan oleh gaya gravitasi antara benda-benda bermassa yang bekerja secara luas dalam alam semesta.

Pada tataran Epistemologi Q.S Fatir :41 menyampaikan bahwa Allah SWT menciptakan kesetimbangan dalam alam semesta berdasarkan buku “Menguak Keterpaduan Sains, Teknologi dan Islam” termuat bahwa kesetimbangan benda langit terjadi karena adanya gaya gravitasi yang dirumuskan oleh ilmuwan fisikawan bernama Isaac Newton tahun 1686 (Amilda, Kartika, & Rakhmadi, 2020).

Kesetimbangan juga terjadi pada prinsip kerja remaserasi yaitu pelarutan senyawa metabolit sekunder pada sampel berdasarkan sifat kelarutannya dalam suatu pelarut. Pada temperatur kamar dan terlindung dari cahaya dilakukan proses penarikan senyawa metabolit sekunder selama tiga hari dengan cara merendam serbuk simplisia dengan pelarut yang sesuai selama tiga hari dan dilakukan pergantian pelarut tiap hari. Ketika sudah mencapai fase setimbang, sel tanaman tersebut akan dimasuki oleh pelarut dengan cara melewati dinding sel. Proses setimbang tersebut terjadi dengan cara keluarnya senyawa metabolit sekunder di dalam sel karena konsentrasi di dalam sel berbeda dengan konsentrasi di luar sel. Proses setimbang tersebut terjadi karena proses difusi yang disebabkan karena adanya perbedaan konsentrasi di mana konsentrasi di dalam sel yang lebih tinggi akan menyebabkan senyawa metabolit sekunder keluar dan digantikan oleh cairan pelarut di luar sel yang konsentrasinya lebih rendah. Peristiwa tersebut terjadi berulang sampai terjadi keseimbangan konsentrasi di luar dan di dalam sel (Dewatisari, 2020).

Dalam hal ini dapat diketahui proses difusi melibatkan minimal dua zat, salah satu zat berkonsentrasi lebih tinggi daripada zat lainnya atau dapat dikatakan dalam kondisi belum setimbang, Keadaan ini dapat menjadi perbedaan konsentrasi

dari proses difusi. Difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata atau mencapai keadaan kesetimbangan dimana perpindahan molekul tetap terjadi walaupun tidak ada perbedaan konsentrasi (Leonita & Beny, 2014).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Skema numerik persamaan difusi dua dimensi dengan metode beda hingga pusat untuk turunan waktu dan Saul'yev eksplisit untuk turunan ruangnya diperoleh sebagai berikut:

$$u_{r,s}^{n+1} = \frac{\mu_x(u_{r+1,s}^n + u_{r-1,s}^{n+1}) + \mu_y(u_{r,s+1}^n + u_{r,s-1}^{n+1})}{\mu_x + \mu_y + 1} - \left(\frac{u_{r,s}^n(\mu_x + \mu_y) - u_{r,s}^{n-1} - 2\Delta t \cdot g_{r,s}^n}{\mu_x + \mu_y + 1} \right)$$

2. Analisis kestabilan skema metode beda hingga pusat untuk turunan waktu dan Saul'yev untuk turunan ruang dinyatakan tidak stabil di semua kondisi. Sedangkan untuk Hasil analisis konsistensi dan *error* pemotongan ini tidak bisa dijelaskan dengan nilai numeris u karena skema numerik yang diperoleh tidak stabil di semua kondisi.
3. Simulasi dilakukan dengan membangkitkan skema FTCS untuk persamaan difusi dua dimensi yang umum digunakan. Simulasi pertama dengan ($g(x, y, t) = 0$) dapat diketahui dengan jelas bahwa nilai $u(x, y, t)$ mengalami penurunan dari $t = 0$ sampai $t = 0.001$. Hal ini sesuai dengan profil grafik skema persamaan difusi, di mana nilai u akan terus mengalami penurunan sampai stabil ke titik 0, sedangkan untuk $t = 0,011$ gambar menunjukkan bahwa skema tidak stabil karena mengalami kenaikan dan turun secara bergantian terus menerus sampai di titik $t = 0,05$. Untuk

simulasi kedua dengan $(g(x, y, t) \neq 0)$ profil grafik ketika kondisi awal samadengan simulasi pertama, sedangkan pada grafik $t = 0,017$ grafik mengalami ketidakstabilan sampai di titik $t = 0,05$.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, diharapkan untuk menganalisis numerik dari skema yang telah dikonstruksi, atau menganalisis keakurasian skema yang sudah diperoleh dari penelitian ini dengan menggunakan metode yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, U., & Abdullah, F. A. (2018). Explicit Saul'yev Finite Difference Approximation for Two Dimensional Fractional Sub-diffusion Equation. *Journal of Mathematical Physics* .
- Al-Quran, T. (2015). *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.
- Amilda, Kartika, N., & Rakhmadi, F. A. (2020). Islam dan Sains Pada Keseimbangan Benda Langit. *Prosiding Konferensi Integrasi Interkoneksi Islam Dan Sains*, 2: 53-55.
- As-Suyuthi, J., & Al-Mahali, J. (2003). *Tafsir Jalalain*. Surabaya: Imaratullah.
- Causon, D. M., & Mingham, C. G. (2010). *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. UK: Ventus Publishing Aps.
- Chin, S. A. (2014). Understanding Saul'yev-Type Unconditionally Stable Schemes from Exponential Splitting. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1960-1983.
- Dai, W. (1997). A Generalized Peaceman-Rachford ADI Scheme for Solving Two-Dimensional Parabolic. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 12, No. 4,.
- Darvishi, M. T. (2003). Forward-Backward Saul'yev Methods to Solve PDEs. *WSEAS Transactions on Mathematics* .
- Dehghan, M. (2001). Determination of A Control Parameter In The Two-Dimensional Diffusion Equation. *Applied Numerical Mathematics*, 489–502.
- Dewatisari, W. F. (2020). Perbandingan Pelarut Kloroform dan Etanol terhadap Rendemen Ekstrak Daun Lidah Mertua (*Sansevieria trifasciata* Prain.) Menggunakan Metode Maserasi. *journal.uin-alauddin*.
- Duistermaat, J. J., & Kolk, J. A. (2006). *Distributions: Theory and Applications*. New York: Berlin Heidelberg.
- Fletcher, C. J. (1991). *Computational Techniques for Fluid Dynamics I*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Hayman, K. J. (1988). *Finite Difference Methods for the Diffusion Equation*. Australia: Departement or Applied Mathematics University of Adelaide.
- Hellevik, L. R. (2020). *Numerical Methods for Engineers*. Norwegia: https://folk.ntnu.no/leifh/teaching/tkt4140/_main000.html.
- Henner, V., Belozeroва, T., & Khenner, M. (20123). *Ordinary and Partial Differential Equation*. New York: CRC Press.

- Holman, J. P. (1994). *Perpindahan Kalor*. Jakarta: Erlangga.
- Kreyszig, E. (1991). *Matematika Teknik Lanjutan Jilid 1 Edisi Terjemahan*. Jakarta: Erlangga.
- Leonita, E., & Beny, Y. (2014). Pengelolaan Limbah Medis Padat Puskesmas SeKota Pekanbaru. *Jurnal Kesehatan Komunitas*, Vol. 2. No. 4.
- Li, G., & Jackson, C. R. (2007). Simple, Accurate, and Efficient Revisions to Maccormack and Saul'yev Schemes: High Peclet Numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 610-622.
- Nag, P. K. (2007). *Heat and Mass Transfer*. India: Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited.
- Nikmah, J. (2015). Penyelesaian Numerik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit.
- Pourghanbar, S., & Ranjbar, M. (2016). Convergence of The Saul'yev Scheme for European Option Pricing with Transaction Costs Nonlinear Equation. *Annual Iranian Mathematics Conference*, 489-493.
- Rezzolla, L. (2020). *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations*. Frankfurt, Germany: Institute for Theoretical Physics.
- Ross, L. S. (1984). *Differential Equation 3th*. New York: University of New Hampshire.
- Salih, A. (2014, Desember 22). Classification of Partial Differential Equations and Canonical Forms. p. 18.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Soheili, A. R., Niasar, M. B., & Arezoomandan, M. (2011). Approximation of Stochastic Parabolic Differential Equations with Two Different Finite Difference Schemes. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 61-83.
- Tavakoli, R., & Davami, P. (2006). New Stable Group Explicit Finite Difference Method for Solution of Diffusion Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 1379-1386.
- Towler, B. F., & Yang, R. Y. (1978). Numerical Stability of The Classical and The Modified Saul'yev'S and The Modified Saul'yev'S. *Computers and Chemical Engineering*, Vol.2 pp.45-51.
- Tveito, A., Langtangen, H. P., Nielsen, B. F., & Cai, X. (2010). *Elements of Scientific Computing*. New York: Springer Heidelberg Dordrecht London.

Zhai, S., & Feng, X. (2016). Investigations On Several Compact ADI Methods for the 2D Time Fractional Diffusion Equation. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 1-13.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Simulasi $g(x, y, t) = 0$ plot x dan y

```
clc,clear all,close all
format long

%Step size x dan t
deltax=0.2;
deltay=0.2;
deltat=0.001;

%Batas x,y dan t
ats=[5 5 0.05];
bwh=[-5 -5 0];

%t dan x
x=bwh(1):deltax:ats(1);
y=bwh(2):deltay:ats(2);
t=bwh(3):deltat:ats(3);

%Panjang x dan t
N=length(t);
MX=length(x);
MY=length(y);
u=zeros(MX,MY,N);
mu1=2*deltat/deltax^2;
mu2=2*deltat/deltay^2;

%Metode ini tidak stabil di semua kondisi

%IC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        u(r,s,1) = exp(-(x(r)^2+y(s)^2)/10);
    end
end

% BC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        for n=1:N
            u(r,1,n) = 0;
            u(r,MY,n) = 0;
            u(1,s,n) = 0;
            u(MX,s,n) = 0;
        end
    end
end

%FTCS untuk nilai awal kedua
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        u(r,s,2) = ((u(r+1,s,1)-2*u(r,s,1)+u(r-1,s,1))/deltax^2+(u(r,s+1,1)-2*u(r,s,1)+u(r,s-1,1))/deltay^2)*deltat+u(r,s,1);
    end
end
```

```

end

%Skema
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        for n=2:N-1
            u(r,s,n+1)=(mu1*(u(r+1,s,n)+u(r-
1,s,n+1))+mu2*(u(r,s+1,n)+u(r,s-1,n+1))-
u(r,s,n)*(mu1+mu2)+u(r,s,n-1))/(1+mu1+mu2);
            end
        end
    end

h=figure(1);
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    surf(X,Y,u(:,:,n))
    axis([min(x) max(x) min(y) max(y) min(min(min(u)))
max(max(max(u)))]);
    title(sprintf('t_{%d}=%3.3f',n,t(n)));
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('u(x,y,t)');
    saveas(h,sprintf('uketikat%d.png',n));
    pause(0.5);

end

figure(2)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    contour(X,Y,u(:,:,n))
    xlabel('x')
    ylabel('y')

    pause(2)
end

```

Lampiran 2 Simulasi $g(x, y, t) = 0$ plot x dan t

```

clc,clear all,close all
format long

```

```

%Step size x dan t
deltax=0.2;
deltay=0.2;
deltat=0.001;

%Batas x,y dan t
ats=[5 5 0.05];
bwh=[-5 -5 0];

%t dan x
x=bwh(1):deltax:ats(1);
y=bwh(2):deltay:ats(2);
t=bwh(3):deltat:ats(3);

```

```

%Panjang x dan t
N=length(t);
MX=length(x);
MY=length(y);
u=zeros(MX,MY,N);
mu1=2*deltat/deltax^2;
mu2=2*deltat/deltay^2;

%Metode ini tidak stabil di semua kondisi

%IC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        u(r,s,1) = exp(-(x(r)^2+y(s)^2)/10);
    end
end

% BC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        for n=1:N
            u(r,1,n) = 0;
            u(r,MY,n) = 0;
            u(1,s,n) = 0;
            u(MX,s,n) = 0;
        end
    end
end

%FTCS untuk nilai awal kedua
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        u(r,s,2) = ((u(r+1,s,1)-2*u(r,s,1)+u(r-1,s,1))/deltax^2+(u(r,s+1,1)-2*u(r,s,1)+u(r,s-1,1))/deltay^2)*deltat+u(r,s,1);
    end
end

%Skema
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        for n=2:N-1
            u(r,s,n+1)=(mu1*(u(r+1,s,n)+u(r-1,s,n+1))+mu2*(u(r,s+1,n)+u(r,s-1,n+1))-u(r,s,n)*(mu1+mu2)+u(r,s,n-1))/(1+mu1+mu2);
        end
    end
end

h=figure(1);
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,t);
    surf(X,Y,u(:, :, n))
    axis([min(x) max(x) min(y) max(y) min(min(min(u))) max(max(max(u)))]);
end

```

```

        title(sprintf('y_{%d}=%3.3f',n,y(n)));
        xlabel('x');
        ylabel('t');
        zlabel('u(x,y,t)');
        saveas(h,sprintf('uketikat%d.png',n));
        pause(0.5);

end
%
figure(2)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,t);
    contour(X,Y,u(:,:,n))
    title(sprintf('y_{%d}=%3.3f',n,y(n)));
    xlabel('x')
    ylabel('t')

    pause(2)
end

```

Lampiran 3 Simulasi $g(x, y, t) = 0$ plot t dan y

```

clc,clear all,close all
format long

%Step size x dan t
deltax=0.2;
deltay=0.2;
deltat=0.001;

%Batas x,y dan t
ats=[5 5 0.05];
bwh=[-5 -5 0];

%t dan x
x=bwh(1):deltax:ats(1);
y=bwh(2):deltay:ats(2);
t=bwh(3):deltat:ats(3);

%Panjang x dan t
N=length(t);
MX=length(x);
MY=length(y);
u=zeros(MX,MY,N);
mu1=2*deltat/deltax^2;
mu2=2*deltat/deltay^2;

%Metode ini tidak stabil di semua kondisi

%IC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        u(r,s,1) = exp(-(x(r)^2+y(s)^2)/10);
    end
end

% BC
for r=1:MX

```

```

    for s=1:MY
        for n=1:N
            u(r,1,n) = 0;
            u(r,MY,n) = 0;
            u(1,s,n) = 0;
            u(MX,s,n) = 0;
        end
    end
end

%FTCS untuk nilai awal kedua
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        u(r,s,2) = ((u(r+1,s,1)-2*u(r,s,1)+u(r-1,s,1))/deltax^2+(u(r,s+1,1)-2*u(r,s,1)+u(r,s-1,1))/deltay^2)*deltat+u(r,s,1);
    end
end

%Skema
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        for n=2:N-1
            u(r,s,n+1)=(mu1*(u(r+1,s,n)+u(r-1,s,n+1))+mu2*(u(r,s+1,n)+u(r,s-1,n+1))-u(r,s,n)*(mu1+mu2)+u(r,s,n-1))/(1+mu1+mu2);
        end
    end
end

h=figure(1);
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(t,y);
    surf(X,Y,u(:,:,n))
    axis([min(x) max(x) min(y) max(y) min(min(min(u))) max(max(max(u)))]);
    title(sprintf('x_{%d}=%3.3f',n,x(n)));
    xlabel('t');
    ylabel('y');
    zlabel('u(x,y,t)');
    saveas(h,sprintf('uketikat%d.png',n));
    pause(0.5);

end
%
figure(2)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(t,y);
    contour(X,Y,u(:,:,n))
    title(sprintf('x_{%d}=%3.3f',n,x(n)));
    xlabel('t')
    ylabel('y')

    pause(0.5)
end

```

Lampiran 4 Simulasi $g(x, y, t) \neq 0$ plot x dan y

```
clc,clear all,close all
format long

%Step size x dan t
deltax=0.2;
deltay=0.2;
deltat=0.001;

%Batas x,y dan t
ats=[5 5 0.05];
bwh=[-5 -5 0];

%t dan x
x=bwh(1):deltax:ats(1);
y=bwh(2):deltay:ats(2);
t=bwh(3):deltat:ats(3);

%Panjang x dan t
N=length(t);
MX=length(x);
MY=length(y);
u=zeros(MX,MY,N);
mu1=2*deltat/deltax^2;
mu2=2*deltat/deltay^2;
gamma=0.5;

%Metode ini tidak stabil di semua kondisi

%IC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        u(r,s,1) = exp(-(x(r)^2+y(s)^2)/10);
    end
end

% BC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        for n=1:N
            u(r,1,n) = 0;
            u(r,MY,n) = 0;
            u(1,s,n) = 0;
            u(MX,s,n) = 0;
        end
    end
end

%FTCS untuk nilai awal kedua
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        u(r,s,2) = ((u(r+1,s,1)-2*u(r,s,1)+u(r-1,s,1))/deltax^2+(u(r,s+1,1)-2*u(r,s,1)+u(r,s-1,1))/deltay^2)*deltat+u(r,s,1);
    end
end
```



```

%Skema
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        for n=2:N-1
            u(r,s,n+1)=(mu1*(u(r+1,s,n)+u(r-
1,s,n+1))+mu2*(u(r,s+1,n)+u(r,s-1,n+1))-
u(r,s,n)*(mu1+mu2)+u(r,s,n-
1))+((5*t(n+1))/6+3*pi^2*(t(n+1))^(3+1))*sin(pi*x(r+1))*sin(pi*y(s+
1)))/(1+mu1+mu2);
        end
    end
end

h=figure(1)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    surf(X,Y,u(:, :, n))
    axis([min(x) max(x) min(y) max(y) min(min(min(u)))
max(max(max(u)))]);
    title(sprintf('t_{%d}=%3.3f',n,t(n)));
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('u(x,y,t)');
    saveas(h,sprintf('ufungsiketikat%d.png',n));
    pause(0.5);
end

figure(2)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    contour(X,Y,u(:, :, n))
    title(sprintf('t_{%d}=%3.3f',n,t(n)));
    xlabel('x');
    ylabel('y');

    pause(1)
end

```

Lampiran 5 Simulasi $g(x, y, t) \neq 0$ plot x dan t

```

clc,clear all,close all
format long

```

```

%Step size x dan t
deltax=0.2;
deltay=0.2;
deltat=0.001;

```

```

%Batas x,y dan t
ats=[5 5 0.05];
bwh=[-5 -5 0];

```

```

%t dan x
x=bwh(1):deltax:ats(1);
y=bwh(2):deltay:ats(2);
t=bwh(3):deltat:ats(3);

```

```

%Panjang x dan t
N=length(t);
MX=length(x);
MY=length(y);
u=zeros(MX,MY,N);
mu1=2*deltat/deltax^2;
mu2=2*deltat/deltay^2;
gamma=0.5;

%Metode ini tidak stabil di semua kondisi

%IC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        u(r,s,1) = exp(-(x(r)^2+y(s)^2)/10);
    end
end

% BC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        for n=1:N
            u(r,1,n) = 0;
            u(r,MY,n) = 0;
            u(1,s,n) = 0;
            u(MX,s,n) = 0;
        end
    end
end

%FTCS untuk nilai awal kedua
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        u(r,s,2) = ((u(r+1,s,1)-2*u(r,s,1)+u(r-1,s,1))/deltax^2+(u(r,s+1,1)-2*u(r,s,1)+u(r,s-1,1))/deltay^2)*deltat+u(r,s,1);
    end
end

%Skema
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        for n=2:N-1
            u(r,s,n+1)=(mu1*(u(r+1,s,n)+u(r-1,s,n+1))+mu2*(u(r,s+1,n)+u(r,s-1,n+1))-u(r,s,n)*(mu1+mu2)+u(r,s,n-1)+((5*t(n+1))/6+3*pi^2*(t(n+1))^(3+1))*sin(pi*x(r+1))*sin(pi*y(s+1)))/(1+mu1+mu2);
        end
    end
end

h=figure(1)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,t);
    surf(X,Y,u(:, :, n))
end

```

```

        axis([min(x) max(x) min(y) max(y) min(min(min(u)))
max(max(max(u)))]);
        title(sprintf('y_{%d}=%3.3f',n,y(n)));
        xlabel('x');
        ylabel('t');
        zlabel('u(x,y,t)');
        saveas(h,sprintf('ufungsiketikat%d.png',n));
        pause(0.5);
end

figure(2)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(x,t);
    contour(X,Y,u(:, :, n))
    title(sprintf('y_{%d}=%3.3f',n,y(n)));
    xlabel('x');
    ylabel('t');

    pause(1)
end

```

Lampiran 6 Simulasi $g(x, y, t) \neq 0$ plot t dan y

```

clc,clear all,close all
format long

%Step size x dan t
deltax=0.2;
deltay=0.2;
deltat=0.001;

%Batas x,y dan t
ats=[5 5 0.05];
bwh=[-5 -5 0];

%t dan x
x=bwh(1):deltax:ats(1);
y=bwh(2):deltay:ats(2);
t=bwh(3):deltat:ats(3);

%Panjang x dan t
N=length(t);
MX=length(x);
MY=length(y);
u=zeros(MX,MY,N);
mu1=2*deltat/deltax^2;
mu2=2*deltat/deltay^2;
gamma=0.5;

%Metode ini tidak stabil di semua kondisi

%IC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        u(r,s,1) = exp(-(x(r)^2+y(s)^2)/10);
    end
end
end

```

```

% BC
for r=1:MX
    for s=1:MY
        for n=1:N
            u(r,1,n) = 0;
            u(r,MY,n) = 0;
            u(1,s,n) = 0;
            u(MX,s,n) = 0;
        end
    end
end

%FTCS untuk nilai awal kedua
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        u(r,s,2) = ((u(r+1,s,1)-2*u(r,s,1)+u(r-1,s,1))/deltax^2+(u(r,s+1,1)-2*u(r,s,1)+u(r,s-1,1))/deltay^2)*deltat+u(r,s,1);
    end
end

%Skema
for r=2:MX-1
    for s=2:MY-1
        for n=2:N-1
            u(r,s,n+1)=(mul*(u(r+1,s,n)+u(r-1,s,n+1))+mu2*(u(r,s+1,n)+u(r,s-1,n+1))-u(r,s,n)*(mul+mu2)+u(r,s,n-1)+((5*t(n+1))/6+3*pi^2*(t(n+1))^(3+1))*sin(pi*x(r+1))*sin(pi*y(s+1)))/(1+mul+mu2);
        end
    end
end

h=figure(1)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(t,y);
    surf(X,Y,u(:,:,n))
    axis([min(x) max(x) min(y) max(y) min(min(min(u))) max(max(max(u)))]);
    title(sprintf('x_{%d}=%3.3f',n,x(n)));
    xlabel('t');
    ylabel('y');
    zlabel('u(x,y,t)');
    saveas(h,sprintf('ufungsiketikat%d.png',n));
    pause(0.5);
end

figure(2)
for n=1:N
    [X,Y]=meshgrid(t,y);
    contour(X,Y,u(:,:,n))
    title(sprintf('x_{%d}=%3.3f',n,x(n)));
    xlabel('t');
    ylabel('y');

    pause(1)
end

```

end

Lampiran 7 Nilai Tabel

```
t1=18;t2=19;
a=[u(26,11,t1)
   u(26,21,t1)
   u(26,26,t1)
   u(26,31,t1)
   u(26,41,t1)]
b=[u(26,11,t2)
   u(26,21,t2)
   u(26,26,t2)
   u(26,31,t2)
   u(26,41,t2)]
c=[(u(26,11,t2)-u(26,11,t1))
   (u(26,21,t2)-u(26,21,t1))
   (u(26,26,t2)-u(26,26,t1))
   (u(26,31,t2)-u(26,31,t1))
   (u(26,41,t2)-u(26,41,t1))]
```

RIWAYAT HIDUP



Fitria Imroatul Mufida, lahir di Kabupaten Blitar, pada 03 Maret 1997. Bertempat tinggal di Dusun Kebonagung Desa Popoh Kecamatan Selopuro Blitar. Anak sulung dari pasangan bapak Mustaqim dan Ibu Siti Nasiah. Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu RA Perwanida Popoh Blitar, kemudian melanjutkan pendidikan pada tingkat dasar di MI Islamiyah Popoh Blitar dan lulus pada tahun 2009.

Melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah pertama di MTs Maarif Nu Kota Blitar dan lulus pada tahun 2012. Melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah atas di MA Maarif NU Kota Blitar dan lulus pada tahun 2015. Kemudian tahun 2015 melanjutkan studi pada jenjang perkuliahan strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama :Fitria Imroatul Mufida
NIM :15610094
Fakultas/Program Studi :Sains dan Teknologi/Matematika
JudulSkripsi :Skema Numerik Persamaan Difusi Dua Dimensi dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Pusat-Saul'yev Eksplisit
Pembimbing I :Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd
Pembimbing II :Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	11 Oktober 2021	Konsultasi dan Revisi Bab I	1.
2	16 November 2021	Konsultasi Integrasi Bab I, Bab II dan Bab IV	2.
3	5 Februari 2022	Konsultasi dan Revisi Bab II dan III	3.
4	11 Maret 2022	Konsultasi dan Revisi Bab IV	4.
5	4 April 2021	Revisi Agama Bab I, Bab II dan Bab IV	5.
6	11 April 2022	Revisi Bab I, II dan III	6.
7	24 Mei 2022	Revisi Bab IV	7.
8	27 Mei 2022	Revisi Integrasi	8.
9	21 Juni 2022	ACC Bab IV	9.
10	21 Juni 2022	ACC Integrasi	10.
11	23 Juni 2022	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 24 Juni 2022
Mengetahui,
Kepala Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M. Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

