

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM* (MCUSUM) DAN KAPABILITAS PROSES  
PADA PENGENDALIAN KUALITAS AIR PDAM**

**SKRIPSI**

**OLEH  
HIKMATUL MAULIDIYAH  
NIM. 18610016**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM* (MCUSUM) DAN KAPABILITAS PROSES  
PADA PENGENDALIAN KUALITAS AIR PDAM**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Hikmatul Maulidiyah  
NIM. 18610016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

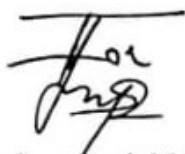
**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM* (MCUSUM) DAN KAPABILITAS PROSES PADA PENGENDALIAN KUALITAS AIR PDAM**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Hikmatul Maulidiyah**  
NIM. 18610016

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Malang, 20 Juni 2022

Dosen Pembimbing I



Fachrur-Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

Dosen Pembimbing II



Juhari, M.Si  
NIDT. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM* (MCUSUM) DAN KAPABILITAS PROSES PADA PENGENDALIAN KUALITAS AIR PDAM**

**SKRIPSI**

**Oleh**  
**Hikmatul Maulidiyah**  
**NIM. 18610016**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal, 24 Juni 2022

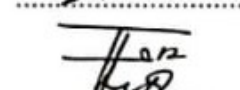
Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si



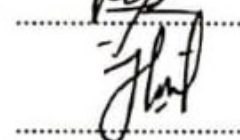
Anggota Penguji I : Angga Dwi Mulyanto, M.Si



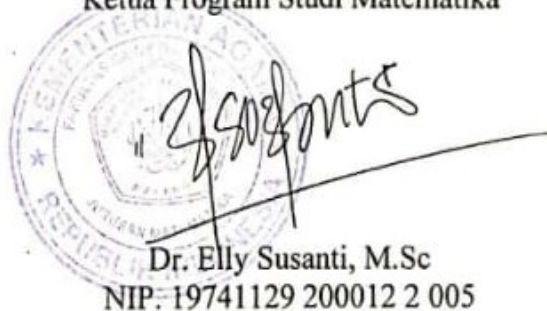
Anggota Penguji II : Fachrur Rozi, M.Si



Anggota Penguji III : Juhari, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hikmatul Maulidiyah  
NIM : 18610016  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Skripsi : Penerapan Grafik Pengendali *Multivariate Cumulative Sum*  
(MCUSUM) dan Kapabilitas Proses pada Pengendalian  
Kualitas Air PDAM

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambila data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,



Hikmatul Maulidiyah  
NIM. 18610016

## **MOTO**

“Sesungguhnya sesudah kesulitan pasti ada kemudahan”.

Qs. Al-Insyirah 94:6

## **PERSEMBAHAN**

Alhamdulillah Robbil'alamin, dengan mengucap rasa syukur kepada Allah Swt. Skripsi ini saya persembahkan untuk kedua orang tua tercinta, Abi Achmadi dan Umik Ida Fitriyah serta kakek-nenek dan kedua adik saya yang senantiasa memberikan nasihat, motivasi, doa yang tulus dan dukungan moril serta materiil bagi penulis.

## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Sang Pencipta atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. *Shalawat* serta salam juga selalu tercurahkan kepada nabi besar Muhammad Saw.

Terselesaikannya skripsi ini, tidak luput dari doa, bantuan, bimbingan serta arahan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dosen wali dan dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, ilmu dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, ilmu dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
7. Angga Dwi Mulyanto, M.Si, selaku Anggota Penguji I dalam Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
8. Seluruh sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim khususnya seluruh dosen yang memberikan banyak ilmu dan pengalaman yang berharga bagi penulis.
9. Pihak Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang yang telah memberikan izin dan kesempatan kepada penulis untuk memperoleh data dan berbagai informasi terkait data penelitian.
10. Teristimewa penulis sampaikan terima kasih sebesar-besarnya kepada kedua orang tua, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan



nasihat, motivasi, doa yang tulus dan dukungan moril serta materiil sehingga penulis dapat menyelesaikan perkuliahan dan menyelesaikan skripsi ini.

11. Teman-teman terbaik penulis yang selalu menemani, membantu, mendukung dan mau direpotkan hingga terselesaikannya skripsi ini.
12. Seluruh teman-teman seperjuangan AKSIOMA '18.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Malang, 28 Mei 2022

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGAJUAN .....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .....	iv
MOTO.....	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN .....	xv
ABSTRAK .....	xvi
ABSTRACT .....	xvii
مستخلص البحث.....	xviii
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	6
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Manfaat Penelitian.....	7
1.5 Batasan Penelitian.....	8
<b>BAB II KAJIAN TEORI .....</b>	<b>9</b>
2.1 Teori Pendukung.....	9
2.1.1 Kualitas.....	9
2.1.2 Uji Korelasi Antar Variabel .....	10
2.1.3 Uji Normalitas Multivariat .....	11
2.1.4 Pengendalian Kualitas Statistik .....	13
2.1.5 Grafik Pengendali.....	14
2.1.6 Grafik Pengendali <i>Multivariate Cumulative Sum</i> .....	15
2.1.7 Kapabilitas Proses Multivariat .....	17
2.1.8 Kualitas Air .....	19
2.1.9 Profil Perumda Air Minum Tugu Tirta .....	23
2.2 Pengendalian Kualitas Berdasarkan Perspektif Al-Qur'an .....	24
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>26</b>
3.1 Jenis Penelitian .....	26
3.2 Data dan Sumber Data.....	26
3.3 Tahap Analisis Data.....	26
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>29</b>
4.1 Statistik Deskriptif.....	29
4.2 Uji Korelasi Antar Variabel.....	30
4.3 Uji Normalitas Multivariat .....	32
4.4 Penerapan Grafik Pengendali MCUSUM.....	35
4.5 Kapabilitas Proses Multivariat.....	38

4.6 Manfaat Pengendalian Kualitas Berdasarkan Perspektif Al-Qur'an	42
<b>BAB V PENUTUP</b> .....	44
5.1 Kesimpulan .....	44
5.2 Saran .....	44
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	45
<b>LAMPIRAN</b> .....	47
<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	53

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Nilai $h$ .....	17
Tabel 2.2 Persyaratan Kualitas Air Minum.....	21
Tabel 3.1 Variabel Penelitian.....	26
Tabel 4.1 Deskripsi Karakteristik Kualitas Air Minum .....	30
Tabel 4.2 Hasil Perhitungan Nilai $d_i^2, i = 1,2,\dots,50$ .....	34
Tabel 4.3 Hasil Perhitungan Nilai $MC1_t$ Pada Proses Produksi Air Minum ....	37
Tabel 4.4 Batas Spesifikasi Kualitas Air Minum.....	39

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi Grafik Pengendali.....	14
Gambar 3.1 <i>Flowchart</i> Tahap Analisis Data.....	28
Gambar 4.1 Pengendalian Proses Menggunakan Grafik Pengendali MCUSUM	38

## DAFTAR SIMBOL

MCUSUM	: <i>Multivariate Cumulative Sum</i>
MCI	: <i>Multivariate CUSUM I</i>
MC2	: <i>Multivariate CUSUM II</i>
ARL	: <i>Average Run Length</i>
BSA	: Batas Spesifikasi Atas
BSB	: Batas Spesifikasi Bawah
$n$	: Banyaknya pengamatan
$p$	: Banyaknya variabel
$\mathbf{R}$	: Matriks korelasi
$ \mathbf{R} $	: Determinan matriks korelasi $\mathbf{R}$ berukuran $p \times p$
$r_{jk}$	: Nilai korelasi antar variabel $j$ dan variabel $k$
$X_{ij}$	: Nilai pengamatan ke- $i$ variabel ke- $j$
$X_{ik}$	: Nilai pengamatan ke- $i$ variabel ke- $k$
$\bar{X}_j$	: Rata-rata variabel $j$
$\bar{X}_k$	: Rata-rata variabel $k$
$\Sigma$	: Matriks kovariansi populasi
$S_{jj}$	: Variansi sampel
$S_{jk}$	: Kovariansi sampel
$\mathbf{S}$	: Matriks variansi-kovariansi
$\boldsymbol{\mu}_0$	: Vektor rata-rata proses
$\mathbf{X}_i$	: Vektor nilai pengamatan ke- $i$ , $i = 1, 2, \dots, n$
$\bar{\mathbf{X}}$	: Vektor rata-rata berukuran $p \times 1$
$k$	: Nilai referensi / nilai <i>slack</i>
$h$	: Batas kendali atas
$C_p$	: Indeks kapabilitas proses
$\chi_{\alpha,df}^2$	: Nilai <i>Chi-square</i>
$K$	: Daerah proses sebenarnya
$\mathbf{S}_0^{-1}$	: Invers matriks varian kovariansi dari variabel
$\boldsymbol{\xi}$	: Vektor nilai target dari batas spesifikasi variabel

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Sekunder Pemeriksaan Kualitas Air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.....	47
Lampiran 2. Hasil Statistik Deskriptif menggunakan <i>software</i> SPSS .....	49
Lampiran 3. Hasil Uji Normalitas Multivariat.....	50
Lampiran 4. Memplot Grafik Pengendali MCUSUM menggunakan <i>software</i> R	51
Lampiran 5. Hasil Perhitungan Nilai $MC1_t$ untuk $t = 1, 2, \dots, 50$ .....	52

## ABSTRAK

Maulidiyah, Hikmatul. 2022. **Penerapan Grafik Pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) dan Kapabilitas Proses pada Pengendalian Kualitas Produksi Air PDAM.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

**Kata Kunci:** Grafik Pengendali MCUSUM, Kapabilitas Proses, Produksi Air Minum, Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.

Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang (Perumda Tugu Tirta) merupakan perusahaan umum daerah yang bergerak di bidang pendistribusian air minum di Kota Malang. Dalam melakukan pengendalian kualitas air minum, Perumda Tugu Tirta melakukan pengendalian kualitas melalui uji lab dan uji lapangan dengan batas spesifikasi yang telah ada. Pengendalian kualitas air minum di Perumda Tugu Tirta dilakukan pada beberapa variabel dari parameter wajib dan tambahan. Pada penelitian ini akan dilakukan pengendalian kualitas secara statistik terhadap produksi air PDAM, hal tersebut bertujuan agar proses produksi air minum stabil dan menghasilkan produk yang berkualitas dan sesuai standar yang telah ditetapkan. Pengendalian kualitas dilakukan terhadap lima variabel dari parameter wajib, yaitu pH, besi (Fe), mangan (Mg), nitrit (NO<sub>2</sub>), dan sisa klor. Pengendalian kualitas dilakukan menggunakan grafik pengendali multivariat, karena akan dilakukan pengendalian kualitas terhadap beberapa variabel sekaligus. Dalam hal ini digunakan grafik pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM), karena grafik ini lebih sensitif untuk mendeteksi pergeseran kecil terhadap vektor rata-rata proses. Tahapan yang dilakukan adalah uji asumsi korelasi antar variabel dan uji normalitas multivariat, menghitung statistik MCUSUM, dan memplot grafik pengendali MCUSUM. Hasil penerapan grafik pengendali MCUSUM menunjukkan bahwa pengendalian kualitas produksi air di Perumda Tugu Tirta pada bulan Januari-Februari 2022 telah terkendali secara statistik. Selanjutnya dilakukan analisis kapabilitas proses dan hasilnya menunjukkan bahwa kapabilitas proses produksi air minum pada bulan Januari-Februari 2022 dikatakan baik. Penerapan grafik pengendali MCUSUM dan kapabilitas proses pada pengendalian kualitas air PDAM diharapkan dapat membantu perusahaan dalam manajemen hariannya dan dapat digunakan sebagai bentuk *continous improvement* pada PDAM.



## ABSTRACT

Maulidiyah, Hikmatul. 2022. **On the Implementation of the Multivariate Cumulative Sum Control Chart and Process Capability on the Quality Control of the PDAM Water Production.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Supervisor: (I) Fachrur Rozi, M.Sc. (II) Juhari, M.Sc.

**Keywords:** MCUSUM Control Chart, Process Capability, Drinking Water Production, Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang

Perumda Air Minum Tugu Tirta Malang City (Perumda Tugu Tirta) is a regional public company engaged in the distribution of drinking water in Malang City. In controlling the quality of drinking water, Perumda Tugu Tirta carries out quality control through lab test and field test with existing specification limits. Quality control of water production at Perumda Tugu Tirta is conducted on several variables from mandatory and additional parameters. In this research, statistical quality control will be carried out on PDAM water production, it aims to make the drinking water production process stable and produce quality products according to established standards. Quality control tested on five variables, namely pH, iron (Fe), manganese (Mg), nitrite (NO<sub>2</sub>), and residual chlorine. Quality control is carried out statistically using a multivariate control chart, because quality control will be carried out on several variables at once. In this case, the Multivariate Cumulative Sum (MCUSUM) control chart is used, because this graph is more sensitive to detect small changes in the mean vector of a process. The steps taken are the assumption test of the correlation between variables and the multivariate normality test, calculating the MCUSUM statistics, then plotting the MCUSUM control chart. The results on the implementation of the MCUSUM control chart show that the quality control of water production at Perumda Tugu Tirta in January-February 2022 have been statistically controlled. Furthermore, a process capability analysis was carried out and the results showed that the capability of the drinking water production process in January-February 2022 is good. The implementation of the MCUSUM control chart and process capability in quality controlling PDAM water is expected to help companies in their daily management and can be used as a form of continuous improvement in PDAM.

## مستخلص البحث

المولدية، حكمة. ٢٠٢٢. تطبيق رسم قيادة مجموع مرتفع متعدد المتغيرات "*Multivariate (MCUSUM)*" و "*Cumulative Sum*" و طاقة العملية على قيادة جودة إنتاج ماء "PDAM". البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) فخر الرازي الماجستير، (٢) جوهرى الماجستير.

الكلمات الأساسية: رسم قيادة "*MCUSUM*"، طاقة العملية، إنتاج الماء المشروب، شركة الماء المشروب العامة الإقليمية (Perumda) توغو تيرتا مدينة مالانج.

إن شركة الماء المشروب العامة الإقليمية توغو تيرتا مدينة مالانج (Perumda Tugu Tirta) هو الشركة العامة المنطقية التي تعمل في مجال توزيع الماء المشروب في مدينة مالانج. ففى إجراء قيادة جودة الماء المشروب، كان سكن منطقة توغو تيرتا يعمل على قيادة الجودة بوسيلة الاختبار المعلمي والاختبار الميداني بحد الموصفات الموجودة. فقيادة جودة الماء المشروب في شركة العامة الإقليمية توغو تيرتا أجريت على بعض المتغيرات من المعلامات الأساسية والثانوية (الزيادة). في هذا البحث سيتم تنفيذها مراقبة الجودة الإحصائية لإنتاج مياه الشرب، تهدف إلى الحفاظ على استقرار عملية إنتاج مياه الشرب وإنتاج منتجات عالية الجودة وفقاً للمعايير المعمول بها. أجري قيادة الجودة في هذا البحث على خمس المتغيرات من المعلامات الأساسية وهي pH، الحديد (Fe)، المنغنير (Mg)، النتريت (NO<sub>2</sub>)، والباقي من الكلور (Klor). فعملية قيادة الجودة أجري بالحساب الإحصائي باستخدام رسم قيادة مجموع متعدد المتغيرات لأنها سوف أجريت قيادة الجودة على بعض المتغيرات معاً. ففى هذا البحث، يستخدم رسم قيادة مجموع مرتفع متعدد المتغيرات "*MCUSUM*"، لأن هذا الرسم أحسس لكشف التغير الصغير على كمية العملية المتوسطة. الخطوات المستخدمة هي اختبار مسلمات العلاقة بين المتغيرات واختبار مفهوم متعدد المتغيرات، حساب إحصاء مجموع مرتفع متعدد المتغيرات "*MCUSUM*"، ويكون بعده عقدة رسم قيادتها. فنتائج تطبيق رسم قيادة مجموع مرتفع متعدد المتغيرات على قيادة جودة إنتاج الماء في شركة الماء المشروب العامة الإقليمية توغو تيرتا في شهر يناير-فبراير ٢٠٢٢ مقيدة إحصائية. وبعد أن تكون العملية مقيدة إحصائية، أجري تحليل طاقة عملية. فالنتائج من حساب مؤشر طاقة العملية دلت على أن طاقة عملية إنتاج الماء المشروب في شهر يناير-فبراير ٢٠٢٢ جيداً مطلقاً. تطبيق رسم قيادة "*MCUSUM*" و طاقة العملية في قيادة جودة الماء المشروب من المتوقع أن يساعد الشركة في إدارتها اليومية ويمكن استخدامه كشكل من أشكال التحسين المستمر في PDAM.

# **BAB I PENDAHULUAN**

## **1.1 Latar Belakang**

Kualitas merupakan keseluruhan ciri atau karakteristik dari suatu produk ataupun jasa. Kualitas berarti kelayakan untuk digunakan, hal tersebut berarti bahwa produk ataupun jasa harus memenuhi kualifikasi penggunaan atau sesuai keinginan konsumen (Montgomery, 2013). Kualitas merupakan salah satu faktor dasar keputusan pembeli dalam menentukan produk ataupun jasa yang saling bersaing. Sehingga, pengendalian dan peningkatan kualitas adalah faktor kunci yang menuju pada kesuksesan bisnis, dan meningkatkan daya saing.

Pengendalian kualitas statistik adalah metode statistik yang digunakan untuk menganalisis, mengendalikan, dan meningkatkan kualitas produk ataupun jasa. Salah satu teknik pengendalian dan peningkatan kualitas yang dapat digunakan suatu industri adalah *Statistical Process Control* (SPC). SPC ialah kumpulan alat yang digunakan untuk menstabilkan proses produksi dan meningkatkan kualitas produksi. Di antara alat-alat SPC, grafik pengendali merupakan alat yang paling banyak digunakan di industri manufaktur maupun jasa untuk memantau proses produksi, dikarenakan grafik pengendali ini mampu mendeteksi penyimpangan dalam parameter proses produksi sekecil mungkin.

Terdapat dua macam grafik pengendali berdasarkan banyaknya karakteristik, yakni grafik pengendali univariat dan multivariat. Grafik pengendali univariat merupakan grafik yang memantau satu karakteristik kualitas saja. Namun, seringkali proses monitoring dan pengendalian proses melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas. Meskipun menerapkan grafik pengendali univariat untuk

setiap variabel individu adalah solusi yang mungkin, akan tetapi hal tersebut tidak efisien dan memungkinkan terjadi kesalahan dalam pengambilan kesimpulan (Montgomery, 2013). Berdasarkan hal tersebut, grafik pengendali multivariat kemudian dikembangkan, grafik ini mampu mengakomodir pengendalian proses yang melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas secara simultan. Metode multivariat tersebut mempertimbangkan hubungan antar variabel dari proses multivariat untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat dibandingkan dengan pendekatan univariat. Tujuannya adalah untuk mendeteksi perubahan dalam proses yang hampir tidak dapat dideteksi oleh upaya univariat (Bodnar dan Schmid, 2007). Berikut merupakan grafik pengendali multivariat, yaitu  $T^2$  Hotelling, *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA), dan *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM). Untuk mengevaluasi kinerja dan membandingkan beberapa grafik pengendali, indikator statistik yang paling umum digunakan adalah *Average Run Length* (ARL) (Montgomery, 2013).

Penerapan grafik pengendali dalam dunia industri sudah banyak dilakukan, salah satunya pada pengendalian kualitas air PDAM. Air adalah senyawa yang penting bagi kelangsungan hidup manusia serta makhluk hidup lainnya, salah satunya untuk dikonsumsi. Pentingnya air bagi kelangsungan hidup manusia membuat pengendalian kualitas menggunakan grafik pengendali penting untuk dilakukan agar meningkatkan produksi air minum semaksimal mungkin.

Air adalah anugerah yang berharga dari Allah. Pada al-Qur'an istilah air disebutkan sebanyak 33 kali dalam bentuk *nakirah* (belum pasti) dan *ma'rifat* (sudah pasti) (Ritonga, 2011). Salah satunya Allah Swt. berfirman di dalam al-Qur'an surah An-Nahl/16:10 yang berbunyi:

*“Dialah yang telah menurunkan air (hujan) dari langit untukmu, sebagiannya menjadi minuman dan sebagiannya (menyuburkan) tumbuhan, yang pada (tempat tumbuhnya) kamu menggembalakan ternakmu.”*

Sedemikian artinya air bagi kehidupan makhluk hidup, salah satunya untuk memenuhi kebutuhan mineral di dalam tubuh manusia. Masyarakat saat ini belum banyak yang mengetahui standar kualitas air yang baik untuk dikonsumsi. Air minum terjamin aman untuk kesehatan jika memenuhi persyaratan mikrobiologis, radioaktif, fisika, dan kimiawi yang termasuk dalam parameter wajib dan tambahan (Permenkes RI, 2010).

Ketersediaan air bersih dan layak untuk diminum adalah salah satu usaha dan tanggung jawab pemerintah dalam meningkatkan kesejahteraan hidup masyarakat. Di Kota Malang kegiatan penyediaan air minum sudah ada mulai era pemerintahan kolonial Belanda pada tanggal 31 Maret 1915, hingga saat ini beralih menjadi Perusahaan Umum Daerah (Perumda) Air Minum Tugu Tirta Kota Malang (Perumda Tugu Tirta). Perumda Tugu Tirta adalah perusahaan umum daerah yang bergerak di bidang pendistribusian air minum di Kota Malang. Sebagai perusahaan layanan umum, Perumda Tugu Tirta diharuskan memberikan pelayanan yang terbaik kepada masyarakat. Namun, memberikan layanan dengan kualitas terbaik saja tidak cukup, kualitas produk yang diberikan juga harus terjamin. Dalam menjaga kualitas air yang dikonsumsi masyarakat aman untuk kesehatan dan sesuai dengan standar yang sudah ditetapkan, sangat penting bagi perusahaan melakukan pemantauan dan pengendalian kualitas produksi secara berkala. Ketersediaan data yang direkam secara teratur pada variabel parameter kualitas air minum menciptakan peluang untuk mengembangkan grafik pengendali sebagai upaya mendukung perusahaan dalam tugas manajemen hariannya.

Penelitian tentang pengendalian kualitas air menggunakan grafik pengendali sudah banyak diteliti sebelumnya, yaitu oleh Saida (2011), yang menerapkan grafik pengendali CUSUM dengan prosedur *V-mask* pada proses produksi air PDAM Surya Sembada. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa pengendalian proses terhadap rata-rata variabel pH terdapat adanya pergeseran positif rata-rata. Wahyuningsih dan Pusdikarta (2015) menerapkan grafik pengendali multivariat  $T^2$  *Hottelling* pada pengendalian kualitas air PDAM Gresik. Variabel yang diteliti adalah pH, besi, timbal, sulfat, sisa klor, kadmium, dan natrium. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa kualitas air di PDAM Gresik sudah terkendali dan memiliki kemampuan proses yang baik. Maharani (2020) menerapkan grafik pengendali MEWMA pada pengendalian kualitas proses produksi air di PDAM Hazora Jember. Variabel yang diteliti adalah  $\text{NO}_2$ ,  $\text{NO}_3$ , besi, pH, mangan, florin, sisa klor, dan alumunium. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa proses produksi belum terkendali.

Dalam penelitian ini, akan dilakukan pengendalian kualitas proses produksi air PDAM menggunakan grafik pengendali pula. Karena akan dilakukan pengendalian kualitas terhadap beberapa variabel sekaligus, maka dari itu digunakan grafik pengendali multivariat. Dalam hal ini digunakan grafik pengendali MCUSUM, karena grafik ini lebih sensitif untuk mendeteksi pergeseran kecil dalam vektor rata-rata proses dibanding dengan grafik pengendali  $T^2$  *Hottelling* karena mempunyai nilai ARL yang lebih kecil (Alves, dkk., 2013). Dengan demikian, penelitian ini bertujuan untuk menerapkan grafik pengendali MCUSUM dalam pengendalian kualitas produksi air minum berdasarkan data hasil analisis kualitas air yang tercatat secara praktis. Sehingga kedepannya dapat menjadikan

proses produksi air minum stabil dan menghasilkan produk yang berkualitas dan sesuai standar yang telah ditetapkan.

Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Sugiharto dan Indriawati (2010), tentang implementasi grafik pengendali MCUSUM untuk strategi pengawasan sistem kontrol prediktif pada bioreaktor anaerob. Pengawasan dilakukan pada pH sistem dan laju gas metan, dari hasil simulasi dihasilkan peningkatan produksi gas metan sebesar 331,5687 mmol/liter atau 24,11%. Dari yang sebelumnya sebesar 1375,0805 mmol/liter menjadi 1706,6492 mmol/liter. Sari, dkk. (2020) membandingkan kinerja grafik pengendali CUSUM dengan MCUSUM untuk mengontrol kuat tekan semen komposit tipe Portland atau PCC. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa grafik pengendali MCUSUM lebih sensitif dibanding dengan grafik pengendali CUSUM dalam mengendalikan pengamatan data di luar kendali.

Setelah suatu proses dianggap dalam keadaan terkendali secara statistik, hal penting berikutnya adalah menentukan seberapa konsisten proses tersebut mampu memenuhi spesifikasi atau persyaratan pelanggan (Montgomery, 2013). Kemampuan proses biasanya diukur dengan menggunakan rasio kapabilitas atau indeks kapabilitas. Kapabilitas proses bertujuan untuk menghindari dihasilkan produk yang cacat atau produk yang menyimpang dari spesifikasi di kemudian hari. Kapabilitas proses dalam pengendalian kualitas proses produksi sebelumnya pernah diteliti oleh Rimantho dan Athiya (2019) menerapkan kapabilitas proses untuk pengendalian kualitas air limbah industri farmasi dengan penerapan grafik pengendali I-MR yang terdiri dari parameter pH dan TSS. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa proses belum mempunyai kapabilitas proses yang baik,

dikarenakan indeks  $C_p$  dan  $C_{pk} < 1$ . Munir (2019) menerapkan kapabilitas proses untuk pengendalian kualitas produksi arang menggunakan grafik pengendali  $T^2$  *Hotteling*. Hasil penelitian tersebut menyimpulkan bahwa proses produksi terkendali dan memiliki kapabilitas proses yang baik.

Berdasarkan beberapa ide dan penelitian sebelumnya, peneliti mengaplikasikan grafik pengendali MCUSUM dan kapabilitas proses pada proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Peneliti menggunakan beberapa variabel karakteristik kualitas air minum yakni pH, besi (Fe), mangan (Mn), nitrit ( $\text{NO}_2$ ), dan sisa klor. Kadar karakteristik kualitas air hasil produksi yang melewati batas spesifikasi dapat berbahaya bagi tubuh, maka harus dilakukan pemantauan dan pengendalian kualitas secara teratur.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penerapan grafik pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) pada pengendalian kualitas produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang?
2. Bagaimana kapabilitas proses pada proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang berdasarkan grafik pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM)?



### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui hasil penerapan grafik pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) pada pengendalian kualitas produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang
2. Mengetahui kapabilitas proses pada proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang menggunakan grafik pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM)

### 1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan hasil penelitian, diharapkan dapat memberi manfaat:

1. Bagi Peneliti  
Meningkatkan pengetahuan dan keilmuan mengenai penerapan grafik pengendali MCUSUM dan kapabilitas proses pada pengendalian kualitas produksi.
2. Bagi Pembaca  
Memberikan informasi tentang penerapan grafik pengendali MCUSUM dan kapabilitas proses pada pengendalian kualitas produksi dan dapat digunakan sebagai acuan untuk penelitian selanjutnya.
3. Bagi Instansi  
Sebagai masukan kebijakan perusahaan dalam mengelola kualitas proses produksi di kemudian hari sebagai upaya peningkatan kualitas produksi.

### 1.5 Batasan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian, maka pembatasan masalah yang akan diberikan sebagai berikut:

1. Pemeriksaan kualitas pada penelitian ini menggunakan 5 variabel yaitu: pH, besi (Fe), mangan (Mn), nitrit (NO<sub>2</sub>), dan sisa klor.
2. Pengambilan data sebanyak 50 pengamatan dan diasumsikan sudah mengikuti urutan pengambilan sampel berdasarkan waktu.
3. Pengambilan sampel dilakukan pada bulan Januari-Februari 2022.
4. Data dalam penelitian ini merupakan data individual, yaitu setiap subgrupnya hanya diambil satu sampel/ data.
5. Penentuan proses tidak terkendali hanya ketika terdapat data pengamatan yang berada di luar batas kendali.
6. ARL dalam keadaan terkendali, dipilih  $ARL_0 = 200$  karena bersesuaian dengan tingkat signifikansi  $\alpha = 0,05$ .

## **BAB II KAJIAN TEORI**

### **2.1 Teori Pendukung**

#### **2.1.1 Kualitas**

Menurut *American Society for Quality (ASQ)*, kualitas didefinisikan sebagai istilah subjektif di mana setiap orang atau sektor memiliki definisi tersendiri (Besterfield, 2012). Dalam istilah teknis, kualitas memiliki dua arti: karakteristik produk dan jasa. Kualitas merupakan salah satu faktor dasar dalam pengambilan keputusan konsumen ketika menentukan suatu produk ataupun jasa yang saling bersaing. Menurut Montgomery (2013), kualitas berarti kelayakan untuk digunakan, hal tersebut berdasarkan perspektif bahwa produk ataupun jasa harus memenuhi persyaratan penggunaan atau sesuai penggunaan kebutuhan konsumen.

Kualitas berbanding terbalik dengan variabilitas. Hal ini menjelaskan bahwa apabila variabilitas dalam karakteristik produk menurun, maka kualitas produk meningkat. Dalam suatu proses produksi pasti muncul variabilitas atau kurangnya kualitas suatu produk, penyebab variabilitas dibedakan menjadi dua yakni, *chance causes of variability* atau *common cause* dan *assignable causes of variability*. *Chance causes of variability* atau *common cause* merupakan variabilitas alami atau variabilitas yang disebabkan oleh faktor yang tidak dapat dikontrol atau dihindari. Variabilitas ini biasanya kecil dan tidak mempengaruhi kinerja proses secara umum. *Assignable causes of variability* merupakan variabilitas yang diakibatkan oleh faktor yang dapat dikontrol seperti manusia, material (bahan), dan mesin. Variabilitas ini biasanya lebih besar dibanding variabilitas alami sehingga menunjukkan kinerja proses yang kurang atau tidak baik. Untuk menjaga kualitas

dengan mengurangi variabilitas suatu produk, maka dibutuhkan tindakan pengendalian kualitas.

### 2.1.2 Uji Korelasi Antar Variabel

Uji korelasi digunakan untuk memeriksa korelasi antar variabel. Untuk menerapkan grafik pengendali multivariat, data harus memenuhi asumsi bahwa antar variabel berkorelasi. Hipotesis dan statistik uji dari pengujian korelasi yang digunakan sebagai berikut (Morrison, 2005):

Hipotesis:

$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$  (tidak ada korelasi antar variabel)

$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$  (terdapat korelasi antar variabel)

dan menggunakan statistik uji:

$$\chi_{hitung}^2 = \left( n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln |\mathbf{R}| \quad (2.1)$$

dengan

$n$  : banyaknya pengamatan

$p$  : banyaknya variabel

$\mathbf{R}$  : matriks korelasi

$|\mathbf{R}|$  : determinan matriks korelasi  $\mathbf{R}$  berukuran  $p \times p$

Kriteria pengujian:

Tolak  $H_0$  apabila nilai  $\chi_{hitung}^2 \geq \chi_{[\alpha, \frac{1}{2}p(p-1)]}^2$  yang berarti terdapat korelasi antar variabel.  $\chi_{[\alpha, \frac{1}{2}p(p-1)]}^2$  merupakan nilai *chi-square*, dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi dan  $\frac{1}{2}p(p-1)$  adalah derajat kebebasan.

Matriks korelasi dijabarkan sebagai berikut (Walpole, dkk., 2012):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{11} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

dengan

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 (X_{ik} - \bar{X}_k)^2}}$$

$r_{jk}$  : nilai korelasi antar variabel  $j$  dan variabel  $k$

$X_{ij}$  : nilai pengamatan ke- $i$  variabel ke- $j$

$X_{ik}$  : nilai pengamatan ke- $i$  variabel ke- $k$

$\bar{X}_j$  : rata-rata variabel  $j$

$\bar{X}_k$  : rata-rata variabel  $k$

### 2.1.3 Uji Normalitas Multivariat

Uji normalitas multivariat yakni pengembangan dari uji normalitas univariat. Sebelum membuat grafik pengendali multivariat, data harus memenuhi asumsi berdistribusi normal multivariat. Sehingga, uji normalitas multivariat digunakan untuk mengetahui apakah data berdistribusi normal multivariat atau tidak. Pada uji normalitas multivariat digunakan jarak Mahalanobis.

Suatu pengamatan  $\mathbf{X}$  vektor acak berdimensi  $p$ , dengan  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$  berdistribusi normal  $p$ -variat, PDF dari  $\mathbf{X}$  adalah (Montgomery, 2013)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

dengan

$\mathbf{X}$  :  $(X_1, X_2, \dots, X_p)'$

$\boldsymbol{\mu}$  :  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$

$\Sigma$  : matriks kovariansi populasi

Hipotesis:

$H_0$  : data berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : data tidak berdistribusi normal multivariat

Digunakan statistik uji  $d_i^2$ , dengan persamaan (Johnson dan Wichern, 2007)

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.3)$$

dengan

$\mathbf{X}_i$  : vektor nilai pengamatan ke-i untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

$\bar{\mathbf{X}}$  : vektor rata-rata berukuran  $p \times 1$

dengan

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^n X_{ij}}{n} \quad (2.4)$$

$\mathbf{S}^{-1}$  : invers matriks variansi-kovariansi,  $\mathbf{S}$ , yang setiap elemennya didapat dari persamaan

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \quad (2.5)$$

$$S_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)$$

Statistik uji T:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n} \quad (2.6)$$

dengan

$$I_i = \begin{cases} 1, & d_i^2 \leq \chi_{\alpha, df}^2 \\ 0, & d_i^2 > \chi_{\alpha, df}^2 \end{cases}$$

$\chi^2_{\alpha,df}$  merupakan merupakan nilai *chi-square*, dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi dan  $df$  adalah derajat kebebasan yang besarnya sama dengan jumlah variabel (Johnson dan Wichern, 2007).

Kriteria pengujian:

Terima  $H_0$  jika terdapat  $T > 50\%$ , yang berarti data berdistribusi normal multivariat.

#### **2.1.4 Pengendalian Kualitas Statistik**

Pengendalian kualitas statistik adalah metode statistik yang digunakan untuk menganalisis, mengendalikan, dan meningkatkan kualitas produk ataupun jasa. Pengendalian kualitas statistik bertujuan agar produk yang dihasilkan stabil dan ideal (berkualitas) serta meningkatkan permintaan konsumen. Selain itu, untuk meminimalkan produk cacat sehingga tidak terjadi pengulangan produksi agar tidak mengeluarkan biaya yang lebih banyak untuk menghasilkan produk yang sesuai dengan standar yang ditetapkan.

Terdapat tiga teknik utama dalam pengendalian dan peningkatan kualitas statistik yaitu *Statistical Process Control*, *design control*, dan *product control* (*acceptance sampling* dan inspeksi). *Statistical Process Control* (SPC) adalah metodologi industri standar yang membantu mengukur dan mengontrol kualitas proses produksi. SPC ialah kumpulan alat yang digunakan untuk menstabilkan proses produksi dan meningkatkan kualitas produksi dengan meminimumkan variabilitas (Montgomery, 2013). Tujuh alat utamanya adalah histogram atau plot batang-daun, diagram sebab-akibat, diagram pencar, diagram pareto, diagram konsentrasi cacat, lembar pengecekan, dan grafik pengendali.

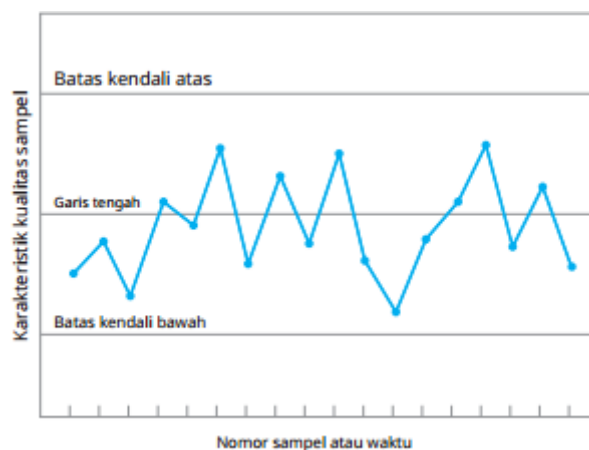
Di antara alat-alat SPC tersebut, grafik pengendali merupakan alat yang paling banyak digunakan di industri manufaktur maupun jasa untuk memantau

proses produksi, dikarenakan grafik pengendali ini mampu mendeteksi penyimpangan dalam parameter proses produksi sekecil mungkin.

### 2.1.5 Grafik Pengendali

Metode statistik dan penerapannya dalam peningkatan kualitas telah memiliki sejarah yang panjang. Konsep grafik pengendali statistik awal mula dikembangkan oleh Walter A. Shewhart tahun 1924. Grafik pengendali merupakan teknik pemantauan atau pengawasan proses *on-line* yang sangat berguna untuk mengendalikan dan meningkatkan kualitas produksi (Montgomery, 2013). Penggunaan grafik pengendali dapat membantu dalam memantau proses dan mengidentifikasi perubahan yang dapat mempengaruhi hasil proses.

Grafik pengendali diilustrasikan seperti Gambar 2.1. Grafik pengendali merupakan tampilan grafis dari karakteristik kualitas yang sebelumnya diukur dan dihitung selama periode tertentu. Grafik pengendali memplot rata-rata pengukuran karakteristik kualitas dalam sampel data yang diambil dari proses versus waktu (atau nomor sampel). Grafik pengendali berisi garis tengah (CL) yaitu nilai rata-rata karakteristik kualitas. Dua garis horizontal lainnya, disebut dengan batas kendali atas (UCL) serta batas kendali bawah (LCL).



**Gambar 2.1** Ilustrasi Grafik Pengendali



Apabila semua titik pengamatan di dalam batas kendali, maka proses terkendali sehingga tidak perlu adanya perbaikan atau tindakan lain. Sedangkan, jika terdapat titik pengamatan yang berada di luar batas kendali maka proses tidak terkendali sehingga memerlukan penyelidikan dan tindakan korektif untuk menemukan dan menghilangkan penyebabnya.

#### **2.1.6 Grafik Pengendali *Multivariate Cumulative Sum***

Grafik pengendali *multivariate cumulative sum* (MCUSUM) muncul sebagai pengembangan multivariat dari grafik pengendali univariat CUSUM yang diusulkan oleh Page (1961). Hal ini difokuskan pada peningkatan sensitivitas mengenai grafik pengendali  $T^2$  Hotelling yang diperkenalkan sebelumnya. Grafik pengendali MCUSUM menggunakan jumlah kumulatif deviasi dari setiap vektor acak yang diamati sebelumnya dibandingkan dengan nilai nominal untuk memantau vektor rata-rata dari proses multivariat.

Pignatiello dan Runger (1990) memperkenalkan dua prosedur grafik pengendali MCUSUM. Kedua prosedur tersebut didasarkan pada bentuk kuadrat dari vektor rata-rata. Perbedaan antara dua prosedur tersebut berpusat pada titik di mana akumulasi dibuat. Multivariat CUSUM I (MC1) mengakumulasi  $\mathbf{X}$  vektor sebelum menghasilkan bentuk kuadrat sementara Multivariat CUSUM II (MC2) menghitung bentuk kuadrat untuk setiap  $\mathbf{X}$  dan kemudian mengakumulasikan bentuk-bentuk kuadrat tersebut. Selain itu, Pignatiello dan Runger membandingkan MC1 dan MC2 dengan beberapa grafik pengendali univariat CUSUM yang diberikan oleh Woodall dan Ncube dan grafik pengendali multivariat Shewhart  $\chi^2$  (Hamed, dkk., 2016). Hasilnya menunjukkan bahwa grafik pengendali MC1 menghasilkan ARL yang lebih baik atau lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran

kecil dalam vektor rata-rata proses. Pada penelitian ini akan digunakan grafik pengendali MC1, dikarenakan memiliki nilai ARL yang lebih baik.

Misal  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$  vektor acak yang berdistribusi normal  $p$ -variat, dengan vektor  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \dots, X_{ip})'$ , dan  $X_{ij}$  merupakan nilai pengamatan ke- $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  pada variabel ke- $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$

Vektor rata-rata sampel,  $\bar{\mathbf{X}}$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{X}} = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_p]', \text{ nilai } \bar{X}_j \text{ diperoleh berdasarkan persamaan (2.4)}$$

Matriks variansi-kovariansi,  $\mathbf{S}$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_2^2 & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_p^2 \end{bmatrix}, \text{ setiap elemen dari matriks variansi-kovariansi}$$

diperoleh berdasarkan persamaan (2.5)

Misalkan  $\mathbf{X}_i$  vektor acak pengamatan ke- $i$  yang berdistribusi normal  $p$ -variat dengan  $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})'$  merupakan vektor rata-rata, dan  $\mathbf{S}_0$  merupakan matriks variansi-kovariansi. Grafik pengendali MC1 untuk mendeteksi pergeseran rata-rata sebagai berikut:

$$MC1_t = \max\{\|\mathbf{C}_t\| - kn_t, 0\} \quad (2.7)$$

dengan

$MC1_t$  : Statistik MC1 untuk pengamatan ke- $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$

$\|\mathbf{C}_t\|$  : Norma  $\mathbf{C}_t$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\mathbf{C}_t\| = \sqrt{\mathbf{C}_t' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_t}$$

dengan

$$C_t = \sum_{i=t-n_t+1}^t (X_i - \mu_0)$$

dan

$$n_t = \begin{cases} n_{t-1} + 1 & \text{jika } MC1_{t-1} > 0 \\ 1 & \text{jika sebaliknya} \end{cases}$$

$k$  : nilai referensi atau nilai *slack*. Nilai  $k$  yang digunakan yaitu 0,5.

Penentuan batas kendali atas ( $h$ ) didapatkan melalui pendekatan dengan kriteria nilai  $ARL_0$ .  $ARL$  merupakan rata-rata jumlah titik yang harus diplotkan hingga didapatkan titik *out of control* pertama (Montgomery, 2013). Maka  $ARL_0$  merupakan rata-rata jumlah titik yang harus diplotkan hingga didapatkan titik *out of control*, pada saat proses terkendali. Nilai  $h$  berdasarkan nilai  $ARL_0$  untuk lima variabel dengan  $k$  (nilai referensi) = 0.5 menurut (Crosier, 1988) disajikan pada Tabel 2.1

**Tabel 2.1** Nilai  $h$

$ARL_0$	$h$
200	9,46
500	10,9

Grafik  $MC1$  beroperasi dengan memplot  $MC1_t$  pada grafik pengendali dengan batas kendali atas ( $h$ ), jika  $MC1_t > h$  maka proses tidak terkendali. Sedangkan, jika  $MC1_t < h$  maka proses terkendali.

### 2.1.7 Kapabilitas Proses Multivariat

Kapabilitas proses adalah metode statistik yang menjadi alat ukur suatu proses untuk memprediksi seberapa konsisten proses produksi memenuhi spesifikasi yang ditetapkan oleh perusahaan. Analisis kapabilitas proses dapat membantu sepanjang proses produksi, termasuk kegiatan pengembangan sebelum

manufaktur, mengukur variabilitas proses, dan juga membantu pengembangan dan manufaktur dalam mengurangi variabilitas (Montgomery, 2013).

Suatu proses dikatakan *capable* apabila penyebaran proses aktual lebih kecil daripada sebaran yang diizinkan oleh perusahaan dengan syarat data berdistribusi normal. Indeks kapabilitas proses adalah suatu analisis yang digunakan untuk menganalisis variabilitas yang relatif terhadap spesifikasi produk dan suatu proses dikatakan baik atau *capable* apabila nilai  $C_p > 1$  (Montgomery, 2013).

Indeks kapabilitas proses pada proses multivariat dapat dihitung jika data memenuhi asumsi berdistribusi normal multivariat dan prosesnya sudah terkendali. Indeks kapabilitas proses diperoleh dengan persamaan (Kotz dan Johnson, 1993)

$$C_p = \frac{K}{\chi_{\alpha,df}^2} \left( \frac{(n-1)p}{g} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

dengan

$n$  : banyaknya pengamatan yang terkendali dalam grafik pengendali

$p$  : banyaknya variabel

$\chi_{\alpha,df}^2$  : nilai *chi-square*, dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi dan  $df$  adalah derajat kebebasan yang besarnya sama dengan jumlah variabel.

$K$  : daerah proses sebenarnya, diperoleh dengan persamaan:

$$K^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\xi})' \mathbf{S}_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\xi}) \quad (2.9)$$

$\bar{\mathbf{X}}$  : vektor rata-rata berukuran  $p \times 1$

$\mathbf{S}_0^{-1}$  : invers matriks variansi-kovariansi

$\boldsymbol{\xi}$  : vektor nilai target dari batas spesifikasi variabel  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$

dengan

$$\xi_j = \frac{(BSA_j + BSB_j)}{2}, j = 1, 2, \dots, p \quad (2.10)$$

dengan

BSA : Batas Spesifikasi Atas

BSB : Batas Spesifikasi Bawah

dan

$$g = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.11)$$

Matriks  $\mathbf{A}$  merupakan nilai dari setiap karakteristik kualitas yang diperoleh dengan persamaan:

$$\mathbf{A} : \mathbf{X}'\mathbf{X} \quad (2.12)$$

Kapabilitas proses multivariat dinotasikan dengan  $C_p$ . Kriteria penilaian  $C_p$  adalah (Montgomery, 2013)

- Jika  $C_p > 1$  maka proses dikatakan *capable* atau baik.
- Jika  $C_p = 1$  maka proses masih dapat dikatakan *capable* tetapi perlu adanya pengendalian kualitas.
- Jika  $C_p < 1$  maka proses dikatakan tidak *capable* dan perlu adanya perbaikan.

### 2.1.8 Kualitas Air

Air adalah senyawa yang penting bagi kelangsungan hidup manusia serta makhluk hidup lainnya. Tebbutt (1998) menjelaskan bahwa bumi mengandung banyak air, sekitar 7% massa bumi adalah air. Air bersih dapat diperoleh dari sumber mata air seperti hujan, gunung, danau, sungai, laut dan sumur. Namun, air tersebut tidak bisa langsung dikonsumsi, sebelumnya harus dipastikan tidak membahayakan bagi kesehatan. Berdasarkan *Peraturan Menteri Kesehatan*

*Republik Indonesia Nomer 492 Tahun 2010 tentang Persyaratan Kualitas Air Minum*, bahwa air minum adalah air yang melalui proses pengolahan atau tanpa proses pengolahan yang memenuhi syarat kesehatan dan dapat langsung diminum. Masyarakat saat ini banyak yang belum mengetahui standar kualitas air yang baik untuk dikonsumsi. Berdasarkan *Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomer 82 Tahun 2001 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air*, bahwa kualitas air merupakan kondisi kualitatif air yang diukur dan diuji berdasarkan parameter-parameter dan metode tertentu. Air minum terjamin aman untuk kesehatan jika memenuhi persyaratan mikrobiologis, radioaktif, fisika, dan kimiawi yang termasuk dalam parameter wajib dan tambahan (Permenkes RI, 2010).

Parameter wajib merupakan persyaratan kualitas air minum yang wajib ditaati dan diikuti oleh seluruh produsen air minum. Sedangkan parameter tambahan merupakan parameter yang ditetapkan oleh pemerintah daerah berdasarkan kondisi lingkungan daerah masing-masing. Setiap karakteristik kualitas mempunyai kadar maksimum yang berbeda. Apabila terdapat karakteristik kualitas air yang melampaui kadar maksimum, hal tersebut dapat berpengaruh baik secara langsung ataupun tidak langsung bagi kesehatan (Permenkes, 2010). Tabel 2.2 menyajikan parameter wajib kualitas air minum berdasarkan Permenkes RI Nomor 492 Tahun 2010.

Pada penelitian ini digunakan lima variabel kualitas air yang merupakan parameter kimia wajib persyaratan kualitas air minum berdasarkan Permenkes RI Nomer 492 Tahun 2010, yaitu pH, besi (Fe), mangan (Mn), nitrit (NO<sub>2</sub>), dan sisa klor.

**Tabel 2.2** Persyaratan Kualitas Air Minum

Jenis Parameter	Kadar Maksimum yang diperbolehkan	Satuan
Parameter yang berhubungan langsung dengan kesehatan		
<b>A. Parameter Mikrobiologi</b>		
1. Total Bakteri Koliform		Jumlah / 100 sampel
2. E.Coli		Jumlah / 100 sampel
<b>B. Kimia an-organik</b>		
1. Nitrit	3	mg/l
2. Nitrat	50	mg/l
3. Total Kromium	0,05	mg/l
4. Sianida	0,07	mg/l
5. Fluorida	1,5	mg/l
6. Selenium	0,01	mg/l
7. Kadmium	0,003	mg/l
8. Arsen	0,01	
Parameter yang tidak berhubungan langsung dengan kesehatan		
<b>A. Parameter fisik</b>		
1. Rasa	Tidak berasa	
2. Warna	15	TCU
3. Suhu	Suhu udara $\pm$ 3	
4. Kekeruhan	5	NTU
5. Bau	Tidak berbau	
6. <i>Total Dissolved Solids</i> (TDS)	500	mg/l
<b>B. Parameter Kimiawi</b>		
1. pH	6,5 - 8,5	
2. Ammonia	1,5	mg/l
3. Besi	0,3	mg/l
4. Tembaga	2	mg/l
5. Mangan	0,5	mg/l
6. Alumunium		mg/l
7. Seng	3	mg/l
8. Klorida	250	mg/l
9. Sulfat	250	mg/l
10. Kesadahan	500	mg/l

### 1. pH

Tingkat keasaman atau kebasaan diukur dengan skala pH, yang merupakan ukuran konsentrasi ion hidrogen ( $H^+$ ) terlarut. Air dengan  $pH < 6,5$  bersifat asam dan tidak diperbolehkan. Karena bersifat korosif dan dapat menyebabkan beberapa senyawa kimia berubah menjadi racun yang mengganggu kesehatan. Sedangkan air dengan  $pH > 8,5$  bersifat basa dan tidak secara langsung menyebabkan gangguan kesehatan, tetapi dapat menyebabkan rasa pahit pada air minum (Singh dan Mosley, 2003).

### 2. Besi (Fe)

Air minum yang mengandung besi dapat mengakibatkan rasa mual saat dikonsumsi. Meskipun tubuh manusia membutuhkan besi, tetapi dalam dosis yang besar besi berbahaya bagi tubuh yakni dapat merusak dinding usus. Apabila kelarutan  $Fe < 1 \text{ mg/l}$  dalam air, maka dapat mengakibatkan iritasi pada kulit dan mata. Apabila  $> 10 \text{ mg/l}$  dapat menyebabkan air menjadi berbau.

### 3. Mangan (Mn)

Mangan mempunyai sifat yang serupa dengan senyawa besi. Kadar mangan ( $Mn < 0,5 \text{ mg/l}$ ) tidak mengganggu kesehatan, melainkan dapat menjaga kesehatan otak, tulang dan lain-lain. Apabila kadar mangan dalam air  $> 0,5 \text{ mg/l}$ , maka bersifat neurotoksik. Neurotoksik didefinisikan sebagai gangguan fungsional pada saraf.

### 4. Nitrit ( $NO_2$ )

Nitrit adalah senyawa nitrogen organik, yang dapat mempengaruhi kualitas air. Mikroorganisme di dalam air memecah limbah yang



mengandung nitrogen organik membentuk amonia, setelah itu dioksidasi menjadi nitrit dan nitrat. Apabila kandungan nitrit dalam air  $> 3$  mg/l dapat menyebabkan *methamoglobinemia* dan efek racun pada kesehatan.

#### 5. Sisa Klor

Kadar sisa klor dalam air minum yang diperbolehkan sekitar 0,2 – 1 mg/l. Kadar sisa klor yang kurang atau lebih dari batas spesifikasi, maka dapat menimbulkan iritasi pencernaan, dan gangguan kesehatan lainnya.

### 2.1.9 Profil Perumda Air Minum Tugu Tirta

Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang merupakan perusahaan umum daerah yang bergerak di bidang pendistribusian air minum di Kota Malang. Tujuan didirikannya Perumda yakni untuk memenuhi hak rakyat atas air minum (Perda Kota Malang, 2019). Di Kota Malang, kegiatan penyediaan air minum ada sejak era pemerintahan kolonial Belanda pada 31 Maret 1915, yaitu *Waterleiding Verordening* Kota Besar Malang. Saat ini resmi beralih menjadi Perusahaan Umum Daerah (Perumda) Air Minum Tugu Tirta Kota Malang berdasarkan *Peraturan Daerah (Perda) Kota Malang Nomor 11 tahun 2019* yang diterbitkan pada 27 Desember 2019. Perumda Tugu Tirta melayani 97,95% pelanggan dari total penduduk Kota Malang sebanyak 887,443 orang. Visi perusahaan yaitu menjadi perusahaan air minum yang sehat dan dibanggakan dengan pelayanan prima yang berkepanjangan dan mengusung jargon ‘Mengalir Tiada Henti. Melayani Sepenuh Hati’.

## 2.2 Pengendalian Kualitas Berdasarkan Perspektif Al-Qur'an

Pengendalian kualitas produk atau jasa adalah faktor kunci yang mengarah pada kesuksesan bisnis dan meningkatkan daya saing dikarenakan keputusan pembeli dalam menentukan produk ataupun jasa yang saling bersaing didasarkan pada kualitas produk atau jasa tersebut. Pengendalian kualitas dilakukan untuk menjaga kualitas produk tetap stabil sehingga produk yang dihasilkan sesuai dengan standar yang ditetapkan dan memenuhi syarat penggunaan konsumen.

Dalam perspektif Islam, pengendalian dan peningkatan kualitas adalah suatu hal yang harus dilakukan. Allah Swt. berfirman di dalam al-Qur'an surah Hud/11:85, yaitu:

*“Wahai kaumku, penuhilah takaran dan timbangan dengan adil! Janganlah kamu merugikan manusia akan hak-hak mereka dan janganlah kamu membuat kejahatan di bumi dengan menjadi perusak!”.*

Imam Ibn Katsir menjelaskan di dalam kitabnya “Tafsir Ibnu Katsir” bahwa Nabi Syu'aib melarang suatu kaum untuk tidak mengurangi timbangan dan juga takaran, ketika menimbang atau menakar untuk orang lain. Kemudian beliau memerintahkan mereka agar menepati timbangan dan takaran secara adil (jujur) baik menerima atau memberi.

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa Allah menghimbau untuk menyempurnakan takaran dan timbangan dalam transaksi jual beli. Janganlah berlaku tidak adil atau curang agar tidak merugikan orang lain. Takaran merupakan proses mengukur untuk mengetahui karakteristik, kadar, atau berat suatu barang atau jasa. Dalam proses mengukur disebut dengan menakar. Islam menghimbau kepada produsen untuk menakar produk sesuai dengan takaran atau komposisi yang telah ditentukan. Hal tersebut agar kualitas produk ataupun jasa yang dihasilkan

sesuai dengan standar dan terjamin keamanan, kenyamanan, kejujuran dan sebagainya saat digunakan oleh konsumen.

Allah Swt. telah menetapkan segala hukum di dunia ini, salah satunya dengan menetapkan keadilan sebagai hukum dalam timbangan dan takaran, sehingga dalam menimbang maupun menakar yang merupakan pengendalian kualitas dalam proses produksi harus memberikan hak sesuai dengan ukurannya. Jika keadilan dalam takaran dan timbangan ini tiada, maka akan membuat kerugian dan kesengsaraan hidup serta membuat kerusakan ditengah tengah masyarakat sebagaimana dalam surah Hud ayat 85.

## **BAB III METODE PENELITIAN**

### **3.1 Jenis Penelitian**

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kuantitatif, yaitu penelitian yang menekankan analisisnya pada data-data *numerical* (angka) yang diolah dengan metode statistika.

### **3.2 Data dan Sumber Data**

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yaitu data hasil pemeriksaan kualitas air minum pelanggan pada bulan Januari-Februari 2022. Data diperoleh dari Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Data yang digunakan dalam penelitian ini berukuran  $n = 1$  (data individual) terdiri dari 5 variabel yang merupakan parameter wajib sesuai ketentuan persyaratan kualitas air minum berdasarkan Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomer 492 Tahun 2010. Berikut variabel penelitian yang digunakan dalam penelitian ini:

**Tabel 3.1** Variabel Penelitian

<b>Variabel</b>	<b>Satuan</b>	<b>Batas Spesifikasi</b>
pH		6,5 – 8,5
Besi (Fe)	mg/l	< 0,3 mg/l
Mangan (Mn)	mg/l	< 0,4 mg/l
Nitrit (NO <sub>2</sub> )	mg/l	< 3 mg/l
Sisa Klor	mg/l	0,2 – 1 mg/l

### **3.3 Tahap Analisis Data**

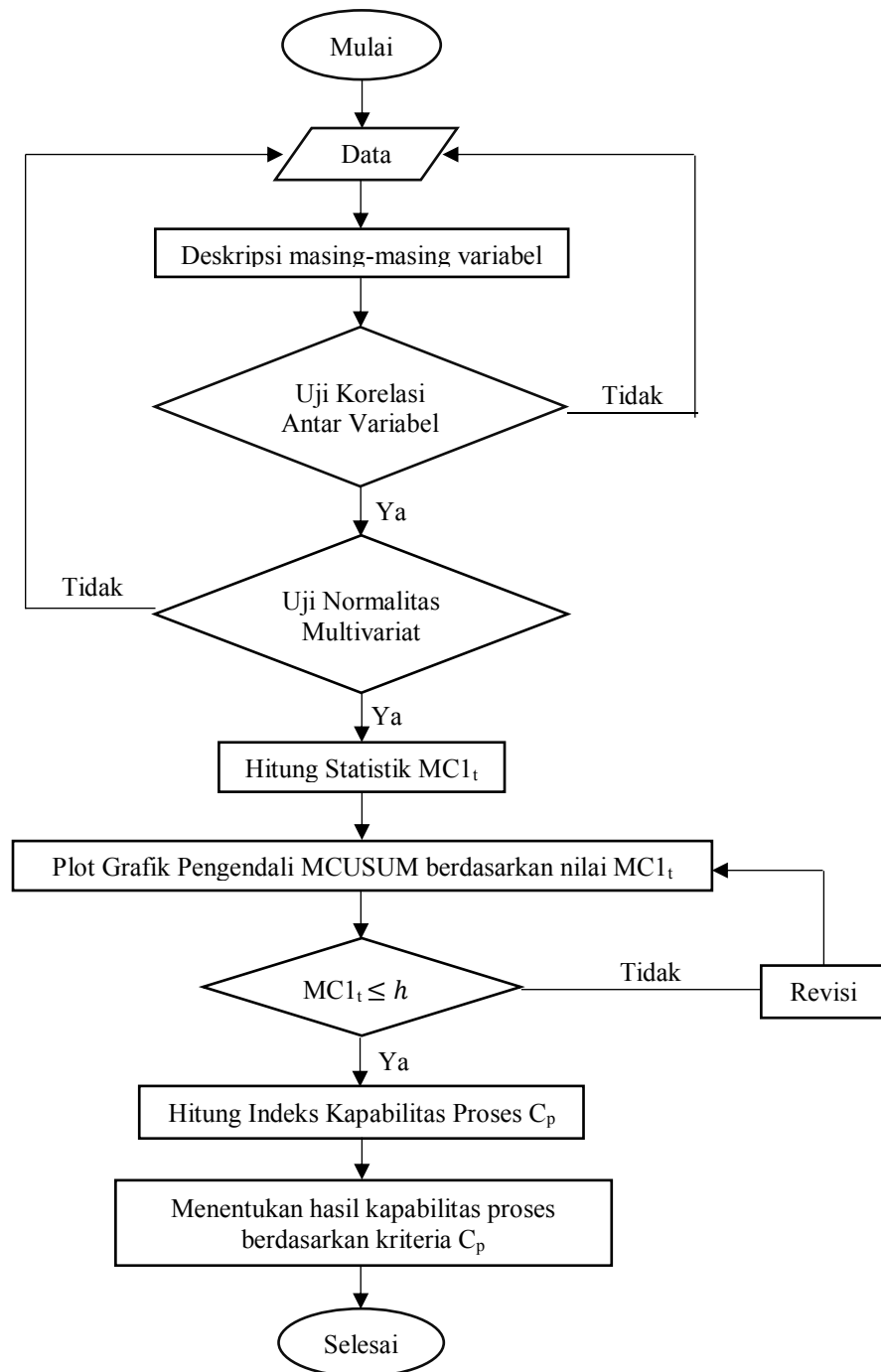
Tahapan analisis data pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan data tiap variabel dengan analisis deskriptif untuk mengetahui karakteristik umum dari kualitas air minum.

2. Menguji asumsi korelasi untuk mengetahui ada atau tidaknya korelasi antar variabel.
3. Menguji asumsi distribusi normal multivariat untuk mengetahui apakah data berdistribusi normal multivariat atau tidak.
4. Mengontrol rata-rata proses menggunakan grafik pengendali MCUSUM. Langkah-langkah menyusun grafik pengendali MCUSUM sebagai berikut :
  - a. Menghitung vektor rata-rata data menggunakan persamaan (2.4)
  - b. Menghitung matriks variansi-kovariansi menggunakan persamaan (2.6)
  - c. Menentukan nilai batas kendali atas ( $h$ ) berdasarkan nilai  $ARL_0$
  - d. Menghitung statistik  $MC1_t$ , menggunakan persamaan (2.7)
  - e. Memplot grafik pengendali MCUSUM berdasarkan nilai  $MC1_t$
  - f. Jika terdapat nilai  $MC1_t$  lebih dari batas kendali atas ( $h$ ) maka proses produksi dikatakan tidak terkendali
  - g. Untuk mengetahui kapabilitas proses, grafik pengendali harus dalam kondisi terkendali. Sehingga, apabila terdapat titik pengamatan yang berada di luar batas kendali, akan dilakukan revisi. Revisi dilakukan dengan tidak mengikut sertakan titik pengamatan yang berada di luar batas kendali
  - h. Langkah selanjutnya, statistik  $MC1$  di-reset ke nilai awal. Tindakan ini terus dilakukan hingga didapatkan grafik pengendali yang terkendali secara statistik
5. Menganalisis kapabilitas proses produksi untuk mengukur kemampuan proses produksi air minum, dengan langkah sebagai berikut:
  - a. Menghitung indeks kapabilitas proses  $C_p$  menggunakan persamaan (2.8)

- b. Menentukan hasil kapabilitas proses berdasarkan kriteria  $C_p$
6. Menginterpretasikan hasil analisis data dan menarik kesimpulan.

Tahapan analisis dapat diringkas dalam bentuk *flowchart* yang disajikan dalam Gambar 3.1.



**Gambar 3.1** Flowchart Tahap Analisis Data

## **BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang (Perumda Tugu Tirta) merupakan perusahaan umum daerah yang bergerak di bidang pendistribusian air minum di Kota Malang. Dalam melakukan pengendalian kualitas air minum, Perumda Tugu Tirta melakukan pengendalian kualitas melalui uji lab dan uji lapangan dengan batas spesifikasi yang telah ada. Pengendalian kualitas air minum di Perumda Tugu Tirta dilakukan pada beberapa variabel dari parameter wajib dan tambahan. Pada penelitian ini dilakukan pengendalian kualitas terhadap lima variabel dari parameter wajib, yaitu pH, besi (Fe), mangan (Mg), nitrit (NO<sub>2</sub>), dan sisa klor. Pengendalian kualitas dilakukan secara statistik menggunakan grafik pengendali multivariat, karena akan dilakukan pengendalian kualitas terhadap beberapa variabel sekaligus. Dalam hal ini digunakan grafik pengendali MCUSUM, karena grafik ini lebih sensitif untuk mendeteksi pergeseran kecil dalam vektor rata-rata proses.

### **4.1 Statistik Deskriptif**

Gambaran umum dari karakteristik kualitas air minum yang mencakup lima variabel yaitu pH, besi (Fe), mangan (Mg), nitrit (NO<sub>2</sub>), dan sisa klor dapat dilihat menggunakan analisis deskriptif. Berikut merupakan hasil analisis deskriptif karakteristik kualitas air PDAM pada bulan Januari–Februari 2022 yang terdiri dari 50 pengamatan:

**Tabel 4.1** Deskripsi Karakteristik Kualitas Air Minum

Variabel	N	Min.	Max.	Mean	Std. Deviasi	Batas Spesifikasi
pH	50	6,80	7,50	7,0424	0,19519	6,5 – 8,5
Besi (Fe)	50	0,00	0,21	0,0838	0,04453	< 0,3 mg/l
Mangan (Mn)	50	0,01	0,32	0,0166	0,04380	< 0,4 mg/l
Nitrit (NO <sub>2</sub> )	50	0,00	0,32	0,0864	0,07790	< 3 mg/l
Sisa Klor	50	0,20	0,70	0,3660	0,11178	0,2 – 1 mg/l

Berdasarkan Tabel 4.1 untuk rata-rata setiap variabel kualitas air minum yang diambil dari Perumda Tugu Tirta sudah berada dalam spesifikasi yang telah ditentukan. Hal ini dapat diketahui dari nilai minimum, maksimum, dan rata-rata yang berada di dalam batas spesifikasi. Berdasarkan gambaran umum di atas, kadar-kadar senyawa kimia pada air produksi PDAM sudah berada dalam batas spesifikasi untuk setiap variabelnya dan telah memenuhi aturan yang ditetapkan oleh Permenkes RI No. 492 Tahun 2010. Selanjutnya, untuk menerapkan grafik pengendali multivariat akan diuji asumsi bahwa data berkorelasi antar variabel dan berdistribusi normal multivariat.

#### 4.2 Uji Korelasi Antar Variabel

Setelah didapatkan gambaran umum kualitas air minum pada subbab sebelumnya, langkah selanjutnya yaitu melakukan uji korelasi untuk mengetahui hubungan antar variabel. Hipotesis dan statistik uji dari pengujian korelasi yang digunakan sebagai berikut:

Hipotesis:

$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$  (tidak ada korelasi antar variabel)

$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$  (terdapat korelasi antar variabel)



Statistik uji :

$$\chi_{hitung}^2 = \left( n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln|\mathbf{R}|$$

Untuk menghitung nilai  $\chi_{hitung}^2$ , terdapat beberapa langkah sebagai berikut:

Menghitung matriks korelasi,  $\mathbf{R}$ , berdasarkan persamaan (2.2), diperoleh:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,0123 & -0,0871 & -0,0802 & 0,1469 \\ -0,01234 & 1 & -0,1072 & -0,1254 & -0,0104 \\ -0,08705 & -0,1072 & 1 & -0,1447 & 0,0384 \\ -0,0802 & -0,1254 & -0,1447 & 1 & 0,0560 \\ 0,1469 & -0,0104 & 0,0384 & 0,0560 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, menentukan determinan matriks korelasi  $|\mathbf{R}|$ , yaitu  $|\mathbf{R}| = 0,9031$

dan  $\ln|\mathbf{R}| = 0,1019$

Selanjutnya, menghitung nilai  $\chi_{hitung}^2$ , berdasarkan persamaan (2.1), yaitu

$$\begin{aligned} \chi_{hitung}^2 &= \left( n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln|\mathbf{R}| \\ &= \left( 50 - 1 - \frac{2 * 5 + 5}{6} \right) - 0,1019 \\ &= (46,5) - 0,1019 \\ &= 46,3981 \end{aligned}$$

Untuk  $\alpha = 0,05$  dan  $df = \frac{1}{2}p(p - 1) = 10$ , diperoleh nilai  $\chi_{[\alpha, \frac{1}{2}p(p-1)]}^2 = 18,307$ .

Keputusan:

Berdasarkan hasil tersebut didapatkan bahwa nilai  $\chi_{hitung}^2 = 46,3981$  lebih besar dari  $\chi_{0,05,10}^2 = 18,307$  yang berarti tolak  $H_0$ . Maka dapat disimpulkan bahwa antar variabel kualitas air minum saling berkorelasi (*dependent*). Hasil uji korelasi antar variabel memenuhi asumsi dalam penggunaan grafik pengendali MCUSUM, maka dapat dilanjutkan dengan pengujian asumsi normalitas multivariat.

### 4.3 Uji Normalitas Multivariat

Setelah dilakukan uji asumsi dependensi variabel, langkah selanjutnya yaitu menguji normalitas multivariat. Pengujian normalitas multivariat dalam penelitian ini menggunakan statistik uji  $d_i^2$  dengan hipotesis sebagai berikut:

Hipotesis:

$H_0$  : data berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : data tidak berdistribusi normal multivariat

Statistik uji  $d_i^2$ :

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$$

Untuk menghitung nilai  $d_i^2$ , terdapat beberapa langkah sebagai berikut:

Pertama, menghitung nilai rata-rata ( $\bar{\mathbf{X}}$ ), dari masing-masing variabel berdasarkan persamaan (2.4)

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{50} X_{i1}}{n} \\ &= \frac{x_{1,1} + x_{2,1} + \dots + x_{50,1}}{50} \\ &= 7,0424 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_4 &= \frac{\sum_{i=1}^{50} X_{i4}}{n} \\ &= \frac{x_{1,4} + x_{2,4} + \dots + x_{50,4}}{50} \\ &= 0,0864 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{50} X_{i2}}{n} \\ &= \frac{x_{1,2} + x_{2,2} + \dots + x_{50,2}}{50} \\ &= 0,0838 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_5 &= \frac{\sum_{i=1}^{50} X_{i5}}{n} \\ &= \frac{x_{1,5} + x_{2,5} + \dots + x_{50,5}}{50} \\ &= 0,366 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^{50} X_{i3}}{n} \\ &= \frac{x_{1,3} + x_{2,3} + \dots + x_{50,3}}{50} \\ &= 0,0166 \end{aligned}$$

Sehingga, didapat vektor rata-rata data, yaitu

$$\bar{\mathbf{X}} = (7,0424 \quad 0,0838 \quad 0,0166 \quad 0,0864 \quad 0,366)' \quad (4.1)$$

Selanjutnya menghitung matriks variansi-kovariansi,  $\mathbf{S}$ , berdasarkan persamaan (2.5)

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^{50} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 \\ &= \frac{(X_{1,1} - \bar{X}_1)^2 + (X_{2,1} - \bar{X}_1)^2 + \dots + (X_{50,1} - \bar{X}_1)^2}{50-1} \\ &= \frac{(6,9 - 7,0424)^2 + (7,04 - 7,0424)^2 + \dots + (7 - 7,0424)^2}{49} \\ &= 0,0381 \\ S_{12} &= \frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^{50} (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2) \\ &= \frac{(X_{1,1} - \bar{X}_1)(X_{1,2} - \bar{X}_2) + (X_{2,1} - \bar{X}_1)(X_{2,2} - \bar{X}_2) + \dots + (X_{50,1} - \bar{X}_1)(X_{50,2} - \bar{X}_2)}{49} \\ &= \frac{(6,90 - 7,0424)(0,08 - 0,0838) + (7,04 - 7,0424)(0,04 - 0,0838) + \dots + (7 - 7,0424)(0 - 0,0838)}{49} \\ &= -0,0001 \end{aligned}$$

Dan seterusnya, hingga diperoleh matriks variansi-kovariansi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,0381 & -0,0001 & -0,0007 & -0,0012 & 0,0032 \\ -0,0001 & 0,0020 & -0,0002 & -0,0004 & -0,0001 \\ -0,0007 & -0,0002 & 0,0019 & -0,0005 & 0,0002 \\ -0,0012 & -0,0004 & -0,0005 & 0,0061 & 0,0005 \\ 0,0032 & -0,0001 & 0,0002 & 0,0005 & 0,0125 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Langkah selanjutnya, menentukan invers matriks variansi-kovariansi dari persamaan (4.2), dan diperoleh

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,5980 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Selanjutnya menghitung nilai kuadrat jarak Mahalanobis,  $d_i^2$ , berdasarkan persamaan (2.3)

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}}) \\ &= [(6,9 \quad 0,08 \quad 0,01 \quad 0,01 \quad 0,2) - (7,0424 \quad 0,0838 \quad 0,0166 \quad 0,0864 \quad 0,366)] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,5980 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6,90 & - & 7,0424 \\ 0,08 & - & 0,0838 \\ 0,01 & - & 0,0166 \\ 0,01 & - & 0,0864 \\ 0,20 & - & 0,3660 \end{bmatrix} \\ &= [-0,1424 \quad -0,0038 \quad -0,0066 \quad -0,0764 \quad -0,166] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,5980 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,1424 \\ -0,0038 \\ -0,0066 \\ -0,0764 \\ -0,166 \end{bmatrix} \\ &= 3,53343 \end{aligned}$$

Untuk  $d_2^2, d_3^2, \dots, d_{50}^2$  dihitung menggunakan cara yang sama.

Hasil perhitungan nilai  $d_i^2$  untuk setiap pengamatan dijabarkan pada Tabel

4.2 (hasil perhitungan lengkap terdapat pada lampiran 3).

**Tabel 4.2** Hasil Perhitungan Nilai  $d_i^2, i = 1, 2, \dots, 50$

$i$	$d_i^2$
1	3,5334
2	1,2009
3	1,2241
4	11,4806
$\vdots$	$\vdots$
49	4,5353
50	11,3210

Setelah didapatkan nilai  $d_i^2$  untuk setiap pengamatan, langkah selanjutnya yaitu menghitung nilai  $\chi_{\alpha,df}^2$  dengan  $\alpha = 0,05$  dan  $df = 5$ . Sehingga diperoleh nilai  $\chi_{0,05,5}^2 = 11,070$ .

Untuk pengamatan pertama nilai  $d_i^2 \leq \chi_{\alpha,df}^2$ , maka diperoleh nilai  $I_i = 1$ .

Sehingga

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n} = \frac{45}{50} = 0,9 = 90\%$$

Keputusan:

Berdasarkan hasil tersebut didapat keputusan menerima  $H_0$  karena terdapat  $T > 50\%$ , atau terdapat lebih dari 50% nilai  $d_i^2$  yang kurang lebih atau sama dengan  $\chi_{0,05,5}^2$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal multivariat. Hasil uji normalitas multivariat ini memenuhi asumsi dalam penggunaan grafik pengendali MCUSUM, maka analisis dapat dilanjutkan menggunakan grafik pengendali MCUSUM.

#### 4.4 Penerapan Grafik Pengendali MCUSUM

Setelah data memenuhi asumsi bahwa antar variabel berkorelasi dan berdistribusi normal multivariat, maka selanjutnya yaitu mengontrol rata-rata proses menggunakan grafik pengendali MCUSUM. Langkah-langkah dalam menyusun grafik pengendali MCUSUM sebagai berikut:

##### a. Menghitung vektor rata-rata data

Sebagaimana persamaan (4.1), diketahui vektor rata-rata data, yaitu

$$\bar{\mathbf{X}} = (7,0424 \quad 0,0838 \quad 0,0166 \quad 0,0864 \quad 0,3660)'$$

**b. Menghitung matriks variansi-kovariansi**

Sebagaimana persamaan (4.2), diketahui matriks variansi-kovariansi, yaitu

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,0381 & -0,0001 & -0,0007 & -0,0012 & 0,0032 \\ -0,0001 & 0,0020 & -0,0002 & -0,0004 & -0,0001 \\ -0,0007 & -0,0002 & 0,0019 & -0,0005 & 0,0002 \\ -0,0012 & -0,0004 & -0,0005 & 0,0061 & 0,0005 \\ 0,0032 & -0,0001 & 0,0002 & 0,0005 & 0,0125 \end{bmatrix}$$

Dan juga diketahui invers dari matriks variansi-kovariansi sebagaimana persamaan (4.3), yaitu

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,598 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix}$$

**c. Menentukan batas kendali atas ( $h$ ) berdasarkan nilai  $ARL_0$**

Penentuan batas kendali atas ( $h$ ) didapatkan melalui pendekatan dengan kriteria nilai  $ARL_0$ . Dalam penelitian ini dipilih  $ARL_0 = 200$  karena bersesuaian dengan tingkat signifikansi  $\alpha = 0,05$ . Sehingga, batas kendali atas yang digunakan dalam penelitian ini sebesar 9,46.

**d. Menghitung statistik  $MC1_t$**

Selanjutnya, dihitung nilai  $MC1_t$  untuk 50 pengamatan ( $t = 50$ ), menggunakan persamaan (2.7).

$$\mathbf{C}_t = \sum_{i=t-n_t+1}^t (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= ((6,9 \ 0,08 \ 0,01 \ 0,01 \ 0,2)' - (7,0424 \ 0,0838 \ 0,0166 \ 0,0864 \ 0,366)') \\ &= (-0,1424 \ -0,0038 \ -0,0066 \ -0,0764 \ -0,1660)' \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{C}_1\| = \sqrt{\mathbf{C}_1' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} -0,1424 & -0,0038 & -0,0066 & -0,0764 & -0,1660 \end{pmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,598 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,1424 \\ -0,0038 \\ -0,0066 \\ -0,0764 \\ -0,1660 \end{pmatrix} \\
&= 3,5344^{1/2} \\
&= 1,88
\end{aligned}$$

$$MC1_1 = \max \{1,88 - (0,5)(1), 0\}$$

$$= 1,38$$

Untuk  $MC1_2, MC1_3, \dots, MC1_{50}$  dihitung menggunakan cara yang sama.

Berikut merupakan hasil perhitungan nilai  $MC1_t$  pada proses produksi air minum yang diringkas dalam Tabel 4.3.

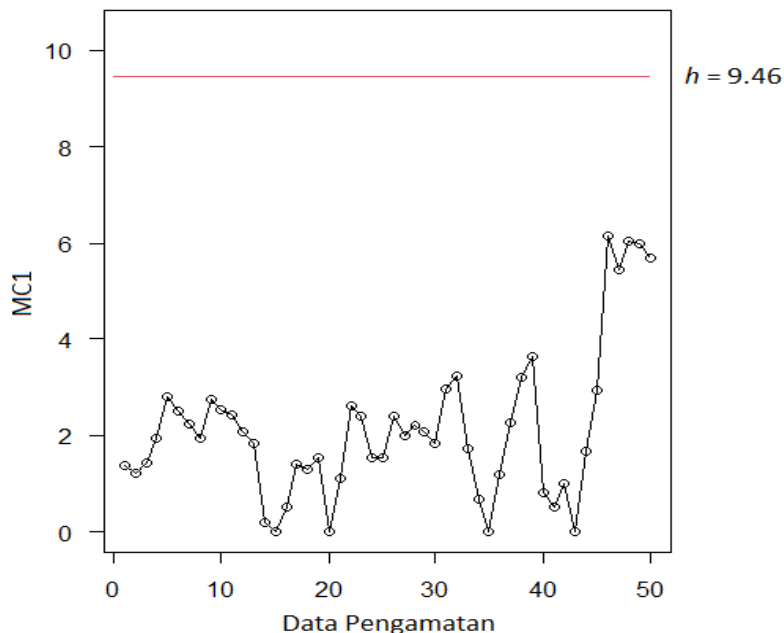
**Tabel 4.3** Hasil Perhitungan Nilai  $MC1_t$  Pada Proses Produksi Air Minum

No.	pH	Besi	Mangan	Nitrit	Sisa Klor	$MC1_t$
1	6,9	0,01	0,08	0,01	0,2	1,38
2	7,04	0,07	0,04	0,02	0,4	1,21
3	7,12	0,03	0,06	0,01	0,4	1,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	7	0,32	0	0,01	0,4	5,70

**Keterangan:** Hasil Perhitungan Nilai  $MC1_t$  secara lengkap tersaji pada lampiran 5

#### e. Memplot Grafik Pengendali MCUSUM

Setelah didapat nilai  $MC1_t$  untuk  $t = 1, 2, \dots, 50$ . Langkah selanjutnya yaitu memplot grafik pengendali MCUSUM berdasarkan nilai  $MC1_t$ . Untuk memplot grafik pengendali Multivariat CUSUM 1 digunakan bantuan *software* R. Hasil plot statistik  $MC1_t$  pada grafik pengendali MCUSUM dapat dipelajari pada Gambar 4.1.



**Gambar 4.1** Pengendalian Proses Menggunakan Grafik Pengendali MCUSUM

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat dilihat pada grafik pengendali MCUSUM dengan batas kendali atas ( $h$ ) sebesar 9,46, semua titik pengamatan berada di bawah batas kendali atas ( $h$ ). Hal ini mengindikasikan bahwa tidak terjadi pergeseran pada vektor rata-rata proses. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kualitas air minum menggunakan grafik pengendali MCUSUM telah terkendali secara statistik. Langkah selanjutnya, dilakukan analisis kapabilitas proses.

#### 4.5 Kapabilitas Proses Multivariat

Analisis kapabilitas adalah analisis yang digunakan untuk melihat kemampuan perusahaan dalam memenuhi batas spesifikasi yang sudah ditentukan perusahaan tersebut, atau dalam kata lain untuk mengetahui kebaikan dari kinerja proses secara keseluruhan. Proses produksi dikatakan *capable* apabila hasil pengukuran kualitas secara keseluruhan telah berada dalam batas spesifikasi yang telah ditentukan perusahaan, dengan nilai indeks kapabilitas,  $C_p > 1$ .



Indeks kapabilitas proses pada proses multivariat dapat dihitung jika data memenuhi asumsi berdistribusi normal multivariat dan prosesnya sudah terkendali. Adapun langkah-langkah dalam menghitung indeks kapabilitas proses multivariat menggunakan persamaan (2.8) sebagai berikut:

Langkah yang pertama yaitu menghitung nilai K atau nilai daerah yang sebenarnya menggunakan persamaan (2.9). Sebelum mencari nilai K, nilai target dari batas spesifikasi karakteristik kualitas diperoleh menggunakan persamaan (2.10). Berdasarkan batas spesifikasi yang telah ditentukan perusahaan, batas spesifikasi ditunjukkan pada Tabel 4.4.

**Tabel 4.4** Batas Spesifikasi Kualitas Air Minum

Variabel	Batas Spesifikasi
pH	6,5 – 8,5
Besi (Fe)	< 0,3 mg/l
Mangan (Mn)	< 0,4 mg/l
Nitrit (NO <sub>2</sub> )	< 3 mg/l
Sisa Klor	0,2 – 1 mg/l

Maka diperoleh nilai target untuk setiap variabel sebagai berikut:

$$\xi_1 = \frac{(8,5 + 6,5)}{2} = 7,5$$

$$\xi_4 = \frac{(3 + 0)}{2} = 1,5$$

$$\xi_2 = \frac{(0,3 + 0)}{2} = 0,15$$

$$\xi_5 = \frac{(1 + 0,2)}{2} = 0,6$$

$$\xi_3 = \frac{(0,4 + 0)}{2} = 0,2$$

Setelah mendapatkan nilai target, maka akan diperoleh nilai K yang mana  $S_0^{-1}$  adalah invers matriks variansi-kovariansi, dengan hasil sebagai berikut:

$$K^2 = (\bar{X} - \xi)' S_0^{-1} (\bar{X} - \xi)$$

$$= ((7,0424 \ 0,0838 \ 0,0166 \ 0,0864 \ 0,366) - (7,5 \ 0,15 \ 0,2 \ 1,5 \ 0,6))$$

$$\times \begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,598 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7,0424 & - & 7,50 \\ 0,0838 & - & 0,15 \\ 0,0166 & - & 0,20 \\ 0,0864 & - & 1,50 \\ 0,3660 & - & 0,60 \end{bmatrix}$$

$$= (-0,4576 \ -0,0662 \ -0,1834 \ -1,4136 \ -0,2340) \times$$

$$\begin{bmatrix} 27,4022 & 4,3956 & 13,7809 & 7,5486 & -7,5147 \\ 4,3956 & 521,4870 & 70,0340 & 44,1091 & -1,7395 \\ 13,7809 & 70,0340 & 548,6830 & 53,5592 & -13,5980 \\ 7,5486 & 44,1091 & 53,5592 & 174,5810 & -9,3703 \\ -7,5147 & -1,7395 & -13,598 & -9,3703 & 82,5304 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,4576 \\ -0,0662 \\ -0,1834 \\ -1,4136 \\ -0,2340 \end{pmatrix}$$

$$= 420,8990$$

$$K = 20,5158$$

Setelah mendapatkan nilai K selanjutnya yaitu menghitung nilai  $g$  menggunakan persamaan (2.11)

$$g = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$$

Matriks  $\mathbf{A}$  diperoleh berdasarkan persamaan (2.12) sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$$

$$= \begin{bmatrix} 6,90 & 7,04 & 7,12 & \dots & 7,00 \\ 0,08 & 0,04 & 0,06 & \dots & 0,00 \\ 0,01 & 0,02 & 0,01 & \dots & 0,10 \\ 0,01 & 0,07 & 0,03 & \dots & 0,32 \\ 0,20 & 0,40 & 0,40 & \dots & 0,40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6,90 & 0,08 & 0,01 & 0,01 & 0,20 \\ 7,04 & 0,04 & 0,02 & 0,07 & 0,40 \\ 7,12 & 0,06 & 0,01 & 0,03 & 0,40 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 7,00 & 0,00 & 0,10 & 0,32 & 0,40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2,4816e + 03 & 29,5024 & 5,8087 & 30,3634 & 129,0330 \\ 29,5024 & 0,4483 & 0,0593 & 0,3407 & 1,5310 \\ 5,8087 & 0,0593 & 0,1079 & 0,0475 & 0,3130 \\ 30,3634 & 0,3407 & 0,0475 & 0,6706 & 1,6050 \\ 129,0330 & 1,5310 & 0,3130 & 1,6050 & 7,3100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0071 & -0,1381 & -0,0408 & -0,0461 & -0,0845 \\ -0,1381 & 10,5486 & 1,2964 & 0,8176 & -0,0071 \\ -0,0408 & 1,2964 & 11,0098 & 0,9763 & -0,2373 \\ -0,0461 & 0,8176 & 0,9763 & 3,4903 & -0,1663 \\ -0,0845 & -0,0071 & -0,2373 & -0,1663 & 1,6757 \end{bmatrix}$$

$$g = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$$

$$= (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}}) + (\mathbf{X}_2 - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_2 - \bar{\mathbf{X}}) + \dots + (\mathbf{X}_{50} - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{X}_{50} - \bar{\mathbf{X}})$$

$$= 0,0589 + 0,0241 + \dots + 0,231$$

$$= 3,9320$$

Banyak pengamatan yang terkendali dalam grafik pengendali MCUSUM adalah 50 dengan 5 karakteristik kualitas. Nilai  $\chi_{\alpha,df}^2$  dengan  $\alpha = 0,05$  dan  $df = 5$  adalah 11,0705.

Setelah melalui beberapa proses di atas, perhitungan nilai indeks kapabilitas proses menggunakan persamaan (2.8)

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{K}{\chi_{\alpha,df}^2} \left( \frac{(n-1)p}{g} \right)^{1/2} \\ &= \frac{20,5158}{11,0705} \left( \frac{(50-1)5}{3,9320} \right)^{1/2} \\ &= 14,6284 \end{aligned}$$

Diperoleh perhitungan indeks kapabilitas proses multivariat,  $C_p$  sebesar 14,6284. Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa kapabilitas proses multivariat pada proses produksi air minum dikatakan *capable* atau baik karena memiliki nilai  $C_p > 1$ .

#### 4.6 Manfaat Pengendalian Kualitas Berdasarkan Perspektif Al-Qur'an

Kualitas merupakan salah satu faktor dasar keputusan pembeli dalam menentukan produk ataupun jasa yang saling bersaing. Perusahaan dituntut untuk menjaga dan meningkatkan kualitas produk agar mendapat loyalitas dari pelanggan. Sehingga, pengendalian kualitas dalam proses produksi dibutuhkan untuk memantau proses produksi, agar produk atau jasa yang dihasilkan berkualitas sesuai dengan standar yang ditentukan. Apabila kualitas suatu produk atau jasa terjaga, maka hal tersebut dapat memberikan banyak keuntungan. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam surah Al-Isra'/17:35:

*“Dan sempurnakanlah takaran apabila kamu menakar dan timbanglah dengan timbangan yang benar. Itulah yang paling baik dan paling bagus akibatnya.”*

Menurut tafsir al-Misbah, ayat ini menyatakan bahwa sempurnakanlah secara sungguh-sungguh takaran apabila kamu menakar untuk pihak lain dan timbanglah dengan neraca yang lurus yakni yang benar dan adil. Itulah yang baik bagi kamu dan orang lain karena dengan demikian orang akan percaya kepada kamu sehingga semakin banyak yang berinteraksi dengan kamu dan melakukan hal itu juga lebih bagus akibatnya bagi kamu di akhirat nanti dan bagi seluruh masyarakat dalam kehidupan dunia ini. Kata (الْقِسْطَاس) *al-qisthds* atau *al-qusthds* ada yang memahaminya dalam arti neraca, ada juga dalam arti adil.

Penyempurnaan takaran dan timbangan merupakan bagian dari pengendalian kualitas dalam proses produksi. Hal tersebut dinyatakan baik dan lebih bagus akibatnya. Ini karena penyempurnaan takaran atau timbangan, melahirkan rasa aman, ketentraman dan kesejahteraan hidup bermasyarakat. Semuanya dapat tercapai melalui keharmonisan hubungan antara masyarakat, yang antara lain bila masing-masing memberi apa yang berlebih dari kebutuhannya dan

menerima yang seimbang dengan haknya. Ini tentu saja memerlukan rasa aman menyangkut alat ukur, baik takaran maupun timbangan. Siapa yang membenarkan bagi dirinya mengurangi hak seseorang, maka itu mengantarnya membenarkan perlakuan serupa kepada siapa saja, dan ini mengantar kepada tersebarnya kecurangan. Bila itu terjadi, maka rasa aman tidak akan tercipta, dan ini tentu saja tidak berakibat baik bagi perorangan dan masyarakat. Seorang muslim dituntut oleh agamanya untuk menyempurnakan hak orang lain, setiap saat, dan sama sekali tidak boleh menganggap remeh hak itu apalagi mengabaikannya.

## **BAB V PENUTUP**

### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan:

1. Hasil penerapan grafik pengendali MCUSUM pada pengendalian kualitas produksi air minum di Perumda Tugu Tirta pada bulan Januari-Februari 2022 telah terkendali secara statistik.
2. Perhitungan kapabilitas proses pada proses produksi air minum di Perumda Tugu Tirta menggunakan grafik pengendali MCUSUM, diperoleh nilai indeks kapabilitas proses lebih dari 1, yaitu sebesar 14,6284. Artinya, kapabilitas proses produksi air minum pada bulan Januari-Februari 2022 dikatakan baik.

### **5.2 Saran**

Pada penelitian selanjutnya akan lebih baik jika menggunakan lebih banyak variabel tentang kualitas air minum baik secara kimia, fisik, maupun biologis. Dan juga jumlah pengamatan yang lebih banyak, sehingga dapat mengganbarkan apakah proses produksi terkait telah terkendali atau tidak. Banyaknya variabel yang dileliti juga dapat mengetahui variabel mana yang sebenarnya membuat suatu proses dalam keadaan tidak terkendali secara statistik. Penelitian selanjutnya juga dapat melanjutkan penelitian dengan analisis lebih lanjut menggunakan metode grafik pengendali yang lain misalnya grafik pengendali Max-MCUSUM.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, M. (2007). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Alves, C. C., Hening, E., Samahyol, R. W., & Konrath, A. C. (2013). Application of Multivariate Control Charts For Monitoring An Industrial Process. *Tecno-Logica*, 17(2), 101-107.
- Bartlett, M. S. (1951). The Effect of Standardization on a  $\chi^2$  Approximation in Factor Analysis. *Biometrika*. 38(3-4): 337-344.
- Besterfield, D. H. (2012). *Quality Improvement Ninth Edition*. College of Engineering: Southern Illinois University.
- Bodnar, O., & W. Schmid. (2007). Surveillance of The Mean Behavior of Multivariate Time Series. *Stat. Neerl.* 61(4): 383–406.
- Crosier, R. B. (1988). Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes. *Technometrics*. 30(3): 291-303
- Departemen Agama RI. (2015). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Jakarta: CV Darus Sunnah.
- Departemen Kesehatan RI. (2010). Standar Kualitas Air Minum. Jakarta: Dep. Kes RI.
- Fauziah, A. (2010). *Efektivitas Saringan Pasir Cepat Dalam Menurunkan Kadar Mangan (Mn) Pada Air Sumur Dengan Penambahan Kalium Permanganat (KMnO4) 1%*. Medan: Skripsi FKM USU.
- Hamed, M. S., Mansour, M. M., & Elrazik, E. M. (2016). Mcusum Control Chart Procedure: Monitoring The Process Mean With Application. *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications*, 16(1), 105-132.
- Humas-perumdatugutirta. (2021, April 30). *Info Perusahaan: Sejarah*. From Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang: <https://perumdatugutirta.co.id/info/sejarah>
- Johnson, R., & Wichern, D. W. (2007). *Applied multivariate statistical analysis 6th edition*. New Jersey, NJ: Pearson Prentice Hall.
- Kotz, S., & Johnson N. L. (1993). *Process Capability Indices*. London: Chapman & Hall.
- Maharani, B. (2020). *Penerapan Grafik pengendali MEWMA pada Pengendalian Kualitas Proses Produksi Air PDAM*. Malang: Skripsi FST UIN Malang.
- Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control Seventh Edition*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Morrison, F. (2005). *Multivariate Statistical Methods*. (Fourth Edition ed.). The Wharton School University of Pennsylvania.

- Munir, S. (2019). *Aplikasi Grafik Pengendali T2 Hotteling dan Kapabilitas Proses Untuk Pengendalian Kualitas Pada Produksi Arang*. Malang: Skripsi FST UIN Malang.
- Peraturan Daerah Kota Malang Nomor 11 Tahun 2019 tentang Perusahaan Umum Daerah Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.
- Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomer 736 Tahun 2010 tentang Tata Laksana Kualitas Air Minum.
- Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomer 82 Tahun 2001 tentang Pengelolaan Kualitas Air Dan Pengendalian Pencemaran Air.
- Pignatiello, J. J., & Runger, G. C. (1990). Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. *Journal of Quality Technology*. 22(3): 173-186.
- Rimantho, D., & Athiyah. (2019). Analisis Kapabilitas Proses Untuk Pengendalian Kualitas Air Limbah di Industri Farmasi. *Jurnal Teknologi Universitas Muhammadiyah Jakarta*. 11(1): 1-8
- Ritonga, P. S. (2011). "Air" Sebagai Sarana Peningkatan Imtaq (Integrasi Kimia Dan Agama). *Jurnal Sosial Budaya*. 8(2): 267-276
- Rohmawati, O. D. (2016). *Penerapan Grafik pengendali Kabur IX-MR dan Kapabilitas Proses Kabur pada Pengendalian Kualitas Produksi Air PDAM*. Malang: Skripsi FST UIN Malang.
- Saida, L. (2011). *Analisis Penerapan Bagan Pengedali Jumlah Kumulatif Untuk Mendeteksi Pegerseran Rata-Rata Proses*. Malang: Skripsi FST UIN Malang.
- Sari, S. P., Yanuar, F., & Devianto, D. (2020). Cement Compressive Strength Control Using CUSUM and MCUSUM Control Chart. *Science and Technology Indonesia*. 5(2): 45-52
- Singh, S., & Mosley, L. (2003). Trace Metal Levels in Drinking Water on Viti Levu, Fiji Island. *S Pac. J.Nat Sci*, 21(1): 1-4.
- Sugiharto, H., & Indriawati, K. (2010). Implementasi Metode MCUSUM Untuk Strategi Pengawasan Sistem Kontrol Prediktif Pada Bioreaktor Anaerob.
- Tebbut, T. H. Y. (1998). *Principles of Water Quality Control 5<sup>th</sup> Edition*. Butterworth-Heinemann. Oxford.
- Wahyuningsih, N., & Dwi, P. (2015). Analisis Pengendalian Kualitas Multivariate Air Minum (Studi Kasus di PDAM Gresik). *Limits, J. Math. And Its Appl*, 2(1), 47-59.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., dan Ye, K. (2012). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists Ninth Edition*. Pearson Education, Inc. United State of America.



## LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Data Sekunder Pemeriksaan Kualitas Air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang

<b>No. Pengamatan</b>	<b>pH</b>	<b>Nitrit</b>	<b>Besi</b>	<b>Mangan</b>	<b>Sisa Klor</b>
1	6,90	0,01	0,08	0,01	0,20
2	7,04	0,07	0,04	0,02	0,40
3	7,12	0,03	0,06	0,01	0,40
4	7,50	0,05	0,15	0,02	0,20
5	7,10	0,07	0,08	0,01	0,20
6	7,09	0,05	0,06	0,01	0,40
7	6,81	0,08	0,05	0,01	0,30
8	6,93	0,01	0,05	0,01	0,50
9	7,19	0,01	0,07	0,01	0,30
10	6,90	0,02	0,16	0,01	0,30
11	6,90	0,06	0,14	0,01	0,30
12	7,10	0,06	0,10	0,01	0,40
13	7,12	0,10	0,06	0,01	0,30
14	6,81	0,19	0,07	0,01	0,40
15	7,02	0,21	0,11	0,01	0,40
16	6,99	0,10	0,05	0,01	0,30
17	7,12	0,07	0,07	0,01	0,20
18	7,06	0,04	0,13	0,01	0,30
19	6,80	0,14	0,14	0,01	0,30
20	6,90	0,03	0,07	0,01	0,70
21	6,80	0,12	0,12	0,01	0,30
22	7,12	0,01	0,20	0,01	0,50
23	7,09	0,03	0,07	0,01	0,50
24	6,90	0,04	0,04	0,01	0,30
25	7,00	0,02	0,10	0,01	0,20
26	7,19	0,13	0,19	0,01	0,50
27	6,81	0,20	0,08	0,01	0,40
28	6,98	0,16	0,12	0,01	0,30

<b>No. Pengamatan</b>	<b>pH</b>	<b>Nitrit</b>	<b>Besi</b>	<b>Mangan</b>	<b>Sisa Klor</b>
29	7,00	0,24	0,07	0,01	0,40
30	6,90	0,14	0,06	0,01	0,40
31	7,10	0,25	0,10	0,01	0,50
32	7,06	0,14	0,10	0,01	0,40
33	7,40	0,04	0,08	0,01	0,30
34	7,20	0,08	0,05	0,01	0,40
35	7,50	0,04	0,05	0,01	0,30
36	6,82	0,04	0,05	0,01	0,30
37	6,88	0,01	0,21	0,01	0,40
38	6,81	0,01	0,08	0,01	0,40
39	6,87	0,04	0,06	0,01	0,30
40	7,30	0,26	0,07	0,01	0,40
41	6,94	0,18	0,06	0,01	0,30
42	6,88	0,10	0,11	0,01	0,30
43	7,30	0,11	0,07	0,01	0,50
44	7,40	0,10	0,05	0,01	0,30
45	7,40	0,01	0,06	0,01	0,50
46	6,91	0,01	0,05	0,32	0,40
47	6,84	0,01	0,07	0,01	0,20
48	7,40	0,00	0,08	0,01	0,70
49	6,92	0,08	0,00	0,01	0,40
50	7,00	0,32	0,00	0,01	0,40

**Lampiran 2.** Hasil Statistik Deskriptif menggunakan *software* SPSS

<b>Descriptive Statistics</b>						
	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance
pH	50	6.80	7.50	7.0424	.19519	.038
Besi (Fe)	50	.00	.21	.0838	.04453	.002
Mangan (Mn)	50	.01	.32	.0166	.04383	.002
Nitrit (NO <sub>2</sub> )	50	.00	.32	.0864	.07790	.006
Sisa Klor	50	.20	.70	.3660	.11178	.012
Valid N (listwise)	50					

**Lampiran 3.** Hasil Uji Normalitas Multivariat

Diketahui nilai  $\chi_{0,05,5}^2$  : 11,070.

Berikut merupakan hasil perhitungan nilai  $d_i^2$  untuk setiap pengamatan:

$i$	$d_i^2$	$I_i$	$i$	$d_i^2$	$I_i$
1	3,5334	1	26	8,3716	1
2	1,2009	1	27	3,4493	1
3	1,2241	1	28	2,2165	1
4	11,4806	0	29	3,9500	1
5	2,4982	1	30	1,3315	1
6	0,7953	1	31	6,1391	1
7	2,3969	1	32	0,7645	1
8	4,4214	1	33	4,2799	1
9	2,0804	1	34	1,3006	1
10	4,12 24	1	35	7,1326	1
11	2,3831	1	36	2,8775	1
12	0,4011	1	37	9,4128	1
13	0,9220	1	38	3,2011	1
14	3,1532	1	39	1,9638	1
15	3,2250	1	40	7,3395	1
16	1,0274	1	41	2,1472	1
17	2,7158	1	42	1,3027	1
18	1,6323	1	43	2,9542	1
19	3,8731	1	44	4,7507	1
20	11,8705	0	45	5,5153	1
21	2,5656	1	46	47,9308	0
22	8,8757	1	47	4,2132	1
23	2,3651	1	48	12,4058	0
24	2,5279	1	49	4,5353	1
25	2,9024	1	50	11,3210	0

Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n}$$

$$= \frac{45}{50} = 0,9 = 90\%$$

Berdasarkan hasil tersebut didapat keputusan menerima  $H_0$  karena terdapat terdapat  $T > 50\%$ , atau terdapat lebih dari 50% nilai  $d_i^2$  yang kurang lebih atau sama dengan  $\chi_{0,05,5}^2$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal multivariat.

**Lampiran 4.** Memplot Grafik Pengendali MCUSUM menggunakan *software* R.

Untuk memplot grafik pengendali MCUSUM yang diciptakan oleh Pignatiello dan Runger (1990) dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* R dengan fungsi `mult.chart` tipe “`mcusum 2`”. Pada penelitian ini digunakan nilai  $k = 0,5$  dan  $h = 9,46$ .

```
> data("Data")
> Xmv < mult.chart(Data, type = "t2") $Xmv
> S < mult.chart(Data, type = "t2") $covariance
> mult.chart(type = "mcusum2", h = 9.46, Data, Xmv = Xmv, S = S)
```

**Lampiran 5.** Hasil Perhitungan Nilai  $MC1_t$  untuk  $t = 1, 2, \dots, 50$ 

[1] 1,38	[11] 2,42	[21] 1,10	[31] 2,96	[41] 0,51
[2] 1,21	[12] 2,07	[22] 2,61	[32] 3,22	[42] 1,00
[3] 1,41	[13] 1,84	[23] 2,39	[33] 1,73	[43] 0,00
[4] 1,95	[14] 0,20	[24] 1,53	[34] 0,68	[44] 1,68
[5] 2,79	[15] 0,00	[25] 1,53	[35] 0,00	[45] 2,94
[6] 2,51	[16] 0,51	[26] 2,40	[36] 1,20	[46] 6,17
[7] 2,24	[17] 1,40	[27] 1,98	[37] 2,26	[47] 5,45
[8] 1,93	[18] 1,30	[28] 2,21	[38] 3,19	[48] 6,05
[9] 2,76	[19] 1,54	[29] 2,07	[39] 3,62	[49] 5,98
[10] 2,54	[20] 0,00	[30] 1,84	[40] 0,80	[50] 5,70

## RIWAYAT HIDUP



Hikmatul Maulidiah, lahir di Probolinggo, 28 Mei 2001. Tinggal di Desa Curah Tulis, Kecamatan Tongas, Kabupaten Probolinggo. Anak pertama dari tiga bersaudara. Putri dari pasangan Bapak Achmadi dan Ibu Ida Fitriyah. Pendidikan dasar ditempuh di SD Negeri Curah Tulis III dan lulus pada tahun 2012, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 3 Darul ‘Ulum Peterongan Jombang dan lulus pada tahun 2015. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Darul ‘Ulum 1 Unggulan BPP-Teknologi Peterongan Jombang dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya menempuh pendidikan perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2018 melalui jalur SNMPTN. Penulis mengambil program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Penulis dapat dihubungi melalui Email: [hikmatulmaulid028@gmail.com](mailto:hikmatulmaulid028@gmail.com).



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Hikmatul Maulidiyah  
NIM : 18610016  
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : Penerapan Grafik Pengendali *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM) dan Kapabilitas Proses pada Pengendalian Kualitas Air PDAM  
Pembimbing I : Fachrur Rozi, M.Si  
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Januari 2022	Konsultasi bab I, III	1.
2.	07 Februari 2022	Konsultasi integrasi agama	2.
3.	08 Februari 2022	Revisi bab I, III	3.
4.	24 Februari 2022	Acc integrasi agama	4.
5.	10 Maret 2022	Acc bab I, III	5.
6.	17 Maret 2022	Konsultasi bab II	6.
7.	29 Maret 2022	Revisi bab II	7.
8.	07 April 2022	Acc bab I, II, III	8.
9.	28 April 2022	Konsultasi bab IV	9.
10.	16 Mei 2022	Konsultasi integrasi agama	10.
11.	20 Mei 2022	Acc integrasi agama	11.
12.	25 Mei 2022	Revisi bab IV dan konsultasi bab V	12.
13.	31 Mei 2022	Acc bab I, II, III, IV, V	13.

Malang, 24 Juni 2022  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP.197411292000122005