

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA META
POPULASI PENYEBARAN VIRUS EBOLA**

SKRIPSI

**OLEH:
ANASTASIA ANGIE NUGRAHA
NIM. 18610114**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA META
POPULASI PENYEBARAN VIRUS EBOLA**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Anastasia Angie Nugraha
NIM. 18610114**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA META POPULASI PENYEBARAN VIRUS EBOLA

SKRIPSI

Oleh
Anastasia Angie Nugraha
NIM. 18610114

Telah Disetujui untuk Diuji

Tanggal 16 Juni 2022

Dosen Pembimbing I



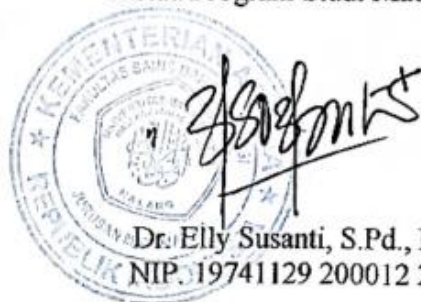
Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Dosen Pembimbing II



Juhari, M.Si
NIDT. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA META POPULASI PENYEBARAN VIRUS EBOLA

SKRIPSI

Oleh
Anastasia Angie Nugraha
NIM. 18610114

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 21 Juni 2022

Ketua Penguji : Usman Pagalay, M.Si

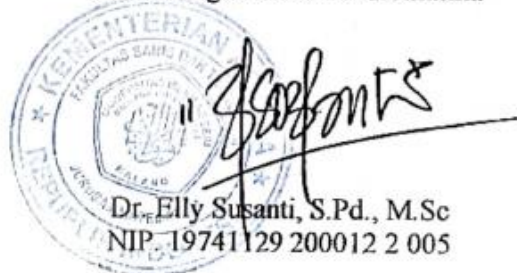
Anggota Penguji 1 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji 3 : Juhari, M.Si



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Anastasia Angie Nugraha

NIM : 18610114

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model Matematika Meta Populasi
Penyebaran Virus Ebola

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,



Anastasia Angie Nugraha
NIM.18610114

MOTO

"Everyone fails at who they're supposed to be. A measure of a person, of a hero, is how well they succeed at being who they are." - Frigga Queen of Asgard

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Nugroho Rudy Hermawanto dan Wiwin Suhermin, juga teman dan keluarga yang selalu mendoakan, memberi semangat, nasihat dan kasih sayang yang tak terhingga. Sehingga menjadikan alasan bagi penulis untuk selalu semangat dalam berproses.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M.Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberi bimbingan, arahan, perbaikan serta yang membangun demi kebaikan proposal skripsi ini.
5. Juhari, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Dr. Usman pagalay, M.Si, selaku Penguji Utama dalam Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis.
7. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi
8. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, Terimakasih atas segala ilmu yang diberikan dan atas segala bimbingannya.
9. Orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan doa, semangat, motivasi, kasih sayang, serta pengorbanan materi dan watu kepada penulis.

10. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika 2018, telah berjuang bersama dan saling mendukung satu sama lain, terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah ssaat menuntut ilmu bersama.
11. Seluruh teman-teman seperjuangan yang telah memberikan do'a, bantuan, dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca maupun bagi penulis serta dapat dijadikan sebagai penambah wawasan ilmu matematika terutama dalam bidang matematika terapan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 24 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK.....	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	6
2.1 Teori Pendukung.....	6
2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Biasa	6
2.1.2 Nilai Eigen	8
2.1.3 Matriks Jacobi.....	9
2.1.4 Titik Tetap Atau Titik Keseimbangan	10
2.1.5 Linierisasi	11
2.1.6 Radius Spektral	13
2.1.7 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0).....	13
2.1.8 Bifurkasi	16
2.1.9 Jenis-Jenis Bifurkasi	16
2.1.10 Metode Runge Kutta Orde Empat	19
2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Qur'an	20
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung	21
BAB III METODE PENELITIAN	24
3.1 Jenis Penelitian	24
3.2 Pra Penelitian	24
3.3 Tahapan Penelitian.....	25
BAB IV PEMBAHASAN	26
4.1. Diagram Kompartmen.....	26
4.2 Menentukan Titik Keseimbangan	30
4.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	31
4.2.2 Titik Keseimbangan Endemik	32

4.3	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0).....	38
4.4	Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan.....	42
4.4.1	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit..	43
4.4.2	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik.....	46
4.5	Analisis Bifurkasi	51
4.5.1	Arah Bifurkasi	51
4.5.2	Simulasi Bifurkasi	52
4.6	Simulasi Numerik	53
4.6.1	Nilai Parameter	53
4.6.2	Penyelesaian Model dengan Metode Runge-Kutta Orde-4.	54
4.6.3	Simulasi	55
4.7	Hasil Simulasi Model.....	57
BAB V PENUTUP.....		61
5.1	Kesimpulan.....	61
5.2	Saran.....	63
DAFTAR PUSTAKA		64
LAMPIRAN		67
RIWAYAT HIDUP		

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Estimasi Parameter dan Nilai Awal.....	46
-----------	--	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik Persamaan Diferensial Logistik.....	8
Gambar 4.1	Diagram Kompartmen (<i>Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased</i> - Patogen di lingkungan) SIHDP.....	26
Gambar 4.2	Bifurkasi Mundur $\beta_1 = 0.67, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4$	52
Gambar 4.3	Bifurkasi Maju $\beta_1 = 0.67, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4$	52
Gambar 4.4	Data WHO dari Wabah 2019 dan 2020 di Kivu Utara dan Selatan.....	54
Gambar 4.5	Simulasi Sistem pada Persamaan (4.2) hingga (4.6) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$	57
Gambar 4.6	Simulasi Sistem pada Persamaan (4.3) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$	58
Gambar 4.7	Simulasi Sistem pada Persamaan (4.2) hingga (4.6) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$	59
Gambar 4.8	Simulasi Sistem pada Persamaan (4.3) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$	59

DAFTAR SIMBOL

$S(t)$	: Jumlah individu yang rentan terhadap populasi virus ebola pada waktu t
$I(t)$	: Jumlah individu yang terinfeksi oleh populasi virus ebola pada waktu t
$H(t)$	: Jumlah individu yang dirawat dirumah sakit pada waktu t
$D(t)$	: Jumlah orang yang meninggal terhadap populasi virus ebola pada waktu t
$P(t)$	: Jumlah nilai kompartmen untuk patogen di lingkungan pada waktu t
π	: Laju Rata-rata kelahiran atau migrasi yang konstan
Λ	: Laju Rata-rata rentan pada individu yang terinfeksi virus ebola
σ_1	: Laju Rata-rata individu yang terinfeksi dan pulih
σ_2	: Laju Rata-rata individu yang melakukan rawat inap dan dapat menular
σ_3	: Laju individu yang meninggal karena terinfeksi
η_1	: Laju rata-rata individu yang terinfeksi dan dapat menular
η_2	: Laju rata-rata individu yang terinfeksi dan meninggal
γ_1	: Laju rata-rata individu yang melakukan rawat inap dan dapat pulih
γ_2	: Laju individu yang melakukan rawat inap dan meninggal karena virus ebola
ρ	: Laju pemakaman individu meninggal secara aman
α_1	: Laju rata-rata individu terinfeksi ebola menumpahkan patogen ke lingkungan
α_2	: Laju rata-rata pasien yang meninggal terjangkit ebola menumpahkan patogen ke lingkungan
θ	: Laju rata-rata penghapusan patogen ke lingkungan
μ	: Laju kematian alami rata-rata individu

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Nilai Pada k_1 sampai k_4 , l_1 sampai l_4 , m_1 sampai m_4 , n_1 sampai n_4 , o_1 sampai o_4
Lampiran 2	Mensubstitusikan Nilai k_1 sampai k_4 , l_1 sampai l_4 , m_1 sampai m_4 , n_1 sampai n_4 , o_1 sampai o_4 pada Lampiran 2 kedalam Persamaan (4.25)
Lampiran 3	Script Maple untuk menghitung Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar
Lampiran 4	M-File Untuk Menentukan Grafik Endemik dari Model Matematika Metapopulasi Penyebaran Virus Ebola

ABSTRAK

Nugraha, Anastasia Angie, 2022. **Analisis Kestabilan Model Matematika Meta Populasi Penyebaran Virus Ebola**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Analisis Kestabilan, Analisis perilaku, Fungsi Ketakutan, Runge Kutta Orde-4, Virus Ebola.

Penelitian ini membahas tentang analisis kestabilan model matematika meta populasi penyebaran Virus Ebola. Populasi diklasifikasikan menjadi lima variabel yakni Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased–Patogen (SIHDP). Model matematika yang terbentuk hanya sistem persamaan diferensial biasa orde satu bergantung waktu dengan lima variabel. Model tersebut kemudian dicari titik kesetimbangannya dan ditentukan sifat kestabilan lokal setiap titik. Dua titik kesetimbangan dari model ini yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Kemudian, dilakukan linierisasi di sekitar setiap titik kesetimbangan untuk mendapatkan syarat kestabilan lokal dengan menggunakan parameter yang diberikan. Substitusi nilai parameter sesuai data Kivu Utara dan Selatan pada jacobian yang dievaluasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan lima nilai eigen yang mana salah satunya bernilai positif. Substitusi nilai parameter sesuai data Kivu Utara dan Selatan pada jacobian yang dievaluasi di sekitar titik kestabilan endemik menghasilkan lima nilai eigen dengan bagian riil negatif. Analisis Numerik pada penelitian ini akan menggunakan Runge Kutta orde-4. Simulasi pada penelitian ini akan menentukan $\beta_1 = 0.67 \neq 0$ juga $\beta_1 = 0$ pada individu yang terinfeksi, dimana efek ketakutan tersebut berpengaruh pada jumlah populasi yang berinteraksi oleh patogen di lingkungan, dengan nilai yang semakin kecil jika $\beta_1 = 0$.

ABSTRACT

Nugraha, Anastasia Angie, 2022. **The Analysis of the Stability of the Mathematical Model of Metapopulation Spread of the Ebola Virus.** Thesis. Department of Mathematics , Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Juhari, M.Si.

Keywords: Stability Analysis, Behavioral Analysis, Fear Function, Runge Kutta Order-4, Ebola Virus.

The research discussed the stability analysis of the meta mathematical model of the ebola virus spread. The population is classified into five variables of the Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased–Patogen (SIHDP). The only thing that makes up a mathematical model is a common differential equations system of the one order for a time of five variables. The model is then searched for a spot of equilibrium and defined the local stability properties of every dot. The two points of equilibrium between this model, namely the point of sickness free equilibrium and endemic equilibrium. Then, linierization around every point of equilibrium is used for local stability requirements. Substitution parameters match the parameters of north and south Kivu data on jacobian evaluated around the disease-free equilibrium point produces five eigen values which one is of positive value. Substitution parameters according to north and south Kivu data on jacobian evaluated around endemic stability results in five ethically negative. Numerical analysis of this study will use Runge Kutta 4^{th} order. The simulations on this study obtained $\beta_1 = 0.67 \neq 0$ and $\beta_1 = 0$ on infected individuals, where the effects of fear affect the number of populations that interact with pathogens in the environment, with increasing value if $\beta_1 = 0$.

مستخلص البحث

نوغراها، أناستاسيا أنجي. ٢٠٢٢. تحليل استقرار نودج الرياضيات السكان الفوقية لانتشار فيروس الإيبولا. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم التكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الدكتور هني ويدساني، الماجستير؛ (٢) الماجستير جوهاري، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: تحليل الاستقرار، نموذج الرياضيات السكان الفوقية لانتشار فيروس الإيبولا، رونج كوتا ترتيب-4.

ناقش البحث تحليل استقرار النموذج الرياضي التلوي لانتشار فيروس الإيبولا. يتم تصنيف السكان إلى خمسة متغيرات من الحساسية - المصابة - المستشفيات - المتوفاة - باتوجين. الشيء الوحيد الذي يشكل نموذجًا رياضيًا هو (SIHDP) نظام معادلات تفاضلية مشترك من رتبة واحدة لزم خمسة متغيرات. ثم يتم البحث عن النموذج عن بقعة من التوازن وتحديد خصائص الاستقرار المحلية لكل نقطة. نقطتنا التوازن بين هذا النموذج، نقطة التوازن الخالي من المرض والتوازن المستوطن. بعد ذلك، يتم استخدام الخطوط حول كل نقطة توازن لمتطلبات الاستقرار المحلي. تتطابق بارامترات الاستبدال مع بارامترات واحدة لها بيانات شمال وجنوب كيفو حول اليعاقبة التي تم تقييمها حول نقطة التوازن الحالية من الأمراض تنتج خمس قيم قيمة موجبة. وتؤدي بارامترات الاستبدال وفقا لبيانات شمال وجنوب كيفو عن اليعاقبة التي جرى تقييمها حول الاستقرار ستحدد عمليات .رونج كوتا ترتيب-4 المتوطن إلى خمسة نتائج سلبية أخلاقيا. سيستخدم التحليل العددي لهذه الدراسة على الأفراد المصابين، حيث تؤثر آثار الخوف على عدد $\beta_1 = 0$ و $\beta_1 = 0.67 \neq 0$ المحاكاة في هذه الدراسة $\beta_1 = 0$. السكان الذين يتفاعلون مع مسببات الأمراض في البيئة، مع زيادة القيمة إذا

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Virus Ebola ialah penyakit pada yang menjangkit manusia diakibatkan oleh Virus Ebola. Virus Ebola pertama kali timbul pada tahun 1976, virus ini bernama Zaire Ebola Virus setelah negara Zaire (sekarang Republik Demokratik Kongo). Tanda-tanda terjangkitnya virus ialah pada dua hari sampai tiga minggu pertama. Diawali dengan tanda-tanda sakit tenggorokan, demam, sakit kepala, serta nyeri otot. Kebanyakan disertai dengan diare, mual, dan muntah, yang kemudian diikuti oleh menurunnya fungsi liver dan ginjal. Terdapat kasus terbaru pada 7 Februari 2021, dengan spesies Zaire ebolavirus yang memiliki jumlah kasus sebanyak 12 kasus dengan jumlah kematian dan persentase kasus fatal yang dilaporkan sebanyak 6 (50%) (WHO, 2014).

Virus Ebola merebak di dua tempat sekaligus pada tahun 1976, yakni di wilayah Republik Demokratik Kongo dan Sudan Selatan. Wabah pertama terjadi di sebuah desa di dekat sungai Ebola. Seluruh warga desa tepatnya di desa Yambuku memanfaatkan sungai untuk kehidupan sehari-hari (Baseler, 2017). Satu-satunya populasi inang yang dipertimbangkan dalam model ini adalah populasi manusia. Hewan tidak dianggap sebagai inang dari Virus Ebola karena, pada kenyataannya hewan liar seperti monyet, kera hidup di hutan yang jauh dari habitat manusia, sehingga kontak antara manusia dan hewan hampir tidak ada. Faktor ketakutan individu rentan terhadap Virus Ebola akan mengurangi peluang interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi, dirawat di rumah sakit dan meninggal.

Pemodelan matematika telah berkontribusi pada penyelidikan dinamika penyakit, untuk memahami bagaimana ia berkembang. Terdapat penelitian lain yang membahas pemodelan dampak karantina selama wabah penyakit virus Ebola (Attila Denes. 2019). Dengan menggunakan model pada Jumlah penduduk terhadap waktu t , dilambangkan dengan $N(t)$ dibagi menjadi populasi dan orang yang dikarantina (dilambangkan dengan $N_Q(t)$) dan yang tidak dikarantina (dilambangkan dengan $N_Q(t)$, sehingga $N(t) = N_Q(t) + N_Q(t)$). Jumlah penduduk yang dikarantina pada waktu tersebut dibagi menjadi mereka yang rentan ($S_Q(t)$), terpapar ($E_Q(t)$; yaitu terinfeksi tetapi belum menular) dan simptomatik ($I_Q(t)$).

Studi lain yang telah dikembangkan yakni dengan memodelkan wabah Ebola. Menggunakan model (*Susceptible-Infectious-Infected Deceased-Recovered*) deterministik yang untuk menyelidiki penyebaran, persistensi, dan kekambuhan wabah Penyakit Virus Ebola (EVD) di Afrika (Aqsa Nazir, 2020). Penelitian ini belum mengakomodir patogen di lingkungan padahal peluang patogen di lingkungan yang tertinggal terdapat seperti di tempat tidur atau pakaian untuk menginfeksi individu rentan.

Beberapa penelitian lain yakni dengan memodelkan wabah Ebola pada tahun 2021 menggunakan model SEIR (A.M Rohmah, 2021). Dalam model ini populasi dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi Rentan (S), subpopulasi Terkena (E), Subpopulasi Terinfeksi (I), dan subpopulasi Sembuh (R). Perubahan setiap subpopulasi dipengaruhi oleh interaksi antara individu yang rentan dan individu yang terinfeksi atau (S_i, I_i) dengan $i = 1, 2$. Penelitian yang dilakukan pada tahun 2021 oleh Rohma memiliki kekurangan bahwa perlunya untuk

mempertimbangan patogen yang ada pada lingkungan sehingga individu yang rentan lebih waspada terkait penyebab terinfeksi.

Dari beberapa hasil studi yang dilakukan oleh peneliti dapat kita ketahui bahwa semua peristiwa yang ada di dunia ini seperti kehidupan dan kematian telah diatur oleh Allah SWT. Kehidupan yang datang tidak hanya manusia, tumbuhan, dan hewan. Melainkan juga termuat pada penyakit virus yang ada di muka bumi. Hal ini merujuk pada firman Allah SWT dalam QS. Al-baqarah: 243 (Al-qur'an Terjemahan, 2015)

Artinya: “Tidakkah kamu memperhatikan orang-orang yang keluar dari kampung halamannya, sedang jumlahnya ribuan karena takut mati?. Lalu Allah Swt berfirman kepada mereka, “Matilah kamu!” Kemudian Allah menghidupkan mereka. Sesungguhnya Allah memberikan karunia kepada manusia, tetapi kebanyakan manusia tidak bersyukur.”

Melalui penjelasan arti pada ayat ini dijelaskan bahwa ada segerombol orang yang keluar dari wilayahnya dikarenakan takut tertular wabah penyakit, dan dari rasa ketakutan ini membuat mereka waspada sehingga karunia yang Allah SWT berikan menyertai mereka. Disitulah dapat memberi gambaran pada para peneliti terkait. Dari uraian pada QS. Al-Baqarah: 243. Di dalam penelitian ini penulis mengusulkan model ebola dengan rasa takut, yang mempertimbangkan patogen di lingkungan dengan tujuan untuk mengukur efek ketakutan dan transmisi lingkungan pada virus ebola.

1.2 Rumusan Masalah

Menurut uraian latar belakang, maka rumusan masalah yang diambil pada penelitian ini ialah:

1. Bagaimana model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP) pada penyebaran penyakit Virus Ebola?

2. Bagaimana analisa dinamik solusi model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP) penyebaran penyakit Virus Ebola?
3. Bagaimana solusi numerik dari model penyebaran Virus Ebola dengan kompartmen *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka tujuan pada penelitian ini yaitu:

1. Untuk mengetahui bagaimana model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP) pada penyebaran penyakit Virus Ebola.
2. Untuk mengetahui bagaimana analisa dinamik solusi model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP) penyebaran penyakit Virus Ebola.
3. Untuk mengetahui bagaimana solusi numerik dari model penyebaran Virus Ebola dengan kompartmen *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP).

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan mengenai konstruksi model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP) sehingga dapat menjadi acuan penelitian mendatang.
2. Menambah pengetahuan mengenai analisis dinamik model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased*-Patogen (SIHDP) terhadap meta populasi

pada penyakit virus ebola, sehingga bisa menambah khazanah ilmu matematika dan implementasinya.

3. Memberikan ilustrasi mengenai solusi numerik model *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased–Patogen* (SIHDP) dan perilaku jangka panjang sehingga diharapkan dapat dijadikan rujukan oleh tenaga medis dan pemangku kebijakan.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini dibuat agar pembahasan skripsi lebih terarah, yaitu diantaranya:

1. Model meta populasi didasarkan oleh dengan rasa takut, yang mempertimbangkan patogen di lingkungan.
2. Pada penelitian ini individu yang lahir masuk ke kelas rentan karena belum ada penelitian yang menunjukkan bahwa virus ebola ditularkan dari ibu hamil ke dalam kandungan.
3. Penelitian ini mempertimbangkan patogen di lingkungan dengan tujuan untuk mengukur efek ketakutan dan transmisi lingkungan pada dinamika Penyakit Virus Ebola.
4. Pada penelitian ini hanya ada satu strain virus ebola yang dikaji yakni Zaire Ebola Virus.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, dan juga dapat mengandung fungsi itu sendiri dan suatu konstanta. Turunan yang dibentuk oleh persamaan diferensial membentuk jenis dan penjelasan dari persamaan diferensial itu sendiri. Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial (Prayudi, 2006). Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang pada suku-sukunya memiliki turunan (diferensial) parsial yakni turunan terhadap lebih dari satu variabel bebas. Sedangkan persamaan diferensial biasa adalah fungsi yang tidak diketahui atau variabel dependen yang bergantung hanya pada satu variabel bebas. Jika $y(t)$ merupakan fungsi dari suatu variabel, maka t disebut variabel bebas, y disebut variabel terikat, dan ODE dapat dinyatakan dalam bentuk dibawah ini (Purcell, 1990).

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Adapun jenis solusi persamaan diferensial biasa, yakni solusi implisit dan solusi eksplisit. Dimana solusi implisit merupakan solusi persamaan diferensial biasa yang mana variabel bebas dengan variabel tidak bebas tidak dapat dibedakan secara jelas, biasa ditulis

$$F(t, y, \frac{dy}{dt}) = 0$$

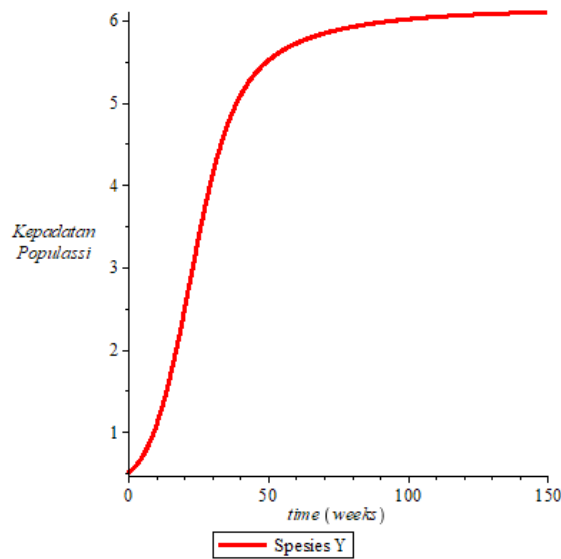
sedangkan solusi eksplisit yakni solusi persamaan diferensial biasa dengan fungsi yang mana variabel bebas dan variabel tak bebas dapat dibedakan secara jelas, bisa ditulis

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Adapula persamaan diferensial logistik, Model populasi logistik adalah model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup. Dengan demikian model ini menjelaskan suatu ekosistem dengan suatu batas kemampuan menampung sejumlah populasi. Jika kepadatan populasi masih di bawah ambang batas ekosistem maka pertumbuhan populasi bernilai positif dalam arti masih terjadi pertambahan populasi. Namun jika sudah di atas ambang batas maka pertumbuhan populasi bernilai negatif dalam arti akan terjadi penurunan populasi. Bentuk umum persamaan diferensial logistik adalah:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

Persamaan diatas menggambarkan bahwa pada saat y sangat kecil dibandingkan dengan K , maka $\frac{y}{K}$ mendekati 0 sehingga $\frac{dy}{dt} \approx ky$. Hal ini berarti bahwa pertumbuhan y mendekati eksponensial. Namun, jika $y \rightarrow K$ (Populasi mendekati kapasitas tampungnya), maka $\frac{y}{K} \rightarrow 1$ sehingga $\frac{dy}{dt} = 0$, hal ini menunjukkan bahwa pertumbuhan semakin melambat.



Gambar 2.1 Grafik Persamaan Diferensial Logistik

Pada persamaan diferensial juga terdapat teorema yang menjamin ketunggalan sebuah sistem yakni:

Teorema 1:

Jika terdapat fungsi p dan q yang kontinu pada interval terbuka $I: \alpha < t < \beta$ yang memuat titik $t = t_0$ maka terdapat fungsi unik yakni $y = \phi(t)$ yang memenuhi persamaan diferensial.

$$y' + p(t)y = g(t)$$

untuk setiap t dan I di dan yang memenuhi kondisi awal.

$$y(t_0) = y_0$$

dimana y_0 adalah nilai awal yang ditentukan secara arbitrer Teorema 1 nantinya akan digunakan untuk menunjukkan model solusinya eksis dan tunggal pada Λ (Edwards, Penney, 2014)

2.1.2 Nilai Eigen

Misalkan A matriks $n \times n$, serta x merupakan vektor bukan-nol di R^0 , maka x merupakan vektor eigen asal A , dan bila Ax ialah kelipatan skalar berasal dari x

yaitu $Ax = \lambda x$, bagi skalar sebarang λ . Nilai eigen dari A ialah Skalar λ , dan x disebut sebagai vector eigen dari A yang terkait λ .

Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks $A_{n \times n}$ maka,

$$Ax = \lambda x \text{ sebagai } Ax = \lambda I$$

atau ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.6)$$

Agar λ bisa menjadi nilai eigen, harus ada satu solusi tidak nol dari persamaan (2.6).

Persamaan (2.6) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) diklaim menggunakan persamaan karakteristik matriks A . Skalar-skalar yang memenuhi persamaan (2.7) dianggap nilai-nilai eigen A (Anton, 2000).

2.1.3 Matriks Jacobi

Matriks jacobini merupakan matriks dari order pertama derivative parsial dari vektor nilai fungsi. Misalkan $F: R^n \rightarrow R^m$ adalah fungsi dari ruang Euclidean n ke ruang Euclidean m . Fungsi seperti ini diberikan oleh komponen m maka $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$. Derivatif parsial dari semua fungsi (jika ada) dapat dibentuk dalam $m \times n$ matriks. Matriks jacobian J dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriks ini juga dilambangkan dengan $J_F = (x_1, \dots, x_n)$ dan $\frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ (Anton, 2004).

2.1.4 Titik Tetap Atau Titik Keseimbangan

Titik tetap atau titik keseimbangan adalah titik yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Ketika $t = 1, 2, 3, \dots, n$ nilai titik ekuilibrium tidak berubah atau tetap. Terdapat persamaan diferensial biasa orde satu linier dan non homogen:

$$y' = 0$$

sehingga

$$y_h(t) = C_1$$

$$y' = Ay - By^2 \quad (2.8)$$

sehingga solusi yang didapatkan

$$y' = \frac{dy}{dt} = y(A - By)$$

$$\frac{1}{y(A - By)} = \frac{p}{y} + \frac{q}{A - By} = \frac{p(A - By) + qy}{y(A - By)}$$

$$\frac{pA - y(pB - q)}{y(A - By)}$$

misalkan

$$pA = 1 \rightarrow p = \frac{1}{A}$$

$$pB - q = 0 \rightarrow q = \frac{1}{A}B \rightarrow q = \frac{B}{A}$$

maka

$$\frac{\frac{1}{A}}{y} + \frac{\frac{B}{A}}{A - By} = \frac{1}{y(A - By)}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(A - By)$$

$$\int \frac{1}{y(A - By)} dy = \int dt$$

$$\int \frac{1}{y} + \frac{\frac{B}{A}}{A - By} dy = t + C_1$$

$$\int \frac{1}{A} \ln|y| + \frac{B}{A} \ln \left| \frac{By - A}{A} \right| = t + C_1$$

$$e^{\frac{1}{A} \ln|y| + \frac{B}{A} \ln \left| \frac{By - A}{A} \right|} = e^{t+C_1}$$

$$\frac{|y|}{A} + \frac{B}{A} \left| \frac{By - A}{A} \right| = e^{t+C_1}$$

$$|y| = \frac{B}{A} \left| \frac{By - A}{A} \right| e^{t+C_1}$$

$$y(t) = C_1 e^{-At} + \left(\frac{B}{A} \right)^{-1}$$

$$y(t) = \frac{1}{C_1 e^{-At} + \left(\frac{B}{A} \right)}$$

Dapat dilihat bahwa pada persamaan (2.8) yang menggunakan metode oprasional bahwa variabel bebas t tidak terjadi secara eksplisit, maka persamaan diferensial biasa dimana t tidak muncul secara eksplisit disebut persamaan diferensial autonomus yang berbentuk:

$$y' = f(y) \quad (2.9)$$

Persamaan diatas memiliki solusi konstan, yang disebut dengan solusi kesetimbangan atau titik kesetimbangan. Solusi titik kesetimbangan dari (2.9) diperoleh saat $y' = 0$ kondisi ini ekuivalen dengan $f(y) = 0$ (Erwin, 2011).

2.1.5 Linierisasi

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan non-linier dengan persamaan linier. Menurut Hardiningsih (2010), linearitas digunakan untuk melengkapi sistem independen yang berupa:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, y,)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \quad (2.10)$$

Dimana f dan g adalah tidak linier. Jika (x_0, y_0) adalah titik kritis dari system (2.10) maka:

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$g(x_0, y_0) = 0$$

Selanjutnya akan dicari pendekatan system linier jika (x, y) terhadap titik (x_0, y_0) dengan melakukan ekspansi menurut deret taylor di sekitar titik (x_0, y_0) dengan menghilangkan suku tak liniernya seperti berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Bila dilakukan substitusi $x - x_0 = u$ dan $y - y_0 = v$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, pada keadaan setimbang $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt}(\vec{X}) = A_0 \vec{X} \quad (2.12)$$

dimana

$$\vec{X} = (u, v)^T$$

sehingga

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} \quad (2.13)$$

Dimana $A = \mathbf{A}_0$ pada $x = x_0, y = y_0$. Matriks (2.12) disebut matriks Jacobian, dimana ukuran matriks tergantung pada jumlah persamaan yang menyusun sistem persamaan diferensial, akar-akar dari akar karakteristik akan menentukan stabilitas persamaan diferensial linier. Sedangkan jika persamaan diferensial (2.12) tidak dapat dibentuk menjadi persamaan (2.13) maka sistem persamaan diferensial (2.12) disebut sistem persamaan diferensial non linier (Hardiningsih, 2010).

2.1.6 Radius Spektral

Radius Spektral merupakan besaran penting untuk masalah nilai eigen. Misalkan Radius Spektral pada matriks A diberikan oleh

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

dimana maksimum diambil nilai eigen keseluruhan, maka kita harus Ingat bahwa jika $\lambda = \alpha + i\beta$ adalah bilangan kompleks maka $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (Lee, 2020).

2.1.7 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) yang dilambangkan dengan R_0 didefinisikan menjadi bilangan yang menyatakan rata-rata individu baru yang bisa terinfeksi sebab adanya individu yang terinfeksi masuk ke pada populasi individu rentan (Giesecke, 2017). *The Next Generation Matrix* ,

$$K = FV^{-1}$$

merupakan bilangan non negatif dan oleh karena itu memiliki nilai eigen nonnegatif,

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

sehingga tidak ada yang lain nilai eigen dari K dengan modulus lebih besar dari R_0 dan ada nonnegatif ω terkait dengan R_0 (Berman dan Plemmons, 1979). Vektor eigen dalam arti tertentu adalah distribusi individu yang terinfeksi yang menghasilkan jumlah terbesar, R_0 infeksi sekunder per generasi. Dengan demikian, R_0 dan vektor eigen ω terkait secara tepat mendefinisikan infektif tipikal dan bilangan reproduksi dasar dapat dengan tepat didefinisikan sebagai radius spektral dari matriks generasi berikutnya, K . Jari-jari spektral a matriks K , dilambangkan $\rho(K)$, adalah modulus maksimum dari nilai eigen dari K . Jika K tidak dapat direduksi, maka R_0 adalah nilai eigen sederhana dari K . Namun, jika K dapat direduksi, yang sering terjadi pada penyakit dengan banyak *strains*, maka K mungkin memiliki beberapa vektor eigen positif yang sesuai untuk nomor reproduksi untuk setiap strain bersaing penyakit. Karena itu,

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.14)$$

dimana FV^{-1} matriks generasi berikutnya untuk model dan kami akan menetapkan R_0 sama dengan jari-jari spektral FV^{-1} dan $\rho(A)$ menunjukkan radius spektral matriks A (Berman dan Plemmons, 1979).

Dalam epidemiologi, matriks generasi berikutnya digunakan untuk menurunkan nomor reproduksi dasar, untuk model kompartemen penyebaran penyakit menular. Dalam dinamika populasi digunakan untuk menghitung bilangan reproduksi dasar untuk model populasi terstruktur (Zhao, Xiao-Qiang, 2017). Ini juga digunakan dalam model percabangan multi-tipe untuk komputasi analog (Mode, Charles J, 1971). Untuk menghitung bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan matriks generasi berikutnya, seluruh populasi dibagi menjadi N kompartemen di mana terdapat $m < n$ kompartemen terinfeksi. Misalkan $x_i, i =$

$1, 2, 3, \dots, m$ adalah jumlah individu yang terinfeksi dalam i^{th} kompartemen terinfeksi pada waktu t . Sekarang, model epidemi adalah

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(X) - V_i(x)$$

dimana

$$V_i(x) = [V_i^-(x) - V_i^+(x)]$$

Dalam persamaan di atas, $F_i(x)$ mewakili tingkat kemunculan infeksi baru di kompartemen i . V_i^+ mewakili laju perpindahan individu ke dalam kompartemen i dengan cara lain, dan $V_i^-(x)$ mewakili laju perpindahan individu keluar dari kompartemen i . Model di atas juga dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - V(x)$$

di mana

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))^T$$

dan

$$V(x) = (V_1(x), V_2(x), \dots, V_m(x))^T$$

Biarkan x_0 menjadi keseimbangan bebas penyakit. Nilai matriks Jacobian $F(x)$ dan $V(x)$ adalah:

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$DV(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

di sini, F dan V adalah matriks $m \times m$, yang didefinisikan sebagai $F = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)$

dan $V = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x_0)$. Sekarang, matriks FV^{-1} dikenal sebagai *next generation matrix*.

Modulus terbesar dari nilai eigen atau radius spektral FV^{-1} adalah bilangan reproduksi dasar model.

2.1.8 Bifurkasi

Terdapat persamaan:

$$\frac{dy}{dt} = f(a, y)$$

Dimana a adalah persamaan yang merupakan billangan riil, titik kritis (solusi kesetimbangan) biasanya bergantung pada nilai dari a . Seiring dengan kenaikan atau penurunan yang terus-menerus, sering terjadi bahwa pada nilai tertentu, disebut titik bifurkasi. Diagram bifurkasi memberikan gambaran tentang bagaimana solusi ekuilibrium ini bergantung pada rasio reproduksi dasar R_0 , dimana R_0 didefinisikan sebagai jumlah kasus sekunder yang disebabkan oleh satu kasus terinfeksi yang memasuki populasi bebas penyakit pada titik keseimbangan. Umumnya ada perubahan dalam perilaku kualitatif sistem ketika $R_0 = 1$ dimana keseimbangan bebas penyakit bercabang menjadi cabang yang mewakili keseimbangan endemik dan cabang selanjutnya dari bebas penyakit. Titik pada diagram ini disebut titik bifurkasi, dan kurva yang memancar darinya disebut kurva bifurkasi. Kebanyakan model epidemi sederhana, tidak ada keseimbangan endemik yang muncul saat $R_0 > 1$. Dalam kasus ini ketika kita berjalan pada kurva bifurkasi dari titik bifurkasi, tingkat infeksi akan meningkat dengan meningkatnya R_0 . Hal ini disebut dengan bifurkasi mundur (Edward, Penney, 2014).

2.1.9 Jenis-Jenis Bifurkasi

A. *Saddle-node Bifurcation*

Istilah 'bifurkasi *saddle-node*' paling sering digunakan mengacu pada sistem dinamik kontinu. Dalam sistem dinamik diskrit, bifurkasi yang sama sering

disebut bifurkasi lipat. Nama lain adalah bifurkasi langit biru yang mengacu pada penciptaan dua titik tetap secara tiba-tiba (Strogatz, 1994).

Contoh persamaan diferensial dengan bifurkasi *saddel-node* adalah:

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2$$

$$0 = r + x^2$$

$$\int \frac{1}{r + x^2} dx = \int dt$$

$$\int \frac{1}{r + x^2} dx$$

$$\text{misalkan } u = \frac{x}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{r}} \Leftrightarrow \sqrt{r} du = dx$$

sehingga

$$\int \frac{1}{r + x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{r + u^2} \sqrt{r} du$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \arctan|u| + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \arctan \left| \frac{x}{\sqrt{r}} \right| + C$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{r}} \arctan \left| \frac{x}{\sqrt{r}} \right| + C$$

$$t\sqrt{r} - C = \arctan \left| \frac{x}{\sqrt{r}} \right|$$

$$\frac{x}{\sqrt{r}} = \tan(t\sqrt{r} - C)$$

$$x = \sqrt{r} \tan(t\sqrt{r} - C), C \in \mathbb{R}$$

Disini x adalah variabel status dan r adalah parameter bifurkasi. catatan bahwa:

1. Jika $r < 0$ maka ada dua titik kesetimbangan di titik kesetimbangan stabil di $-\sqrt{-r}$ dan titik tidak stabil di $+\sqrt{r}$.
2. Pada $r = 0$ terdapat tepat satu titik kesetimbangan. Pada titik ini titik tetap tidak lagi hiperbolik. Dalam hal ini titik tetap tersebut disebut titik tetap *saddle-node*.
3. Jika $r > 0$ maka tidak ada titik kesetimbangan (Kuznetsov, 1998).

B. Transcritical Bifurcation

Transcritical Bifurcation adalah salah satu bifurkasi di mana titik tetap ada untuk semua nilai parameter dan tidak pernah hancur. Namun, titik tetap tersebut menukar stabilitasnya dengan titik tetap lainnya karena parameternya bervariasi (Strogatz, 2001). Dengan kata lain, baik sebelum dan sesudah bifurkasi, ada satu titik tetap yang tidak stabil dan satu titik tetap yang stabil. Namun, stabilitas mereka dipertukarkan ketika mereka bertabrakan. Jadi titik tetap yang tidak stabil menjadi stabil dan sebaliknya.

Contoh persamaan diferensial dengan bifurkasi *transcritical* adalah:

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^2$$

$$0 = rx + x^2$$

$$= x(r + x)$$

$$x = 0, x = r$$

Dalam persamaan ini kita menggunakan r dan x menjadi positif dan negatif. dia titik tetap berada di $x = 0$ dan $x = r$. Jika parameter r adalah negatif, maka titik tetap di $x = 0$ stabil dan titik tetap $x = r$ tidak stabil. namun untuk $r > 0$, titik di $x = 0$ tidak stabil dan titik di $x = r$ stabil. Jadi bifurkasi terjadi di $r = 0$. Sehingga bifurkasi transkritikal nantinya akan di gunakan dalam penelitian ini dikarenakan terdapat satu titik tetap dan stabil pada bifurkasi maju.

2.1.10 Metode Runge Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde dua dan orde tiga. Oleh karena itu, Metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta orde empat diturunkan dengan cara yang sama seperti metode Runge-Kutta orde dua untuk nilai $n = 4$. Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagaimana pada persamaan berikut

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (2.15)$$

dengan

$$k_1 = f(t_i, x_1)$$

$$k_2 = f\left(t_i, \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i, \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(t_i, h, x_1 + k_3h)$$

Metode Runge-Kutta orde empat ini mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi daripada metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Metode Runge-Kutta orde empat mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kecil kesalaham pembulatan (Boyce, DiPrima, 2008).

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Qur'an

Islam mengatur segala aspek kehidupan manusia. Semua ciptaan Allah telah terangkum dalam lingkungan, menurut tafsir Adam Aalmaraghi, lingkungan adalah segala sesuatu yang diciptakan Allah yang meliputi kehidupan manusia, yaitu langit, bumi, bulan, bintang, sesama manusia, binatang, dan lain-lain. Allah SWT menciptakan segala sesuatu sesuai dengan hukum yang ditetapkan oleh-Nya, sunnatullah. Karena segala sesuatu diciptakan oleh Allah SWT dengan tujuan dan kemampuan, tanpa cacat sedikitpun. Nikmat terbesar dari Allah yang dirasakan manusia adalah kesehatan. Kesehatan adalah anugrah dari Tuhan yang harus kita syukuri dengan menjaganya dan menggunakannya dengan cara yang benar. Karena kesehatan adalah syarat dari semua aktivitas utama kehidupan. (Al-Maraghi, 1993).

Nikmat Allah SWT yang paling besar bagi manusia adalah sehat. Kesehatan adalah anugrah dari Tuhan yang harus disyukuri dengan menjaga, merawat, memelihara, dan memanfaatkannya dengan sebaik-baiknya di jalan kebenaran. Karena kesehatan merupakan hal yang diperlukan untuk terselenggaranya segala jenis aktivitas manusia. Banyak individu yang mengalami perasaan tidak nyaman, antara lain perasaan tidak nyaman dalam beraktivitas, beribadah, dan lain-lain. Manusia harus mensyukuri nikmat yang diberikan Tuhan. Islam sangat memperhatikan masalah kesehatan dalam beberapa ayat Al-Qur'an dan beberapa Hadits. Sebagaimana disebutkan dalam Al-Qur'an QS. Yunus:57 (Al-qur'an Terjemahan, 2015)

Artinya: “ Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman.” (QS. Yunus:57)

Dari kutipan ayat diatas dijelaskan bahwa manusia senantiasa harus menjaga kesehatan, karena kesehatan ialah rahmat bagi orang yang beriman, dan juga salah satu nikmat Allah SWT. Dikehidupan lingkungan yang Allah SWT ciptakan tak hanya manusia yang memiliki peran, tetapi makhluk hidup lainnya seperti hewan, tumbuhan dan lain sebagainya juga memiliki peran. Hidup dilingkungan pastinya membuat kita memiliki kesinambungan seperti manusia dan hewan beserta timbal baliknya.

Wabah penyakit sebelumnya pernah terjadi pada masa Nabi Muhammad, pada masa kekhalifahan Umar bin Khattab, dengan munculnya wabah sebagai yang paling menonjol. Wabah muncul sebagai yang paling menonjol. Pada Abad Pertengahan, proses penyebarannya sangat cepat. Pada waktu yang berbeda selama perkembangannya, teori evolusi telah menyebabkan para ilmuwan menemukan banyak penyakit baru. Para peneliti membahas penyakit menular, yang dapat berupa kelainan biologis atau mikroorganisme. Meski sudah banyak penyakit yang sudah ditemukan obatnya, beberapa orang masih harus menjalani karantina. Salah satu cara untuk mengevaluasi penularan penyakit berbahaya adalah dengan mengkarantina diri sendiri. Wabah penyakit diperkirakan tidak menimbulkan kekhawatiran. Namun, selalu ada alasan dan hikmah yang terkandung dalam setiap peristiwa yang telah terjadi.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Penularan dari virus ebola dapat terjadi melalui hubungan langsung dari orang ke orang. Dalam hal ini, cairan dari tubuh orang yang terinfeksi dapat ditularkan. Cairan dari tubuh ini termasuk diare, muntah, ari liur, air mani, dan darah. Virus

Ebola tidak dapat ditularkan secara langsung melalui udara sama sekali. Myers dkk. mengatakan bahwa penularannya tidak seperti campak atau influenza (Meyers dkk, 2015). Virus Ebola memiliki cara kerja penularan kemanusia melalui kontak dekat dan kontak langsung menggunakan darah, lendir, organ maupun cairan dari bagian tubuh lainnya yang berasal dari individu yang sedang mengalami sakit atau sudah meninggal karena terinfeksi. Serta dapat ditularkan melalui bahan (contohnya, pakaian maupun tempat tidur) yang meradang atau terinfeksi oleh cairan tersebut.

Melalui penjelasan diatas dapat diketahui bahwa individu harus benar memiliki kewaspadaan akan lingkungan sekitar, karena dapat pula diketahui bahwa pada penyakit ini memiliki tingkat kematian yang tinggi sehingga individu disekitar akan memiliki rasa ketakutan yang tinggi pada individu lain yang terinfeksi. Terdapat lima variabel yang mendukung penelitian ini yakni; individu yang rentan (S). Individu yang lahir masuk ke kelas rentan terkena penyakit virus ebola, karena ibu hamil yang terinfeksi tidak menularkan virus ebola ke bayi secara vertikal, Individu yang terinfeksi (I), Individu yang dirawat dirumah sakit (H), Individu yang meninggal (D), dan patogen di lingkungan (P). Kelima variabel ini akan membentuk persamaan diferensial biasa non-linier karena variabel turunannya berderajat satu. Pada penelitian ini akan memiliki variabel dan parameter pendukungnya, dan didalam sistem yang seperti itu akan cenderung memiliki nilai yang unik dan dapat menjamin ketunggalan, sehingga nilai dari varibel itu akan menjadi persamaan diferensial biasa.

Selanjutnya akan dicari dua titik kesetimbangan yakni; titik kesetimbangan bebas virus, dimana individu yang terinfeksi (I^*) akan bernilai 0 ($I^* = 0$) sehingga nantinya tidak ada satupun individu yang terinfeksi, dan juga titik kesetimbangan

terhadap virus, yang artinya di dalam populasi selalu ada individu yang terserang penyakit, sehingga diperoleh I pada titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $I^* > 0$.

Setelahnya dilanjutkan untuk mencari bilangan reproduksi dasar dengan menentukan nilai jacobian melalui variabel terinfeksi, yakni individu yang terinfeksi itu sendiri (I^*), individu yang dirawat dirumah sakit (H^*), individu yang meninggal (D^*), dan patogen di lingkungan (P^*). Selanjutnya akan dilakukan pencarian bilangan reproduksi dasar yang nantinya digunakan untuk mengetahui saran-saran pencegahan virus untuk meperkecil nilai penyebarannya, yakni melalui nilai eigen dominan *next generation matrix*.

Kemudian dilanjutkan dengan linierisasi dengan menentukan nilai jacobin di semua variabel yang nantinya hasil yang didapatkan disubstitusikan oleh variabel terkaitnya yang dirumuskan dalam dua analisis kestabilan, yakni analisis kestabilan bebas penyakit dan analisis kestabilan endemik. Setelah didapatkan hasil maka dilanjutkan mencari nilai eigen sehingga dapat dilihat nilai kestabilannya.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan akan jenis penelitian kualitatif. Metode penelitian kualitatif lebih menekankan pada pengamatan fenomena dan lebih meneliti ke substansi makna dari fenomena tersebut. Analisis pada penelitian kualitatif sangat terpengaruh pada kekuatan kata dan kalimat yang digunakan. Begitupun ide pada penelitian kualitatif adalah pada prosesnya dan pemaknaan hasilnya (Basri, 2014). Penelitian kualitatif lebih bersifat eksploratif karena tujuannya adalah untuk menemukan ide-ide dan wawasan baru atau bahkan menghasilkan teori-teori baru. Penelitian ini berfokus pada pemahaman yang khusus dan yang khas sehingga tidak selalu berusaha untuk menggeneralisasikan temuan ke konteks lain. (Mohamed, Abdul Majid & Ahmad, 2010).

3.2 Pra Penelitian

Pra Penelitian yang dilakukan penulis ialah mengkaji beberapa jurnal, dan referensi lain yang berhubungan dengan materi penyebaran virus ebola, banyak penelitian membahas mengenai analisis dinamik penyebaran virus, tanpa mempertimbangan faktor yang mendasari penyebaran virus. Maka, pada penelitian ini penulis akan mengkaji bagaimana proses penularan terhadap meta populasi pada penyakit virus ebola di lingkungan dengan mempertimbangkan efek ketakutan pada individu.

3.3 Tahapan Penelitian

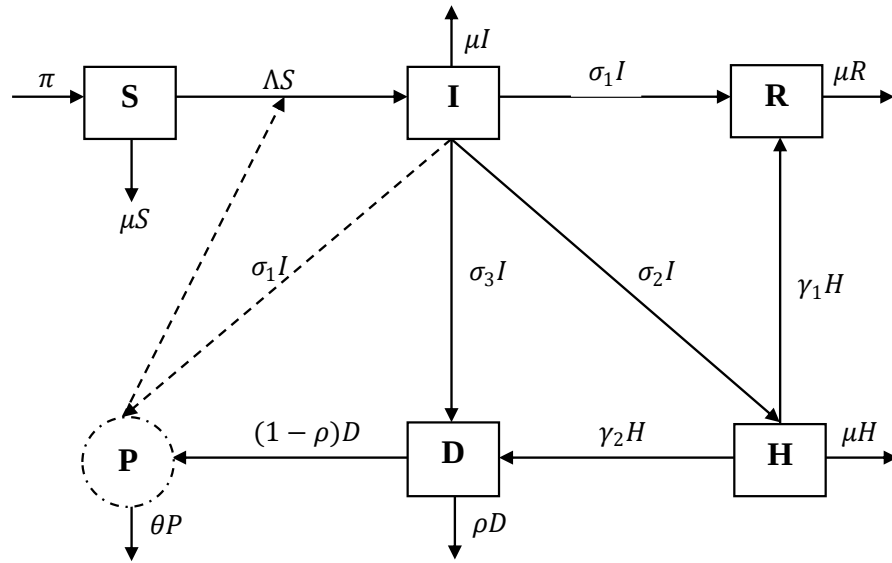
Tahapan penelitian yang dipergunakan pada penelitian ini ialah menganalisis. Langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis model matematika terhadap meta populasi pada penyakit virus ebola adalah:

- 1) Melakukan konstruksi model matematika terhadap meta populasi pada penyakit virus ebola.
- 2) Melakukan analisis kestabilan terhadap meta populasi pada penyakit virus ebola. Tahapan yang dilakukan yaitu:
 - a) Menganalisis diagram kompartmen.
 - b) Menentukan titik tetap.
 - c) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0).
 - d) Menentukan nilai eigen dominan.
 - e) Menganalisis bifurkasi.
- 3) Melakukan simulasi numerik dari model penyebaran Virus Ebola menggunakan Runge-Kutta orde 4.

BAB IV PEMBAHASAN

4.1. Diagram Kompartmen

Dalam penelitian ini, pemodelan matematika pada penyebaran penyakit Ebola menggunakan model matematika *Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased–Patogen* (SIHDP). Dengan diagram kompartemennya adalah:



Gambar 4. 1 Diagram Kompartmen (*Susceptible–Infected–Hospitalised–Deceased–Patogen* di lingkungan) SIHDP

Penulis membuat model deterministik dengan enam kompartemen independen, yaitu: rentan (S), terinfeksi (I), dirawat di rumah sakit (H), memulihkan (R), yang telah meninggal (D) dan kompartemen untuk patogen di lingkungan (P). Virus Ebola diasumsikan ditularkan baik melalui kontak orang ke orang atau individu yang bersentuhan dengan objek yang terinfeksi patogen (kontak orang ke patogen). Jika terjadi wabah Ebola di suatu komunitas atau forum, tingkat penularan dapat diasumsikan berkurang oleh ketakutan yang sebanding dengan jumlah kematian. Asumsi ini didorong oleh gagasan bahwa individu menjadi lebih berhati-hati karena mereka mengalami lebih banyak kematian akibat Virus Ebola di dalam komunitas.

Hal ini menyebabkan penurunan tingkat kontak. Penulis memodelkan tingkat ketakutan dengan parameter $\varepsilon > 0$ yang mengukur dampak ketakutan individu rentan ketika seseorang meninggal. Parameter $\varepsilon = 0$ mewakili tidak ada rasa takut sama sekali, sedangkan $0 < \varepsilon$ menunjukkan adanya tingkat ketakutan individu ketika ada seorang yang meninggal, Hal ini masuk akal untuk percaya bahwa tingkat kontak efektif akan berkurang dengan meningkatnya tingkat ketakutan sehingga,

$$\Lambda = \left(\frac{\beta_1}{K+P} \right) P + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} \quad (4.1)$$

Dimana K adalah konstanta setengah jenuh, yaitu konsentrasi patogen yang dapat menyebabkan 50% kemungkinan infeksi. Di sini, β_1 dan β_2 ialah taraf kontak efektif antara individu yang rentan serta patogen pada lingkungan dan antara individu yang rentan serta orang yang terinfeksi. Maka, $\left(\frac{\beta_1}{K+P} \right) P$ ialah Laju interaksi per 50% kejadian. Sedangkan $\frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D}$ berarti setiap sub populasi individu terinfeksi, dirawat di rumah sakit serta individu yang meninggal mereka didasari rasa takut. $\frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D}$ berarti laju rata-rata individu terinfeksi dan dapat menular di rumah sakit memiliki rasa takut, begitu pula pada $\frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D}$ dimana laju rata-rata individu yang terinfeksi dan meninggal.

Model diawali dengan individu yang lahir melalui seorang ibu yang sudah terinfeksi. Maka, individu tersebut dianggap rentan. Ada beberapa model matematika yang menjadi persamaan melalui diagram kompartmen diatas yakni perubahan nilai individu yang baru lahir akan rentan oleh virus ebola terhadap waktu dibengaruhi oleh individu yang baru lahir dari ibu yang terinfeksi (π). Hal ini dapat melalui dua proses yakni individu tersebut akan meninggal dan rentan

(μS), dan juga rentan pada individu yang terinfeksi (ΛS). Dari uraian tersebut didapatkan model dinamika individu yang rentan terhadap waktu sebagai berikut (Juga, Nyabadza, 2021):

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 I}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1 + \varepsilon D} + \mu \right) S$$

Perubahan nilai individu yang terinfeksi oleh virus ebola terhadap waktu dipengaruhi oleh individu yang rentan dan terinfeksi (ΛS) akan berkurang dengan individu yang dapat pulih ($\sigma_1 I$), individu yang terinfeksi dan kemudian dirawat di rumah sakit ($\sigma_2 I$), juga dengan individu yang meninggal karena terinfeksi ($\sigma_3 I$), dan orang yang meninggal karena penyebab alami (μI). Hal ini dapat dirangkum dengan $v_1 = \mu + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Dari uraian tersebut didapatkan model dinamika individu yang terinfeksi oleh virus ebola terhadap waktu sebagai berikut (Juga, Nyabadza, 2021):

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 I}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1 + \varepsilon D} + \mu \right) S - v_1 I$$

Perubahan nilai individu yang dirawat di rumah sakit terhadap waktu dipengaruhi oleh individu yang terinfeksi dan dirawat di rumah sakit berkurang karena orang yang dirawat di rumah sakit meninggal karena penyebab alami (μH). juga individu yang mendapatkan rawat inap kemudian dapat pulih ($\gamma_1 H$), dan juga individu yang melakukan rawat inap kemudian meninggal karena terinfeksi ($\gamma_2 H$). Hal ini dapat dirangkum dengan $v_2 = \mu + \gamma_1 + \gamma_2$. Dari uraian tersebut didapatkan model dinamika individu yang dirawat di rumah sakit terhadap waktu sebagai berikut (Juga, Nyabadza, 2021):

$$\frac{dH}{dt} = \sigma_2 I - v_2 H$$

Perubahan nilai individu yang meninggal terhadap waktu dipengaruhi oleh jumlah dari individu yang meninggal karena terinfeksi ($\sigma_3 I$), dengan individu yang melakukan rawat inap dan meninggal karena terinfeksi ($\gamma_2 H$), juga dengan individu yang meninggal dan dikuburkan atau dikarmasi dengan aman (ρD). Dari uraian tersebut didapatkan model dinamika individu yang meninggal terhadap waktu sebagai berikut (Juga, Nyabadza, 2021):

$$\frac{dD}{dt} = \sigma_3 I + \gamma_2 H - \rho D$$

Perubahan nilai kompartmen untuk patogen di lingkungan terhadap waktu ialah dipengaruhi oleh individu yang terinfeksi dan menumpahkan patogen ke lingkungan ($\alpha_1 I$) dengan individu yang telah meninggal dan menumpahkan patogen ke lingkungan sehingga dapat dibuat parameter $(1 - \rho)D$ berkurang dengan patogen dalam pembusukan di lingkungan dengan jumlah perkapita (θP). Dari uraian tersebut didapatkan model dinamika nilai kompartmen untuk patogen di lingkungan terhadap waktu sebagai berikut (Juga, Nyabadza, 2021):

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_1 I + (1 - \rho)D - \theta P$$

Diagram kompartemen bersama dengan asumsi model yang menimbulkan sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dR}{dt} = \sigma_1 I - \mu R$$

Dimana $\frac{dR}{dt}$ merupakan persamaan yang mengartikan bahwa individu sudah sembuh.

Secara ringkas model matematika SIHDP pada Virus Ebola

$\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dH}{dt}, \frac{dD}{dt}, \frac{dR}{dt}, \frac{dP}{dt}$ fungsi $R(t)$ tidak muncul secara eksplisit pada laju

pertumbuhan S, I, H, D , dan P sehingga model yang dikaji selanjutnya adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} + \mu \right) S = f_1(S, I, H, D, P) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} \right) S - v_1 I \\ &= f_2(S, I, H, D, P) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{dH}{dt} = \sigma_2 I - v_2 H = f_3(S, I, H, D, P) \quad (4.4)$$

$$\frac{dD}{dt} = \sigma_3 I + \gamma_2 H - \rho D = f_4(S, I, H, D, P) \quad (4.5)$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_1 I + (1 - \rho) D - \theta P = f_5(S, I, H, D, P) \quad (4.6)$$

Nilai awal dan parameter yang digunakan pada sistem persamaan diferensial dari model mata populasi pada penyakit virus ebola bersumber dari karya M.L Juga, F. Nyabadza, F.Chirove dengan jurnalnya yang berjudul “*An Ebola Virus Disease model with fear and environmental transmission dynamics*” .

4.2 Menentukan Titik Keseimbangan

Memilih titik tetap dibutuhkan untuk menganalisis titik kesetabilan. Titik tetap pada penelitian ini bisa diperoleh bila $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = 0, \frac{dD}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0$ di saat titik tetap diraih, maka laju pertumbuhan dari setiap persamaan akan tetap. Hal ini bisa menandakan bahwa tidak terdapat pertumbuhan populasi pada penyakit virus ebola pada individu yang rentan $S(t)$, populasi virus ebola pada individu yang terinfeksi $I(t)$, populasi virus ebola pada individu yang dirawat di rumah sakit $H(t)$, populasi virus ebola pada individu yang meninggal $D(t)$, populasi virus ebola pada kompartmen untuk patogen di lingkungan $P(t)$. Keberadaan titik-titik ekuilibrium

ialah terdapat pada model (4.2) hingga (4.6) dengan menetapkan sisi kanan sistem (4.2) hingga (4.6) ialah nol sehingga akan menjadi persamaan berikut:

$$\pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} + \mu \right) S^* = 0 \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} \right) S^* - v_1 I^* = 0 \quad (4.8)$$

$$\sigma_2 I^* - v_2 H^* = 0 \quad (4.9)$$

$$\sigma_3 I^* + \gamma_2 H^* - \rho D^* = 0 \quad (4.10)$$

$$\alpha_1 I^* + (1 - \rho) D^* - \theta P^* = 0 \quad (4.11)$$

4.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit didapat ketika tidak ada penyakit dalam populasi, agar memenuhi titik keseimbangan bebas penyakit maka tidak ada satupun individu yang terinfeksi sehingga $I^0 = 0$.

Substitusikan persamaaan (4.9) dengan $I^0 = 0$

$$\sigma_2 I^0 - v_2 H^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2(0) - v_2 H^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2(0) = v_2 H^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_2(0)}{v_2} = H^0$$

$$\Leftrightarrow 0 = H^0$$

Substitusikan persamaaan (4.10) dengan $I^0 = 0$

$$\sigma_3 I^0 + \gamma_2 H^0 - \rho D^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_3(0) + \gamma_2 H^0 - \rho D^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_3(0) + \gamma_2 H^0 = \rho D^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_3(0) + \gamma_2 H^0}{\rho} = D^0$$

$$0 = D^0$$

Substitusikan persamaaan (4.11) dengan $I^0 = 0$

$$\alpha_1 I^0 + (1 - \rho)D^0 - \theta P^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(0) + (1 - \rho)D^0 - \theta P^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(0) + (1 - \rho)D^0 = \theta P^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1(0) + (1 - \rho)D^0}{\theta} = P^0$$

$$0 = P^0$$

Substitusikan persamaaan (4.7) dengan $I^0 = 0$

$$\pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 I}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1 + \varepsilon D} + \mu \right) S^0 = 0$$

dengan $H^0, D^0, P^0 = 0$ maka didapatkan,

$$\Leftrightarrow \pi - \mu S^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{\mu} = S^0$$

maka diperoleh $H^0 = D^0 = P^0 = 0$ dan $S^0 = \frac{\pi}{\mu}$ Jadi diperoleh titik

kesetimbangan $E^0 = (S^0, I^0, H^0, D^0, P^0) = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0)$

4.2.2 Titik Keseimbangan Endemik

Titik keseimbangan endemik merupakan titik keseimbangan ketika kelas terinfeksi tak nol atau saat penyakit menyebar pada populasi. Endemik penyakit artinya di dalam populasi selalu ada individu yang terserang penyakit, sehingga diperoleh I pada titik keseimbangan endemik penyakit yaitu $I^* > 0$.

Pertama, kita cari H^* ,

$$\sigma_2 I^* - v_2 H^* = 0$$

$$\Leftrightarrow -v_2 H^* = -\sigma_2 I^*$$

$$\Leftrightarrow H^* = \frac{-\sigma_2}{v_2} I^*$$

Dengan $\frac{-\sigma_2}{v_2} I^* = \varphi_1 I^*$

Maka menghasilkan,

$$H^* = \varphi_1 I^*$$

Kedua, kita cari D^* ,

$$\sigma_3 I^* + \gamma_2 H^* - \rho D^* = 0$$

$$\Leftrightarrow -\rho D^* = -\sigma_3 I^* - \gamma_2 H^*$$

$$\Leftrightarrow -\rho D^* = -\sigma_3 I^* - \gamma_2 \varphi_1 I^*$$

$$\Leftrightarrow D^* = \frac{-\sigma_3 I^* - \gamma_2 \varphi_1 I^*}{\rho}$$

Dengan $\frac{-\sigma_3 I^* - \gamma_2 \varphi_1 I^*}{\rho}$, misalkan $\varphi_2 I^*$

Maka menghasilkan,

$$D^* = \varphi_2 I^*$$

Ketiga, kita cari P^* ,

$$\alpha_1 I^* + (1 - \rho) D^* - \theta P^* = 0$$

$$\Leftrightarrow -\theta P^* = -\alpha_1 I^* - (1 - \rho) D^*$$

$$\Leftrightarrow -\theta P^* = -\alpha_1 I^* - (1 - \rho) \varphi_2 I^*$$

$$\Leftrightarrow P^* = \frac{-\alpha_1 I^* - (1 - \rho) \varphi_2 I^*}{\theta}$$

Dengan $\frac{-\alpha_1 I^* - (1 - \rho) \varphi_2 I^*}{\theta}$, misalkan $\varphi_3 I^*$

Maka menghasilkan

$$P^* = \varphi_3 I^*$$

Untuk mencari S^* maka harus mesubtitusikan persamaan (4.8) ke titik ekuilibrium

endemik yang didapatkan pada H^*, D^*, P^*

substitusi

$$\left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} \right) S^* - v_1 I^* = 0$$

dengan

$$H^* = \varphi_1 I^*, D^* = \varphi_2 I^*, P^* = \varphi_3 I^*$$

maka,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2(I + \eta_1 H + \eta_2 D)}{1+\varepsilon D} S^* = v_1 I^* \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta_2(I + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon \varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1 \varphi_3 I^*}{K + \varphi_3 I^*} S^* = v_1 I^* \\ &\Leftrightarrow S^* = \frac{v_1 I^*}{\frac{\beta_2(1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon \varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1 \varphi_3 I^*}{K + \varphi_3 I^*}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik dilakukan dengan

mensubstitusikan S^* (4.12) dengan (4.8) dan menyederhanakan persamaan

yang dihasilkan sehingga mendapatkan polinomial sebagai berikut:

$$S^* = \frac{v_1 I^*}{\frac{\beta_2(1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon \varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1 \varphi_3 I^*}{K + \varphi_3 I^*}}$$

dengan

$$\pi - \left(\frac{\beta_2(1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon \varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1 \varphi_3 I^*}{K + \varphi_3 I^*} + \mu \right) S^* = 0$$

$$\Leftrightarrow S^* =$$

$$\frac{\pi}{\frac{\beta_2(1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon \varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1 \varphi_3 I^*}{K + \varphi_3 I^*} + \frac{v_1 I^*}{\frac{\beta_2(1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon \varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1 \varphi_3 I^*}{K + \varphi_3 I^*}}}$$

maka,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta_2 v_1 \varphi_3 (1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*) + \varepsilon v_1 \varphi_2 \varphi_3 (\mu + \beta_1) \\
&+ v_1 [K \beta_2 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + K \varepsilon \mu + (\beta_1 + \mu) \varphi_3] \\
&- \pi [\beta_2 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + \beta_1 \varepsilon \varphi_2] \\
&+ K \mu v_1 \left(1 - \frac{\pi}{\mu} \left[\beta_2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{\eta_1 \sigma_2}{v_1 v_2} + \frac{\eta_2 (\gamma_2 \sigma_2 + v_2 \sigma_3)}{\rho v_1 v_2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1}{\rho \theta K} \left(\frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2} + \frac{\rho \alpha_1 + \alpha_2 \sigma_3}{v_1} \right) \right] \right) \\
&\Leftrightarrow \beta_2 v_1 \varphi_3 (1 + \eta_1 \varphi_1 I^* + \eta_2 \varphi_2 I^*) + \varepsilon v_1 \varphi_2 \varphi_3 (\mu + \beta_1) \\
&+ v_1 [K \beta_2 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + K \varepsilon \mu + (\beta_1 + \mu) \varphi_3] \\
&- \pi [\beta_2 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + \beta_1 \varepsilon \varphi_2] + K \mu v_1 \left(1 - \frac{\pi}{\mu} - R_0 \right)
\end{aligned}$$

Buat bentuk sederhana,

$$a_2 I^{*2} + a_1 I^* + a_0 = 0 \quad (4.13)$$

Dimana

$$\begin{aligned}
a_2 &= \beta_2 v_1 \varphi_3 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + \varepsilon v_1 \varphi_2 \varphi_3 (\mu + \beta_1) \\
a_1 &= v_1 [K \beta_2 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + K \varepsilon \mu + (\beta_1 + \mu) \varphi_3] \\
&- \pi [\beta_2 (1 + \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2) + \beta_1 \varepsilon \varphi_2] \\
a_0 &= K \mu v_1 (1 - R_0)
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$I^* = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Dari nilai diatas maka dapat diketahui bahwa koefisien a_2 selalu positif.

Karena dapat diketahui bahwa:

$$\text{i) } a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0 \text{ maka } I_{1,2}^* = -\frac{a_1}{2a_2}, \text{ dengan } a_1 < 0$$

$$\text{ii) } a_1^2 - 4a_2 a_0 > 0, \text{ maka } I_1^* = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \text{ dan } I_2^* = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

jika $a_1 > 0$, maka $I_2^* < 0$, dan $I_1^* < 0$

dimana,

$$a_0 > 0 \text{ dan } a_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 - 4a_2a_0 > a_1^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} > a_1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 > -\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} < 0$$

dan

$$a_0 > 0 \text{ dan } a_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -a_1 < 0 \text{ dan } -\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} < 0$$

jika $a_1 < 0$, maka $I_1^* > 0$ dan $I_2^* < 0$

dimana,

$$a_0 > 0 \text{ dan } a_1 < 0$$

$$a_1^2 - 4a_2a_0 > a_1^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} > -a_1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

dan

$$a_0 > 0 \text{ dan } a_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -a_1 > 0 \text{ dan } \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} > 0$$

iii) $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$, maka $I_{1,2}^* \in \mathbb{C}$ sehingga tidak ada solusi riil I^* .

dari keterangan diatas, Batas ketika I^* eksis adalah:

$$a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 - 4a_2K\mu v_1(1 - R_0) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a_1^2}{4a_2K\mu v_1} \leq R_0$$

$$\Leftrightarrow R_0^C \leq R_0$$

$$R_0^C = 1 - \frac{a_1^2}{4a_2K\mu v_1}$$

dan memiliki kemungkinan percabangan mundur yang ditunjukkan oleh kasus

$a_0 > 0$, yakni dengan

$$\Leftrightarrow 1 - R_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > R_0$$

maka dapat diketahui bahwa memiliki dua kesetimbangan positif untuk $R_0^C < R_0 < 1$.

Sehingga titik kesetimbangan model matematika dari proses transmisi penyakit virus ebola terhadap metapopulasi mempunyai 2 titik kesetimbangan yaitu:

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$E^0 = (S^0, I^0, H^0, D^0, P^0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$$

2. Titik Kesetimbangan Endemik Eksis Ketika $R_0^C < R_0 < 1$.

$$H^* = \frac{-\sigma_2}{v_2}$$

$$\begin{aligned}
D^* &= \frac{-\sigma_3 I^* - \gamma_2 \varphi_1}{\rho} I^* \\
P^* &= \frac{-\alpha_1 I^* - (1-\rho)\varphi_2}{\theta} I^* \\
S^* &= \frac{v_1 I^*}{\frac{\beta_2(1+\eta_1\varphi_1 I^* + \eta_2\varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon\varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1\varphi_3 I^*}{K+\varphi_3 I^*}} \\
I^* &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, \text{ dengan } a_0, a_1, a_2 \text{ sebagaimana persamaan (4.13)}
\end{aligned}$$

4.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar yang dilambangkan menggunakan R_0 didefinisikan menjadi jumlah rata-rata infeksi baru yang dihasilkan oleh individu yang terinfeksi atau orang meninggal yang terinfeksi atau melalui kontak dengan objek yang terinfeksi patogen dalam populasi yang sepenuhnya rentan. Penulis menggunakan metode *next generation matrix* berikutnya untuk menghitung R_0 .

Linierisasi terhadap substansi terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit. maka diperoleh matriks jacobian:

$$J_E = \begin{bmatrix} \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dH} & \frac{dI}{dD} & \frac{dI}{dP} \\ \frac{dH}{dI} & \frac{dH}{dH} & \frac{dH}{dD} & \frac{dH}{dP} \\ \frac{dD}{dI} & \frac{dD}{dH} & \frac{dD}{dD} & \frac{dD}{dP} \\ \frac{dP}{dI} & \frac{dP}{dH} & \frac{dP}{dD} & \frac{dP}{dP} \end{bmatrix}$$

$$J_E = \begin{bmatrix} v_1 - M_1 & -M_2 & -M_3 & -M_4 \\ \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{E^0}$$

dimana,

$$M_1 = \left(\frac{D(\beta_2)(D\eta_2 + H\eta_1 + I)S}{\mu} \right)$$

$$M_2 = \frac{D(\beta_2)(D\eta_2 + H\eta_1 + I)\eta_1 S}{\mu}$$

$$M_3 = \frac{D(\beta_2)(D\eta_2 + H\eta_1 + I)\eta_2 S}{\mu}$$

$$M_4 = \frac{\beta_1}{K + P} - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2} S$$

$$\text{Dengan } E^0 = (S^0, I^0, H^0, D^0, P^0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$$

maka,

$$J_{(I,H,D,P)} = \begin{bmatrix} v_1 - \left(\frac{\pi\beta_2}{\mu}\right) & -\frac{\pi\beta_2\eta_1}{\mu} & -\frac{\pi\beta_2\eta_2}{\mu} & -\frac{\pi\beta_1}{\mu K} \\ \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$$

dimana,

$$X = [S, I, H, D, P]^T$$

dengan

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\pi\beta_2}{\mu} & \frac{\pi\beta_2\eta_1}{\mu} & \frac{\pi\beta_2\eta_2}{\mu} & \frac{\pi\beta_1}{\mu K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & v_2 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & -\gamma_2 & \rho & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \theta \end{pmatrix}$$

selanjutnya dicari V^{-1} , sehingga diperoleh:

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V} \text{adj}(V)$$

$$= \frac{1}{\det V} \begin{pmatrix} v_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 & -\alpha_1 \\ 0 & v_2 & -\gamma_2 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \rho & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & \frac{\sigma_2}{v_1 v_2} & \frac{v_2 \sigma_3 + \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2 \rho} & \frac{\rho v_2 \alpha_1 + \rho \alpha_2 \sigma_2 + v_2 \alpha_3 \sigma_3 + \alpha_3 \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2 \rho \theta} \\ 0 & \frac{1}{v_2} & \frac{\gamma_2}{v_2} & \frac{\rho \alpha_2 + \alpha_3 \gamma_2}{v_2 \rho \theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{\alpha_3}{\rho \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Van den Driesche serta Watmough (2002), bilangan reproduksi dasar dihasilkan dari nilai eigen dominan *next generation matrix* (NGM). Sehingga R_0 didapat:

$$R_0 = FV^{-1}$$

$$R_0 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi \beta_2}{\mu} & \frac{\pi \beta_2 \eta_1}{\mu} & \frac{\pi \beta_2 \eta_2}{\mu} & \frac{\pi \beta_1}{\mu K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & \frac{\sigma_2}{v_1 v_2} & \frac{v_2 \sigma_3 + \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2 \rho} & \frac{\rho v_2 \alpha_1 + \rho \alpha_2 \sigma_2 + v_2 \alpha_3 \sigma_3 + \alpha_3 \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2 \rho \theta} \\ 0 & \frac{1}{v_2} & \frac{\gamma_2}{v_2} & \frac{\rho \alpha_2 + \alpha_3 \gamma_2}{v_2 \rho \theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{\alpha_3}{\rho \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimana,

$$J_{11} = \frac{\pi \beta_2}{\mu v_1} + \frac{\pi \beta_2 \eta_1 \sigma_2}{\mu v_1 v_2} + \frac{\pi \beta_2 \eta_2 (v_2 \sigma_3 + \gamma_2 \sigma_2)}{\mu \rho v_1 v_2} + \frac{\pi \beta_1 (\rho v_2 \alpha_1 + \rho \alpha_2 \sigma_2 + v_2 \alpha_3 \sigma_3 + \alpha_3 \gamma_2 \sigma_2)}{\mu K v_1 v_2 \rho \theta},$$

$$J_{12} = \frac{\pi \beta_2 \eta_1}{\mu v_2} + \frac{\pi \beta_2 \eta_2 \gamma_2}{\mu v_2 \rho} - \frac{\pi \beta_1 (\rho \alpha_2 + \alpha_3 \gamma_2)}{\mu K v_2 \rho \theta}$$

$$J_{13} = \frac{\pi \beta_2 \eta_2 \rho}{\mu \rho} - \frac{\pi \beta_1 \alpha_3}{\mu K \rho \theta}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen dominan yaitu:

$$R_0 = \frac{\pi}{\mu} \left[\beta_2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{\eta_1 \sigma_2}{v_1 v_2} + \frac{\eta_2 (\gamma_2 \sigma_2 + v_2 \sigma_3)}{\rho v_1 v_2} \right) + \frac{\beta_1}{\rho \theta K} \left(\frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2} + \frac{\rho \alpha_1 + \alpha_2 \sigma_3}{v_1} \right) \right]$$

Berikut ini saran pencegahan penyebaran, yakni dengan:

1. Menurunkan laju rata-rata kelahiran atau migrasi yang konstan dibagi dengan laju rata-rata individu yang meninggal karena penyebab alami $\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$.
2. Menurunkan laju rata-rata taraf kontak efektif antara individu yang rentan serta patogen pada lingkungan (β_1) dan laju rata-rata antara individu yang rentan serta orang terinfeksi yang masing-masing mengarah pada infeksi (β_2).
3. Menurunkan laju rata-rata menular tetapi efektif yang lebih rendah (η_1) dan laju rata-rata individu yang meninggal dan dapat menular (η_2).
4. Menaikkan laju rata-rata individu yang meninggal karena penyebab alami ditambah dengan laju rata-rata individu yang dapat pulih ditambah dengan laju rata-rata individu yang dirawat di rumah sakit ditambah dengan laju rata-rata individu yang meninggal (v_1) dan laju rata-rata individu yang meninggal karena penyebab alami ditambah dengan laju rata-rata individu rawat inap yang dapat pulih ditambah dengan laju rata-rata individu yang rawat inap dan meninggal akibat virus ebola (v_2).
5. Menaikkan laju rata-rata individu yang meninggal dan dikuburkan atau dikremasi dengan aman dikali dengan laju rata-rata patogen dalam pembusukan di lingkungan perkapita dikali dengan konstanta setengah jenuh, yaitu dengan konsentrasi patogen yang dapat menyebabkan 50% kemungkinan terinfeksi ($\rho\theta K$).

4.4 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

Dalam menganalisis titik kesetimbangan maka langkah selanjutnya ialah menggunakan matrik jacobian untuk menghitung nilai eigen. Dimana matrik jacobini tersebut diperoleh dari persamaan (4.2) hingga (4.6).

Dari persamaan diatas akan dibuat matriks jacobini yakni

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial D} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial D} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial D} & \frac{\partial f_3}{\partial P} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial H} & \frac{\partial f_4}{\partial D} & \frac{\partial f_4}{\partial P} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial H} & \frac{\partial f_5}{\partial D} & \frac{\partial f_5}{\partial P} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Sehingga didapatkan hasil

$$J = \begin{bmatrix} J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} \\ \Lambda & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} \\ 0 & \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1-\rho & -\theta \end{bmatrix}$$

dimana

$$J_{51} = -\Lambda - \mu$$

$$J_{52} = \frac{-\beta_2 S}{D\varepsilon + 1}$$

$$J_{53} = \frac{-\eta_1 S}{D\varepsilon + 1}$$

$$J_{54} = -\left(\frac{\beta_2 I \varepsilon}{(-D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_1 H \varepsilon}{(-D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_2}{(-D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_2 - D\varepsilon}{(-D\varepsilon + 1)^2}\right)S$$

$$J_{55} = -\frac{\beta_1}{K + P} - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2}$$

$$J_{62} = \frac{\beta_2 S}{-D\varepsilon + 1}$$

$$J_{63} = \frac{\eta_1 S}{-D\varepsilon + 1}$$

$$J_{64} = -\left(\frac{\beta_2 I\varepsilon}{(-D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_1 H\varepsilon}{(-D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_2}{(-D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_2 - D\varepsilon}{(-D\varepsilon + 1)^2}\right)S$$

$$J_{65} = \frac{\beta_1}{K + P} - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2}$$

4.4.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap berikut disubstitusikan persamaan jacobian (4.14) dengan nilai titik keseimbangan bebas penyakit yakni $E^0 = (S^0, I^0, H^0, D^0, P^0) = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0)$, sehingga didapatkan matriks jacobin sebagai berikut,

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_1 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \frac{\beta_2 \pi}{\mu} & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} & \frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1 - \rho & -\theta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Akan ditentukan kestabilan bebas penyakit dengan menggunakan matriks Jacobi

(4.15). Nilai Eigen Matriks (4.15) diperoleh sebagai berikut,

$$\det(J(E^0) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_1 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \frac{\beta_2 \pi}{\mu} - v_1 & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} & \frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1 - \rho & -\theta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_1 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \frac{\beta_2 \pi}{\mu} - v_1 - \lambda & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} & \frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \sigma_2 & -v_2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1 - \rho & -\theta - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda) \begin{bmatrix} \frac{\beta_2 \pi}{\mu} - v_1 - \lambda & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} & \frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ \sigma_2 & -v_2 - \lambda & 0 & 0 \\ \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho - \lambda & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 1 - \rho & -\theta - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(-\theta - \lambda) \begin{bmatrix} \frac{\beta_2 \pi}{\mu} - v_1 - \lambda & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} \\ \sigma_2 & -v_2 - \lambda & 0 \\ \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dari dua faktor pertama diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu < 0 \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = -\theta < 0$$

Dari matriks diatas maka akan didapatkan persamaan karakteristik

$$\lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0$$

Dengan,

$$a_4 = \frac{\mu^2 + \mu\rho + \mu\theta + v_1\mu + \mu v_2 - \beta_2\pi}{\mu}$$

$$a_3 = \frac{1}{K\mu} (K\mu^2\rho + K\mu^2\theta + K\mu^2v_1 + K\mu^2v_2 - K\mu\pi\beta_2 + K\mu\rho\theta + K\mu\rho v_1$$

$$+ K\mu\rho v_2 + K\mu\theta v_1 + K\mu\theta v_2 + K\mu v_1 v_2 - K\pi\rho\beta_2 - K\pi\theta\beta_2$$

$$- K\pi\beta_2 v_2 - K\pi\eta_1\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 - \alpha_1\beta_1\pi)$$

$$a_2 = \frac{1}{K\mu} (K\mu^2\rho\theta + K\mu^2\rho v_1 + K\mu^2\rho v_2 + K\mu^2\theta v_1 + K\mu^2\theta v_2 + K\mu^2 v_1 v_2$$

$$- K\mu\pi\rho\beta_2 - K\mu\pi\theta\beta_2 - K\mu\pi\beta_2 v_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_3 + K\mu\rho\theta v_1$$

$$\begin{aligned}
& +K\mu\rho\theta v_2 + K\mu\rho v_1 v_2 + K\mu\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 - K\pi\rho\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 \\
& -K\mu\theta\beta_2 v_2 - K\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 \\
& -\mu\pi\alpha_1\beta_1 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 - \pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \pi\rho\sigma_3) \\
a_1 = & \frac{1}{K\mu} (K\mu^2\rho\theta v_1 + K\mu^2\rho\theta v_2 + K\mu^2\rho v_1 v_2 + K\mu^2\theta v_1 v_2 - K\mu\pi\rho\theta\beta_2 \\
& -K\mu\pi\rho\beta_2 v_2 - K\mu\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\theta\beta_2 v_2 - K\mu\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\theta\eta_2\sigma_3 \\
& -K\mu\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_3 v_2 + K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\theta\eta_1\sigma_2 \\
& -K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \mu\pi\rho\alpha_1\beta_1 + \rho\sigma_3\beta_1\pi\mu - \mu\pi\alpha_1\beta_1 v_2 \\
& -\pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \mu\pi\beta_1\sigma_3 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2) \\
a_0 = & \frac{1}{K} (K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 \\
& -\pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan akar-akar persamaan karakteristik diatas maka kestabilannya dapat dikerjakan dengan mensubstitusikan Tabel (4.1) ke polinomial pada $\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$ sebagaimana terlampir pada Lampiran 3, maka akan didapatkan nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$a_0 = -2.909273375$$

$$a_1 = -99978.055246^5$$

$$a_2 = -5.051015964 \times 10^5$$

$$a_3 = -9.256676417 \times 10^5$$

$$a_4 = -4.324304719 \times 10^5$$

$$a_5 = 1$$

dengan,

$$\lambda^1 = -0.000296000000000000$$

$$\lambda_2 = 4.32431487516670 \times 10^5$$

$$\lambda_3 = -0.020111141573441$$

$$\lambda_4 = -1.06005055850669 + 0.0292691642142447 I$$

$$\lambda_5 = -1.06005055850669 - 0.0292691642142447 I$$

Berdasarkan nilai eigen yang didapatkan dapat diketahui bahwa $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, < 0$ tetapi untuk $\lambda_2 > 0$. Maka, dapat disimpulkan bahwa nilai eigen tidak memenuhi syarat pada kriteria Routh-Hurwitz. sehingga, secara keseluruhan sifat kestabilannya adalah tidak stabil. Sehingga model matematika meta populasi penyebaran Virus Ebola tidak stabil pada titik kesetimbangan E^0 .

4.4.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Bentuk penyelesaian analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik yakni nilai eigen akan dicari menggunakan matriks (4.14) melalui persamaan karakteristiknya yaitu dengan mensubstitusi titik kesetimbangan endemik. Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Estimasi Parameter dan Nilai Awal

Parameter	Keterangan	Nilai Awal	Satuan
π	Rata-rata kelahiran atau migrasi yang konstan	200	Individu/ Minggu
σ_1	Rata-rata individu yang terinfeksi dan pulih	0.33	Individu/ Minggu
σ_2	Rata-rata individu yang melakukan rawat inap dan dapat menular	0.019	Individu/ Minggu
σ_3	Nilai individu yang meninggal karena terinfeksi	0.6	Individu/ Minggu
η_1	Nilai rata-rata individu yang terinfeksi dan dapat menular	0.09	Individu/ Minggu

η_2	Nilai rata-rata individu yang terinfeksi dan meninggal	1.2	Individu/ Minggu
γ_1	Nilai rata-rata individu yang melakukan rawat inap dan dapat pulih	0.8	Individu/ Minggu
γ_2	Nilai individu yang melakukan rawat inap dan meninggal karena virus ebola	0.2	Individu/ Minggu
ρ	Laju pemakaman individu meninggal secara aman	0.009	Minggu
α_1	Nilai rata-rata individu terinfeksi ebola menumpahkan patogen ke lingkungan	0.05	Individu/ Minggu
α_2	Nilai rata-rata pasien yang meninggal terjangkit ebola menumpahkan patogen ke lingkungan	0.06	Individu/ Minggu
θ	Nilai rata-rata penghapusan patogen ke lingkungan	0.0016	Individu/ Minggu
μ	Laju kematian alami individu	0.000296	Minggu
K	Konstanta setengah jenuh (konsentrasi patogen yang dapat menyebabkan 50% kemungkinan infeksi)	30	Individu/ Minggu
β_1	Laju kotak individu ke individu lain yang terinfeksi	0.67	Individu/ Minggu
β_2	Laju kotak patogen ke individu lain yang terinfeksi	0.64	Individu/ Minggu

sehingga didapatkan matriks jacobi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} \\ 0 & 0.019 & -1.00029 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & -0.009 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.991 & -0.0016 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

dimana,

$$J_{51} = -3.693671612$$

$$J_{52} = -0.006128744995$$

$$J_{53} = 0.00008954826382$$

$$J_{54} = 0.00008954826382$$

$$J_{55} = -1.418101161 \times 10^{-11}$$

$$J_{61} = 3.693671612$$

$$J_{62} = -0.9431672550$$

$$J_{63} = -0.00008954826382$$

$$J_{64} = -0.00008954826382$$

$$J_{65} = 1.418101161 \times 10^{-11}$$

Kemudian akan ditentukan kestabilan bebas penyakit dengan menggunakan matriks Jacobi (4.15). Nilai Eigen Matriks (4.15) diperoleh sebagai berikut,

$$\det(J(E) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} \\ 0 & 0.019 & -1.00029 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & -0.009 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.991 & -0.0016 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} J_{51} - \lambda & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} \\ J_{61} & J_{62} - \lambda & J_{63} & J_{64} & J_{65} \\ 0 & 0.019 & -1.00029 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & -0.009 - \lambda & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.991 & -0.0016 - \lambda \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

dimana,

$$J_{51} = -3.693671612$$

$$J_{52} = -0.006128744995$$

$$J_{53} = 0.00008954826382$$

$$J_{54} = 0.00008954826382$$

$$J_{55} = -1.418101161 \times 10^{-11}$$

$$J_{61} = 3.693671612$$

$$J_{62} = -0.9431672550$$

$$J_{63} = -0.00008954826382$$

$$J_{64} = -0.00008954826382$$

$$J_{65} = 1.418101161 \times 10^{-11}$$

Persamaan karakteristik dari matriks (4.17) maka akan diperoleh hasil polinomial sebagai berikut,

$$\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0 \quad (4.18)$$

Pada kriteria Routh-Hurwitz nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz berikut:

$$\text{i) } a_5 > 0$$

$$\text{ii) } a_4 > 0$$

$$\text{iii) } a_4 \cdot a_3 - a_5 \cdot a_2 > 0$$

$$\text{iv) } b_1 > 0$$

$$v) \quad b_2 > 0$$

dimana

$$b_1 = \frac{\left(\frac{a_2(-a_2a_5 + a_3a_4)}{a_4} + a_5a_0 - a_4a_1\right)a_4}{-a_2a_5 + a_3a_4}$$

$$b_2 =$$

$$\frac{\left(\frac{\left(\frac{a_2(-a_2a_5 + a_3a_4)}{a_4} + a_5a_0 - a_4a_1\right)}{-a_2a_5 + a_3a_4}\right) - \left(\frac{a_4a_1 - a_5a_0}{a_4}\right)(-a_2a_5 + a_3a_4)}{\left(\frac{a_2(-a_2a_5 + a_3a_4)}{a_4} + a_5a_0 - a_4a_1\right)a_4}$$

Berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan endemik akan stabil jika memenuhi syarat kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Kemudian, karena pembuktian kriteria Routh-Hurwitz untuk titik kesetimbangan endemik secara umum sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, digunakan nilai parameter pada Tabel (4.1) untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan endemik secara khusus. Nilai koefisien polinom (4.18) menggunakan Tabel (4.1) diperoleh sebesar:

$$a_0 = 0.00005050692771$$

$$a_1 = 0.03729607639$$

$$a_2 = 3.593891677$$

$$a_3 = 8.204402627$$

$$a_4 = 5.647734867$$

$$a_5 = 1$$

sedangkan nilai pada b_1 dan b_2 adalah

$$b_1 = 3.566065811$$

$$b_2 = 0.03717994553$$

Dengan demikian jelas bahwa $a_5 > 0, a_4 > 0, a_4 \cdot a_3 - a_5 \cdot a_2 > 0, b_1 > 0$, dan $b_2 > 0$ ketika digunakan nilai parameter pada tabel (4.1). Maka, dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik ialah stabil asimtotik lokal karena memenuhi syarat dari kriteria Routh-Hurwitz lebih lanjut untuk menilai nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.18) dengan parameter pada tabel (4.1) adalah sebagai berikut:

$$\lambda^1 = -3.68540573255888$$

$$\lambda_2 = -0.951561030254832$$

$$\lambda_3 = -0.00899986416070120$$

$$\lambda_4 = -1.00016824002516$$

$$\lambda_5 = -0.00160000000042762$$

Berdasarkan nilai eigen tersebut dapat diketahui secara keseluruhan nilai eigen tersebut semua mempunyai bagian real negatif. Sehingga, sifat ketatabilan dari titik kesetimbangan endemik adalah stabil asimtotik lokal.

4.5 Analisis Bifurkasi

4.5.1 Arah Bifurkasi

Asumsikan bahwa $\beta_2 = c\beta_1$, dimana c adalah konstanta positif. Persamaan (4.13) dimisalkan sebagai fungsi dari β_1 dan I^* sebagai berikut:

$$F(\beta_1, I^*) = (d_2\beta_1 + d_{22})I^{*2} + (d_1\beta_1 + d_{11})I^* + d_0\beta_1 + d_{00} = 0$$

dimana

$$d_1 = c(1 + \eta_1\varphi_1 + \eta_2\varphi_2)(Kv_1 - \pi) + \varphi_3(v_1 - \pi\varepsilon\varphi_2),$$

$$d_{11} = (K\varepsilon + \varphi_3)\mu,$$

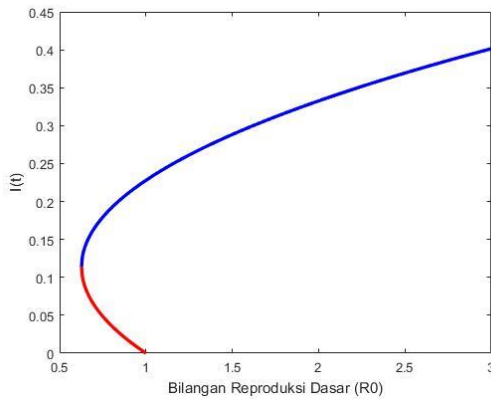
$$d_{22} = \varepsilon v_1 \varphi_2 \varphi_3 \mu,$$

$$d_{00} = K\mu v_1,$$

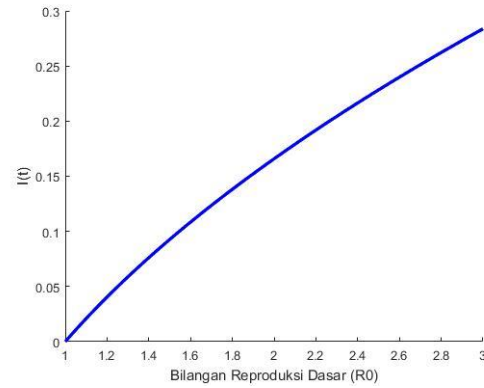
$$d_2 = cv_1\varphi_3(1 + \eta_1\varphi_1 + \eta_2\varphi_2) + \varepsilon v_1\varphi_2\varphi_3,$$

$$d_0 = -\pi[cK(1 + \eta_1\varphi_1 + \pi\eta_2\varphi_2)\varphi_3]$$

sehingga dapat dihasilkan,



Gambar 4.2 Bifurkasi Mundur $\beta_1 = 0.67, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30. \varepsilon = 0.4$



Gambar 4.3 Bifurkasi Maju $\beta_1 = 0.67, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30. \varepsilon = 0.4$

Pada gambar (4.2) menunjukan bahwa telah terjadi bifurkasi mundur untuk R_0 sehingga $R_0^C < R_0 < 1$ sehingga diperoleh dua titik tetap yakni titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Juga pada saat $R_0^C < R_0 < 1$ ada dua titik kesetimbangan yang bersifat stabil (berwanra biru) dan titik yang tidak stabil (berwarna merah). sehingga untuk $R_0 > 1$ penularan virus akan sulit diatasi.

Pada gambar (4.3) menunjukkan bahwa terjadi bifurkasi maju dengan $R_0 > 1$. Terdapat satu titik tetap yaitu pada titik 1 . Di titik 1 terjadi bifurkasi transkritikal. Pada saat $R_0 < 1$ tidak ada penyebaran penyakit sedangkan pada saat $R_0 > 1$ merupakan titik stabil endemik sehingga walaupun terjadi penyebaran wabah masih bisa untuk diatasi.

4.5.2 Simulasi Bifurkasi

Terjadinya bifurkasi ke belakang memiliki implikasi kesehatan masyarakat yang penting karena mungkin tidak cukup untuk mengurangi R_0 di bawah 1 untuk

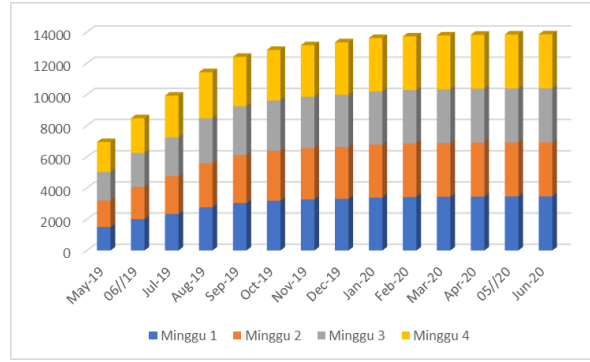
menghilangkan penyakit. Bilangan reproduksi dasar harus diturunkan lebih lanjut di bawah R_0^c sehingga dapat memastikan pemberantasan penyakit. Untuk nilai R_0 lebih besar dari satu, maka dapat memiliki bifurkasi ke depan, artinya penyakit akan bertahan dalam populasi dan menurunkan R_0 menjadi nilai di bawah satu bukanlah kondisi yang cukup untuk pemberantasan penyakit.

Kehadiran bifurkasi ke belakang membuat peningkatan pada tingkat ketakutan akan kematian akibat virus ebola tidak cukup untuk mewujudkan pemberantasan penyakit. Tindakan pengendalian seperti media kampanye, isolasi yang terinfeksi, dan penemuan kasus perlu dilaksanakan bersama-sama dengan perubahan yang sudah ada dalam perilaku manusia karena memiliki kekhawatiran untuk meninggal, sehingga membawa membawa populasi ke keadaan DFE.

4.6 Simulasi Numerik

4.6.1 Nilai Parameter

Simulasi dilakukan menggunakan program Matlab dan dengan memberikan nilai-nilai masing-masing parameter. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil yang telah dianalisis. Beberapa nilai parameter yang digunakan diambil dari beberapa penelitian sebelumnya mengenai penyakit virus ebola. Berikut ini ialah data yang di peroleh dari WHO terhadap wabah Virus ebola pada tahun 2019 dan 2020 di Kivu Utara dan Selatan.



Gambar 4.4 Data WHO dari Wabah 2019 dan 2020 di Kivu Utara dan Selatan

4.6.2 Penyelesaian Model dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat

Perhatikan sistem persamaan (4.15)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} + \mu \right) S \\ \frac{dI}{dt} &= \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} + \mu \right) S - v_1 I \\ \frac{dH}{dt} &= \sigma_2 I - v_2 H \\ \frac{dD}{dt} &= \sigma_3 I + \gamma_2 H - \rho D \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha_1 I + (1-\rho)D - \theta P \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Sistem persamaan (4.19) diselesaikan menggunakan metode runge-kutta orde empat seperti pada persamaan (2.15) yaitu $x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$ Model penyakit virus ebola yang akan diselesaikan sudah merupakan sistem persamaan sehingga tidak perlu mengubahnya. Sistem persamaan (4.19) disubstitusikan pada persamaan Runge-Kutta orde empat sehingga diperoleh persamaan (4.20) sampai (4.24).

$$S_{i+1} = S_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (4.20)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)h \quad (4.21)$$

$$H_{i+1} = H_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h \quad (4.22)$$

$$D_{i+1} = D_i + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)h \quad (4.23)$$

$$P_{i+1} = P_i + \frac{1}{6}(o_1 + 2o_2 + 2o_3 + o_4)h \quad (4.24)$$

dengan nilai pada k_1 sampai k_4 , l_1 sampai l_4 , m_1 sampai m_4 , n_1 sampai n_4 , o_1 sampai o_4 terdapat pada Lampiran 1.

4.6.3 Simulasi

Simulasi yang dilakukan yaitu dengan mensubstitusikan nilai awal dan nilai parameter-parameter yang telah diberikan dengan nilai variabelnya yakni dengan $S_0 = 98000, I_0 = 1500, H_0 = 1000, D_0 = 300, P_0 = 600$, nilai variabel ini diperoleh dengan memvariasikan tingkat ketakutan, dengan parameter yang konstan. Nilai-nilai tersebut merupakan solusi numerik model penyakit virus ebola menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang selanjutnya akan digambarkan melalui plot grafik melalui aplikasi *Maple*. Selanjutnya akan diberikan $S_i = S_0, I_i = I_0, H_i = H_0, D_i = D_0, P_i = P_0$ Sebagai nilai awal sehingga diperoleh hasil solusi numerik model penyakit virus ebola menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagaimana pada persamaan (4.20) hingga (4.24).

$$S_{0+1} = S_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (4.25)$$

$$I_{0+1} = I_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)h \quad (4.26)$$

$$H_{0+1} = H_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h \quad (4.27)$$

$$D_{0+1} = D_0 + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)h \quad (4.28)$$

$$P_{0+1} = P_0 + \frac{1}{6}(o_1 + 2o_2 + 2o_3 + o_4)h \quad (4.29)$$

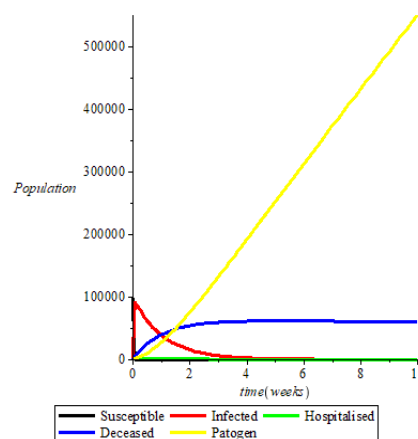
Kemudian dengan mensubstitusikan nilai k_1 sampai k_4 , l_1 sampai l_4 , m_1 sampai m_4 , n_1 sampai n_4 , o_1 sampai o_4 pada Lampiran 2 kedalam persamaan (4.25) sampai

(4.29) didapatkan hasil solusi numerik model penyakit virus ebola menggunakan metode Runge Kutta orde-4 sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 S_{0+1} &= S_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\
 &= 98000 + \frac{1}{6}(-62880.68844 + 2 \cdot 199.3563195 + 2 \cdot 199.3563195 + \\
 &199.3563195)0.01 \\
 &= 97896.86016 \\
 I_{0+1} &= I_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)h \\
 &= 1500 + \frac{1}{6}(61627.73644 + 2 \cdot -0.3059115057 + 2 \cdot -0.3059115057 + \\
 &-0.3059115057)0.01 \\
 &= 1602.710345 \\
 H_{0+1} &= H_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h \\
 &= 1000 + \frac{1}{6}(-971.796000 + 2 \cdot -0.981296 + 2 \cdot -0.981296 + \\
 &-0.981296)0.01 \\
 &= 998.3721625 \\
 D_{0+1} &= D_0 + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)h \\
 &= 300 + \frac{1}{6}(1097.300 + 2 \cdot 196.8788255 + 2 \cdot 197.8901592 + \\
 &197.8901136)0.01 \\
 &= 303.4745468 \\
 P_{0+1} &= P_0 + \frac{1}{6}(o_1 + 2o_2 + 2o_3 + o_4)h \\
 &= 600 + \frac{1}{6}(92.0400 + 2 \cdot -0.8507363200 + 2 \cdot -8400031941 + \\
 &-0.8499932000)0.01 \\
 &= 600.1463142
 \end{aligned}$$

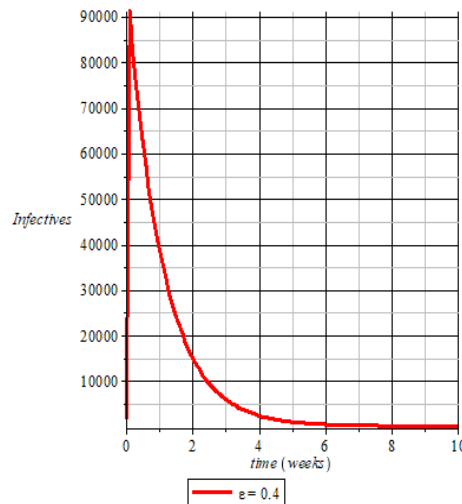
4.7 Hasil Simulasi Model

Pada Penelitian ini nantinya akan melihat bagaimana grafik pada populasi individu terinfeksi dengan faktor ketakutan patogen dilingkungan. Hasil simulasi untuk $\beta_1 = 0.67 \neq 0$ dapat dilihat pada gambar (4.5) menggunakan program Maple dengan dengan ODE 4 berdasarkan parameter pada tabel (4.1) dan dengan sebarang nilai awal $S(0) = 98000, I(0) = 1500, H(0) = 9000, D(0) = 300, P(0) = 600$. Berdasarkan gambar (4.5) terdapat 5 kompartemen untuk menilai dampak ketakutan yang disebabkan oleh virus ebola pada dinamika penularan penyakit, dengan mempertimbangkan transmisi lingkungan. Populasi individu rentan awalnya menurun, hingga pada minggu pertama berjalan dengan vertikal dan stabil pada garis tersebut. Populasi individu terinfeksi virus ebola naik ke angka 90000 dan pada minggu pertama berjalan menurun dengan kecemasan sehingga individu mulai menekankan kehati-hatiannya kepada lingkungan begitu pula populasi individu dirawat di rumah sakit konsisten berjalan menurun hingga minggu terakhir. Sedangkan populasi individu yang meninggal terus berjalan naik, dan populasi patogen yang berada dilingkungan konsisten naik hingga minggu ke empat.



Gambar 4.5 Simulasi Sistem pada Persamaan (4.2) hingga (4.6) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$

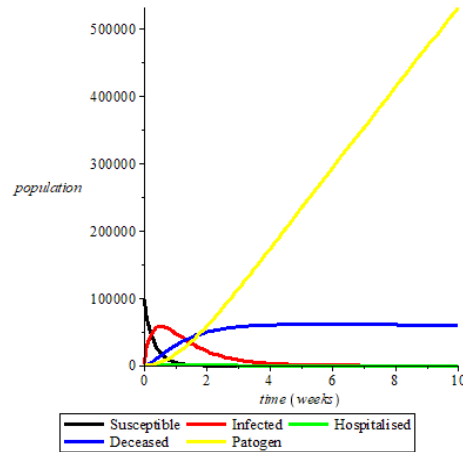
Berdasarkan gambar (4.6) untuk $\beta_1 = 0.67 \neq 0$ menggunakan parameter pada tabel (4.1) dan dari nilai awal $I(0) = 1500$. Pada grafik (4.6) menggunakan tingkat ketakutan atau varepsilon (ε) yakni 0,4. Hal ini menunjukkan bahwa rasa takut akan mempengaruhi tingkat ketakutan sehingga dicerminkan oleh garis pada grafik ialah naik di angka 90000 dan konstan turun sengan varepsilon 0,4.



Gambar 4.6 Simulasi Sistem pada Persamaan (4.3) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$

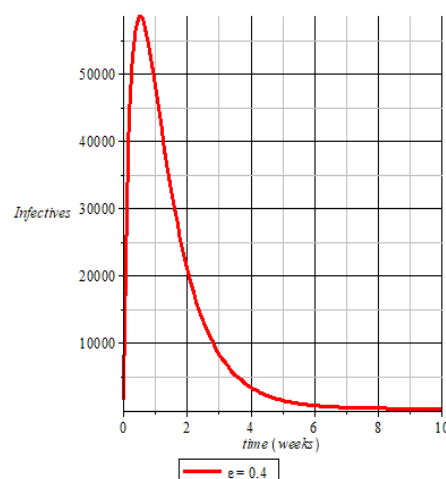
Hasil simulasi untuk $\beta_1 = 0$ dapat dilihat pada gambar (4.7) menggunakan program Maple dengan dengan ODE 4 berdasarkan parameter pada tabel (4.1) dan dengan sebarang nilai awal $S(0) = 98000, I(0) = 1500, H(0) = 9000, D(0) = 300, P(0) = 600$. Berdasarkan gambar (4.9) terdapat 5 kompartemen untuk menilai dampak ketakutan yang disebabkan oleh virus ebola pada dinamika penularan penyakit, dengan mempertimbangkan transmisi lingkungan. Populasi individu rentan awalnya menurun, hingga pada minggu pertama berjalan dengan vertikal dan stabil pda garis tersebut. Populasi individu terinfeksi virus ebola naik ke angka 60000 dan pada minggu pertama berjalan menurun dengan kecemasan sehingga individu mulai menekankan kehati-hatiannya kepada lingkungan begitu pula populasi individu dirawat dirumah sakit konsisten berjalan menurun hingga

minggu terakhir. Sedangkan populasi individu yang meninggal terus berjalan naik, dan populasi patogen yang berada dilingkungan konsiten naik hingga minggu ke empat.



Gambar 4.7 Simulasi Sistem pada Persamaan (4.2) hingga (4.6) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$

Berdasarkan gambar (4.8) untuk $\beta_1 = 0$ menggunakan parameter pada tabel (4.1) dan dari nilai awal $I(0) = 1500$. Pada grafik (4.8) menggunakan tingkat ketakutan atau varepsilon (ε) yakni 0,4. Hal ini menunjukkan bahwa rasa takut akan mempengaruhi tingkat ketakutan sehingga dicerminkan oleh garis pada grafik ialah naik di angka 90000 dan konstan turun sengam varepsilon 0,4.



Gambar 4.8 Simulasi Sistem pada Persamaan (4.3) Titik Ekuilibrium Endemik dengan $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.64, v_1 = 0.949296, v_2 = 1.000.296, K = 30, \varepsilon = 0.4, \eta_1 = 0.09, \eta_2 = 1.2$

Sehingga dari analisis yang telah dilakukan di atas, dapat disimpulkan bahwa dengan metode runge-kutta, grafik akan stabil jika menggunakan nilai $h = 0.01$. pada saat $R_0 > 1$ maka akan terjadi penyebaran penyakit. Hasil diatas menunjukan tingkat ketakutan memiliki hubungan terbalik dengan pelepasan patogen di lingkungan oleh individu yang terinfeksi virus ebola. Hal ini menunjukan bahwa penigkatan tingkat ketakutan tidak hanya menyebabkan penurunan angka penularan dari orang ke orang, tetapi juga mengakibatkan penurunan tingkat penularan ke lingkungan (penularan patogen ke setiap individu). Model ini dapat ditingkatkan dengan mempertimbangan pertumbuhan patogen di lingkungan yang tidak bergantung pada dinamika infeksi.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Melalui asumsi-asumsi dan pembahasan yang telah dibuat maka model penyebaran virus Ebola yakni:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} + \mu \right) S$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\beta_1 P}{K+P} + \frac{\beta_2 I}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_1 H}{1+\varepsilon D} + \frac{\eta_2 D}{1+\varepsilon D} \right) S - v_1 I$$

$$\frac{dH}{dt} = \sigma_2 I - v_2 H$$

$$\frac{dD}{dt} = \sigma_3 I + \gamma_2 H - \rho D$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_1 I + (1 - \rho) D - \theta P$$

2. Pada model persamaan diferensial yang telah dibentuk maka didapatkan dua titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dimana hasilnya yakni:

- a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$E^0 = (S^0, I^0, H^0, D^0, P^0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

- b. Titik Kesetimbangan Endemik Eksis Ketika $R_0^C < R_0 < 1$.

$$H^* = \frac{-\sigma_2}{v_2} I^*$$

$$D^* = \frac{-\sigma_3 I^* - \gamma_2 \varphi_1}{\rho} I^*$$

$$P^* = \frac{-\alpha_1 I^* - (1-\rho)\varphi_2}{\theta} I^*$$

$$S^* = \frac{v_1 I^*}{\frac{\beta_2(1+\eta_1\varphi_1 I^* + \eta_2\varphi_2 I^*)}{1+\varepsilon\varphi_2 I^*} + \frac{\beta_1\varphi_3 I^*}{K+\varphi_3 I^*}}$$

$$I^* = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

kemudian dengan menggunakan matriks generasi selajutnya untuk mencari bilangan reproduksi dasar dari sistem tersebut, didapatkan:

$$R_0 = \frac{\pi}{\mu} \left[\beta_2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{\eta_1\sigma_2}{v_1v_2} + \frac{\eta_2(\gamma_2\sigma_2 + v_2\sigma_3)}{\rho v_1v_2} \right) + \frac{\beta_1}{\rho\theta K} \left(\frac{\alpha_2\gamma_2\sigma_2}{v_1v_2} + \frac{\rho\alpha_1 + \alpha_2\sigma_3}{v_1} \right) \right]$$

3. Setelah dilakukan analisis kestabilan pada masing-masing titik kesetimbangannya maka dapat diketahui bahwa simulasi numerik yang dilakukan untuk melihat kurva kestabilan pada masing-masing kompartmen. Analisis model mengungkapkan adanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil untuk $R_0 < 1$ atau keberadaan titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil secara global untuk nilai $R_0^C < R_0$ yang dipengaruhi oleh tingkat ketakutan yang tinggi. Kemudian pada analisis kestabilan pada titik kesetimbangan endemik ialah stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan hal tersebut, maka meta populasi penyebaran virus Ebola dapat dicegah dengan menunjukan bahwa tingkat ketakutan pada setiap individu. ketika tingkat ketakutan kematian akibat penyakit rendah dan tingkat kontak meningkat maka pengendalian virus ebola menjadi lebih sulit karena adanya bifurkasi ke belakang. Peningkatan tingkat ketakutan mengubah perilaku manusia dan mengarah pada penurunan tingkat kontak secara langsung, sehingga muncul bifurkasi kedepan dan pengurangan jumlah $R_0 < 1$ yang dapat memberantas virus ebola.

5.2 Saran

Untuk menindaklanjuti penelitian ini, dapat dikembangkan model matematika meta populasi penyebaran virus ebola dengan menggunakan nilai parameter berdasarkan data virus ebola di seluruh dunia, dengan mempertimbangkan perilaku masyarakat sekitar juga dan juga memperhitungkan faktor lain seperti rasa ketakutan dan kebiasaan individu dengan menggunakan metode penyelesaian model matematika lain yang lebih akurat dan terbaru.

DAFTAR PUSTAKA

- A, Lee. (2020). “*Wuhan novel coronavirus (COVID-19): why global control is challenging?*,” *Public Health*, vol. 179, pp. A1–A2, doi: 10.1016/j.puhe.2020.02.001.
- Al-Maraghi, Ahmad Mushthafa. (1993). *Tafsir Al-Maraghi Juz XII. terj. Bahrn Abubakar*. Semarang: Toha Putra
- Al-Qur'an Terjemahan. (2015). *Departement Agama RI*. Bandung: CV. Darus Sunnah.
- Anton, H dan Rorres, C. (2004). *Aljabar Linier Elementer: Versi Aplikasi. Edisi 8. Jilid I. Terjemahan Refina Indriasari dan Irzam Harmein*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, Howard.(2000). *Elementary Linear Algebra 8th Ed*. USA: Anton Textbooks, Inc.
- Aqsa Nazir, Naveed Ahmed, Umar Khan, Syed Tauseef Mohyud-Din, Kottakkaran Sooppy Nisar, Ilyas Khan.(2020). *An advanced version of a conformable mathematical model of Ebola virus disease in Africa*. Jurnal of Alexandria Engineering Journal,59,3261-3268.
- Attila,D.,& Abba,B. (2019). *Modeling the impact of quarantine during an outbreak of Ebola virus disease*. Jurnal of Infectious Disease Modelling, 4, 12-27.
- Awawin Mustana Rohmah dan Dinita Rahmalia.(2021). *SEIR model simulation on the spreading of Ebola virus between two regions*. Journal of Physics: Conference Series,1882,1-8.
- Basri, H. (2014). *Using qualitative research in accounting and management studies: not a new agenda*. Journal of US-China Public Administration, October 2014, Vol.11, No.10, 831-838, doi: 10.17265/1548-6591/2014.10.003.
- Baseler L., Chertow D, dkk. (2017). *The Pathogenesis of Ebola Virus Disease*. *Annu. Rev. Pathol. Mech. Dis.* 12:387–418.
- Berman, A. and Plemmons, R.J. (1979) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. New York:Academic Press.
- Boyce, William E.& DiPrima, Richard C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (edisi ke-10th)*. Wiley. United States of America.

- Boyce, William E.& DiPrima, Richard C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (edisi ke-10th)*. Wiley. United States of America.
- Giesecke, J. (2017). *Modern Infectious Disease Epidemiology (3rd ed.)*. Florida: CRC Press.
- Hale, J.& Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations. Texts in Applied Mathematics. Vol. 3*. Berlin: Springer-Verlag.
- Hardiningsih, A. Y. (2010). *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik pada Waktu Diskrit*. <http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate13427-Paper.pdf> [25 Februari 2022].
- Kreyszig, Erwin. (2013). *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley Plus. United States of America.
- Kuznetsov, Yuri A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory (Third ed.)*. New York: Springer-Verlag.
- Mode, Charles J., (1971). *Multitype branching processes; theory and applications*. New York: American Elsevier Pub.
- Mohamed, Z. M., Abdul Majid, A. H., & Ahmad, N. (2010). *Tapping new possibility in accounting research, in qualitative research in accounting Malaysian case*. Kuala Lumpur, Malaysia: Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Nyabadza, Juga. (2021). *An Ebola Virus Disease Model With Fear And Environmetal Transmission Dynamics*. South Africa: University of Johannesburg
- Penney, Edwards. (2014). *Differential Equations and Linear Algebra*. United States of America: Pearson.
- Prayudi. (2006). *Matematika teknik persamaan diferensial, transformasi laplace, deret fourier*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Purcell, E. J. (1990). *Kalkulus dan Geometri Analitis Ed ke-4*. Jakarta: Erlangga.
- Strogatz, Steven H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison Wesley. ISBN 978-0-7382-0453-6
- Strogatz, Steven H. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Books Publishing.
- WHO. (2014a). *Case definition recommendations for ebola or Marburg virus diseases*. GAR Accessed on 4TH May 2020.

Zhao, Xiao-Qiang (2017), *"The Theory of Basic Reproduction Ratios", Dynamical Systems in Population Biology, CMS Books in Mathematics*, Springer International Publishing, pp. 285–315, doi:10.1007/978-3-319-56433-3-11.

Lampiran 1: Nilai Pada k_1 sampai k_4 , l_1 sampai l_4 , m_1 sampai m_4 , n_1 sampai n_4 , o_1 sampai o_4

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, S_i, I_i, H_i, D_i, P_i) \\
&= \pi - (\lambda + \mu)S_i \\
l_1 &= g(t_i, S_i, I_i, H_i, D_i, P_i) \\
&= \lambda S_i - v_1 I_i \\
m_1 &= p(t_i, S_i, I_i, H_i, D_i, P_i) \\
&= \sigma_2 I_i - v_2 H_i \\
n_1 &= q(t_i, S_i, I_i, H_i, D_i, P_i) \\
&= \sigma_3 I_i + \gamma_2 H_i - \rho D_i \\
o_1 &= r(t_i, S_i, I_i, H_i, D_i, P_i) \\
&= \alpha_1 I_i + (1 - \rho)D_i - \theta P_i \\
k_2 &= f(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, I_i + l_1 \frac{h}{2}, H_i + m_1 \frac{h}{2}, D_i + n_1 \frac{h}{2}, P_i + o_1 \frac{h}{2}) \\
&= \pi - (\lambda + \mu)(S_i + k_1 \frac{h}{2}) \\
l_2 &= g(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, I_i + l_1 \frac{h}{2}, H_i + m_1 \frac{h}{2}, D_i + n_1 \frac{h}{2}, P_i + o_1 \frac{h}{2}) \\
&= \lambda \left(S_i + k_1 \frac{h}{2} \right) - v_1 \left(I_i + l_1 \frac{h}{2} \right) \\
m_2 &= p(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, I_i + l_1 \frac{h}{2}, H_i + m_1 \frac{h}{2}, D_i + n_1 \frac{h}{2}, P_i + o_1 \frac{h}{2}) \\
&= \sigma_2 \left(I_i + l_1 \frac{h}{2} \right) - v_2 \left(H_i + m_1 \frac{h}{2} \right) \\
n_2 &= q(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, I_i + l_1 \frac{h}{2}, H_i + m_1 \frac{h}{2}, D_i + n_1 \frac{h}{2}, P_i + o_1 \frac{h}{2}) \\
&= \sigma_3 \left(I_i + l_1 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 \left(H_i + m_1 \frac{h}{2} \right) - \rho \left(D_i + n_1 \frac{h}{2} \right) \\
o_2 &= r(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, I_i + l_1 \frac{h}{2}, H_i + m_1 \frac{h}{2}, D_i + n_1 \frac{h}{2}, P_i + o_1 \frac{h}{2}) \\
&= \alpha_1 \left(I_i + l_1 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 + (1 - \rho) \left(D_i + n_1 \frac{h}{2} \right) - \theta \left(P_i + o_1 \frac{h}{2} \right) \\
k_3 &= f(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, I_i + l_2 \frac{h}{2}, H_i + m_2 \frac{h}{2}, D_i + n_2 \frac{h}{2}, P_i + o_2 \frac{h}{2}) \\
&= \pi - (\lambda + \mu)(S_i + k_2 \frac{h}{2}) \\
l_3 &= g(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, I_i + l_2 \frac{h}{2}, H_i + m_2 \frac{h}{2}, D_i + n_2 \frac{h}{2}, P_i + o_2 \frac{h}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left(S_i + k_2 \frac{h}{2} \right) - v_1 \left(I_i + l_2 \frac{h}{2} \right) \\
m_3 &= p \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, I_i + l_2 \frac{h}{2}, H_i + m_2 \frac{h}{2}, D_i + n_2 \frac{h}{2}, P_i + O_2 \frac{h}{2} \right) \\
&= \sigma_2 \left(I_i + l_2 \frac{h}{2} \right) - v_2 \left(H_i + m_2 \frac{h}{2} \right) \\
n_3 &= q \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, I_i + l_2 \frac{h}{2}, H_i + m_2 \frac{h}{2}, D_i + n_2 \frac{h}{2}, P_i + O_2 \frac{h}{2} \right) \\
&= \sigma_3 \left(I_i + l_2 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 \left(H_i + m_2 \frac{h}{2} \right) - \rho \left(D_i + n_2 \frac{h}{2} \right) \\
o_3 &= r \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, I_i + l_2 \frac{h}{2}, H_i + m_2 \frac{h}{2}, D_i + n_2 \frac{h}{2}, P_i + O_2 \frac{h}{2} \right) \\
&= \alpha_1 \left(I_i + l_2 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 + (1 - \rho) \left(D_i + n_2 \frac{h}{2} \right) - \theta \left(P_i + O_2 \frac{h}{2} \right) \\
k_4 &= f \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_3 \frac{h}{2}, I_i + l_3 \frac{h}{2}, H_i + m_3 \frac{h}{2}, D_i + n_3 \frac{h}{2}, P_i + O_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= \pi - (\lambda + \mu) \left(S_i + k_3 \frac{h}{2} \right) \\
l_4 &= g \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_3 \frac{h}{2}, I_i + l_3 \frac{h}{2}, H_i + m_3 \frac{h}{2}, D_i + n_3 \frac{h}{2}, P_i + O_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= \lambda \left(S_i + k_3 \frac{h}{2} \right) - v_1 \left(I_i + l_3 \frac{h}{2} \right) \\
m_4 &= p \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_3 \frac{h}{2}, I_i + l_3 \frac{h}{2}, H_i + m_3 \frac{h}{2}, D_i + n_3 \frac{h}{2}, P_i + O_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= \sigma_2 \left(I_i + l_3 \frac{h}{2} \right) - v_2 \left(H_i + m_3 \frac{h}{2} \right) \\
n_4 &= q \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_3 \frac{h}{2}, I_i + l_3 \frac{h}{2}, H_i + m_3 \frac{h}{2}, D_i + n_3 \frac{h}{2}, P_i + O_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= \sigma_3 \left(I_i + l_3 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 \left(H_i + m_3 \frac{h}{2} \right) - \rho \left(D_i + n_3 \frac{h}{2} \right) \\
o_4 &= r \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_3 \frac{h}{2}, I_i + l_3 \frac{h}{2}, H_i + m_3 \frac{h}{2}, D_i + n_3 \frac{h}{2}, P_i + O_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= \alpha_1 \left(I_i + l_3 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 + (1 - \rho) \left(D_i + n_3 \frac{h}{2} \right) - \theta \left(P_i + O_3 \frac{h}{2} \right)
\end{aligned}$$

Lampiran 2: Mensubstitusikan Nilai k_1 sampai k_4 , l_1 sampai l_4 , m_1 sampai m_4 , n_1 sampai n_4 , o_1 sampai o_4 pada Lampiran 2 Kedalam Persamaan (4.25)

$$k_1 = \pi - \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) S_0$$

$$\begin{aligned}
&= 200 - \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} \right. \\
&\quad \left. + 0.000296 \right) 98000 \\
&= -62880.68844 \\
l_1 &= \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} \right) S_0 - v_1 I_0 \\
&= \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} \right) 98000 \\
&\quad - 0.949296.1500 \\
&= 61627.73644 \\
m_1 &= \sigma_2 I_0 - v_2 H_0 \\
&= 0.019.1500 - 1.000296.1000 \\
&= -971.796000 \\
n_1 &= \sigma_3 I_0 + \gamma_2 H_0 - \rho D_0 \\
&= 0.6.1500 + 0.2.1000 - 0.009.300 \\
&= 1097.300 \\
o_1 &= \alpha_1 I_0 + \alpha_2 D_0 - \theta P_0 \\
&= 0.005.1500 + 0.06.300 - 0.0016.600 \\
&= 92.0400 \\
k_2 &= \pi - \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) (S_0 + k_1 \frac{h}{2}) \\
&= 200 - \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} + 0.000296 \right) \\
&\quad (98000 + -62880.68844 \frac{0.01}{2}) \\
&= 199.3563195 \\
l_2 &= \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) \left(S_0 + k_1 \frac{h}{2} \right) - v_1 \left(I_0 + l_1 \frac{h}{2} \right) \\
&= \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} + 0.000296 \right) \\
&\quad \left(98000 + -62880.68844 \frac{0.01}{2} \right) - 0.949296 \left(1500 + 61627.73644 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= -0.3059115057 \\
m_2 &= \sigma_2 \left(I_0 + l_1 \frac{h}{2} \right) - v_2 \left(H_0 + m_1 \frac{h}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$= 0.019 \left(1500 + 61627.73644 \frac{0.01}{2} \right) - 1.00296 \left(1000 + -971.796000 \frac{0.01}{2} \right)$$

$$= -0.981296$$

$$n_2 = \sigma_3 \left(I_0 + l_1 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 \left(H_0 + m_1 \frac{h}{2} \right) - \rho \left(D_0 + n_1 \frac{h}{2} \right)$$

$$= 0.6 \left(1500 + 61627.73644 \frac{0.01}{2} \right) + 0.2 \left(1000 + -971.796000 \frac{0.01}{2} \right) -$$

$$0.009 \left(300 + 1097.300 \frac{0.01}{2} \right)$$

$$= 196.8788255$$

$$o_2 = \alpha_1 \left(I_0 + l_1 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 + \alpha_2 \left(D_0 + n_1 \frac{h}{2} \right) - \theta \left(P_0 + o_1 \frac{h}{2} \right)$$

$$= 0.005 \left(1500 + 61627.73644 \frac{0.01}{2} \right) + 0.2 + 0.06 \left(300 + 1097.300 \frac{0.01}{2} \right) -$$

$$0.016 \left(600 + 92.0400 \frac{0.01}{2} \right)$$

$$= -0.8507363200$$

$$k_3 = \pi - \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) \left(S_0 + k_2 \frac{h}{2} \right)$$

$$= 200 - \left(\frac{0.67.600}{30+600} + \frac{0.64.1500}{1+0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1+0.4.300} + \frac{1.2.300}{1+0.4.300} + 0.000296 \right) (98000 +$$

$$199.3563195 \frac{0.01}{2})$$

$$= 199.3563195$$

$$l_3 = \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) \left(S_0 + k_2 \frac{h}{2} \right) - v_1 \left(I_0 + l_2 \frac{h}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} + 0.000296 \right)$$

$$\left(98000 + 199.3563195 \frac{0.01}{2} \right) - 0.949296$$

$$\left(1500 \pm 0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right)$$

$$= -0.3059115057$$

$$m_3 = \sigma_2 \left(I_0 + l_2 \frac{h}{2} \right) - v_2 \left(H_0 + m_2 \frac{h}{2} \right)$$

$$= 0.019 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) - 1.00296 \left(1000 + -0.981296 \frac{0.01}{2} \right)$$

$$= -0.981296$$

$$n_3 = \sigma_3 \left(I_0 + l_2 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 \left(H_0 + m_2 \frac{h}{2} \right) - \rho \left(D_0 + n_2 \frac{h}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 0.6 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) + 0.2 \left(1000 + -0.981296 \frac{0.01}{2} \right) \\
&\quad - 0.009 \left(300 + 196.8788255 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= 197.8901592 \\
o_3 &= \alpha_1 \left(I_0 + l_2 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 + \alpha_2 \left(D_0 + n_2 \frac{h}{2} \right) - \theta \left(P_0 + O_2 \frac{h}{2} \right) \\
&= 0.005 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) + 0.2 + 0.06 \left(300 + 196.8788255 \frac{0.01}{2} \right) \\
&\quad - 0.016 \left(600 + -0.8507363200 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= -8400031941 \\
k_4 &= \pi - \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) \left(S_0 + k_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= 200 - \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} \right. \\
&\quad \left. + 0.000296 \right) \left(98000 + 199.3563195 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= 199.3563195 \\
l_4 &= \left(\frac{\beta_1 P_0}{K + P_0} + \frac{\beta_2 I_0}{1 + \varepsilon D} + \frac{\eta_1 H_0}{1 + \varepsilon D_0} + \frac{\eta_2 D_0}{1 + \varepsilon D_0} + \mu \right) \left(S_0 + k_3 \frac{h}{2} \right) - v_1 \left(I_0 + l_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= \left(\frac{0.67.600}{30 + 600} + \frac{0.64.1500}{1 + 0.4.300} + \frac{0.09.1000}{1 + 0.4.300} + \frac{1.2.300}{1 + 0.4.300} \right. \\
&\quad \left. + 0.000296 \right) \left(98000 + 199.3563195 \frac{0.01}{2} \right) \\
&\quad - 0.949296 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= -0.3059115057 \\
m_4 &= \sigma_2 \left(I_0 + l_3 \frac{h}{2} \right) - v_2 \left(H_0 + m_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= 0.019 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) \\
&\quad - 1.00296 \left(1000 + -0.981296 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= -0.981296 \\
n_4 &= \sigma_3 \left(I_0 + l_3 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 \left(H_0 + m_3 \frac{h}{2} \right) - \rho \left(D_0 + n_3 \frac{h}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.6 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) + 0.2 \left(1000 + -0.981296 \frac{0.01}{2} \right) \\
&\quad - 0.009 \left(300 + 197.8901592 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= 197.8901136 \\
o_4 &= \alpha_1 \left(I_0 + l_3 \frac{h}{2} \right) + \gamma_2 + \alpha_2 \left(D_0 + n_3 \frac{h}{2} \right) - \theta \left(P_0 + O_3 \frac{h}{2} \right) \\
&= 0.005 \left(1500 + -0.3059115057 \frac{0.01}{2} \right) + 0.2 \\
&\quad + 0.06 \left(300 + 197.8901136 \frac{0.01}{2} \right) \\
&\quad - 0.016 \left(600 + -8400031941 \frac{0.01}{2} \right) \\
&= -0.8499932000
\end{aligned}$$

Lampiran 3: Script Maple untuk menghitung Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

```

> restart; with(linalg) : with(LinearAlgebra) :
> unprotect(gamma) :
> lambda :=  $\left( \frac{\text{beta}_1 \cdot P}{\text{Kappa} + P} + \frac{\text{beta}_2 (In + \text{eta}_1 \cdot H + \text{eta}_2 \cdot D)}{1 + \epsilon \cdot D} \right);$ 
> dS := pi - (lambda + mu) · S;
> dIn := lambda · S - v1 · In;
> dH := sigma2 · In - v2 · H;
> dD := sigma3 · In + gamma2 · H - rho · D;
> dP := alpha1 · In + (1 - rho) · D - theta · P;
> titep1 := solve({dH}, {H});


$$titep1 := \left\{ H = \frac{In \sigma_2}{v_2} \right\}$$

> titep2 := solve({dD}, {D});


$$titep2 := \left\{ D = \frac{H \gamma_2 + In \sigma_3}{\rho} \right\}$$

> titep3 := solve({dP}, {P});


$$titep3 := \left\{ P = - \frac{D \rho - In \alpha_1 - D}{\theta} \right\}$$

> persS := pi - (lambda + mu) · S;


$$persS := \pi - \left( \frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 (D \eta_2 + H \eta_1 + In)}{D \epsilon + 1} + \mu \right) S$$

> persIn := lambda · S - v1 · In;

```

$$persIn := -v_1 In + S \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 (D \eta_2 + H \eta_1 + In)}{D \varepsilon + 1} \right)$$

> titep4 := subs(lm = titep1, titep2, titep3, lambda);

$$titep4 := -\frac{\beta_1 (D \rho - In \alpha_1 - D)}{\theta \left(K - \frac{D \rho - In \alpha_1 - D}{\theta} \right)} + \frac{\beta_2 \left(\frac{\eta_2 (H \gamma_2 + In \sigma_3)}{\rho} + \eta_1 H + In \right)}{\frac{\varepsilon (H \gamma_2 + In \sigma_3)}{\rho} + 1}$$

> titep5 := subs(S = titep4, dIn);

$$\begin{aligned} > \quad titep5 := -v_1 In + \left(-\frac{\beta_1 (D \rho - In \alpha_1 - D)}{\theta \left(K - \frac{D \rho - In \alpha_1 - D}{\theta} \right)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\beta_2 \left(\frac{\eta_2 (H \gamma_2 + In \sigma_3)}{\rho} + \eta_1 H + In \right)}{\frac{\varepsilon (H \gamma_2 + In \sigma_3)}{\rho} + 1} \right) \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 (D \eta_2 + H \eta_1 + In)}{D \varepsilon + 1} \right) \end{aligned}$$

titep6 := subs(In = titep5, dS);

$$\begin{aligned} > \quad titep6 := \pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{1}{D \varepsilon + 1} \left(\beta_2 \left(\eta_2 D + \eta_1 H - v_1 In + \left(-\frac{\beta_1 (D \rho - In \alpha_1 - D)}{\theta \left(K - \frac{D \rho - In \alpha_1 - D}{\theta} \right)} + \frac{\beta_2 \left(\frac{\eta_2 (H \gamma_2 + In \sigma_3)}{\rho} + \eta_1 H + In \right)}{\frac{\varepsilon (H \gamma_2 + In \sigma_3)}{\rho} + 1} \right) \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 (D \eta_2 + H \eta_1 + In)}{D \varepsilon + 1} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\beta_2 (D \eta_2 + H \eta_1 + In)}{D \varepsilon + 1} \right) \right) + \mu \Bigg) S \end{aligned}$$

jac := jacobian([dIn, dH, dD, dP], [In, H, D, P]);

$$\begin{aligned} > \quad jac := & \left[\left[-v_1 + \frac{SD(\beta_2)(D \eta_2 + H \eta_1 + In)}{D \varepsilon + 1}, \frac{SD(\beta_2)(D \eta_2 + H \eta_1 + In) \eta_1}{D \varepsilon + 1}, \right. \right. \\ & S \left(\frac{D(\beta_2)(D \eta_2 + H \eta_1 + In) \eta_2}{D \varepsilon + 1} - \frac{\beta_2 (D \eta_2 + H \eta_1 + In) \varepsilon}{(D \varepsilon + 1)^2} \right), S \left(\frac{\beta_1}{K + P} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2} \right) \right], \\ & \left[\sigma_2, -v_2, 0, 0 \right], \\ & \left[\sigma_3, \gamma_2, -\rho, 0 \right], \\ & \left[\alpha_1, 0, 1 - \rho, -\theta \right] \end{aligned}$$

$$V := \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & v_2 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & -\gamma_2 & \rho & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \theta \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
& V := \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & v_2 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & -\gamma_2 & \rho & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \theta \end{bmatrix} \\
> F := \begin{bmatrix} \frac{\pi \cdot \beta_2}{\mu} & \frac{\pi \cdot \beta_2 \cdot \eta_1}{\mu} & \frac{\pi \cdot \beta_2 \cdot \eta_2}{\mu} & \frac{\pi \cdot \beta_1}{\mu \cdot K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
& F := \begin{bmatrix} \frac{\pi \beta_2}{\mu} & \frac{\pi \beta_2 \eta_1}{\mu} & \frac{\pi \beta_2 \eta_2}{\mu} & \frac{\pi \beta_1}{\mu K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
> \det(V); \\
& v_1 v_2 \rho \theta \\
> g := \text{inverse}(V); \\
& g := \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_2}{v_1 v_2} & \frac{1}{v_2} & 0 & 0 \\ \frac{v_2 \sigma_3 + \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2 \rho} & \frac{\gamma_2}{v_2 \rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\rho v_2 \alpha_1 + \rho \alpha_2 \sigma_2 + v_2 \alpha_3 \sigma_3 + \alpha_3 \gamma_2 \sigma_2}{v_1 v_2 \rho \theta} & \frac{\rho \alpha_2 + \alpha_3 \gamma_2}{v_2 \rho \theta} & \frac{\alpha_3}{\rho \theta} & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \\
> NGM := \text{evalm}(Fg);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NGM := & \left[\left[\frac{\pi \beta_2}{\mu v_1} + \frac{\pi \beta_2 \eta_1 \sigma_2}{\mu v_1 v_2} + \frac{\pi \beta_2 \eta_2 (v_2 \sigma_3 + \gamma_2 \sigma_2)}{\mu v_1 v_2 \rho} \right. \right. \\
& + \frac{\pi \beta_1 (\rho v_2 \alpha_1 + \rho \alpha_2 \sigma_2 + v_2 \alpha_3 \sigma_3 + \alpha_3 \gamma_2 \sigma_2)}{\mu K v_1 v_2 \rho \theta}, \frac{\pi \beta_2 \eta_1}{\mu v_2} + \frac{\pi \beta_2 \eta_2 \gamma_2}{\mu v_2 \rho} \\
& + \frac{\pi \beta_1 (\rho \alpha_2 + \alpha_3 \gamma_2)}{\mu K v_2 \rho \theta}, \frac{\pi \beta_2 \eta_2}{\mu \rho} + \frac{\pi \beta_1 \alpha_3}{\mu K \rho \theta}, \frac{\pi \beta_1}{\mu K \theta} \Big], \\
& \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}, \\
& \left. \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}$$

- > restart; with(linalg) : with(LinearAlgebra) : with(VectorCalculus) :
- > unprotect(gamma) :
- > $dS := \pi - \left(\left(\frac{\beta_1 \cdot P}{K + P} + \frac{\beta_2 \cdot In}{1 + \varepsilon \cdot D} + \frac{\eta_1 \cdot H}{1 + \varepsilon \cdot D} + \frac{\eta_2 \cdot D}{1 + \varepsilon \cdot D} \right) + \mu \right) \cdot S;$
- > $dIn := \left(\frac{\beta_1 \cdot P}{K + P} + \frac{\beta_2 \cdot In}{1 + \varepsilon \cdot D} + \frac{\eta_1 \cdot H}{1 + \varepsilon \cdot D} + \frac{\eta_2 \cdot D}{1 + \varepsilon \cdot D} \right) \cdot S - v_1 \cdot In;$
- > $dH := \sigma_2 \cdot In - v_2 \cdot H;$
- > $dD := \sigma_3 \cdot In + \gamma_2 \cdot H - \rho \cdot D;$
- > $dP := \alpha_1 \cdot In + (1 - \rho) \cdot D - \theta \cdot P;$
- > $TTK := solve([dS, dIn, dH, dD, dP], [S, In, H, D, P]) :$
- > $DFE := TTK[1];$

$$DFE := \left[S = \frac{\pi}{\mu}, In = 0, H = 0, D = 0, P = 0 \right]$$

- > END := TTK[2] :
- > jac := Jacobian([dS, dIn, dH, dD, dP], [S, In, H, D, P]);

$$\begin{aligned} jac := & \left[\left[-\frac{\beta_1 P}{K + P} - \frac{\beta_2 In}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_1 H}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_2 D}{D\varepsilon + 1} - \mu - \frac{\beta_2 S}{D\varepsilon + 1}, -\left(\frac{\beta_1 S}{D\varepsilon + 1} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\beta_2 In\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_1 H\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} + \frac{\eta_2}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_2 D\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} \right) S, -\left(\frac{\beta_1}{K + P} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2} \right) S \right], \right. \\ & \left[\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 In}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_1 H}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_2 D}{D\varepsilon + 1}, \frac{\beta_2 S}{D\varepsilon + 1} - v_1, \frac{\eta_1 S}{D\varepsilon + 1}, \left(-\frac{\beta_2 In\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\eta_1 H\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} + \frac{\eta_2}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_2 D\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} \right) S, \left(\frac{\beta_1}{K + P} - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2} \right) S \right], \\ & \left[0, \sigma_2, -v_2, 0, 0 \right], \\ & \left[0, \sigma_3, \gamma_2, -\rho, 0 \right], \\ & \left. \left[0, \alpha_1, 0, 1 - \rho, -\theta \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Jacobian & \left(\left[\pi - \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 In}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_1 H}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_2 D}{D\varepsilon + 1} + \mu \right) S, -v_1 In + S \left(\frac{\beta_1 P}{K + P} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\beta_2 In}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_1 H}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_2 D}{D\varepsilon + 1} \right), -Hv_2 + In\sigma_2, -D\rho + H\gamma_2 + In\sigma_3, \alpha_1 In + (1 \right. \right. \\ & \left. \left. - \rho) D - \theta P \right], [S, In, H, D, P] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left[-\frac{\beta_1 P}{K + P} - \frac{\beta_2 In}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_1 H}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_2 D}{D\varepsilon + 1} - \mu - \frac{\beta_2 S}{D\varepsilon + 1}, -\left(\frac{\beta_1 S}{D\varepsilon + 1} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\beta_2 In\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} - \frac{\eta_1 H\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} + \frac{\eta_2}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_2 D\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} \right) S, -\left(\frac{\beta_1}{K + P} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2} \right) S \right], \right. \\ & \left[\frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 In}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_1 H}{D\varepsilon + 1} + \frac{\eta_2 D}{D\varepsilon + 1}, \frac{\beta_2 S}{D\varepsilon + 1} - v_1, \frac{\eta_1 S}{D\varepsilon + 1}, \left(-\frac{\beta_2 In\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\eta_1 H\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} + \frac{\eta_2}{D\varepsilon + 1} - \frac{\eta_2 D\varepsilon}{(D\varepsilon + 1)^2} \right) S, \left(\frac{\beta_1}{K + P} - \frac{\beta_1 P}{(K + P)^2} \right) S \right], \\ & \left[0, \sigma_2, -v_2, 0, 0 \right], \\ & \left[0, \sigma_3, \gamma_2, -\rho, 0 \right], \\ & \left. \left[0, \alpha_1, 0, 1 - \rho, -\theta \right] \right] \end{aligned}$$

$A := \text{subs}(DFE, \text{jac});$

$$A := \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_1 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \frac{\beta_2 \pi}{\mu} - v_1 & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} & \frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \gamma_2 & -\rho & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1 - \rho & -\theta \end{bmatrix}$$

$\triangleright \text{polil} := \text{collect}(\text{charpoly}(A, \lambda), \lambda);$

$$\triangleright \text{polil} := \lambda^5 + \frac{(\mu^2 + K\mu\rho + K\mu\theta + K\mu v_1 + K\mu v_2 - K\pi\beta_2)\lambda^4}{K\mu} + \frac{1}{K\mu} \left((\mu(K\mu\rho + K\mu\theta + K\mu v_1 + K\mu v_2 - K\pi\beta_2) + K\mu\rho\theta + K\mu\rho v_1 + K\mu\rho v_2 + K\mu\theta v_1 + K\mu\theta v_2 + K\mu v_1 v_2 - K\pi\rho\beta_2 - K\pi\theta\beta_2 - K\pi\beta_2 v_2 - K\pi\eta_1\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 - \alpha_1\beta_1\pi)\lambda^3 \right) + \frac{1}{K\mu} \left((\mu(K\mu\rho\theta + K\mu\rho v_1 + K\mu\rho v_2 + K\mu\theta v_1 + K\mu\theta v_2 + K\mu v_1 v_2 - K\pi\rho\beta_2 - K\pi\theta\beta_2 - K\pi\beta_2 v_2 - K\pi\eta_1\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 - \alpha_1\beta_1\pi) + K\mu\rho\theta v_1 + K\mu\rho\theta v_2 + K\mu\rho v_1 v_2 + K\mu\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 - K\pi\rho\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\beta_2 v_2 - K\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 - \pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \pi\beta_1\sigma_3)\lambda^2 \right) + \frac{1}{K\mu} \left((\mu(K\mu\rho\theta v_1 + K\mu\rho\theta v_2 + K\mu\rho v_1 v_2 + K\mu\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 - K\pi\rho\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\beta_2 v_2 - K\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 - \pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \pi\beta_1\sigma_3) + K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)\lambda \right) + \frac{1}{K} (K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)$$

LinearAlgebra:-CharacteristicPolynomial(**(9)**, $\lambda\theta$)

$$\lambda\theta^5 + \frac{(\mu^2 + \rho\mu + \theta\mu + v_1\mu + v_2\mu - \beta_2\pi)\lambda\theta^4}{\mu} + \frac{1}{K\mu} \left((K\mu^2\rho + \theta\mu^2K + K\mu^2v_1 + K\mu^2v_2 - K\mu\pi\beta_2 + K\mu\rho\theta + K\mu\rho v_1 + K\mu\rho v_2 + K\mu\theta v_1 + K\mu\theta v_2 + K\mu v_1 v_2 - K\pi\rho\beta_2 - K\pi\theta\beta_2 - K\pi\beta_2 v_2 - K\pi\eta_1\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 - \alpha_1\beta_1\pi)\lambda\theta^3 \right) + \frac{1}{\mu K} \left((K\mu^2\rho\theta + K\mu^2\rho v_1 + K\mu^2\rho v_2 + K\mu^2\theta v_1 + K\mu^2\theta v_2 + K\mu^2v_1 v_2 - K\mu\pi\rho\beta_2 - K\mu\pi\theta\beta_2 - K\mu\pi\beta_2 v_2 - K\mu\pi\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_3 + K\mu\rho\theta v_1 + K\mu\rho\theta v_2 + K\mu\rho v_1 v_2 + K\mu\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 - K\pi\rho\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\beta_2 v_2 - K\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 v_2 - \alpha_1\beta_1\pi\mu - \pi\rho\alpha_1\beta_1 + \rho\sigma_3\beta_1\pi - \pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \sigma_3\beta_1\pi)\lambda\theta^2 \right) + \frac{1}{\mu K} \left((K\mu^2\rho\theta v_1 + K\mu^2\rho\theta v_2 + K\mu^2\rho v_1 v_2 + K\mu^2\theta v_1 v_2 - K\mu\pi\rho\theta\beta_2 - K\mu\pi\rho\beta_2 v_2 - K\mu\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\theta\beta_2 v_2 - K\mu\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\mu\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_3 v_2 + K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \mu\pi\rho\alpha_1\beta_1 + \rho\sigma_3\beta_1\pi - \mu\pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \mu\pi\beta_1\sigma_3 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)\lambda\theta \right) + \frac{1}{K} (K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)$$

> A5 := factor(coeff(polil, λ, 5));

$$A5 := 1$$

> A4 := factor(coeff(polil, λ, 4));

$$A4 := \frac{\mu^2 + \mu\rho + \mu\theta + v_1\mu + \mu v_2 - \beta_2\pi}{\mu}$$

> A3 := factor(coeff(polil, λ, 3));

$$A3 := \frac{1}{K\mu} (K\mu^2\rho + K\mu^2\theta + K\mu^2v_1 + K\mu^2v_2 - K\mu\pi\beta_2 + K\mu\rho\theta + K\mu\rho v_1 + K\mu\rho v_2 + K\mu\theta v_1 + K\mu\theta v_2 + K\mu v_1 v_2 - K\pi\rho\beta_2 - K\pi\theta\beta_2 - K\pi\beta_2 v_2 - K\pi\eta_1\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 - \alpha_1\beta_1\pi)$$

> A2 := factor(coeff(polil, λ, 2));

$$A2 := \frac{1}{K\mu} (K\mu^2\rho\theta + K\mu^2\rho v_1 + K\mu^2\rho v_2 + K\mu^2\theta v_1 + K\mu^2\theta v_2 + K\mu^2v_1 v_2 - K\mu\pi\rho\beta_2 - K\mu\pi\theta\beta_2 - K\mu\pi\beta_2 v_2 - K\mu\pi\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_3 + K\mu\rho\theta v_1 + K\mu\rho\theta v_2 + K\mu\rho v_1 v_2 + K\mu\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 - K\pi\rho\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\beta_2 v_2 - K\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\eta_2\sigma_3 v_2 - \mu\pi\alpha_1\beta_1 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 - \pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \pi\beta_1\sigma_3)$$

A1 := factor(coeff(polil, λ, 1));

$$A1 := \frac{1}{K\mu} (K\mu^2\rho\theta v_1 + K\mu^2\rho\theta v_2 + K\mu^2\rho v_1 v_2 + K\mu^2\theta v_1 v_2 - K\mu\pi\rho\theta\beta_2 - K\mu\pi\rho\beta_2 v_2 - K\mu\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\theta\beta_2 v_2 - K\mu\pi\theta\eta_1\sigma_2 - K\mu\pi\theta\eta_2\sigma_3 - K\mu\pi\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\mu\pi\eta_2\sigma_3 v_2 + K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \mu\pi\rho\alpha_1\beta_1 + \rho\sigma_3\beta_1\pi - \mu\pi\alpha_1\beta_1 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \mu\pi\beta_1\sigma_3 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)$$

A0 := factor(coeff(polil, λ, 0));

$$A0 := \frac{1}{K} (K\mu\rho\theta v_1 v_2 - K\pi\rho\theta\beta_2 v_2 - K\pi\rho\theta\eta_1\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\gamma_2\sigma_2 - K\pi\theta\eta_2\sigma_3 v_2 - \pi\rho\alpha_1\beta_1 v_2 + \pi\rho\beta_1\gamma_2\sigma_2 + \pi\rho\beta_1\sigma_3 v_2 - \gamma_2\sigma_2\beta_1\pi - \pi\beta_1\sigma_3 v_2)$$

Mencari Analisis Kestabilan Endemik

> restart; with(linalg) : with(LinearAlgebra) : with(VectorCalculus) :

> unprotect(gamma) :

pi := 200; σ₁ := 0.33; σ₂ := 0.019; σ₃ := 0.6; η₁ := 0.09; η₂ := 1.2; gamm₁ := 0.8; gamm₂ := 0.2; ρ := 0.009; α₁ := 0.05; α₂ := 0.06; θ := 0.0016; μ := 0.000296; β₁ := 0.67; β₂ := 0.64; v₂ := 1.000296; v₁ := 0.949296; K := 30; ε := 0.4; h := 0.01 ;

> dS := pi - $\left(\left(\frac{\text{beta}_1 \cdot P}{K + P} + \frac{\text{beta}_2 \cdot In}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\text{eta}_1 \cdot H}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\text{eta}_2 \cdot X}{1 + \epsilon \cdot X} \right) + \text{mu} \right) \cdot S;$

> dIn := $\left(\frac{\text{beta}_1 \cdot P}{K + P} + \frac{\text{beta}_2 \cdot In}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\text{eta}_1 \cdot H}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\text{eta}_2 \cdot X}{1 + \epsilon \cdot X} \right) \cdot S - v_1 \cdot In;$

> dH := sigma₂ · In - v₂ · H;

> dX := sigma₃ · In + gamm₂ · H - rho · X;

> dP := alpha₁ · In + (1 - ρ) · X - theta · P;

```

> TTK := solve([dS, dIn, dH, dX, dP], [S, In, H, X, P]) :
> DFE := TTK[1];
      DFE := [S = 6.756756757 105, In = 0., H = 0., X = 0., P = 0.]

> END := TTK[2];
      END := [S = 54.14666516, In = 210.6655591, H = 4.001461190, X = 14133.29197, P
      = 8.760391010 106]

> with(linalg) : with(DEtools) : with(LinearAlgebra) : with(plots) :
> jac := Jacobian([dS, dIn, dH, dX, dP], [S, In, H, X, P]);
      jac := [[ - $\frac{0.67 P}{30 + P}$  -  $\frac{0.64 In}{1 + 0.4 X}$  -  $\frac{0.09 H}{1 + 0.4 X}$  -  $\frac{1.2 X}{1 + 0.4 X}$  - 0.000296, - $\frac{0.64 S}{1 + 0.4 X}$ ,
      -  $\frac{0.09 S}{1 + 0.4 X}$ , - $\left(-\frac{0.256 In}{(1 + 0.4 X)^2} - \frac{0.036 H}{(1 + 0.4 X)^2} + \frac{1.2}{1 + 0.4 X} - \frac{0.48 X}{(1 + 0.4 X)^2}\right) S$ ,
      - $\left(\frac{0.67}{30 + P} - \frac{0.67 P}{(30 + P)^2}\right) S$ ],
      [  $\frac{0.67 P}{30 + P} + \frac{0.64 In}{1 + 0.4 X} + \frac{0.09 H}{1 + 0.4 X} + \frac{1.2 X}{1 + 0.4 X}$ ,  $\frac{0.64 S}{1 + 0.4 X}$  - 0.949296,
       $\frac{0.09 S}{1 + 0.4 X}$ ,  $\left(-\frac{0.256 In}{(1 + 0.4 X)^2} - \frac{0.036 H}{(1 + 0.4 X)^2} + \frac{1.2}{1 + 0.4 X} - \frac{0.48 X}{(1 + 0.4 X)^2}\right) S$ ,
       $\left(\frac{0.67}{30 + P} - \frac{0.67 P}{(30 + P)^2}\right) S$ ],
      [0, 0.019, -1.000296, 0, 0],
      [0, 0.6, 0.2, -0.009, 0],
      [0, 0.05, 0, 0.991, -0.0016]]

> fp2 := TTK[2];
      fp2 := [S = 54.14666516, In = 210.6655591, H = 4.001461190, X = 14133.29197, P
      = 8.760391010 106]

> jac2 := subs(fp2, evalm(jac));
      jac2 := [[ -3.693671612, -0.006128744995, -0.0008618547649, 0.00008954826382,
      -1.418101161 10-11],
      [3.693375612, -0.9431672550, 0.0008618547649, -0.00008954826382, 1.418101161 10-1],
      [0, 0.019, -1.000296, 0, 0],
      [0, 0.6, 0.2, -0.009, 0],
      [0, 0.05, 0, 0.991, -0.0016]]

nilai_eigen2 := eigenvals(jac2);
      nilai_eigen2 := -3.68540573255888, -0.951561030254832, -0.00899986416070120,
      -1.00016824002516, -0.00160000000042762

> eigenvectors(jac2);

```



```

> [-0.9515610314, 1,
    [[ 0.002219083150 -0.9319682091 -0.3633406618 0.6703534704 -0.6502616598 ]],
    [-0.001600000000, 1,
     [[ -3.841288820 10-7 -5.285 10-10 -1.2 10-11 -4.480 10-8 1.000091291 105 ]],
     -0.0089998642, 1,
     [[ 0.0002354948680 0.0000021800 4.137 10-8 9.689928481 -1297.689621 ]],
     -3.685405731, 1,
     {[0.09910492581, -0.1334787574, 0.0009445038170, 0.02173273558,
       -0.004034741282]}], [-1.000168239, 1,
     [[ 0.0003843908570 -0.0075550484 -1.123557843 0.2312872760 -0.2291894000 ]]]]

```

restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :

```
> A := subs(fp2, evalm(jac));
```

```

A := [[-3.693671612, -0.006128744995, -0.0008618547649, 0.00008954826382,
        -1.418101161 10-11],
       [3.693375612, -0.9431672550, 0.0008618547649, -0.00008954826382, 1.418101161 10-1],
       [0, 0.019, -1.000296, 0, 0],
       [0, 0.6, 0.2, -0.009, 0],
       [0, 0.05, 0, 0.991, -0.0016]]

```

```
g := (Matrix(5, 5, [[λ, 0, 0, 0, 0], [0, λ, 0, 0, 0], [0, 0, λ, 0, 0], [0, 0, 0, λ, 0], [0, 0, 0, 0, λ]]));
```

$$g := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

```
> b := g - A;
```

```

b := [[-3.693671612 - λ, -0.006128744995, -0.0008618547649, 0.00008954826382,
        -1.418101161 10-11],
       [3.693375612, -0.9431672550 - λ, 0.0008618547649, -0.00008954826382,
        1.418101161 10-11],
       [0, 0.019, -1.000296 - λ, 0, 0],
       [0, 0.6, 0.2, -0.009 - λ, 0],
       [0, 0.05, 0, 0.991, -0.0016 - λ]]

```

```
poli1 := collect(charpoly(A, λ), λ);
```

```

poli1 := λ5 + 5.647734867 λ4 + 8.204402627 λ3 + 3.593891677 λ2 + 0.03729607639 λ
        + 0.00005050692771

```

```
> A5 := factor(coeff(poli1, λ, 5));
```

A5 := 1

```
> A4 := factor(coeff(poli1, λ, 4));
```

A4 := 5.647734867

```
> A3 := factor(coeff(poli1, λ, 3));
```

A3 := 8.204402627

```

> A2 := factor(coeff(poli1, λ, 2));
A2 := 3.593891677
> A1 := factor(coeff(poli1, λ, 1));
A1 := 0.03729607639
> A0 := factor(coeff(poli1, λ, 0));
A0 := 0.00005050692771

```

Lampiran 4: M-File Untuk Menentukan Grafik Endemik dari Model Matematika Metapopulasi Penyebaran Virus Ebola

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
> dS := pi -  $\left( \left( \frac{\beta_1 \cdot P}{K + P} + \frac{\beta_2 \cdot In}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\eta_1 \cdot H}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\eta_2 \cdot X}{1 + \epsilon \cdot X} \right) + \mu \right) \cdot S;$ 
dS :=  $\pi - \left( \frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 In}{X\epsilon + 1} + \frac{\eta_1 H}{X\epsilon + 1} + \frac{\eta_2 X}{X\epsilon + 1} + \mu \right) S$ 
> dIn :=  $\left( \frac{\beta_1 \cdot P}{K + P} + \frac{\beta_2 \cdot In}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\eta_1 \cdot H}{1 + \epsilon \cdot X} + \frac{\eta_2 \cdot X}{1 + \epsilon \cdot X} \right) \cdot S - v_1 \cdot In;$ 
dIn :=  $\left( \frac{\beta_1 P}{K + P} + \frac{\beta_2 In}{X\epsilon + 1} + \frac{\eta_1 H}{X\epsilon + 1} + \frac{\eta_2 X}{X\epsilon + 1} \right) S - v_1 In$ 
> dH := sigma_2 · In - v_2 · H;
dH :=  $-Hv_2 + In\sigma_2$ 
> dX := sigma_3 · In + gamm_2 · H - rho · X;
dX :=  $Hgamm_2 + In\sigma_3 - X\rho$ 
> dP := alpha_1 · In + (1 - ρ) · X - theta · P;
dP :=  $\alpha_1 In + (1 - \rho) X - \theta P$ 
> TTK := solve([dS, dIn, dH, dX, dP], [S, In, H, X, P]) :
> DFE := TTK[1] :
> END := TTK[2] :
> A := Matrix(jacobian([dS, dIn, dH, dX, dP], [S, In, H, X, P])) :
> JacA := subs(DFE, A) : eigenvalue(JacA);
eigenvalue  $\begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_1 \pi}{\mu} & -\frac{\eta_2 \pi}{\mu} & -\frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \frac{\beta_2 \pi}{\mu} - v_1 & \frac{\eta_1 \pi}{\mu} & \frac{\eta_2 \pi}{\mu} & \frac{\beta_1 \pi}{K\mu} \\ 0 & \sigma_2 & -v_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & gamm_2 & -\rho & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1 - \rho & -\theta \end{pmatrix}$ 
> JacB := subs(END, A) : charpoly(JacB, λ) :
> unprotect(gamma); gamma := 'gamma':

```

```

pi := 200;  $\sigma_1$  := 0.33;  $\sigma_2$  := 0.019;  $\sigma_3$  := 0.6;  $\eta_1$  := 0.09;  $\eta_2$  := 1.2;  $\text{gamma}_1$  := 0.8;  $\text{gamma}_2$ 
:= 0.2;  $\rho$  := 0.009;  $\alpha_1$  := 0.05;  $\alpha_2$  := 0.06;  $\theta$  := 0.0016;  $\mu$  := 0.000296;  $\beta_1$  := 0.67;  $\beta_2$ 
:= 0.64;  $\nu_2$  := 1.000296;  $\nu_1$  := 0.949296;  $K$  := 30;  $\varepsilon$  := 0.4;  $h$  := 0.01;  $\lambda$ 
:= 0.6433844943 :

```

```
> DFE :
```

```
> END :
```

```
>
```

```

ode1 := diff(S(t), t) = pi -  $\left( \left( \frac{\text{beta}_1 \cdot P(t)}{K + P(t)} + \frac{\text{beta}_2 \cdot \text{In}(t)}{1 + \varepsilon \cdot X(t)} + \frac{\text{eta}_1 \cdot H(t)}{1 + \varepsilon \cdot X(t)} + \frac{\text{eta}_2 \cdot X(t)}{1 + \varepsilon \cdot X(t)} \right) \right.$ 
+ mu  $\left. \right) \cdot S(t) :$ 

```

```
>
```

```

ode2 := diff(In(t), t) =  $\left( \frac{\text{beta}_1 \cdot P(t)}{K + P(t)} + \frac{\text{beta}_2 \cdot \text{In}(t)}{1 + \varepsilon \cdot X(t)} + \frac{\text{eta}_1 \cdot H(t)}{1 + \varepsilon \cdot X(t)} + \frac{\text{eta}_2 \cdot X(t)}{1 + \varepsilon \cdot X(t)} \right) \cdot S(t)$ 
-  $\nu_1 \cdot \text{In}(t) :$ 

```

```
> ode3 := diff(H(t), t) =  $\text{sigma}_2 \cdot \text{In}(t) - \nu_2 \cdot H(t) :$ 
```

```
> ode4 := diff(X(t), t) =  $\text{sigma}_3 \cdot \text{In}(t) + \text{gamma}_2 \cdot H(t) - \rho \cdot X(t) :$ 
```

```
> ode5 := diff(P(t), t) =  $\alpha_1 \cdot \text{In}(t) + (1 - \rho) \cdot X(t) - \theta \cdot P(t) :$ 
```

```
> inits := [S(0) = 98000, In(0) = 1500, H(0) = 1000, X(0) = 300, P(0) = 600] :
```

```
> myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE :
```

```
>
```

```

plot1 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, In, H, X, P], t = 0 .. 10, [inits], scene = [t,
S], linecolour = black, myopts) :

```

```
>
```

```

plot2 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, In, H, X, P], t = 0 .. 10, [inits], scene = [t,
In], linecolour = red, myopts) :

```

```
>
```

```

plot3 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, In, H, X, P], t = 0 .. 10, [inits], scene = [t,
H], linecolour = green, myopts) :

```

```
>
```

```

plot4 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, In, H, X, P], t = 0 .. 10, [inits], scene = [t,
X], linecolour = blue, myopts) :

```

```
>
```

```

plot5 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, In, H, X, P], t = 0 .. 10, [inits], scene = [t,
P], linecolour = yellow, myopts) :

```

```
> display(plot3);
```

RIWAYAT HIDUP



Anastasia Angie Nugraha, Lahir di Kota Malang pada tanggal 06 Nopember 2000, dan biasa dipanggil Angie, Tinggal di kota Malang, Jawa Timur. Anak satu-satunya dari Nugroho Rudy Hermawanto dan Wiwin Suhermin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Pagentan 01 dan lulus pada tahun 2012, setelah itu melanjutkan ke SMPN 03 Singosari dan lulus pada tahun 2015, kemudian melanjutkan jenjang SMK di SMK Farmasi Jayanegara Lawang dan lulus ada tahun 2018, lalu melanjutkan kejejang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil program studi Matematika. Selama menempuh Pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dia aktif menjadi pengurus HMJ “Integral” Matematika, Badan Pengurus Harian DEMA-FST, Pengurus Rayon “*Pencerahan*” Galileo, Badan Pengurus Harian KPU-FST, dan juga Badan Pengurus Harian Komisariat Sunan Ampel Malang.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Anastasia Angie Nugraha
NIM : 18610114
Program Studi : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model Matematika Meta Populasi
Penyebaran Virus Ebola
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	10 Januari 2022	Konfirmasi Bimbingan Proposal Skripsi	1
2	21 Januari 2022	Bimbingan Bab I, II, III	2
3	24 Januari 2022	Bimbingan Bab I, II, III	3
4	28 Januari 2022	Bimbingan Kajian Agama	4
5	13 Februari 2022	Bimbingan Bab I, II, III	5
6	8 Maret 2022	Acc Pendaftaran Seminar Proposal	6
7	26 April 2022	Bimbingan Revisi Seminar Proposal	7
8	28 April 2022	Bimbingan Revisi Seminar Proposal	8
9	27 Mei 2022	Revisi Penulisan	9
10	08 Juni 2022	Bimbingan Revisi dan Acc Seminar Hasil	10
11	08 Juni 2022	Bimbingan Revisi dan Acc Seminar Hasil	11
12	24 Juni 2022	Bimbingan Revisi dan Acc Skripsi	12
13	24 Juni 2022	Bimbingan Revisi dan Acc Skripsi	13

Malang, 24 Juni 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP.19741129 200012 2 005