INDEKS OMEGA GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

OLEH
MOCHAMAD BAGUS VICKY WICHAKSONO
NIM. 18610053

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS OMEGA GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mochamad Bagus Vicky Wichaksono
NIM. 18610053

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS OMEGA GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Mochamad Bagus Vicky Wichaksono
NIM. 18610053

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal 22 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Abdussakir, M.Pd	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

INDEKS OMEGA GRAF TOTAL DIPERUMUM DARI RING BILANGAN BULAT MODULO

SKRIPSI

Oleh
Mochamad Bagus Vicky Wichaksono
NIM. 18610053

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Juni 2022

Ketua Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	.....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si	.....
Anggota Penguji 2	: Dr. Abdussakir, M.Pd	.....
Anggota Penguji 3	: Evawati Alisah, M.Pd	.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Mochamad Bagus Vicky Wichaksono
NIM	: 18610053
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 20 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,

M Bagus Vicky Wichaksono
NIM. 18610053

MOTO

Ketahuilah, sesungguhnya kemenangan itu beriringan dengan kesabaran.
Jalan keluar beriringan dengan kesukaran.
Sesudah kesulitan pasti akan datang kemudahan.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Nur Mukhamad Syaidin dan ibunda Dwi Siswanti yang tidak pernah lelah dalam memanjatkan do'a dan memberikan restu serta nasihat kepada penulis.

Adik penulis Naufal Bahtiar Hisyam yang telah memberikan dukungan dan do'a kepada penulis.

Sahabat penulis Mohammad Agus Kholilurrohman dan Devi Amelia Rahmah yang telah menemani dan memberi semangat serta do'a kepada penulis dalam menyusun hingga menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan seluruh rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan penulis sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan banyak terima kasih dan penghargaan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak bimbingan dan arahan kepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018 Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 20 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
HALAMAN PENGAJUAN ..... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN ..... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN ..... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ..... **v**
MOTO ..... **vi**
PERSEMBAHAN ..... **vii**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **ix**
DAFTAR TABEL ..... **xi**
DAFTAR GAMBAR ..... **xii**
ABSTRAK ..... **xiii**
ABSTRACT ..... **xiv**
مستخلص البحث ..... **xv**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Batasan Masalah 5
1.4 Tujuan Penelitian 6
1.5 Manfaat Penelitian 6
BAB II KAJIAN TEORI **7**
2.1 Teori Pendukung 7
2.1.1 Graf 7
2.1.1.1 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung 8
2.1.1.2 Derajat Titik (*Degree*) 8
2.1.1.3 Graf Terhubung (*Connected Graph*) 9
2.1.2 Ring 11
2.1.2.1 Ring Komutatif 13
2.1.2.2 Ring dengan Unsur Kesatuan 13
2.1.2.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan 13
2.1.3 Relasi Ekuivalensi dan Kongruensi 14
2.1.3.1 Relasi Ekuivalensi 14
2.1.3.2 Kongruensi Modulo m 15
2.1.4 Graf Total Diperumum dari Ring Komutatif 16
2.1.5 Indeks Omega 17
2.2 Konsep Alam Semesta dalam Al-Qur'an 19
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung 22
BAB III METODE PENELITIAN **24**
3.1 Jenis Penelitian 24
3.2 Pra Penelitian 24
3.3 Tahapan Penelitian 25
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **26**
4.1 Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Bilangan Genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ 26
4.1.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 4 26

4.1.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 6.... 28
4.1.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 10.. 29
4.1.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 14.. 31
4.1.5 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 22.. 33
4.1.6 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 26.. 36
4.1.7 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 34.. 38
4.1.8 Rumus Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Bilangan Genap 41
4.2 Indeks Omega pada Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$ 43
4.2.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 6.... 43
4.2.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 10.. 45
4.2.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 14.. 47
4.2.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 22.. 49
4.2.5 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 26.. 52
4.2.6 Rumus Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Pembagi Nol..... 54
4.3 Indeks Omega pada Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$ 56
4.3.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 6.... 56
4.3.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 10.. 58
4.3.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 14.. 60
4.3.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 22.. 62
4.3.5 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 26.. 65
4.3.6 Rumus Indeks Omega pada Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Unit..... 67
4.4 Alam Semesta dalam Pandangan Islam 69
BAB V PENUTUP..... 71
5.1 Kesimpulan..... 71
5.2 Saran..... 71
DAFTAR PUSTAKA..... 74
RIWAYAT HIDUP..... 76

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ 16
Tabel 4.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_4$..... 26
Tabel 4.2 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_6$..... 28
Tabel 4.3 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ 30
Tabel 4 4 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ 32
Tabel 4.5 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ 33
Tabel 4.6 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ 36
Tabel 4.7 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{34}$ 39
Tabel 4.8 Indeks Omega pada $\mathrm{GT}_H\mathbb{Z}_{2n}$ untuk H Himpunan Bilangan Genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$..... 42
Tabel 4.9 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_6$..... 44
Tabel 4.10 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ 45
Tabel 4.11 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ 47
Tabel 4.12 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ 49
Tabel 4.13 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ 52
Tabel 4.14 Indeks Omega pada $\mathrm{GT}_H\mathbb{Z}_{2n}$ untuk H Himpunan Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$..... 54
Tabel 4.15 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_6$..... 57
Tabel 4.16 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ 59
Tabel 4.17 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ 61
Tabel 4.18 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ 63
Tabel 4.19 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ 65
Tabel 4.20 Indeks Omega pada $\mathrm{GT}_H\mathbb{Z}_{2n}$ untuk H Himpunan Unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$..... 68

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G Berorde 9 7
Gambar 2.2 Graf G Berorde 3 8
Gambar 2.3 Graf G Berorde 5 9
Gambar 2.4 Graf G_1 Berorde 4 dan Graf G_2 Berorde 4 10
Gambar 2.5 Graf G Berorde 6 18
Gambar 4.1 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ 27
Gambar 4.2 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ 28
Gambar 4.3 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ 30
Gambar 4.4 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ 32
Gambar 4.5 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ 34
Gambar 4.6 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ 37
Gambar 4.7 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ 40
Gambar 4.8 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ 44
Gambar 4.9 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ 46
Gambar 4.10 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ 48
Gambar 4.11 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ 50
Gambar 4.12 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ 53
Gambar 4.13 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ 57
Gambar 4.14 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ 59
Gambar 4.15 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ 61
Gambar 4.16 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ 63
Gambar 4.17 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ 66

ABSTRAK

Wichaksono, Mochamad Bagus Vicky. 2022. **Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Evawati Alisah, M.Pd

Kata Kunci: Indeks Omega, Graf Total Diperumum, Ring Bilangan Bulat Modulo

Misalkan R ring komutatif dengan H adalah himpunan bagian dari R sedemikian sehingga H tertutup terhadap operasi perkalian R. Graf total diperumum $GT_H(R)$ adalah graf dengan semua elemen R sebagai titik dan dua titik berbeda x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus indeks omega $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan n bilangan prima untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol, serta H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menggunakan beberapa buku dan artikel sebagai bahan rujukan. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-3).$$
2. Indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-2).$$
3. Indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-3).$$

ABSTRACT

Wichaksono, Mochamad Bagus Vicky. 2022. **Omega Index of the Generalized Total Graph of the Ring of Integers Modulo**. Thesis. Mathematic Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Evawati Alisah, M.Pd

Keywords: Omega Index, Generalized Total Graph, Ring Integer Modulo

Suppose R is a commutative ring with H is a subset of R such that H is closed to multiplication operation on R. The generalized total graph $GT_H(R)$ is a graph with every elements of R as the vertex set and two different vertices x and y are adjacent if and only $x + y \in H$. The purpose of this research is to determine the omega index formula of $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ with n primes for H is a set of even numbers and $n \geq 3$ for H is the zero divisors, and H is the units of $\mathbb{Z}_{2n}$. The method of the research used is library study by using several books and article as source. The result of this research is as follow.

1. The generalized index of total omega graph of ring integers modulo $2n$ with H set of even numbers from $\mathbb{Z}_{2n}$ is
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-3).$$
2. The generalized index of total omega graph of ring integers modulo $2n$ with H set of zero divisors from $\mathbb{Z}_{2n}$ is
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-2).$$
3. The generalized index of total omega graph of ring integers modulo $2n$ with H set of units from $\mathbb{Z}_{2n}$ is
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-3).$$

مستخلص البحث

ويتشكسونو، محمد باغوس فيكي. 2022. **مؤشر أوميغا للجراف الإجمالي المعمم من حلقة عدد صحيحة مودولو**. البحث الجامعي. قسم الرياضية، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: الدوكتور عبد الشاكر الماجستير، والمشرف الثاني: أيفاوات أليسة الماجستير.

الكلمات المفتاحية: مؤشر أوميغا ، الجراف الإجمالي المعمم، حلقة العدد الصحيحة مودولو

مثلا R الحلقة التبادلية ب H هي مجموعة فرعية من R بحيث غلقت H على عملية الضرب R. والجراف الإجمالي المعمم $GT_H(R)$ هو جراف بجميع العناصر R كنقطة ونقطتين مختلفين x و y وسيكون مرتبطًا بشكل مباشر إذا وفقط إذا $x + y \in H$. ويهدف هذا البحث لتعيين صيغة مؤشر أوميغا $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ ب n هي عدد الأولية ل H هي مجموعة العدد الشفعي و $n \geq 3$ ول H هي لمجموعة المقسومات الصفر و H هي المجموعة الوحدة. ومنهجية البحث المستخدمة هي منهجية البحث المكتبية باستخدام العديد من الكتب والمقالات كمواد مرجعية. ونتائج هذا البحث هي كالتالي:

1. مؤشر أوميغا للجراف الإجمالي المعمم من حلقة العدد الصحيحة مودولو $2n$ ب H هي مجموعة العدد الشفعي $\mathbb{Z}_{2n}$ هو:
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-3)$$
2. مؤشر أوميغا للجراف الإجمالي المعمم من حلقة العدد الصحيحة مودولو $2n$ ب H هي مجموعة المقسومات الصفر $\mathbb{Z}_{2n}$ هو:
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-2)$$
3. مؤشر أوميغا للجراف الإجمالي المعمم من حلقة العدد الصحيحة مودولو $2n$ ب H هي المجموعة الوحدة $\mathbb{Z}_{2n}$ هو:
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\,(n-3)$$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah induk ilmu pengetahuan yang memiliki beberapa cabang yang di antaranya adalah teori graf. Perkembangan teori graf saat ini menjadikan teori graf sangat diminati oleh para ilmuwan ataupun pakar bidang aljabar. Teori graf dapat diaplikasikan di berbagai bidang misalnya dalam matematika, kimia, fisika, biologi, ilmu kesehatan, ilmu komputer, ilmu sosial dan ekonomi. Dalam segala aspek kehidupan, graf dapat menjadi alat pengaplikasian yang sangat tepat digunakan untuk menemukan solusi dari suatu permasalahan di kehidupan manusia (Abdussakir, dkk, 2009:1).

Seorang ahli bidang matematika asal Swiss yang bernama Leonhard Euler telah memperkenalkan graf di tahun 1736 untuk membuktikan kemungkinan seseorang berjalan dan melewati empat daerah yang saling terhubung oleh tujuh jembatan yang berada di sungai Pregel di daerah Konisberg (Rusia) dalam satu kali jalan. Berawal dari permasalahan yang ada di jembatan Konisberg, Euler mencoba mengaplikasikan graf untuk menemukan solusi dengan menjadikan empat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan dianggap sebagai sisi sebagai penghubung antara titik yang satu dengan yang lainya (Munir, 2016).

Teori graf dalam kehidupan nyata dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan permasalahan dengan merepresentasikan masalah ke bentuk graf. Beberapa masalah yang dapat direpresentasikan dengan menggunakan graf adalah penjadwalan, penggambaran struktur organisasi, dan penggambaran struktur kimia.

Pengembangan teori graf dapat diaplikasikan dalam bidang keilmuan lainnya seperti ekonomi, kimia, dan biologi (Permana & Darmaji, 2012).

Suatu graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan yang berhingga dan tidak kosong dari suatu objek yang dinamakan titik, sedangkan $E(G)$ merupakan himpunan yang mungkin kosong dari pasangan titik berbeda di V yang dinamakan sisi. Jika $(u, v) \in E(G)$ maka u dan v disebut terhubung langsung. Misalkan v merupakan titik pada graf G, maka banyaknya titik yang terhubung langsung ke titik v disebut derajat titik v pada graf G dan disimbolkan dengan $deg(v)$ (Chartrand, dkk, 2016).

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ berhingga dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ sebagai himpunan titik dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ sebagai himpunan sisi di G dengan p dan q adalah order dan ukuran dari G. Himpunan dari semua derajat titik di G adalah

$$D = \left\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$$

dengan a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di G, Δ adalah derajat titik maksimum, dan D sebagai barisan derajat dari graf G. Dari $D = \left\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$ dibentuk indeks graf yang dinamakan indeks omega dan ditulis sebagai

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^{\Delta} a_{v_i}\left(d_{v_i} - 2\right)$$

untuk Δ adalah derajat maksimal di G dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari graf G (Delen, dkk, 2021). Rumus tersebut dapat diformulasikan ulang menjadi

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^{p} a_{v_i}\left(d_{v_i} - 2\right)$$

dengan p adalah order dari graf G. Sesuai formula ini, maka barisan derajat di G adalah $D = \{{d_1}^{a_{v_i}}, {d_2}^{a_{v_i}}, {d_3}^{a_{v_i}}, \dots, {d_p}^{a_{v_i}}\}$.

Penelitian terkait indeks omega masih sedikit mengingat indeks omega masih baru dikenalkan oleh Sadik Delen dkk pada tahun 2021 membahas pengaruh penghapusan titik dan sisi pada derajat rata-rata di graf G dan bukti baru terhadap lemma yang mendukung indeks omega. Sadik Delen dkk pada tahun 2021 membahas hubungan dari dua graf turunan yaitu graf garis dan graf total dengan menggunakan indeks omega. Allah SWT berfirman dalam al-Qur'an surah al-Qamar ayat 49 yaitu:

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ ٤٩

"Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Qs. Al-Qamar/54:49).

Surah al-Qamar ayat 49 menjelaskan mengenai kebesaran Allah SWT yang menciptakan segala sesuatu berdasarkan ukurannya. Alam semesta yang luas ini merupakan satu dari banyaknya tanda kebesaran Allah sebagai Dzat Yang Maha Pencipta. Keserasian dan struktur yang matematis pada setiap ciptaan-Nya sedikit demi sedikit terbukti dengan adanya ilmu pengetahuan melalui proses penelitian yang dilakukan oleh manusia. Seperti pada penelitian ini yang bertujuan untuk menemukan pola pada indeks omega graf total diperumum sebagai salah satu bentuk usaha untuk membuktikan kekuasaan Allah terhadap segala ciptaan-Nya.

Graf juga bisa didapat dari struktur aljabar pada grup dan ring. Beberapa graf yang didapat dari struktur aljabar grup seperti graf *non-commuting* (Abdollahi, Akbari, & Maimani, 2006), graf Cayley (Guo, dkk, 2019), graf subgrup (Anderson, Fasteen, & LaGrange, 2012), graf konjugasi (Erfanian dan Tolue, 2012), graf *non-centralizer* (Tolue, 2015), graf invers (Alfuraidan dan Zakariya, 2017), dan graf

identitas (Herawati, Henryanti, dan Aditya, 2021). Sedangkan graf yang didapat dari struktur aljabar ring di antaranya graf pembagi nol (Anderson dan Livingston, 1999), graf total (Anderson dan Badawi, 2008), graf total pembagi nol (Duric dan Jevdenic, 2019), graf unit (Ashrafi, dkk, 2010), graf identitas (Ibrahim dan Essa, 2020), graf *annihilator* (Badawi, 2014), dan graf total diperumum (Anderson & Badawi, 2013).

Pada penelitian ini akan membahas graf dari ring untuk ring R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi sifat dari grup R abelian terhadap penjumlahan, R tertutup terhadap perkalian, operasi perkalian di R bersifat asosiatif, serta operasi perkalian di R bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan. Misalkan R adalah ring yang perkaliannya bersifat komutatif dan mempunyai unsur identitas sehingga ring R bisa dikatakan sebagai ring komutatif. Maka R dikatakan sebagai ring yang komutatif sekaligus juga ring dengan kesatuan (Gilbert & Gilbert, 2015).

Misalkan R merupakan ring komutatif dan H merupakan himpunan bagian dari R sedemikian sehingga $R\backslash H$ adalah himpunan bagian yang tertutup terhadap operasi perkalian dari R. Graf total diperumum dari R dinotasikan dengan $GT_H(R)$ untuk semua anggota dari R sebagai titik. Dua titik yang berbeda misalkan x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$ (Anderson & Badawi, 2013).

Penelitian mengenai graf total diperumum telah dilakukan oleh Anderson & Badawi pada tahun 2013 membahas mengenai graf total diperumum dari ring komutatif. Asir & Chelvam pada tahun 2018. Chelvam & Balamurugan pada tahun 2020. Asir & Mano pada tahun 2019.

Hingga saat ini belum ada penelitian terkait indeks omega yang diperoleh dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$. Sehingga penulis mengambil judul "Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dari penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana rumus indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$?
2. Bagaimana rumus indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$?
3. Bagaimana rumus indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini memfokuskan pembahasannya pada indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ yang dapat dinotasikan sebagai $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan n adalah bilangan prima untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol serta H himpunan unit.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada rumusan masalah, sehingga tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Untuk menemukan rumus dari indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$.
2. Untuk menemukan rumus dari indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$.
3. Untuk menemukan rumus dari indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan mampu memberikan informasi tentang graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$. Selanjutnya dapat dicari rumus indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$.

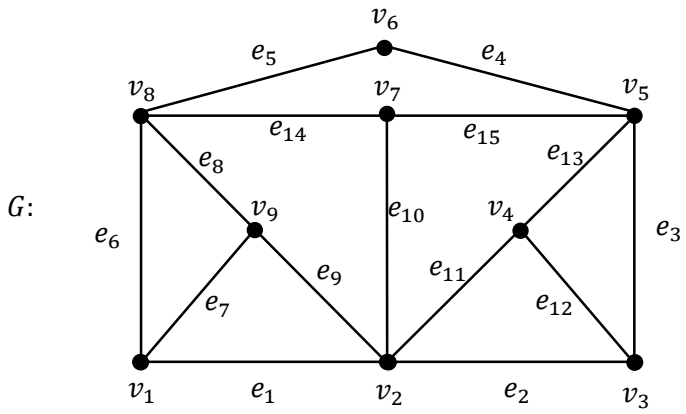
BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Graf

Suatu graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ untuk $V(G)$ adalah himpunan yang berhingga dan tidak kosong dari objek-objek yang dinamakan titik, sedangkan $E(G)$ merupakan himpunan yang mungkin kosong dari pasangan titik berbeda di V yang dinamakan sisi (Chartrand, dkk, 2016:3). Order dari G merupakan banyaknya unsur di $V(G)$ dan ukuran dari G merupakan banyaknya unsur di $E(G)$. Order serta ukuran dari G dinotasikan dengan $p(G)$ dan $q(G)$. Apabila graf yang dimaksud adalah graf G, maka untuk order dan ukuran cukup ditulis dengan p dan q (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf *G* Berorde 9

Pada Gambar 2.1, graf G mempunyai sembilan titik yaitu $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ maka order dari graf G adalah 9. Graf G memiliki

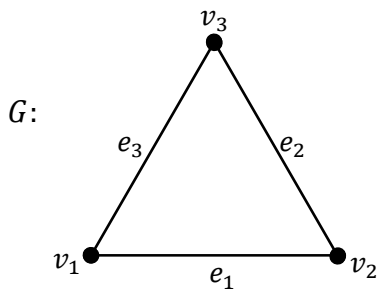
sisi sebanyak lima belas yang terhimpun dalam $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$ sehingga ukuran dari graf G ialah 15.

2.1.1.1 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Misalkan $e = (u, v)$ merupakan sisi pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan untuk v dan e serta u dan e disebut terkait langsung. Misalkan e_1 dan e_2 saling terkait langsung pada satu titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Contoh:

Misalkan graf G memuat $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ berikut ini:



Gambar 2.2 Graf *G* Berorde 3

Dari Gambar 2.2, diketahui bahwa titik v_1 dan v_3 terhubung langsung, sedangkan v_1 dan e_1 serta e_1 dan v_2 terkait langsung.

2.1.1.2 Derajat Titik (*Degree*)

Misalkan v merupakan titik di graf G, maka banyaknya titik yang terhubung langsung ke v disebut derajat titik v pada graf G. Selain itu banyaknya sisi yang terkait langsung dengan v disebut derajat titik v. Derajat titik v disimbolkan dengan $deg_G(v)$ atau dapat disederhanakan menjadi $deg(v)$. Titik v yang memiliki derajat nol atau $deg(v) = 0$ disebut titik terasing. Sedangkan

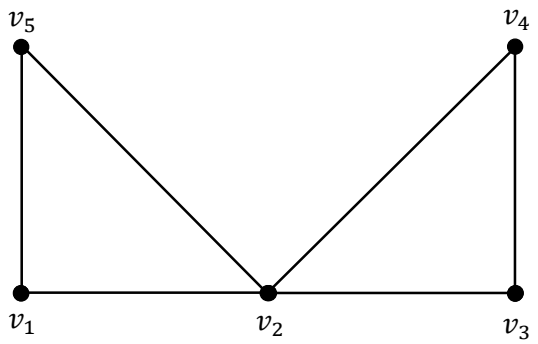
titik v yang memiliki derajat satu atau $deg(v) = 1$ disebut titik ujung. $\Delta(G)$ adalah titik dengan derajat terbesar pada G. Sedangkan $\delta(G)$ adalah titik dengan derajat terkecil pada G. Sehingga jika pada order n untuk v merupakan titik dari suatu graf di G, maka

$$0 \leq \delta(G) \leq deg(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1$$

(Chartrand, dkk, 2016:5).

Contoh:

G:



Gambar 2.3 Graf *G* Berorde 5

Dapat diketahui pada Gambar 2.3 didapatkan derajat titik sebagai berikut:

$deg(v_1) = 2$ $\quad$ $deg(v_4) = 2$

$deg(v_2) = 4$ $\quad$ $deg(v_5) = 2$

$deg(v_3) = 2$

Sehingga diperoleh $\Delta(G) = 4$ dan $\delta(G) = 2$.

2.1.1.3 Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Misalkan G suatu graf dengan u dan v merupakan titik di G. Jalan $u - v$ pada graf G merupakan barisan berhingga dari titik dan sisi yang berselang-seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, \dots, e_n, v_n = v$$

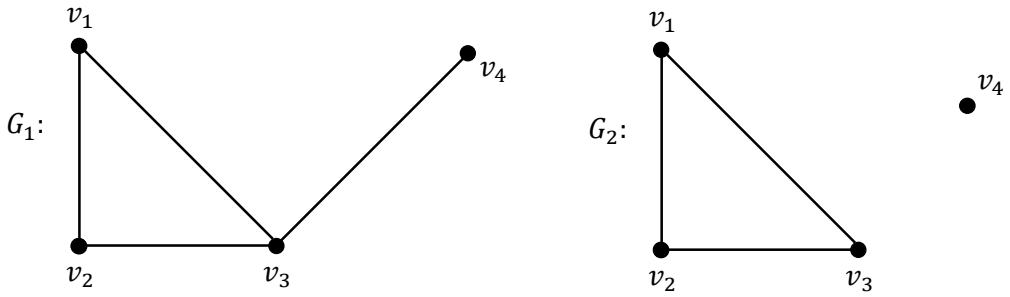
antara titik dan sisi yang diawali dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$$

merupakan sisi yang ada di G. Titik v_0 dikatakan sebagai titik awal, titik v_n dikatakan sebagai titik akhir, titik-titik $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$ dikatakan sebagai titik internal, dan n adalah panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W dikatakan sebagai jalan terbuka, sedangkan jika $v_0 = v_n$, maka W dikatakan sebagai jalan tertutup. Jalan yang tidak memiliki sisi disebut jalan trivial dan jalan yang sisinya berbeda disebut *trail*. Untuk jalan terbuka dengan titik yang tak sama disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009:49).

Jika terdapat titik berbeda x dan y pada graf G, titik u dan v dikatakan terhubung ketika terdapat lintasan $x - y$ di G. Dengan kata lain, graf G dengan dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ dikatakan terhubung jika terdapat lintasan $x - y$ di G. Sedangkan, jika graf G dengan dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ namun tidak terdapat lintasan $x - y$ di G, maka G dikatakan tak terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:55).

Contoh:



Gambar 2.4 Graf G_1 Berorde 4 dan Graf G_2 Berorde 4

Pada Gambar 2.4, titik yang saling terhubung langsung pada graf G_1 yakni v_1 dan v_2, v_1 dan v_3, v_2 dan v_3, serta v_3 dan v_4. Maka graf G_1 disebut

graf terhubung. Sedangkan untuk graf G_2 mempunyai satu titik yang terasing yakni titik v_4, sehingga graf G_2 bukan graf terhubung.

2.1.2 Ring

Ring R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan yang disimbolkan dengan $(+)$ dan operasi perkalian yang disimbolkan dengan $(\cdot)$ untuk setiap $a, b, c \in R$ yang kedua operasinya memenuhi aksioma sebagai berikut:

1. R tertutup pada operasi penjumlahan, sedemikian sehingga $a \in R$ dan $b \in R$ maka $a + b \in R$.
2. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif, yaitu $a + (b + c) = (a + b) + c$ untuk setiap $a, b, c \in R$.
3. Terdapat unsur identitas pada penjumlahan yaitu 0. Maka untuk $a + 0 = 0 + a = a$ untuk semua a di R.
4. Terdapat unsur invers pada penjumlahan, yaitu $-a$ di R sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
5. Operasi penjumlahan bersifat komutatif, yaitu $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in R$.
6. R tertutup pada operasi perkalian, sedemikian sehingga jika $a \in R$ dan $b \in R$ maka $a \cdot b \in R$.
7. Operasi perkalian di R bersifat asosiatif, yaitu $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ untuk setiap a, b, c di R.
8. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan di R, yaitu $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ untuk semua a, b, c di R.

(Gilbert & Gilbert, 2015:265).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian, sehingga untuk $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring dikarenakan memenuhi:

1. $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi penjumlahan.

   Berlaku $(p + q) \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$.

2. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

   Berlaku $p + (q + r) = (p + q) + r$ untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

3. Pada operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}$ terdapat 0 sebagai unsur identitas.

   Berlaku $p + 0 = 0 + p = p$ untuk setiap $p \in \mathbb{Z}$.

4. Untuk $p \in \mathbb{Z}$ maka terdapat $-p \in \mathbb{Z}$.

   Berlaku $p + (-p) = (-p) + p = 0$.

5. Operasi penjumlahan bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$.

   Berlaku $p + q = q + p$ untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$.

6. $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi perkalian.

   Berlaku $p \cdot q \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$.

7. Operasi perkalian bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

   Berlaku $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

8. Operasi perkalian berifat distributif terhadap operasi penjumlahan.

   Berlaku $(p + q) \cdot r = (p \cdot r) + (q \cdot r)$ untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

   Berlaku $p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$ untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

2.1.2.1 Ring Komutatif

Ring R disebut ring komutatif ketika R komutatif terhadap operasi perkalian, yaitu $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$ (Gilbert & Gilbert, 2015:269).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah ring yang merupakan himpunan bilangan genap, sehingga:

$x \cdot y = y \cdot x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_{2n}$, artinya operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_{2n}$ bersifat komutatif. Jadi $\mathbb{Z}_{2n}$ merupakan ring komutatif.

2.1.2.2 Ring dengan Unsur Kesatuan

Ring R disebut sebagai ring dengan unsur kesatuan jika terdapat unsur identitas terhadap operasi perkalian, yaitu $x \cdot e = e \cdot x = x$ untuk setiap x di R (Gilbert & Gilbert, 2015:269).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ merupakan ring untuk $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat, sehingga:

Diketahui $1 \in \mathbb{Z}$ maka $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$, artinya $\mathbb{Z}$ mempunyai unsur identitas pada operasi perkalian. Jadi $\mathbb{Z}$ merupakan ring dengan unsur kesatuan.

2.1.2.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Ring R disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan ketika R komutatif dan terdapat unsur identitas pada operasi perkalian (Gilbert & Gilbert, 2015:269).

Contoh:

Untuk $\mathbb{Z}$ merupakan ring komutatif dan ring dengan unsur kesatuan, maka $\mathbb{Z}$ merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan.

2.1.3 Relasi Ekuivalensi dan Kongruensi

2.1.3.1 Relasi Ekuivalensi

Relasi $\mathcal{R}$ yang terdapat pada himpunan tak kosong A, dikatakan relasi ekuivalensi untuk x, y, z di A jika memenuhi sifat berikut ini:

1. Untuk setiap $x \in A$ berlaku $x\mathcal{R}x$ (sifat refleksif).
2. Untuk setiap $x, y \in A$ maka jika $x\mathcal{R}y$ mengakibatkan $y\mathcal{R}x$ (sifat simetris).
3. Untuk setiap $x, y, z \in A$ maka jika $x\mathcal{R}y$ dan $y\mathcal{R}z$ mengakibatkan $x\mathcal{R}z$ (sifat transitif).

(Gilbert & Gilbert, 2015:57).

Contoh:

Misalkan $\mathcal{R}$ merupakan relasi dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan diketahui untuk $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x = y\}$, maka:

1. Untuk setiap $x \in A$ berlaku $x = x$, sehingga $\mathcal{R}$ refleksif.
2. Untuk setiap $x, y \in A$, jika $x = y$ maka $y = x$, akibatnya $\mathcal{R}$ simetris.
3. Untuk setiap $x, y, z \in A$, jika $x = y$ dan $y = z$, maka $x = z$, akibatnya $\mathcal{R}$ transitif.

Jadi, $\mathcal{R}$ merupakan relasi ekuivalensi pada A.

Teorema 2.1

Kongruensi linier $ax \equiv b\ (mod\ m)$ dapat diselesaikan hanya jika $d = (a, m)$ membagi b, dan pada kasus ini memiliki d selesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi memiliki satu selesaian (Irawan, dkk, 2014).

2.1.3.2 Kongruensi Modulo m

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Suatu bilangan bulat x dan y disebut x kongruen dengan y modulo m jika $x - y$ merupakan kelipatan dari m sehingga dinotasikan dengan $x \equiv y(mod\ m)$ (Gilbert & Gilbert, 2015:99).

Contoh:

$26 \equiv 2(mod\ 4)$ karena $(26 - 2)$ kelipatan dari 4.

$30 \not\equiv 3(mod\ 8)$ karena $(30 - 3)$ bukan kelipatan dari 8.

Teorema 2.2

Relasi kongruensi modulo m adalah relasi ekuivalensi di $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dan a, b, c di $\mathbb{Z}$

1. Bersifat refleksif : $a - a = (m)(0)$ maka $a \equiv a(mod\ m)$.
2. Bersifat simetris : $a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow a - b = mr$ untuk $r \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow b - a = m(-r)$ dan $-r \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow b \equiv a(mod\ m)$.
3. Bersifat transitif : $a \equiv b(mod\ m)$ dan $b \equiv c(mod\ m)$

   $\Rightarrow a - b = mr$ dan $b - c = ms$ dan $r, s \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow a - c = a - b + b - c$

   $= m(r + s)$ dan $r + s \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow a \equiv c(mod\ m)$.

Jadi, relasi kongruensi merupakan relasi ekuivalensi (Gilbert & Gilbert, 2015:100).

2.1.4 Graf Total Diperumum dari Ring Komutatif

Ring komutatif R dengan H adalah himpunan bagian dari R sedemikian sehingga untuk H adalah himpunan bagian yang tertutup terhadap operasi perkalian dari R. Graf total diperumum dari R dinotasikan dengan $GT_H(R)$ untuk semua elemen dari R sebagai titik. Dua titik berbeda x dan y dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$ (Anderson & Badawi, 2013).

Contoh:

Diketahui untuk ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Misalkan H adalah himpunan bagian yang tertutup terhadap operasi perkalian di $\mathbb{Z}_{10}$. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$ dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$. Sehingga untuk H himpunan bilangan genap maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$, akan ditunjukkan dengan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan untuk $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 10

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Maka dari tabel 2.1 dihasilkan graf total diperumum $GT_H(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$.

2.1.5 Indeks Omega

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ berhingga dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ sebagai himpunan titik dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ sebagai himpunan sisi di G dengan p dan q adalah order dan ukuran dari G. Himpunan dari semua derajat titik di G adalah

$$D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

dengan a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di G, Δ adalah derajat titik maksimum, dan D sebagai barisan derajat dari graf G. Dari $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ dibentuk indeks graf yang dinamakan indeks omega dan ditulis sebagai

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^{\Delta} a_{v_i}(d_{v_i} - 2)$$

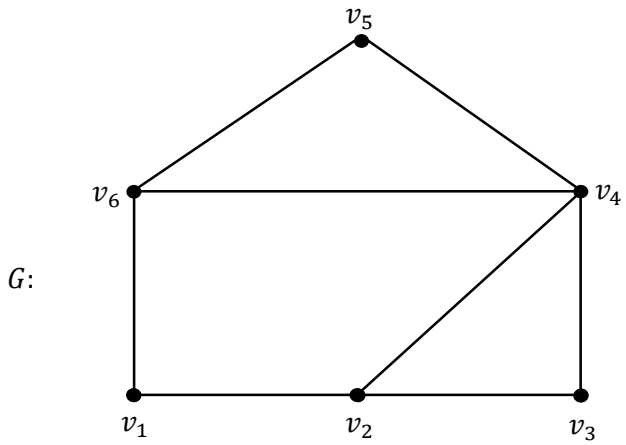
untuk Δ adalah derajat maksimal di G dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari graf G (Delen, dkk, 2021). Rumus tersebut dapat diformulasikan ulang menjadi

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^{p} a_{v_i}(d_{v_i} - 2)$$

dengan p adalah order dari graf G. Sesuai formulai ini, maka barisan derajat di G adalah $D = \{{d_1}^{a_{v_i}}, {d_2}^{a_{v_i}}, {d_3}^{a_{v_i}}, \dots, {d_P}^{a_{v_i}}\}$.

Contoh:

Misalkan graf G yang memuat himpunan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ seperti berikut:



Gambar 2.5 Graf G Berorde 6

Pada Gambar 2.5 dapat diperoleh derajat titik sebagai berikut:

$deg(v_1) = 2$ $\qquad$ $deg(v_4) = 4$

$deg(v_2) = 3$ $\qquad$ $deg(v_5) = 2$

$deg(v_3) = 2$ $\qquad$ $deg(v_6) = 3$

Barisan derajat dari graf G pada Gambar 2.5 adalah:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}, {d_5}^{a_5}, {d_6}^{a_6}\}$$

$$= \{2^1,\ 3^1, 2^1, 4^1,\ 2^1, 3^1\}$$

Indeks omega dari graf G pada Gambar 2.5 adalah:

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^{6} a_{v_i} \cdot \left(d_{v_i} - 2\right)$$

$$= 1 \cdot (2-2) + 1 \cdot (3-2) + 1 \cdot (2-2) + 1 \cdot (4-2) + 1 \cdot (2-2) + 1 \cdot (3-2)$$

$$= 4$$

Jadi, indeks omega dari graf G adalah 4.

2.2 Konsep Alam Semesta dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an yang diturunkan kepada Rasulullah bukan sekedar omong kosong, murni firman Allah. Asal mula terciptanya alam semesta sudah dijelaskan dalam al-Qur'an dan banyak penelitian yang telah menunjukkan kesamaan hasil penelitian dengan yang termaktub dalam al-Qur'an. Hakikat dari alam semesta adalah sebagai wujud dari keberadaan Allah SWT, kebesaran-Nya, keesaan-Nya, kemahakuasaan-Nya, karena seluruh alam semesta beserta isinya serta hukum-hukum di dalamnya merupakan bukti keberadaan Allah sebagai Dzat Yang Maha Agung. Alam semesta jika dipandang secara riil adalah seluruh jagat raya beserta keseluruhan yang ada di dalamnya yang masih tampak secara kasatmata dan objek-objek yang ada masih dapat diidentifikasi dalam batas pikiran manusia. Sedangkan secara hakiki alam semesta merupakan wujud dari keesaan Allah yang terdapat pada makhluk ciptaan-Nya dan hukum-hukum Allah masih dapat terpikirkan oleh manusia (sunnatullah) serta hukum-hukum Allah yang bersifat mutlak (takdir) (Jamarudin, 2010). Allah SWT berfirman dalam al-Qur'an surah al-Qamar ayat 49 yaitu:

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ ٤٩

"Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Qs. Al-Qamar/54:49).

Allah SWT telah menciptakan segala sesuatu dengan memberikan hukum tingkah laku (petunjuk, perintah atau ukuran) kepada setiap ciptaan-Nya dan dengan hukum tingkah laku ini segala bentuk ciptaan-Nya dapat selaras dengan ciptaan-Nya yang lain di alam semesta, karena ketika suatu ciptaan melanggar hukumnya dan melampaui ukurannya maka akan menyebabkan alam semesta menjadi kacau (Jamarudin, 2010).

Alam semesta yang begitu luas hingga akal manusia tidak mampu menjangkau hingga mana batas dari alam semesta ini merupakan tanda bahwa Allah SWT adalah Dzat Yang Maha Pencipta hingga mampu menciptakan suatu dimensi yang maha dahsyat dan serasi ini. Dapat dibayangkan ketika keserasian itu terganggu, maka akan mempengaruhi seluruh kehidupan di bumi bahkan planet-planet lainnya. Misalkan saja bumi yang merupakan wadah untuk menampung seluruh umat manusia saat ini, ketika terdapat satu unsur keserasian bumi yang terganggu seperti ukuran bumi, jarak antara bumi dengan matahari, rotasi bumi, kemiringan bumi, sedikit mengalami kekacauan niscaya semuanya akan berubah total. Maka, kekacauan itu akan menyebabkan berakhirnya seluruh kehidupan di bumi (Quthb, 2003). Allah SWT berfirman dalam al-Qur'an surah al-Furqan ayat 2 yaitu:

الَّذِيْ لَهٗ مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَّلَمْ يَكُنْ لَّهٗ شَرِيْكٌ فِى الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهٗ تَقْدِيْرًا ٢

"Yang kepunyaan-Nyalah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya, dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Qs. Al-Furqan/25:2).

Susunan alam semesta beserta isinya merupakan sesuatu yang mengundang kekaguman bagi siapapun yang menyadarinya. Betapa sangat luar biasa Allah SWT dalam menciptakan ciptaan-Nya dengan amat teliti dan rumit hingga banyak dari ciptaan-Nya yang hingga kini manusia belum mampu untuk mengidentifikasinya. Saat ini ilmu pengetahuan manusia bertambah maju, sedikit demi sedikit terungkap beberapa keserasian dan pola yang menakjubkan pada alam semesta sebagai tanda kebesaran Allah dalam menciptakan setiap ciptaan-Nya (Quthb, 2003).

Surah al-Furqan ayat 2 menjelaskan tentang kekuasaan dan kebesaran Allah SWT sebagai penguasa dari segala penguasa di alam semesta ini. Kekuasaan-Nya

akan semakin terasa ketika ilmu dalam diri manusia semakin bertambah. Dengan ilmu pengetahuan alam, manusia sedikit demi sedikit mengungkap banyaknya fenomena alam sebagai tanda kekuasaan Allah. Apabila manusia mau terus mengembangkan dan menambah ilmu pengetahuan seperti ilmu alam, ilmu bumi, dan ilmu yang lain, semakin yakin pula bahwa Allah telah menciptakan segala sesuatu berdasarkan ukuran dan keserasian yang begitu teratur hingga unsur terkecil seperti molekul jika diteliti lebih detail sebenarnya memiliki pola dan susunan yang begitu rumit. Ilmu pengetahuan manusia bukan untuk menambah peraturan yang telah ada, melainkan hanya telah mengetahui perkara yang tadinya belum diketahui (Hamka, 2015).

Pola pada alam semesta dapat diketahui sala satu caranya dengan mengkaji serta melakukan penelitian mendalam mengenai suatu kasus yang akan dijadikan sebagai topik penelitian. Hasil dari penelitian tersebut dapat berupa rumus atau persamaan dalam bentuk matematika. Rumus atau pola yang diketahui dari hasil penelitian dan perhitungan bukan buatan manusia, tetapi sudah disediakan oleh Sang Pencipta dan baru ditemukan ketika manusia mempelajari lebih dalam mengenai konsep alam semesta. Pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebagai representasi dalam menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah pada kehidupan manusia sebenarnya bukan menciptakan sesuatu yang baru. Pada dasarnya penelitian terhadap alam semesta hanya mencari rumus atau pola-pola yang berlaku pada suatu fenomena. Salah satu bukti bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan menetapkan ukurannya seperti pada wabah demam berdarah, malaria, tuberkolosis, ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis (Abdussakir, 2008).

Penelitian yang bertujuan untuk menemukan pola salah satunya penelitian mengenai indeks topologi pada graf. Penelitian mengenai indeks topologi pada graf bertujuan untuk menemukan pola yang terbentuk dari suatu indeks pada graf tertentu. Sehingga pola yang telah ditemukan dapat dikaji lebih jauh oleh bidang keilmuan lainnya sebagai dasar untuk penelitian selanjutnya. Pada penelitian ini memfokuskan untuk menemukan pola dari indeks omega graf total diperumum dengan menentukan derajat titik pada graf total diperumum yang selanjutnya dapat dihitung untuk indeks omega pada graf total diperumum. Namun, perlu diingat bahwa pola yang terbentuk bukan sebuah hal yang baru tercipta, melainkan sesuatu yang telah ada hanya saja baru diketahui saat ini sebagai tanda bahwa manusia telah mengembangkan ilmu pengetahuannya sehingga mampu lebih banyak membuktikan kekuasaan Sang Pencipta terhadap segala ciptaan-Nya yang diciptakan sedemikian rapi dan teliti ini.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Teori graf memiliki banyak disiplin ilmu salah satunya adalah topologi indeks graf yang masih berhubungan dengan molekul kimia. Topologi indeks digunakan untuk menentukan hubungan antara struktur, sifat, dan aktivitas senyawa kimia dalam pemodelan molekul yang dimodelkan dengan graf molekul (Abdelgader, dkk, 2018).

Misalkan R ring komutatif dan H adalah himpunan bagian yang tertutup terhadap operasi perkalian dari R. Graf total diperumum dinotasikan dengan $GT_H(R)$ untuk semua elemen dari R sebagai titik. Dua titik berbeda misalkan x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$ (Anderson & Badawi, 2013).

$GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ dengan n bilangan prima untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol, serta H himpunan unit digunakan untuk menghasilkan derajat titik dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$. Selanjutnya indeks omega dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ digunakan untuk mengolah derajat titik dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ yang telah diperoleh sebelumnya, sehingga menghasilkan nilai indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ yang selanjutnya dapat dibentuk rumus dari indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$. Sehingga rumus yang diperoleh dari indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap, H himpunan pembagi nol, serta H himpunan unit akan disusun teorema untuk mendukung pembuktian indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang dipakai dalam penelitian ini adalah studi literatur atau studi pustaka, yaitu proses pengumpulan data ataupun informasi dengan mengkaji berbagai macam sumber literatur seperti jurnal, buku, artikel, dan sebagainya yang menjelaskan mengenai teori graf dan aljabar abstrak yang berhubungan dengan topik penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Proses penelitian diawali dengan mencari literatur utama yang dijadikan rujukan dalam penelitian. Literatur utama berupa jurnal oleh Sadik Delen dkk pada tahun 2021 membahas pengaruh penghapusan titik dan sisi pada suatu derajat rata-rata di graf G dan bukti baru terhadap lemma yang mendukung indeks omega. Sadik Delen dkk pada tahun 2021 membahas hubungan dari dua graf turunan yaitu graf garis dan graf total dengan menggunakan indeks omega. Selain jurnal mengenai indeks omega, literatur utama juga berupa jurnal oleh Anderson & Badawi pada tahun 2013 membahas graf total diperumum dari ring komutatif.

Kemudian mengumpulkan literatur pendukung yang berkaitan dengan topik penelitian seperti, definsi graf, ring, relasi ekuivalensi dan kongruensi, graf total diperumum, indeks omega serta memilih beberapa ayat dalam al-Qur’an yang dapat diintegrasikan dengan topik penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan yang digunakan dalam penelitian ini untuk mengetahui indeks omega pada graf total diperumum dari ring $\mathbb{Z}_{2n}$ yaitu:

1. Menentukan anggota $\mathbb{Z}_{2n}$ dengan n adalah bilangan prima dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol serta H himpunan unit.
2. Menentukan himpunan $H \subseteq \mathbb{Z}_{2n}$ dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan bilangan genap, H himpunan pembagi nol, dan H himpunan unit dengan H tertutup terhadap operasi perkalian di $\mathbb{Z}_{2n}$.
3. Mencari derajat titik pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$.
4. Menentukan indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$.
5. Membuat rumus indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan n adalah bilangan prima dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol serta H himpunan unit.
6. Menyusun teorema untuk mendukung pembuktian indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan n adalah bilangan prima dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol serta H himpunan unit.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang rumus indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan n adalah bilangan prima dari $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol serta H himpunan unit.

4.1 Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Bilangan Genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$

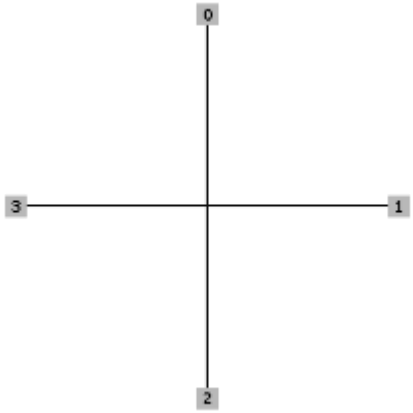
4.1.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 4

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 4 adalah $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Misalkan H adalah himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_4$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}\} \subseteq \mathbb{Z}_4$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_4$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_4$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_4)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 4

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 4.1 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_4$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.1 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_4)$

Dari Gambar 4.1 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ yaitu:

$deg(0) = 1$ $\qquad$ $deg(2) = 1$

$deg(1) = 1$ $\qquad$ $deg(3) = 1$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat graf $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}\}$$
$$= \{1^1, 1^1, 1^1, 1^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_4)$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_4)$ sebagai berikut:

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_4)\big) = \sum_{i=1}^{4} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big)$$
$$= 1(1-2) + 1(1-2) + 1(1-2) + 1(1-2)$$
$$= -4$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_4$ adalah -4

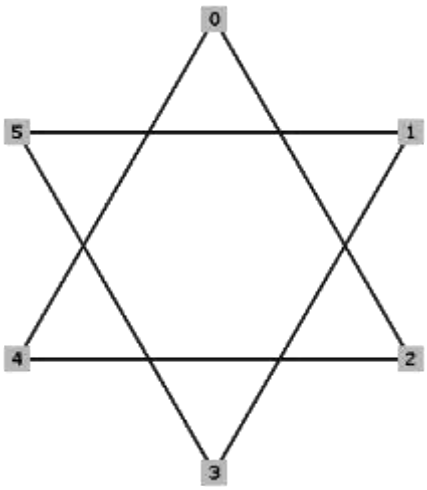
4.1.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 6

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$. Misalkan H adalah himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_6$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_6$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V(GT_H(\mathbb{Z}_6)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 6

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 4.2 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.2 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$

Dari Gambar 4.2 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ yaitu:

$deg(0) = 2$ $\quad$ $deg(2) = 2$ $\quad$ $deg(4) = 2$

$deg(1) = 2$ $\quad$ $deg(3) = 2$ $\quad$ $deg(5) = 2$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}, {d_5}^{a_5}, {d_6}^{a_6}\}$$
$$= \{2^1, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_6)$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \sum_{i=1}^{6} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big)$$
$$= 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2)$$
$$= 0$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$ adalah 0.

4.1.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 10

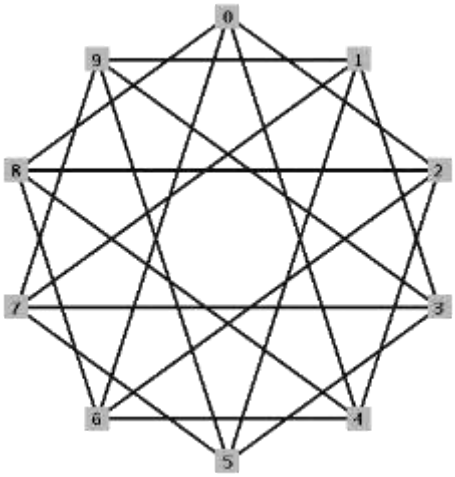
Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{9}\}$. Misalkan H adalah himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{10}$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{10}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) =$

$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.3 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 10

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Berdasarkan Tabel 4.3 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.3 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$

Dari Gambar 4.3 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu:

$deg(0) = 4$ $\quad$ $deg(1) = 4$ $\quad$ $deg(2) = 4$

$deg(3) = 4$ $deg(6) = 4$ $deg(9) = 4$

$deg(4) = 4$ $deg(7) = 4$

$deg(5) = 4$ $deg(8) = 4$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$D = \{4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1\}$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) &= \sum_{i=1}^{10} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big)\\ &= 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) +\\ &\quad 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2)\\ &= 20\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ adalah 20.

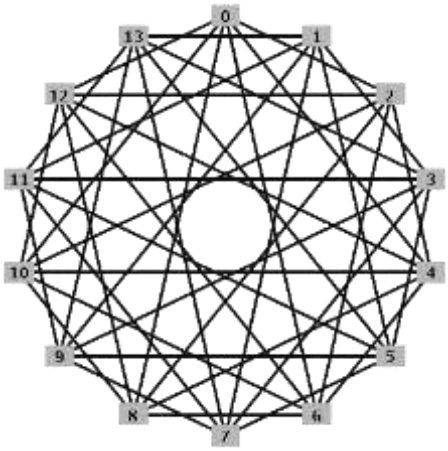
4.1.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 14

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{13}\}$. Misalkan H adalah himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{14}$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \subseteq \mathbb{Z}_{14}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{14}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{14})\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4 4 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 14

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

Berdasarkan Tabel 4.4 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.4 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$

Dari Gambar 4.4 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu:

$deg(0) = 6$ $\quad$ $deg(3) = 6$ $\quad$ $deg(6) = 6$ $\quad$ $deg(9) = 6$

$deg(1) = 6$ $\quad$ $deg(4) = 6$ $\quad$ $deg(7) = 6$ $\quad$ $deg(10) = 6$

$deg(2) = 6$ $\quad$ $deg(5) = 6$ $\quad$ $deg(8) = 6$ $\quad$ $deg(11) = 6$

$deg(12) = 6$ $\qquad$ $deg(13) = 6$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$D = \{6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1\}$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{14})\big) &= \sum_{i=1}^{14} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + \\ &\quad 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + \\ &\quad 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) \\ &= 56\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ adalah 56.

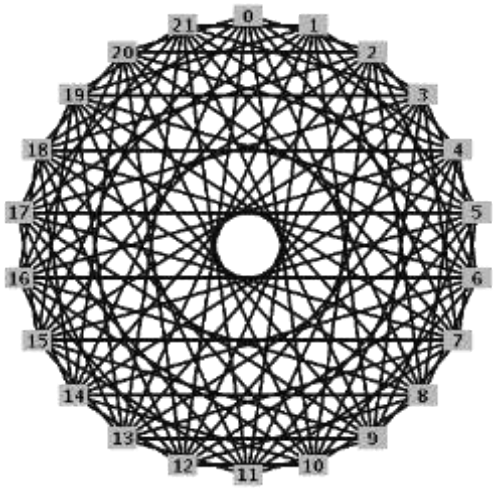
4.1.5 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 22

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 adalah $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{21}\}$. Misalkan H adalah himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{22}$, maka $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\} \subseteq \mathbb{Z}_{22}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{22}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{22}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{22})\big) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.5 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 22

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	3	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$

Berdasarkan Tabel 4.5 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.5 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$

Dari Gambar 4.5 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu

$deg(0) = 10$	$deg(6) = 10$	$deg(12) = 10$	$deg(18) = 10$
$deg(1) = 10$	$deg(7) = 10$	$deg(13) = 10$	$deg(19) = 10$
$deg(2) = 10$	$deg(8) = 10$	$deg(14) = 10$	$deg(20) = 10$
$deg(3) = 10$	$deg(9) = 10$	$deg(15) = 10$	$deg(21) = 10$
$deg(4) = 10$	$deg(10) = 10$	$deg(16) = 10$	
$deg(5) = 10$	$deg(11) = 10$	$deg(17) = 10$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{10^1, 10^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{22})\big) &= \sum_{i=1}^{22} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\
&= 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) \\
&= 176
\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ adalah 176.

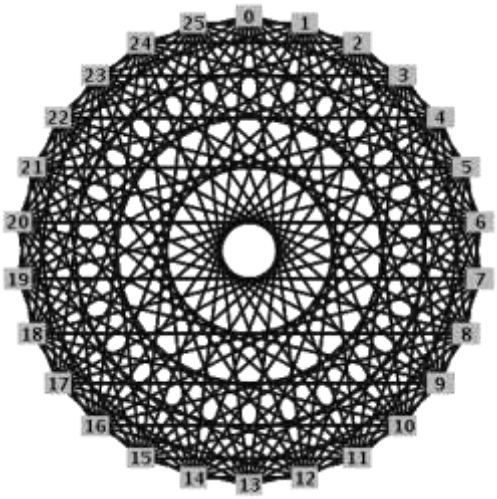
4.1.6 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 26

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 26 adalah $\mathbb{Z}_{26} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{25}\}$. Misalkan H adalah himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{26}$, maka $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}\} \subseteq \mathbb{Z}_{26}$ dan untuk $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{26}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{26}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{26})\big) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.6 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 26

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{22}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$
$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$

Berdasarkan Tabel 4.6 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.6 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$

Dari Gambar 4.6 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ yaitu:

$deg(0) = 12$	$deg(7) = 12$	$deg(14) = 12$	$deg(21) = 12$
$deg(1) = 12$	$deg(8) = 12$	$deg(15) = 12$	$deg(22) = 12$
$deg(2) = 12$	$deg(9) = 12$	$deg(16) = 12$	$deg(23) = 12$
$deg(3) = 12$	$deg(10) = 12$	$deg(17) = 12$	$deg(24) = 12$
$deg(4) = 12$	$deg(11) = 12$	$deg(18) = 12$	$deg(25) = 12$
$deg(5) = 12$	$deg(12) = 12$	$deg(19) = 12$	
$deg(6) = 12$	$deg(13) = 12$	$deg(20) = 12$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{12^1, 12^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{26})\big) &= \sum_{i=1}^{26} a_{v_i}\big(d_{v_i}-2\big)\\ &= 1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+\\ &\quad 1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+\\ &\quad 1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+\\ &\quad 1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+\\ &\quad 1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+\\ &\quad 1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+1(12-2)+\\ &\quad 1(12-2)+1(12-2)\\ &= 260\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ adalah 260.

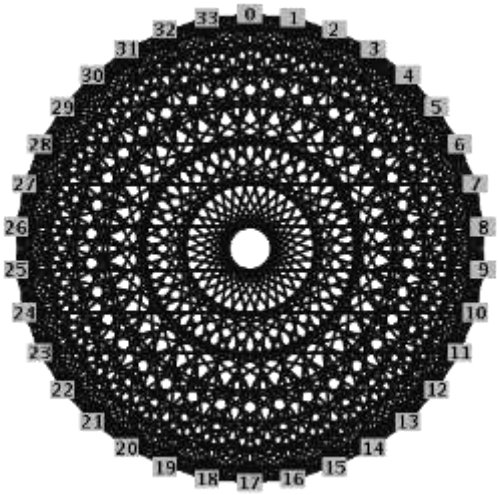
4.1.7 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 34

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 34 adalah $\mathbb{Z}_{34} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{33}\}$. Misalkan H himpunan yang memuat semua bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{34}$, maka $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}\} \subseteq \mathbb{Z}_{34}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{34}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{34}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{34})\big) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.7 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 34

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{22}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$
$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$
$\overline{26}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{27}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$
$\overline{28}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$
$\overline{29}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$
$\overline{30}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$
$\overline{31}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$
$\overline{32}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$
$\overline{33}$	$\overline{33}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$

Berdasarkan Tabel 4.7 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{34}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.7 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$

Dari Gambar 4.7 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ yaitu:

$deg(0) = 16$	$deg(9) = 16$	$deg(18) = 16$	$deg(27) = 16$
$deg(1) = 16$	$deg(10) = 16$	$deg(19) = 16$	$deg(28) = 16$
$deg(2) = 16$	$deg(11) = 16$	$deg(20) = 16$	$deg(29) = 16$
$deg(3) = 16$	$deg(12) = 16$	$deg(21) = 16$	$deg(30) = 16$
$deg(4) = 16$	$deg(13) = 16$	$deg(22) = 16$	$deg(31) = 16$
$deg(5) = 16$	$deg(14) = 16$	$deg(23) = 16$	$deg(32) = 16$
$deg(6) = 16$	$deg(15) = 16$	$deg(24) = 16$	$deg(33) = 16$
$deg(7) = 16$	$deg(16) = 16$	$deg(25) = 16$	
$deg(8) = 16$	$deg(17) = 16$	$deg(26) = 16$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$D = \{16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1,$

$16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1, 16^1,$
$16^1, 16^1\}$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{34})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{34})\big) &= \sum_{i=1}^{34} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\
&= 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + 1(16-2) + \\
&\quad 1(16-2) + 1(16-2) \\
&= 476
\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{34}$ adalah 476.

4.1.8 Rumus Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Bilangan Genap

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{34}$ maka diperoleh pola indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ sebagai berikut:

Tabel 4.8 Indeks Omega pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H Himpunan Bilangan Genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$

n	$\lvert GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\rvert$	$deg(u)$	$\Omega(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))$
2	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\} = 2\cdot 2$	1	$4\cdot(2-3)$
3	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\} = 2\cdot 3$	2	$6\cdot(3-3)$
5	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9}\} = 2\cdot 5$	4	$10\cdot(5-3)$
7	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{13}\} = 2\cdot 7$	6	$14\cdot(7-3)$
11	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{21}\} = 2\cdot 11$	10	$22\cdot(11-3)$
13	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{25}\} = 2\cdot 13$	12	$26\cdot(13-3)$
17	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{33}\} = 2\cdot 17$	16	$34\cdot(17-3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Berdasarkan Tabel 4.8 indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ dengan n bilangan prima membentuk pola pada derajat titik dengan $n-1$ titik, sehingga dari dugaan tersebut dibuat Lemma.

Lemma 4.1.1

Misalkan n bilangan prima, maka $\deg(\mathrm{u}) = n-1$, untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$

Bukti :

Misal $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$, maka u mungkin ganjil atau genap. Jika u ganjil maka $u \in G_1 = \{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7},\dots,2n-1\}$ dan jika u genap maka $u \in G_2 = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\dots,2(n-1)\}$. Misal $u \in G_1$ dan $w \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan $u \neq w$, maka u dikatakan terhubung langsung dengan w jika dan hanya jika $u+w \in H$ sedemikian sehingga $w \in G_1$, sehingga $deg(u) = \lvert G_1 \backslash \{u\}\rvert = n-1$. Misal $u \in G_2$ dan $w \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan $u \neq w$, maka u dikatakan terhubung langsung dengan w jika dan hanya jika $u+w \in H$ sedemikian sehingga $w \in G_2$, sehingga

$deg(u) = |G_2 \backslash \{u\}| = n - 1$. Dengan demikian derajat titik u untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan bilangan genap adalah $deg(u) = n - 1$.

Teorema 4.1

Misalkan n adalah bilangan prima. Indeks omega pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n \cdot (n - 3).$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 4.1.1 diperoleh $\deg(u) = n - 1$ untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dan diperoleh $D = \{(n-1)^1, (n-1)^1, (n-1)^1, \dots, (n-1)^1\}$ yang memuat sebanyak $2n$ anggota, maka indeks omega pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$\begin{aligned}
\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) &= \sum_{i=1}^{P} a_{v_i} \cdot \big(d_{v_i} - 2\big) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} 1 \cdot \big((n-1) - 2\big) \\
&= 2n \cdot \big((n-1) - 2\big) \\
&= 2n \cdot (n - 3)
\end{aligned}$$

4.2 Indeks Omega pada Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$

4.2.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 6

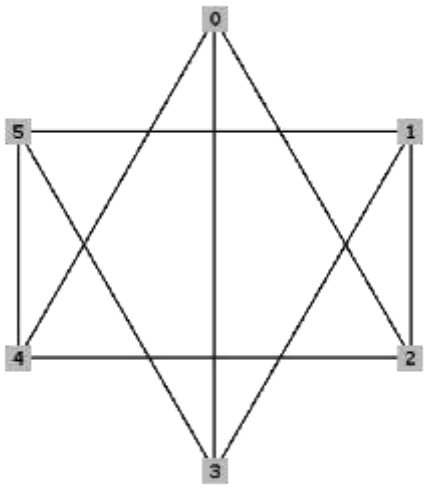
Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$. Misalkan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_6$, maka $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ dan

$GT_H(\mathbb{Z}_6)$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_6$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.9 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 6

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 4.9 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.8 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$

Dari Gambar 4.8 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ yaitu:

$deg(0) = 3$ $\quad$ $deg(1) = 3$ $\quad$ $deg(2) = 3$

$deg(3) = 3$ $\qquad$ $deg(4) = 3$ $\qquad$ $deg(5) = 3$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}, {d_5}^{a_5}, {d_6}^{a_6}\}$$
$$= \{3^1, 3^1, 3^1, 3^1, 3^1, 3^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_6)$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \sum_{i=1}^{6} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big)$$
$$= 1(3-2) + 1(3-2) + 1(3-2) + 1(3-2) + 1(3-2) + 1(3-2)$$
$$= 6$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$ adalah 6.

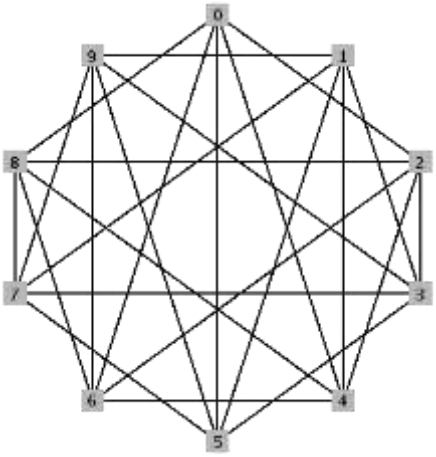
4.2.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 10

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}\}$. Misalkan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{10}$, maka untuk $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{10}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.10 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 10

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Berdasarkan Tabel 4.10 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.9 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$

Dari Gambar 4.9 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu:

$deg(0) = 5$ $\qquad$ $deg(5) = 5$

$deg(1) = 5$ $\qquad$ $deg(6) = 5$

$deg(2) = 5$ $\qquad$ $deg(7) = 5$

$deg(3) = 5$ $\qquad$ $deg(8) = 5$

$deg(4) = 5$ $\qquad$ $deg(9) = 5$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}, {d_5}^{a_5}, {d_6}^{a_6}, {d_7}^{a_7}, {d_8}^{a_8}, {d_9}^{a_9}, {d_{10}}^{a_{10}}\}$$
$$= \{5^1, 5^1, 5^1, 5^1, 5^1, 5^1, 5^1, 5^1, 5^1, 5^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) = \sum_{i=1}^{10} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big)$$
$$= 1(5-2) + 1(5-2) + 1(5-2) + 1(5-2) + 1(5-2) +$$
$$1(5-2) + 1(5-2) + 1(5-2) + 1(5-2) + 1(5-2)$$
$$= 30$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ adalah 30.

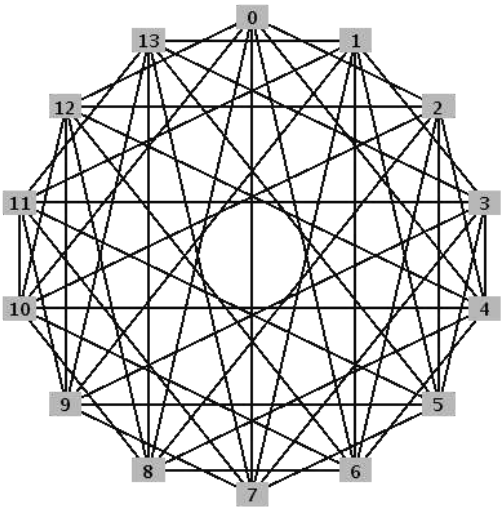
4.2.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 14

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{13}\}$. Misalkan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{14}$, maka untuk $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \subseteq \mathbb{Z}_{14}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{14}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{14})\big) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.11 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 14

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

Berdasarkan Tabel 4.11 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.10 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$

Dari Gambar 4.10 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu:

$deg(0) = 7$ $\quad$ $deg(3) = 7$ $\quad$ $deg(6) = 7$ $\quad$ $deg(9) = 7$

$deg(1) = 7$ $\quad$ $deg(4) = 7$ $\quad$ $deg(7) = 7$ $\quad$ $deg(10) = 7$

$deg(2) = 7$ $\quad$ $deg(5) = 7$ $\quad$ $deg(8) = 7$ $\quad$ $deg(11) = 7$

$deg(12) = 7$ $\qquad$ $deg(13) = 7$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$D = \{7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1, 7^1\}$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{14})\big) &= \sum_{i=1}^{14} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + \\ &\quad 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + \\ &\quad 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) + 1(7-2) \\ &= 70\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ adalah 70.

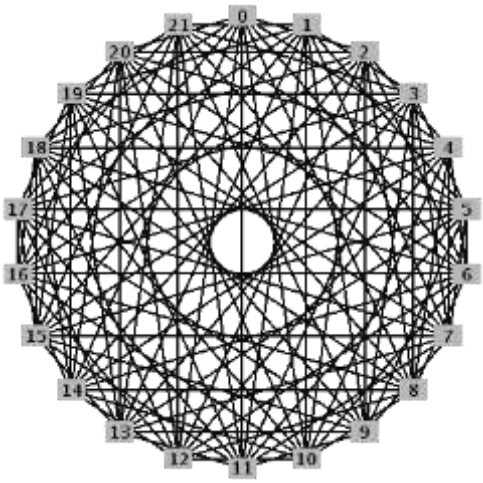
4.2.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 22

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 adalah $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{21}\}$. Misalkan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{22}$, maka untuk $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\} \subseteq \mathbb{Z}_{22}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{22}$ sebagai titik. Dua titik $x, y \in \mathbb{Z}_{22}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{22})\big) = \big\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\big\}$ sehingga akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.12 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 22

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$

Berdasarkan Tabel 4.12 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.11 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$

Dari Gambar 4.11 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu:

$deg(0) = 11$	$deg(6) = 11$	$deg(12) = 11$	$deg(18) = 11$
$deg(1) = 11$	$deg(7) = 11$	$deg(13) = 11$	$deg(19) = 11$
$deg(2) = 11$	$deg(8) = 11$	$deg(14) = 11$	$deg(20) = 11$
$deg(3) = 11$	$deg(9) = 11$	$deg(15) = 11$	$deg(21) = 11$
$deg(4) = 11$	$deg(10) = 11$	$deg(16) = 11$	
$deg(5) = 11$	$deg(11) = 11$	$deg(17) = 11$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{11^1, 11^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{22})\big) &= \sum_{i=1}^{22} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\
&= 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + \\
&\quad 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + \\
&\quad 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + \\
&\quad 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + \\
&\quad 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + 1(11-2) + \\
&\quad 1(11-2) + 1(11-2) \\
&= 198
\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ adalah 198.

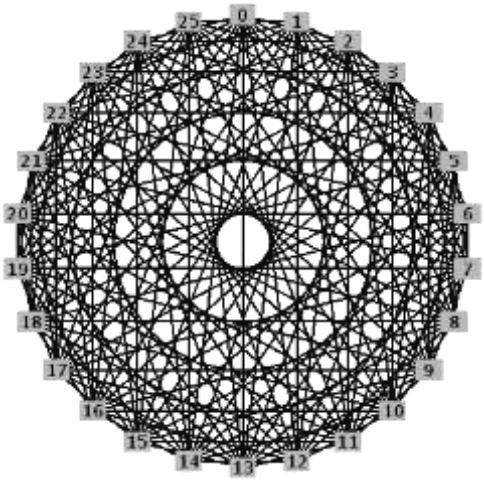
4.2.5 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 26

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 26 adalah $\mathbb{Z}_{26} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{25}\}$. Misalkan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{26}$, maka untuk $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}\} \subseteq \mathbb{Z}_{26}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{26}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{26}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{26})\big) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.13 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 26

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{22}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$
$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$

Berdasarkan Tabel 4.13 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.12 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$

Dari Gambar 4.12 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ yaitu:

$deg(0) = 13$	$deg(7) = 13$	$deg(14) = 13$	$deg(21) = 13$
$deg(1) = 13$	$deg(8) = 13$	$deg(15) = 13$	$deg(22) = 13$
$deg(2) = 13$	$deg(9) = 13$	$deg(16) = 13$	$deg(23) = 13$
$deg(3) = 13$	$deg(10) = 13$	$deg(17) = 13$	$deg(24) = 13$
$deg(4) = 13$	$deg(11) = 13$	$deg(18) = 13$	$deg(25) = 13$
$deg(5) = 13$	$deg(12) = 13$	$deg(19) = 13$	
$deg(6) = 13$	$deg(13) = 13$	$deg(20) = 13$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{13^1, 13^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ sebagai berikut:

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{26})\big) = \sum_{i=1}^{26} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big)$$

$$= 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) +$$
$$1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) +$$
$$1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) +$$
$$1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) +$$
$$1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) +$$
$$1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) + 1(13-2) +$$
$$1(13-2) + 1(13-2)$$
$$= 286$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ adalah 286.

4.2.6 Rumus Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Pembagi Nol

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{34}$ maka diperoleh pola indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ sebagai berikut:

Tabel 4.14 Indeks Omega pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H Himpunan Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$

n	$\lvert GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\rvert$	$deg(u)$	$\Omega(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))$
3	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} = 2 \cdot 3$	3	$6 \cdot (3-2)$
5	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\} = 2 \cdot 5$	5	$10 \cdot (5-2)$
7	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \dots, \overline{13}\} = 2 \cdot 7$	7	$14 \cdot (7-2)$
11	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \dots, \overline{21}\} = 2 \cdot 11$	11	$22 \cdot (11-2)$
13	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \dots, \overline{25}\} = 2 \cdot 13$	13	$26 \cdot (13-2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Berdasarkan Tabel 4.14 indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ membentuk pola pada derajat titik sebanyak $n - 1$ titik, sehingga dari dugaan tersebut dibuat Lemma.

Lemma 4.2.1

Misalkan n adalah bilangan prima dan $n \geq 3$, maka $deg(u) = n$, untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$

Bukti:

Misal $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$, maka u mungkin ganjil atau genap. Jika u ganjil maka $u \in G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \dots, 2n - 1\}$ dan jika u genap maka $u \in G_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \dots, 2(n - 1)\}$. Misal $u \in G_1$ dan $w \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan $u \neq w$, maka u dikatakan terhubung langsung dengan w jika dan hanya jika $u + w \in H$, sehingga $deg(u) = |G_1 \backslash \{u\}| = n$. Misal $u \in G_2$ dan $w \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan $u \neq w$, maka u dikatakan terhubung langsung dengan w jika dan hanya jika $u + w \in H$, sehingga $deg(u) = |G_2 \backslash \{u\}| = n$. Dengan demikian derajat titik u untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan pembagi nol adalah $deg(u) = n$.

Teorema 4.2

Misalkan n adalah bilangan prima dan $n \geq 3$. Indeks omega pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n \cdot (n - 2).$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 4.2.1 diperoleh $\deg(u) = n$ untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dan diperoleh $D = \{(n)^1, (n)^1, (n)^1, \dots, (n)^1\}$ yang memuat sebanyak $2n$ anggota, maka indeks omega pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) &= \sum_{i=1}^{p} a_{v_i} \cdot \big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} 1 \cdot \big((n) - 2\big) \\ &= 2n \cdot \big((n) - 2\big) \\ &= 2n \cdot (n - 2)\end{aligned}$$

4.3 Indeks Omega pada Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$

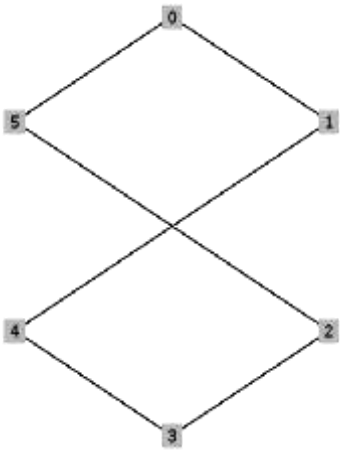
4.3.1 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 6

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$. Misalkan H adalah himpunan unit dari $\mathbb{Z}_6$, maka $H = \{\bar{1}, \bar{5}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_6$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.15 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 6

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 4.15 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.13 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$

Dari Gambar 4.13 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ yaitu:

$deg(0) = 2$ $\quad$ $deg(2) = 2$ $\quad$ $deg(4) = 2$

$deg(1) = 2$ $\quad$ $deg(3) = 2$ $\quad$ $deg(5) = 2$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}, {d_5}^{a_5}, {d_6}^{a_6}\}$$

$$= \{2^1, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_6)$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_6)\big) &= \sum_{i=1}^{6} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2) + 1(2-2) + \\ &\quad 1(2-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$ adalah 0.

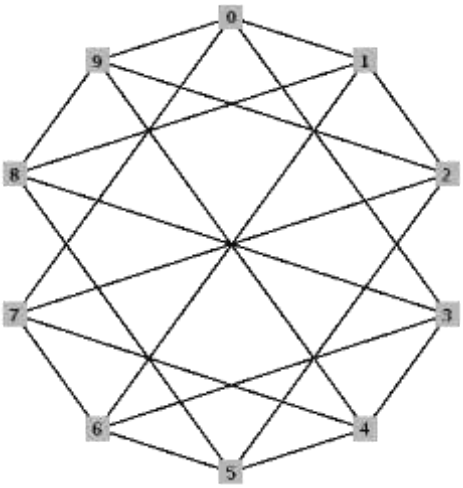
4.3.2 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 10

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ \dots, \bar{9}\}$. Misalkan H adalah himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{10}$, maka $H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{10}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.16 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 10

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$

Berdasarkan Tabel 4.16 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.14 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$

Dari Gambar 4.14 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ yaitu:

$deg(0) = 4$ $\qquad$ $deg(3) = 4$

$deg(1) = 4$ $\qquad$ $deg(4) = 4$

$deg(2) = 4$ $\qquad$ $deg(5) = 4$

$deg(6) = 4$ $\qquad$ $deg(8) = 4$

$deg(7) = 4$ $\qquad$ $deg(9) = 4$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{{d_1}^{a_1}, {d_2}^{a_2}, {d_3}^{a_3}, {d_4}^{a_4}, {d_5}^{a_5}, {d_6}^{a_6}, {d_7}^{a_7}, {d_8}^{a_8}, {d_9}^{a_9}, {d_{10}}^{a_{10}}\}$$
$$= \{4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1, 4^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{10})\big) &= \sum_{i=1}^{10} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + \\ &\quad 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) + 1(4-2) \\ &= 20\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ adalah 20.

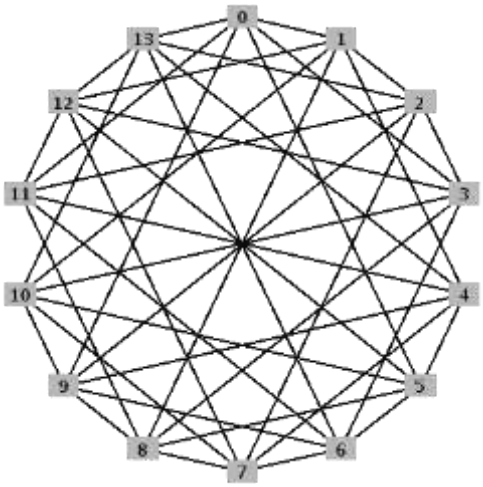
4.3.3 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 14

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{13}\}$. Misalkan H adalah himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{14}$, maka $H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}\} \subseteq \mathbb{Z}_{14}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{14}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{14})\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.17 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 14

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

Berdasarkan Tabel 4.17 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.15 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$

Dari Gambar 4.15 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ yaitu:

$deg(0) = 6$ $\quad$ $deg(1) = 6$ $\quad$ $deg(2) = 6$ $\quad$ $deg(3) = 6$

$deg(4) = 6$ $deg(7) = 6$ $deg(10) = 6$ $deg(13) = 6$

$deg(5) = 6$ $deg(8) = 6$ $deg(11) = 6$

$deg(6) = 6$ $deg(9) = 6$ $deg(12) = 6$

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$D = \{6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1, 6^1\}$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{14})\big) &= \sum_{i=1}^{14} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + \\ &\quad 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + \\ &\quad 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) + 1(6-2) \\ &= 56\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ adalah 56.

4.3.4 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 22

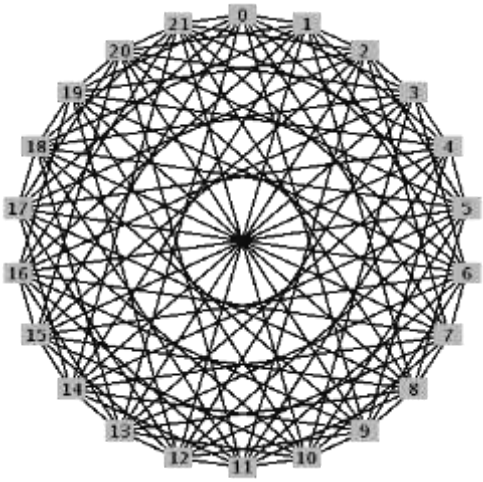
Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 adalah $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{21}\}$. Misalkan H adalah himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{22}$. Maka $H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}\} \subseteq \mathbb{Z}_{22}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{22}$ sebagai titik dan dua titik berbeda x dan y dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ jika $x + y \in H$. Maka untuk $V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{22})\big) =$

$\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\}$ menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan akan ditunjukkan sebagai berikut:

Tabel 4.18 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 22

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$

Berdasarkan Tabel 4.18 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.16 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$

Dari Gambar 4.16 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ yaitu

$deg(0) = 10$	$deg(6) = 10$	$deg(12) = 10$	$deg(18) = 10$
$deg(1) = 10$	$deg(7) = 10$	$deg(13) = 10$	$deg(19) = 10$
$deg(2) = 10$	$deg(8) = 10$	$deg(14) = 10$	$deg(20) = 10$
$deg(3) = 10$	$deg(9) = 10$	$deg(15) = 10$	$deg(21) = 10$
$deg(4) = 10$	$deg(10) = 10$	$deg(16) = 10$	
$deg(5) = 10$	$deg(11) = 10$	$deg(17) = 10$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{10^1, 10^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{22})\big) &= \sum_{i=1}^{22} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\
&= 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + 1(10-2) + \\
&\quad 1(10-2) + 1(10-2) \\
&= 176
\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ adalah 176.

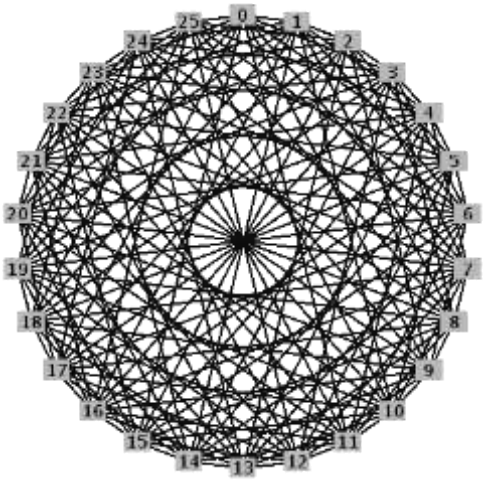
4.3.5 Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat modulo 26

Ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo 26 adalah $\mathbb{Z}_{26} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{25}\}$. Misalkan H adalah himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{26}$. Maka $H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{23}, \overline{25}\} \subseteq \mathbb{Z}_{26}$ dan $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ adalah graf yang memuat semua anggota $\mathbb{Z}_{26}$ sebagai titik. Dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_{26}$ dikatakan terhubung langsung di $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ jika $x + y \in H$. Dengan demikian untuk $V(GT_H(\mathbb{Z}_{26})) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}$ $\overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}\}$ akan ditunjukkan dengan menggunakan tabel Cayley terhadap operasi penjumlahan sebagai berikut:

Tabel 4.19 Tabel Cayley Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo 26

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\overline{22}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$
$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$

Berdasarkan Tabel 4.19 graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.17 Graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$

Dari Gambar 4.17 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ yaitu:

$deg(0) = 12$	$deg(7) = 12$	$deg(14) = 12$	$deg(21) = 12$
$deg(1) = 12$	$deg(8) = 12$	$deg(15) = 12$	$deg(22) = 12$
$deg(2) = 12$	$deg(9) = 12$	$deg(16) = 12$	$deg(23) = 12$
$deg(3) = 12$	$deg(10) = 12$	$deg(17) = 12$	$deg(24) = 12$
$deg(4) = 12$	$deg(11) = 12$	$deg(18) = 12$	$deg(25) = 12$
$deg(5) = 12$	$deg(12) = 12$	$deg(19) = 12$	
$deg(6) = 12$	$deg(13) = 12$	$deg(20) = 12$	

Selanjutnya diperoleh barisan derajat dari graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ dari masing-masing derajat titik yaitu:

$$D = \{12^1, 12^1\}$$

Kemudian a_{v_i} adalah banyaknya derajat titik ke-i di $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ dan d_{v_i} adalah derajat titik ke-i dari $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$, maka nilai indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{26})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{26})\big) &= \sum_{i=1}^{26} a_{v_i}\big(d_{v_i} - 2\big) \\
&= 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + \\
&\quad 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + \\
&\quad 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + \\
&\quad 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + \\
&\quad 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + \\
&\quad 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + 1(12-2) + \\
&\quad 1(12-2) + 1(12-2) \\
&= 260
\end{aligned}$$

Jadi, indeks omega pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ adalah 260.

4.3.6 Rumus Indeks Omega pada Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2n$ dengan H Himpunan Unit

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel pada graf total diperumum dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{34}$ maka diperoleh pola indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ sebagai berikut:

Tabel 4.20 Indeks Omega pada $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H Himpunan Unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$

n	$\lvert GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\rvert$	$deg(u)$	$\Omega(GT_H(\mathbb{Z}_{2n}))$
3	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\} = 2\cdot 3$	2	$6\cdot(3-3)$
5	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9}\} = 2\cdot 5$	4	$10\cdot(5-3)$
7	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{13}\} = 2\cdot 7$	6	$14\cdot(7-3)$
11	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{21}\} = 2\cdot 11$	10	$22\cdot(11-3)$
13	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{25}\} = 2\cdot 13$	12	$26\cdot(13-3)$
17	$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\dots,\overline{33}\} = 2\cdot 17$	16	$34\cdot(17-3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Berdasarkan Tabel 4.20 indeks omega pada graf $GT_H(\mathbb{Z}_{2n})$ untuk H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ membentuk pola pada derajat titik sebanyak $n-1$ titik, sehingga dari dugaan tersebut dibuat Lemma.

Lemma 4.3.1

Misalkan n adalah bilangan prima dan $n \geq 3$, maka $\deg(u) = n-1$, untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$

Bukti :

Misal $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$, maka u mungkin ganjil atau genap. Jika u ganjil maka $u \in G_1 = \{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7},\dots,2n-1\}$ dan jika u genap maka $u \in G_2 = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\dots,2(n-1)\}$. Misal $u \in G_1$ dan $w \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan $u \neq w$, maka u dikatakan terhubung langsung dengan w jika dan hanya jika $u+w \in H$ sedemikian sehingga $w \in G_2$ untuk $u+w \neq n$ karena $n \notin H$, sehingga $deg(u) = |G_1 \backslash \{u\}| = n-1$. Misal $u \in G_2$ dan $w \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan $u \neq w$, maka u dikatakan terhubung langsung dengan w jika dan hanya jika $u+w \in H$ sedemikian sehingga $w \in G_1$ untuk $u+w \neq n$ karena $n \notin H$, sehingga $deg(u) = |G_2 \backslash \{u\}| =$

$n-1$. Dengan demikian derajat titik u untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dengan H himpunan unit adalah $deg(u) = n-1$.

Teorema 4.3

Misalkan n adalah bilangan prima dan $n \geq 3$. Indeks omega pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n \cdot (n-3).$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 4.3.1 diperoleh $\deg(u) = n-1$ untuk setiap $u \in V\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big)$ dan diperoleh $D = \{(n-1)^1, (n-1)^1, (n-1)^1, \dots, (n-1)^1\}$ yang memuat sebanyak $2n$ anggota, maka indeks omega pada graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah

$$\begin{aligned}\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) &= \sum_{i=1}^{P} a_{v_i} \cdot \big(d_{v_i} - 2\big) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} 1 \cdot \big((n-1) - 2\big) \\ &= 2n \cdot \big((n-1) - 2\big) \\ &= 2n \cdot (n-3)\end{aligned}$$

4.4 Alam Semesta dalam Pandangan Islam

Kajian teori graf dalam al-Qur'an telah dijelaskan dalam Bab II, Qs. al-Qamar ayat 49 dan Qs. al-Furqan ayat 2 tentang alam semesta yang Allah ciptakan dengan rapi dan teliti hingga menciptakan keserasian antara ciptaan-Nya yang satu dengan ciptaan-Nya yang lain. Sungguh Allah adalah Dzat Yang Maha Kuasa tanpa

ada keraguan sedikitpun didalamnya. keserasian yang ada di alam semesta merupakan bukti bahwa Allah SWT telah menciptakan segala sesuatu menurut ukurannya sesuai isi kandungan Qs. al-Qamar ayat 49. Ukuran yang dimaksud bisa berupa pergerakan, rotasi, jarak, kecepatan, atau pola. Misalkan galaksi yang terdiri dari 200-300 miliar bintang saling bergerak satu sama lain hingga menciptakan suatu pola pergerakan yang sangat rumit jika diidentifikasi oleh manusia. Pembahasan alam semesta mungkin terlalu luas, misalkan molekul yang merupakan bagian terkecil pada senyawa yang tersusun dari gabungan dua atau lebih atom, jika dipelajari lebih jauh ternyata molekul juga memiliki pola yang terstruktur dan matematis. Hal ini menandakan bahwa ciptaan Allah SWT baik yang berukuran sangat besar dan luas seperti alam semesta ataupun ciptaan-Nya yang berukuran sangat kecil semuanya memiliki pola dan struktur yang matematis. Sama halnya dengan penelitian ini yang bertujuan untuk menemukan pola dari indeks omega graf total diperumum sebagai bukti bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu menurut ukurannya. Pola yang terbentuk pada indeks omega graf total diperumum merupakan satu dari banyaknya bukti nyata kebesaran Allah SWT dalam menciptakan segala ciptaan-Nya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa rumus umum indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan n bilangan prima untuk H himpunan bilangan genap dan $n \geq 3$ untuk H himpunan pembagi nol serta H himpunan unit sebagai berikut:

1. Indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan bilangan genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\ (n-3).$$
2. Indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\ (n-2).$$
3. Indeks omega graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$ dengan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2n}$ adalah
$$\Omega\big(GT_H(\mathbb{Z}_{2n})\big) = 2n\ (n-3).$$

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan di atas, pada penelitian ini indeks omega diperoleh dari graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2n$. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait indeks omega pada graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdelgader, M. S., Wang, C., & Mohammed, S. A. (2018). Computation of Topological Indices of Some Special Graphs. *Mathematics Journal*, 1-15.

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. (2006). Non-Commuting Graph of a Group. *Journal of Algebra 298*, 468-492.

Abdussakir. (2008). Pentingnya Matematika dalam Pemikiran Islam. 1-16.

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi.* Malang: UIN-Malang Press.

Alfuraidan, M. R., & Zakariya, Y. F. (2017). Inverse Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 142-154.

Al-Qur'an dan Terjemahanya. (2019). Kementrian Agama RI.

Anderson, D. F., & Badawi, A. (2008). The Total Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra*, 2706-2719.

Anderson, D. F., & Badawi, A. (2013). The Generalized Total Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra and Its Applications*, 1-15.

Anderson, D. F., & Livingston, P. S. (1999). The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra* , 434-447.

Anderson, D. F., Fasteen, J., & LaGrange, J. D. (2012). The Subgroup Graph of a Group. *Arabian Journal of Mathematics*, 17-27.

Ashrafi, N., Maimani, H., & Pournaki, M. R. (2010). Unit Graphs Associated with Rings. *Communications in Algebra* , 2851-2871.

Asir, T., & Chelvam, T. (2018). Generalized Total Graphs of Commutative Rings: A Survey. *Algebra and Its Applications*, 38-54.

Asir, T., & Mano, K. (2019). Bounds for the Genus of Generalized Total Graph of a Commutative Ring. *Algebra Colloquium*, 519-528.

Badawi, A. (2014). On the Annihilator Graph of a Commutative Ring. *Communications in Algebra*, 108-121.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs & Digraphs Sixth Edition.* Boca Raton: CRC Press.

Chelvam, T., & Balamurugan, M. (2020). Complement of The Generalized Total Graph of Fields. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 730-733.

Delen, S., Demirci, M., Cevik, A. S., & Cangul, I. N. (2021). On Omega Index and Average Degree of Graphs. *Journal of Mathematics*, 1-5.

Demirci, M., Delen, S., Cevik, A. S., & Cangul, I. N. (2021). Omega Index of Line and Total Graphs. *Journal of Mathematics*, 1-6.

Đurić, A., Jevđenić, S., Oblak, P., & Stopar, N. (2019). The Total Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra and Its Applications*, 1-16.

Erfanian, A., & Tolue, B. (2012). Conjugate Graphs of Finite Groups. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 1-8.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2015). *Elements of Modern Algebra Eighth Edition.* Stamford: Nelson Education, Ltd.

Guo, W., DV, L., VD, M., & Revin, D. (2019). Integral Cayley Graphs. *Algebra and Logic, Vol. 58, No. 4*, 297-305.

Hamka. (2015). *Tafsir Al-Azhar Jilid 7.* Jakarta: Gema Insani.

Herawati, M. V., Henryanti, P. S., & Aditya, R. (2021). Identity Graph of Finite Cyclic Groups. *International Journal of Applied Sciences and Smart Technologies*, 101-110.

Huda, M., & Mutia. (2017). Mengenal Matematika dalam Perspektif Islam. *Jurnal Kajian Keislaman dan Kemasyarakatan*, 183-199.

Ibrahim, N. B., & Ss, E. (2020). The Identity Graph of the Commutative Rings. *Journal of Mathematics and Statistics Research*, 1-4.

Irawan, W. H., Hijriyah, N., & Habibi, A. R. (2014). *Pengantar Teori Bilangan.* Malang: UIN Maliki Press.

Jamarudin, A. (2010). Konsep Alam Semesta Menurut Al-Quran. *Jurnal Ushuluddin*, 136-151.

Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit.* Bandung: Informatika Bandung.

Permana, A. B., & Darmaji. (2012). Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu. *Jurnal Teknik Pomits Vol. 1, No. 1*, 1-4.

Quthb, S. (2003). *Tafsir Fi-Zhilalil Qur'an Di Bawah Naungan Al-Qur'an.* Jakarta: Gema Insani Press.

Tolue, B. (2015). The Non-Centralizer Graph of a Finite Group. 265-275.

RIWAYAT HIDUP

Mochamad Bagus Vicky Wichaksono lahir di Malang pada tanggal 17 September 1999. Laki-laki yang biasa dipanggil Vicky ini beralamat di Jalan Sidoaji RT/RW 005/002 Desa Lumbangsari, Kec. Bululawang, Kab. Malang, anak sulung dari dua bersaudara yakni dari pasangan Bapak Nur Mukhamad Syaidin dan Ibu Dwi Siswanti.

Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK PGRI 01 Lumbangsari dan lulus pada tahun 2006. Setelah itu, penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 02 Senggrong dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya penulis menempuh jenjang pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 01 Bululawang dan lulus pada tahun 2015. Kemudian, penulis melanjutkan jenjang pendidikan menengah atas di SMA Negeri 01 Bululawang dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2018.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif dalam organisasi intra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Penulis pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2018/2019 dan 2019/2020.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mochamad Bagus Vicky Wichaksono
NIM : 18610053
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Indeks Omega Graf Total Diperumum dari Ring Bilangan Bulat Modulo
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Januari 2022	Konsultasi Bab I, II	1.
2.	27 Januari 2022	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	9 Februari 2022	Konsultasi Bab I, II, III	3.
4.	17 Februari 2022	Acc Kajian Agama	4.
5.	16 Maret 2022	Acc Bab I, II, III	5.
6.	5 April 2022	Konsultasi Bab IV	6.
7.	13 April 2022	Konsultasi Bab IV	7.
8.	4 Mei 2022	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	17 Mei 2022	Revisi Bab IV	9.
10.	7 Juni 2022	Revisi Bab IV	10.
11.	22 Juni 2022	Acc Bab I, II, III, IV, V	11.
12.	22 Juni 2022	Acc Kajian Agama	12.

Malang, 27 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr.Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP.197411292000122005