PENERAPAN METODE
TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE PADA
PENYELESAIAN PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

OLEH:
MOHAMMAD ULIL ALBAB
NIM. 15610098

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

PENERAPAN METODE TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mohammad Ulil Albab
NIM. 15610098

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

PENERAPAN METODE
TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE PADA
PENYELESAIAN PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

Oleh
Mohammad Ulil Albab
NIM. 15610098

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Malang, 24 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Heni Widayani, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIDT. 19901006 20180201 2 229	NIDT. 19760723 20180201 2 22

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PENERAPAN METODE
TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE PADA
PENYELESAIAN PERSAMAAN KLIEN GORDON

SKRIPSI

Oleh
Mohammad Ulil Albab
NIM. 15610098

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji I	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....
Anggota Penguji II	: Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mohammad Ulil Albab
NIM	: 15610098
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul skripsi	: Penerapan Metode Transformasi Double Laplace pada Penyelesaian Persamaan Klein Gordon

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2022

METERAI TEMPEL
23A14AJX746765970

Mohammad Ulil Albab
NIM. 15610098

MOTO

"Selama akal masih ada di dalam jiwa, jangan pernah berputus asa"

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur penulis persembahkan skripsi ini kepada

Ibunda tercinta Hidayatus Sholihah dan ayahanda Wiyanto tercinta

yang senantiasa ikhlas mendoakan dan mendukung penulis dalam menyelesaikan

tugas akhir ini. Serta kepada adik Mohammad Reza Firmansyah dan juga

Zahra Maulidina Amelia yang turut memberikan doa

dan dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Progam Studi Matematika, Fakutas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat dan salam tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad Saw yang telah menunjukkan manusia kepada jalan kebaikan dan kebenaran dengan *ad-dinul* Islam.

Dalam proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, karena itu penulis memberikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dam motivasi kepada penulis.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan, dan motivasi kepada penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku penguji seminar proposal hingga ujian skripsi atas semua saran dan masukan untuk penulis.
7. Ari Kusumastuti, M.Si, selaku penguji seminar hasil hingga ujian skripsi atas saran dan kritik yang membangun bagi perbaikan karya skripsi saya ini.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

9. Ibu Hidayatus Sholihah dan ayah Wiyanto yang selalu dengan ikhlas telah mendoakan, memberi semangat, dan motivasi kepada penulis hingga sampai saat ini.
10. Adik Mohammad Reza Firmansya dan Zahra Maulidina Amelia yang senantiasa mendoakan dan memotivasi kepada penulis.
11. Rekan Progam Studi Jurusan Matematika yang bersedia meluangkan waktu dan pikiran untuk diskusi tentang penyusunan skripsi ini.
12. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik secara materil maupun moril.

Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 21 April 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Ulil Albab, Mohammad. 2022. **Penerapan Metode Transformasi Double Laplace pada Penyelesaian Persamaan Klein Gordon**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Transformasi Double Laplace, persamaan klein gordon.

Metode Transformasi Laplace merupakan salah satu metodde yang sering digunakan untuk mencari solusi eksak persamaan diferensial biasa dengan syarat awal tertentu. Metode tersebut dapat dilakukan dua kali berturut-turut dengan dua variabel bebas berbeda sehingga disebut metode transformasi double laplace ini. Beberapa sifat lain yang memuat dua peubah bebas juga diberikan sebagai perumuman dari sifat-sifat transformasi laplace tunggal. Lebih lanjut, solusi eksak untuk suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan batas tertentu dapat diperoleh dengan menggunakan metode ini. Pada penelitian ini, metode transformasi double laplace diimplementasikan pada pencarian solusi eksak Persamaan Diferensial Parsial Linier (PDPL). Dalam hal ini, PDPL yang dibahas adalah persamaan klein gordon dengan syarat awal dan syarat batas ditentukan. Pada bagian akhir, solusi analitik dari persamaan tersebut dapat diperoleh dan sesuai dengan solusi eksak menggunakan metode analitik yang lain.

ABSTRACT

Ulil Albab, Mohammad. 2022. **Implementation of Double Laplace Transformation Method for Solving Klein Gordon Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Double Laplace Transform, Klein Gordon Equation.

Laplace Transformation Method is a frequently used method to find exact solution of ordinary differential equation with a certain initial condition. The method can be implemented twice in a row using two different independent variables so that it called double laplace transformation method. Some other properties which contain two independent variables also given as a generalization of single laplace transformation properties. Furthermore, exact solution for a partial differential equation with certain initial and boundary conditions can be obtained using this method. In this research, double laplace transformation method is implemented to find exact solution of Linear Partial Differential Equation. In this condition, the linear partial differential equation we discuss is Klein Gordon equation with certain initial and boundary conditions. In the final result, we obtain the analytical solution of the equation and this solution appropiate with exact solution using another analytical solution.

مستخلص البحث

اولي الألباب، محمد. ٢٠٢٢. **تطبيق طريقة تحويل لابلاس المزدوج في حل معادلة كلاين–جوردون**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١) الدكتورة، هاني ودايايي ، الماجستير. (٢) إرنا هيراواتي، الماجستير.

الكلماة الرئيسية: تطبيق طريقة تحويل لابلاس المزدوج، معادلة كلاين–جوردون.

يمكن طريقة تحويل لابلاس هي طريقة تستخدم غالبًا لإيجاد حلول دقيقة للمعادلات التفاضلية العادية بشروط أولية معينة. تنفيذ هذه الطريقة مرتين على التوالي باستخدام متغيرين مستقلين مختلفين ، ولذلك تسمى هذه الطريقة طريقة تحويل لابلاس المزدوج. يتم أيضًا تقديم العديد من الخصائص الأخرى التي تحتوي على متغيرين مستقلين كتعميمات لخصائص تحويل لابلاس الواحد. علاوة على ذلك ، يمكن الحصول على حل دقيق لمعادلة تفاضلية جزئية بشروط أولية وحدودية باستخدام هذه الطريقة. في هذه البحث ، تم تنفيذ طريقة التحويل المزدوج لابلاس لإيجاد الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة ، فإن المعادلة التي تتم مناقشتها هي معادلة كلاين–جوردون مع الشروط الأولية والحدية .الجزئية الخطية المحددة. أخيرًا ، يمكن الحصول على حل تحليلي للمعادلة ويتوافق ذلك مع حل دقيق باستخدام طرق تحليلية أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu ilmu yang sangat penting digunakan di dalam kehidupan sehari-hari ialah ilmu matematika. Terdapat permasalahan di dalam kehidupan manusia yang dapat dipecahkan permasalahannya dengan menggunakan ilmu matematika. Oleh karena itu, berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari dapat diimplementasikan permasalahannya secara matematis, sehingga dapat dikaji dan menemukan solusi dengan mudah. Bidang tersebut dapat dikenal sebagai permodelan matematika. Model matematika banyak digunakan dalam masalah ilmu sains dan teknologi seperti biologi, teknik, kedokteran, ekonomi, ilmu sosial, politik dan ilmu komputer. Hal semacam ini sangat membantu untuk mempermudah menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari hari. Allah berfirman dalam Q.S az-Zumar ayat 27.

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِيْ هٰذَا الْقُرْاٰنِ مِنْ كُلِّ مَثَلٍ لَّعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُوْنَۚ

Artinya : "*Sesungguhnya telah Kami buatkan bagi manusia dalam al-Qur'an ini setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran"* (Q.S. az-Zumar[39]:27).

Menurut (Shihab, 2012) dari ayat diatas dapat diumpamakan ada banyak sekali masalah pada kehidupan sehari-hari bisa diterapkan dengan memodelkan suatu masalah, sehingga dapat lebih mudah dipahami. Sebagai contoh penerapannya dapat dilakukan dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam model matematika yakni menjadi persamaan diferensial.

Persamaan diferensial dapat didefinisikan sebagai suatu persamaan yang di dalamnya memiliki satu atau lebih variabel bebas diturunkan. Dua jenis persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial merupakan penjabaran berdasarkan jumlah variabel bebasnya. Jika hanya memuat satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa. Sebaliknya, persamaan diferensial parsial diketahui memuat lebih dari satu variabel bebas (Bronson & Costa, 2007). Metode transformasi double laplace digunakan dalan penelitian ini.

Suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variabel bebas s yaitu domain frekuensi, dimana s adalah bilangan kompleks merupakan definisi dari transformasi laplace sedangkan transformasi dari domain frekuensi s menjadi domain waktu t merupakan definisi dari invers transformasi laplace (Effendy & Sugiono, 2013). Pierre Simon Lapplace (1749-1827) seorang matematikawan asal Perancis ialah penemu dari transformasi laplace. Transformasi laplace sendiri juga sering dikenal sebagai persamaan laplace (Tang, 2005). Perkembangan dari metode transformasi laplace ialah transformasi double laplace.

Transformasi double laplace dapat mentransformasikan persamaan diferensial dari fungsi $f\ (x,t)$ menjadi $f\ (p,s)$, dimana p dan s merupakan bilangan kompleks. Dalam penelitian ini untuk menyelesaikan persamaan diferensi parsial khususnya persamaan *Klein-Gordon*. Persamaan *Klein-Gordon* direpresentasikan sebagai persamaan diferensial parsial orde dua dengan variabel bebas u dan variabel terikat x dan t (Deghan & Sokhri, 2009). Persamaan tersebut memiliki banyak aplikasi di bidang ilmu pengetahuan, seperti mekanika kuantum dan distribusi fluks (Sarboland, 2015).

Sebelumnya sudah ada penelitian mengenai metode transformasi double laplace. Penelitian (Sarah, 2020) yang menganalisis terkait aplikasi metode transformasi double laplace dalam persamaan diferensial parsial difusi dan fisher.

Berlandaskan keterangan di atas, metode transformasi double laplace akan diterapkan dalam penelitian ini untuk menentukan solusi analitik persamaan diferensial parsial, yaitu persamaan *Klein-Gordon*. Dengan demikian, penelitian ini berjudul "Penerapan Metode Transformasi Double Laplace untuk Penyelesaian Persamaan *Klein-Gordon*"**.**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan klein Gordon dengan menggunakan Transformasi Double Laplace?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui penyelesaian persamaan klein Gordon menggunakan metode Transformasi Double Laplace.

1.4 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat di dalam penelitian ini yakni:

1. Bagi Penulis

   Memperluas pengetahuan penulis tentang metode transformasi double laplace sebagai salah satu metode untuk menentukan solusi persamaan klein Gordon.

2. Bagi Pembaca

   Memperluas pengetahuan pembaca tentang metode transformasi double laplace sebagai salah satu metode untuk menentukan solusi persamaan klein Gordon.

1.5 Batasan Masalah

Persamaan yang akan dianalisis dalam penelitian kali ini ialah persamaan klien Gordon yang tertulis dalam jurnal (Sema, 2011)

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x\cos t + x^2 cos^2 t$$

Kondisi awal $u(x,0) = x$

$u_t(x,0) = 0$

Kondisi batas $u(0,t) = 0$

$u_x(0,t) = \cos t$

1.6 Definisi Istilah

Definisi istilah yang digunakan untuk menghindari perbedaan interpretasi istilah yang digunakan dalam penelitian ini. Di bawah merupakan definisi dari istilah-istilah yang digunakan dalam penelitian ini.

1. Model matematika adalah sebuah model abstrak yang mempresentasikan perilaku sebuah keadaan tertentu dengan bahasa matematis.
2. Transformasi adalah suatu metode operasional yang dapat dengan mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ dengan $t \geq 0$ dan f memenuhi kondisi tertentu. Kemudian transformasi laplace dari f, yang dinotasikan $L\{f(t)\}$ atau $F(s)$ didefinisikan (Kreyszig 2011).

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.1}$$

Dimana e^{-st} merupakan kernel dari transformasi dan s variable transformasi yang merupakan bilangan kompleks. Invers dari transformasi Laplace yang termuat dalam karangan (Debanth, 2007) didefinisikan sebagai berikut.

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)ds \text{ dengan } c > 0 \tag{2.2}$$

Berikut ini merupakan sifat-sifat dari transformasi laplace Naphade (2017).

a. Linieritas

Misalkan $L\{f(t)\} = F(s)$ dan $L\{g(t)\} = G(s)$. Apabila diberikan sembarang bilangan $a, b \in \mathbb{R}$, berlaku

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Bukti:

$$L\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \{af(s) + bg(s)\}dt$$

$$L\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty \left(e^{-st}af(t) + e^{-st}bg(t)\right)dt$$

$$L\{af(t) + bg(t)\} = \left(\int_0^\infty e^{-st}\, a\, f(t)dt\right) + \left(\int_0^\infty e^{-st}\, bg(t)dt\right)$$

$$L\{af(t)+bg(t)\} = a\left(\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)dt\right) + b\left(\int_0^\infty e^{-st}\ g(t)dt\right)$$

$$L\{af(t)+bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$$

$$L\{af(t)+bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

b. Sifat integral $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Bukti:

$$L\left[\int_0^t f(t)\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\right] e^{-st}\, dt$$

Dengan integral parsial diperoleh:

$$L\left[\int_0^t f(t)\right] = \left[\int_0^t f(t)\right] \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^t - \int_0^t f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\, dt$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\right] = -\left[\int_0^t f(t)\right] \frac{1}{-s}\Bigg|_0^t - \int_0^t f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\, dt$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}f^{-1}(0) + \frac{1}{s}\int_0^t f(t)e^{-st}\, dt$$

Maka:

$$L\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0)$$

c. Penskalaan terhadap variabel bebas waktu.

Misalkan $L\{f(t)\} = F(s)$, berlaku

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Bukti:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ f(at)dt$$

Misalkan $u = at$ sehingga diperoleh hasil integrasi menggunakan metode substitusi sebagai

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ f(at)dt = \int_0^\infty \frac{1}{a} e^{-\frac{s}{a}u}\ f(u)du$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}\ f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

d. Sifat pergeseran variabel

Misalkan $L\{f(t)\} = F(s)$, berlaku

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

Bukti:

$$L\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at}\, f(t)e^{-st}dt$$

$$L\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\ e^{-st-at}\ dt$$

$$L\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\ e^{-(s+a)t}\ dt$$

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

e. Sifat diferensial

Misalkan $L\{f(t)\} = F(s)$ dan nilai $f(0)$ diketahui, berlaku

$$L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Persamaan di atas dapat diintegralkan secara parsial dengan memisalkan:

$$u = e^{-st} \text{ dan } dv = \left(\frac{d}{dt}\ f(t)\right)dt$$

Sehingga diperoleh

$$u = e^{-st} \text{ dan } dv = \left(\frac{d}{dt}\ f(t)\right)dt$$

Dengan demikian diperoleh

$$L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\ \left(\frac{d}{dt}\ f(t)\right)dt = e^{-st}f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} e^{-sa} f(a) - f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Karena $s > 0$, maka $\lim_{a\to\infty} e^{-sa} f(a) = 0$. Dengan demikian,

$$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = -f(0) + sF(s)$$

$$= sF(s) - f(0)$$

Penjelasan dan bukti mengenai sifat-sifat transformasi Laplace dapat dipelajari di dalam jurnal (Smith, 2022). Berikut akan diberikn beberapa contoh mengenai sifat-sifat transformasi double Laplace.

1. Bila diketahui $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, maka tentukan $L\{f(t)\}$.

   Penyelesaian:

$$Lf(t) = Le^{at} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(s-a)}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t(s-a)} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(-\frac{1}{s-a}\right) e^{-t(s-a)}\Big|_{t=0}^{b}\, dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s-a}\left(e^{-b(s-a)} - 1\right)$$

   Untuk $s - a > 0$ atau $s > a$, maka $\lim_{b\to\infty} e^{-b(s-a)} = 0$

2. Diketahui $f(t) = \cos at$, $t \geq 0$, tentukan $L\{f(t)\}$.

   Penyelesaian:

$$L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at\ dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \cos at\, dt$$

   Dengan melakukan integral parsial dua kali, didapatkan:

$$\int_0^b e^{-st} \cos at\, dt = \frac{1}{a} \left[e^{-st}\, sin\, at\, dt + s \int e^{-st}\, sin\, at\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{a} \left[e^{-st}\, sin\, at\, dt - \frac{s}{a} \int e^{-st} (\cos at) \right]$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{-st}\, sin\, at - \frac{s}{a^2} \left[e^{-st} \cos at + s \int e^{-st}\, cos\, at\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{-st}\, sin\, at - \frac{s}{a^2} e^{-st} \cos at - \frac{s^2}{a^2} \int e^{-st}\, cos\, at\, dt$$

Sehingga didapatkan:

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) \int e^{-st} \cos at\, dt = \frac{1}{s^2 + a^2}\; [ae^{-st}\, sin\, at - se^{-st} \cos at] + c$$

Selanjutnya karena $\sin at \leq 1$, $\cos at \leq 1$ maka dapat diperhatikan bahwa untuk $s > 0$, sehingga didapatkan:

$$L\{cos\, at\} = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{s^2 + a^2} (ae^{-st}\, sin\, at - se^{-st}\, cos\, at)|_{t=0}^{b}$$

$$L\{cos\, at\} = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{s^2 + a^2} [(ae^{-sb}\, sin\, ab - se^{-sb}\, cos\, ab) + s]$$

1. $L\{cos\, at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$Bila diketahui $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, maka tentukan $L\{f(t)\}$.

   Penyelesaian:

$$Lf(t) = Le^{at} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(s-a)}\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-t(s-a)} dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \left(-\frac{1}{s-a}\right) e^{-t(s-a)} \Big|_{t=0}^{b} dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{s-a} \left(e^{-b(s-a)} - 1\right)$$

Untuk $s - a > 0$ atau $s > a$, maka $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-b(s-a)} = 0$

2. Diketahui $f(t) = \cos at$, $t \geq 0$, tentukan $L\{f(t)\}$.

   Penyelesaian:

$$L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at \; dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \cos at \, dt$$

   Dengan melakukan integral parsial dua kali, didapatkan:

$$\int_0^b e^{-st} \cos at \, dt = \frac{1}{a} \left[e^{-st} \, sin \, at \, dt + s \int e^{-st} \, sin \, at \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{a} \left[e^{-st} \, sin \, at \, dt - \frac{s}{a} \int e^{-st} (\cos at) \right]$$

$$= \frac{1}{a} \, e^{-st} \, sin \, at - \frac{s}{a^2} \left[e^{-st} \cos at + s \int e^{-st} \, cos \, at \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{a} \, e^{-st} \, sin \, at - \frac{s}{a^2} e^{-st} \cos at - \frac{s^2}{a^2} \int e^{-st} \, cos \, at \, dt$$

   Sehingga didapatkan:

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) \int e^{-st} \cos at \, dt = \frac{1}{s^2 + a^2} \; [a e^{-st} \, sin \, at - s e^{-st} \cos at] + c$$

   Selanjutnya karena $\sin at \leq 1$, $\cos at \leq 1$ maka dapat diperhatikan bahwa untuk $s > 0$, sehingga didapatkan:

$$L\{cos \, at\} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^2 + a^2} (a e^{-st} \, sin \, at - s e^{-st} \, cos \, at)|_{t=0}^{b}$$

$$L\{cos \, at\} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s^2 + a^2} [(a e^{-sb} \, sin \, ab - s e^{-sb} \, cos \, ab) + s]$$

$$L\{cos \, at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

2.1.2 Invers Transformasi Laplace

Adapun invers dari transformasi laplace secara umum dinyatakan sebagaiberikur (Dhunde, 2013):

Tabel 2.1 Invers Transfomasi Laplace.

No	$f(t) = L^{-1}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7	$t^n g(t), n = 1,2,\ldots$	$(-1)^n \frac{d^n G(a)}{ds^n}$
8	$t\ sin\ \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
9	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)}$
10	$g(at)$	$\frac{1}{a} G\left(\frac{s}{a}\right)$
11	$e^{at} g(t)$	$G(s-a)$
12	$a^{at} t^n$, untuk $n = 1,2,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
13	te^{-t}	$\frac{1}{(s+1)^2}$
14	$1 - e^{-tT}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$

2.1.3 Transformasi Double Laplace

Seorang matematikawan yang bernama Prancis Simon Laplace (1749-1827) menemukan Tranformasi Laplace untuk pertama kalinya. Penemuan tersebut mendefinisikan bahwa Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dengan variabel bebas t menjadi persamaan baru dengan variabel bebas s, s adalah bilangan kompleks. Variabel t biasanya menunjukkan waktu untuk ditransformasikan menjadi variabel s yang menyatakan frekuensi s menjadi variabel fungsi dengan waktu t (Effendy dan Sugiyono, 2013).

Untuk mengindikasikan transformasi laplace, diberikan $f(x,t)$ merupakan fungsi dari dua variabel x dan t, dimana $x,t > 0$. Maka dapat diinterpretasikan sebagai berikut.

$$L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(p,s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} f(x,t)dxdt, \qquad (2.3)$$

dimana p,s merupakan bilangan kompleks (Dhunde dan Waghmare, 2013).

2.1.4 Transformasi Double Laplace pada Turunan Parsial

Berikut ini adalah beberapa definisi Transformasi double Laplace pada turunan parsial yang dijelaskan di dalam jurnal (Dhunde, 2013, pp:22)

$$L_t L_x\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\} = p\bar{f}(p,s) - \bar{f}(0,s) \qquad (2.5)$$

$$L_t L_x\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\} = p\bar{f}(p,s) - \bar{f}(0,s) \qquad (2.6)$$

$$L_t L_x\left\{\frac{\partial f_{xx}(x,t)}{\partial x}\right\} = p^2\bar{f}(p,s) - p\bar{f}(0,s) - \bar{f}_x(0,s) \qquad (2.7)$$

$$L_t L_x\left\{\frac{\partial f_{tt}(x,t)}{\partial t}\right\} = s^2\bar{f}(p,s) - s\bar{f}(0,s) - \bar{f}_t(0,s) \qquad (2.8)$$

(Dhunde dan Waghmare, 2013)

2.1.5 Sifat-sifat Dasar Transformasi Double Laplace

Adapun beberapa sifat dasar Transformasi Double Laplace antara lain:

Tabel 2.2 Sifat-sifat dasar Transformasi Double Laplace (Debnath, 2016, pp:230)

A	$L_2[e^{-ax-by}f(x,y)] = \bar{f}(p+a, q+b),$
B	$L_2 = [f(ax)g(by)] = \frac{1}{ab}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)\bar{g}\left(\frac{q}{p}\right),$ $a > 0, b > 0$
C	$L_2[f(x)] = \frac{1}{q}\bar{f}(p), L_2[f(x)] = \frac{1}{p}\bar{f}(q)$
D	$L_2[f(x+y)] = \frac{1}{p-q}[\bar{f}(p) - \bar{f}(q)]$
E	$L_2[f(x-y)] = \frac{1}{(p+q)}\left[\bar{f}(p) - \bar{f}(q)\right], untuk\ f\ genap$ $= \frac{1}{(p+q)}\left[\bar{f}(p) + \bar{f}(q)\right], untuk\ f\ ganjil$
F	$L_2[f(x)H(x-y)] = \frac{1}{q}\left[\bar{f}(p) - \bar{f}(p+q)\right]$
G	$L_2[f(x)H(x-y)] = \frac{1}{q}\left[\bar{f}(p+q)\right]$
H	$L_2[f(x)H(x+y)] = \frac{1}{q}\left[\bar{f}(p)\right]$
I	$L_2[H(x-y)] = \frac{1}{p(p+q)}, dengan\ f(x) = 1$
J	$L_2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = p\bar{\bar{u}}(p,q) - \bar{u}_1(q)$, di mana $\bar{\bar{u}}(p,q)$ $= L_2[\mathrm{u(x,y)}]$, dan $\bar{u}_1(q) = L[u(0,y)]$.
K	$L_2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = q\bar{\bar{u}}(p,q) - \bar{u}_2(p), di\ mana\ \bar{u}_2(p) = L[u(x,0)]$
L	$L_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = p^2\bar{\bar{u}}(p,q) - p\bar{u}_1(q) - \bar{u}_3(q)$, di mana $\bar{u}_3(p) = L_x[u(0,y)]$
M	$L_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = q^2\bar{\bar{u}}(p,q) - q\bar{u}_2(p) - \bar{u}_4(p)$, di mana

	$\bar{u}_4(p) = L\left[u_y(x,0)\right]$
N	$L_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] = pq\bar{\bar{u}}(p,q) - q\bar{u}_1(q) - p\bar{u}_2(p) + u(0,0)$, di mana $L[u_x(x,0)] = p\bar{u}_2(p) - u(0,0)$

Teorema 2.2

Jika $L_2[f(x,y)] = \bar{f}(p,q)$ lalu,

$$L_2[f(x-\xi, y-\eta)]H[f(x-\xi, y-\eta)] = e^{-\xi p - \eta q}\bar{\bar{f}}(p,q), \tag{2.30}$$

Dimana $H(x,y)$ adalah Hevaviside unit step fuction yang didefinisikan sebagai $H(x-a, y-b) = 1$ ketika $x > a$ dan $y > b$ kemudian $H(x-a, y-b)$ dimana $x < a$ dan $y < b$.

Teorema 2.3

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi periodik dari periode a dan, (yang kemudian $f(x+q, y+b) = f(x,y)$ untuk setiap x dan y), dan jika $L_2\{f(x,y)\}$ ada, maka

$$L_2\{f(x,y)| = [a - e^{-pa-qb}]^{-1}\int_0^a \int_0^b e^{-px-qy} f(x,y)dxdy$$

Hal ini membuktikan bahwa teorema dari Transformasi Double Laplace adalah fungsi periodik.

2.1.6 Persamaan Klein Gordon

Pada penelitian ini akan dianalisis penerapan metode transformasi double laplace dalam menentukan solusi analitik persamaan diferensial parsial, yaitu persamaan dengan persamaan *Klein-Gordon*. Metode ini penulis akan menentukan solusi analitik dari persamaaan diferensial parsial yang digunakan. Persamaan yang akan diteliti dalam penelitian kali ini adalah persamaan klien gordon yang ditulis dalam jurnal (Sema, 2011).

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x\cos t + x^2 cos^2 t$$

Kondisi awal

$$u(x,0) = x \text{ dan } u_t(x,0) = 0$$

Kondisi batas

$$u(0,t) = 0 \text{ dan } u_x(0,t) = \cos t$$

Dijelas kan juga dalam artikel tersebut bahwa salah-satu aspek yang penting dari suatu persamaan diferensial parsial yang terjadi dalam matematika terapan adalah yang terkait dengan Klein-Gordon. Persamaan Klein-Gordon memainkan peranan penting dalam fisika matematika, fisika plasma, dinamika fluida dan kinetika kimia.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Sebagai mahkluk yang dikaruniai akal oleh Allah Swt, manusia menjadikan atau memposisikan dirinya sebagai mahkluk yang sempurna dibandingkan dengan mahkluk-makhluk lainnya. Sehingga dengan akal itu manusia seringkali memperoleh, memperdalam dan mencari suatu solusi dari suatu masalah di kehidupannya. Dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali permasalahan yang harus dihadapi manusia. Demikian juga dalam ilmu matematika, khususnya dalam bidang terapan permasalahan seringkali dimisalkan menjadi persamaan parsial yang harus diselesaikan atau dicari solusi analitiknya. Dalam islam dapat dipelajari juga bahwasannya manusia dituntut harus dapat menyelesaikan berbagai macam persoalan tentunya dengan berbagai cara atau metode. Allah SWT berfirman dalam QS. Yusuf ayat 67, yang artinya:

وَقَالَ يٰبَنِيَّ لَا تَدْخُلُوْا مِنْۢ بَابٍ وَّاحِدٍ وَّادْخُلُوْا مِنْ اَبْوَابٍ مُّتَفَرِّقَةٍۗ وَمَآ اُغْنِيْ عَنْكُمْ مِّنَ اللّٰهِ مِنْ شَيْءٍۗ اِنِ الْحُكْمُ
اِلَّا لِلّٰهِ ۗعَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَعَلَيْهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُوْنَ

"Wahai anak-anakku! Janganlah kamu masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berbeda. Namun demikian aku tidak dapat mempertahankan kamu sedikitpun dari Allah. Keputusan hanya milik Allah. Kepada-Nya aku bertawakal dan bertawakallah orang-orang yang bertawakal." (QS. Yusuf [12]:67)

Penjelasan uraian ayat di atas ditafsirkan bahwa ayat tersebut turun ketika putra-putra Nabi Ya'kub A.s. telah diberi izin untuk pergi ke Kota Mesir, meskipun keadaan hati Nabi Ya'kub A.s. pada saat itu merasakan sesuatu yang sulit. Namun demi keselamatan putra-putranya, Nabi Ya'kub A.s. menasihati putra-putranya supaya memasuki pintu Kota Mesir secara berbeda-beda agar terhindar dari bahaya yang tidak diinginkan (Jabir,2009).

Uraian di atas menjelaskan bahwasannya dari berbagai macam persoalan atau masalah dapat dicari solusinya dengan berbagai macam metode. Sama halnya dalam ilmu matematika terdapat berbagai macam metode untuk mencari solusi dari suatu masalah. Terlebih khusus dalam bidang terapan metode analitik memberikan solusi eksak dari suatu permasalahan, sedangkan metode numerik memberikan solusi hampiran. Dalam penelitian ini penulis menggunakan metode Transformasi Double Laplace dengan harapan dapat menemukan solusi eksak untuk persamaan Klein Gordon. Perlu diketahui bahwa dalam menentukan solusi di dalam matematika tidaklah muda, tetapi bukan menjadi sebab untuk tidak dapat dipecahkan. Dalam hal ini, sesuai dengan firman Allah SWT:

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"(Q.S. Al -Insyroh [94]:5)

Penjelasan uraian di atas terlihat jelas bahwasannya dalam kondisi masalah sesulit apapun pasti ada solusinya. Dalam penjelasan yang lain bahwa Nabi pernah bersabada:

"Tidak ada satu pun musibah yang menimpa atas diri seorang Muslim baik kepenatan, sakit kronis, kerisauan, kesedihan, kesakitan, dan kemurungan apa pun, sehingga duri mengenai badannya, melainkan menjadi khafaroh baginya atas dosa-dosanya." (HR. Muslim Bukhori)

Disebutkan dari hadist di atas merupakan ujian-ujian manusia di dunia. Bahwasannya seberat apapun ujian yang menimpa tak lain ialah sebagai penghapus dosa bagi manusia untuk mencapai kebahagian akhirat.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada sub bab ini akan dijelaskan sedikit cara atau langkah-langkah dari metode Transformasi Double Laplace pada Persamaan Klein Gordon. Dimana diawali dengan analis awal perasaaman Klein Gordon yakni:

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x\cos t + x^2cos^2t \qquad (2.3.1)$$

Dengan menggunakan batas-batas.

Kondisi awal

$$u(x,0) = x \ , u_t(x,0) = 0 \qquad (2.3.2)$$

Kondisi batas

$$u(0,t) = 0, u_x(0,t) = \cos t \qquad (2.3.3)$$

Langkah selanjutnya yakni mentransformasikan batas awal dan kondisi batas dengan menggunakan definisi (2.14). Sehingga diperoleh solusi atau persamaan yang lebih sederhana.

Persamaan Klein Gordon akan ditransformasikan dengan menggunakan definisi sebagai berikut:

$$L_t L_x\{f_{xx}(x,t)\} = p^2 \bar{f}(p,s) - p\bar{f}(0,s) - \bar{f}_x(0,s)$$

Langkah terakhir yakni melakukan invers pada persamaan Klein Gordon sehingga akan diketahui solusi dari persamaan tersebut.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini bersifat kualitatif dengan melakukan studi literatur, yakni dengan mengkaji referensi dan buku-buku yang berkaitan dengan penelitian tersebut, sehingga akan ditemukannya solusi analitik.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian ini diawali dengan mempelajari dan mengkaji dari beberapa artikel atau jurnal yang berkaitan dengan pokok penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian yang digunakan penulis pada penelitian ini secara rinci dijabarkan sebagai berikut.

1. Menganalisi persamaan klien gordon.
2. Mentransformasikan persamaan klein gordon dengan menggunakan metode transformasi double laplace.
3. Menggunakan sifat-sifat transformasi double laplace pada persamaan klein gordon.
4. Menginverskan persamaan klein gordon.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Mengidentifikasi Persamamaan Klien Gordon

Pada bab ini penulis akan menjelaskan bagaimana menerapkan metode transformasi double laplace pada persamaan Klien Gordon. Langkah awal ialah pengamsusian persamaan klein Gordon sebagai berikut:

$$U_{tt} - U_{xx} + U^2 = -x\cos t + x^2 \cos^2 t \tag{4.1}$$

Dengan nilai awal $u(x,0) = x$ (4.2)

$u_t(x,0) = 0$ (4.3)

dan kondisi batas $u(0,t) = 0$ (4.4)

$u_x(0,t) = \cos t$ (4.5)

Mentransformasikan nilai awal dan kondisi batas menggunakan definisi (2.3)

$$L_t L_x\{u(x,0)\} = \bar{u}(p,0)$$

$$= \int_0^\infty e^{-s.0} \int_0^\infty e^{-px}\, xdxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s.0}\, dt \int_0^\infty e^{-px}\, xdx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px}\, xdx$$

Nilai integral $\int_0^\infty e^{-px}\, xdx$ akan ditentukan menggunakan metode integral parsial dengan memisalkan:

$u = x$ dan $du = dx$

Ekuivalen dengan

$dv = e^{-px}$ dan $v = \frac{-e^{-px}}{p}$

Sehingga didapatkan:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \frac{-xe^{-px}}{p} - \int \frac{-e^{-px}}{p} dx$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \frac{-xe^{-px}}{p} - \int -\frac{1}{p} e^{-px} dx$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{1}{p} \int e^{-px}\, dx$$

Selanjutnya misalkan $u = -px$ maka $\frac{du}{dx} = -p$ atau $dx = -\frac{1}{p}\, du$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{1}{p} \int -\frac{1}{p}\, e^{u}\, du$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \frac{-xe^{-px}}{p} - \frac{1}{p^2} \int e^{u}\, du$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \left|\frac{-xe^{-px}}{p} - \frac{1}{p^2}\, e^{u}\right|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \left|\frac{-xe^{-px}}{p} - \frac{1}{p^2}\, e^{-px}\right|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = -\frac{1}{p}\left|xe^{-px} + \frac{1}{p}\, e^{-px}\right|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = -\frac{1}{p}\left(0 - \frac{1}{p}\, e^{-p0}\right)$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = -\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\right)$$

$$\int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx = \frac{1}{p^2}$$

Sehingga hasil $L_t L_x\{u(x,0)\} = \frac{1}{p^2}$ (4.6)

$L_tL_x\{u_t(x,0)\} = \bar{u}_t(p,0)$

$$= \int_0^\infty e^{-s.0} \int_0^\infty e^{-px} . (0)\, dxdt$$

$$= 0 \tag{4.7}$$

$L_tL_x\{u(0,t)\} = \bar{u}(0,s)$

$$= \int_0^\infty e^{-st} . (0) \int_0^\infty e^{-p.0}\, dxdt$$

$$= 0 \tag{4.8}$$

$L_tL_x\{u_t(0,t)\} = \bar{u}_x(0,t)$

$$= \int_0^\infty e^{-s.t} \int_0^\infty e^{-p.0} \cos t\, dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cos t\, dt \int_0^\infty e^{-p.0}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cos t\, dt$$

Nilai integral $\int_0^\infty e^{-st} \cos t\, dt$ ditentukan menggunakan metode integral parsial dengan memisalkan

$u = \cos t$ dan $dv = e^{-st}$

Ekuivalen dengan

$du = -\sin t$ dan $v = \frac{-e^{-st}}{s}$

Sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \cos t\, dt = \frac{-e^{-st}}{s} \cos t - \int \frac{-e^{-st}}{s} - \sin t\, dt$$

Selanjutnya nilai integral $\int \frac{-e^{-st}}{s} - \sin t\, dt$ ditentukan menggunakan metode integral parsial dengan memisalkan

$u\ =\ -\ sint$ dan $dv\ =\ \frac{-e^{-st}}{s}$

Ekuivalen dengan

$du\ =\ -\ cos\ t$ dan $v\ =\ \frac{e^{-st}}{s^2}$

Sehingga didapatkan persamaan:

$$\int_0^\infty e^{-st}\ cos\ t\ dt\ =\ \frac{-e^{-st}cos\ t}{s} - \left(\frac{-e^{-st}sin\ t}{s^2} - \int \frac{-e^{-st}cos\ t}{s^2}\ dt\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ cos\ t\ dt\ =\ \frac{-e^{-st}cos\ t}{s} - \left(\frac{-e^{-st}sin\ t}{s^2} + \frac{1}{s^2}\int e^{-st}cos\ t\ \ dt\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ cos\ t\ dt\ =\ \left.\frac{e^{-st}sin\ t - se^{-st}cos\ t}{s^2\ +\ 1}\right|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ cos\ t\ dt\ =\ \frac{1}{s^2\ +1}\left(0\ -\ (sin\ 0\ -\ s.cos\ 0)\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ cos\ t\ dt\ =\ \frac{1}{s^2\ +1}\ (s)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ cos\ t\ dt\ =\ \frac{s}{s^2\ +1}$$

Sehingga didapatkan $L_tL_x\{u_t(0,t)\} = \frac{s}{s^2\ +1}$ (4.9)

Mengaplikasikan transformasi double laplace pada persamaan klein gordon. Akan ditunjukkan persamaan klien gordon sebagai berikut:

$$U_{tt} - U_{xx} + U^2 = -x\cos t + x^2\, cos^t\, t$$

Akan digunakan definisi (2.3) pada persamaan klien gordon sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$L_tL_x(u_{tt}) - L_tL_x(u_{xx}) + L_tL_x(u^2) = L_tL_x(-xcost) + L_tL_x(x^2cos^2t)$$

Akan digunakan definisi (2.8) pada persamaan u_{tt} sehingga:

$$L_tL_x(u_{tt}) = s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0)$$

Akan digunakan definisi (2.7) pada persamaan $-U_{xx}$ sehingga:

$$-L_tL_x(u_{xx}) = -p^2\bar{u}(p,s) + p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s)$$

Akan digunakan definisi (2.3) pada persamaan u^2 sehingga:

$$L_tL_x\{u^2(x,t)\}$$

Akan digunakan definisi (2.3) pada persamaan $-x\cos t$ sehingga:

$$L_xL_t\{(-x\cos t)\}$$

Akan digunakan definisi (2.3) pada persamaan $x^2\, cos^t\, t$ sehingga:

$$L_xL_t\{x^2cos^2\, t\}.$$

Selanjutnya dari uraian diatas didapatkan persamaan baru sebagai berikut:

$$s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0) - p^2\bar{u}(p,s) + p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s)$$
$$+ L_xL_t\{u^2(x,t)\} = L_xL_t\{(-x\cos t)\} + L_xL_t\{x^2cos^2\, t\}$$

Dapat diperhatikan dari persamaan $L_xL_t\{(-x\cos t)\}$ sebagai berikut:

$$L_tL_x\{f(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty e^{-px}\, f(x,t)\, dxdt$$

$$L_xL_t\{(-x\cos t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty e^{-px}\, (-xcost)dxdt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\,(cost)\int_0^\infty e^{-px}\,(x)dxdt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\,(cost)\left|\frac{x}{p}e^{-px} + \frac{1}{p^2}e^{-px}\right|_0^\infty\, dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\,(cost)\left(\frac{1}{p^2}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty e^{-st}\,(cost)\;dt$$

$$= -\frac{1}{p^2}L_t(cost)$$

$$= -\frac{1}{p^2}\;.\frac{s}{s^2+1^2}$$

Sehingga diperoleh:

$$s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0) - p^2\bar{u}(p,s) + p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s)$$
$$+ L_xL_t\{u^2(x,t)\} = L_xL_t\{(-x\cos t)\} + L_xL_t\{x^2cos^2\;t\}$$

$$s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0) - p^2\bar{u}(p,s) + p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s)$$
$$+ L_xL_t\{u^2(x,t)\} = -\left(\frac{1}{p^2}.\frac{s}{s^2+1}\right) + L_xL_t\{x^2cos^2\;t\}$$

$$s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0) - p^2\bar{u}(p,s) + p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s)$$
$$+\left(\frac{1}{p^2}.\frac{s}{s^2+1}\right) = L_xL_t\{x^2cos^2\;t\} - L_xL_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2-p^2)\bar{u}(p,s) - s.\frac{1}{p^2} - 0 + 0 + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{p^2}.\frac{s}{s^2+1}$$
$$= L_xL_t\{x^2cos^2\;t\} - L_xL_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2 - p^2)\bar{u}(p,s) - \frac{s}{p^2} + \frac{p^2 s}{p^2(s^2+1)} + \frac{s}{p^2(s^2+1)}$$

$$= L_x L_t\{x^2 cos^2\ t\} - L_x L_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2 - p^2)\bar{u}(p,s) - \frac{s(s^2+1)}{p^2(s^2+1)} + \frac{p^2 s}{p^2(s^2+1)} + \frac{s}{p^2(s^2+1)}$$

$$= L_x L_t\{x^2 cos^2\ t\} - L_x L_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2 - p^2)\bar{u}(p,s) + \frac{(-s^3 - s + p^2 s + s)}{p^2(s^2+1)} = L_x L_t\{x^2 cos^2\ t\} - L_x L_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2 - p^2)\bar{u}(p,s) + \frac{(p^2 s - s^3)}{p^2(s^2+1)} = L_x L_t\{x^2 cos^2\ t\} - L_x L_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2 - p^2)\bar{u}(p,s) - \frac{(s^2 - p^2)s}{p^2(s^2+1)} = L_x L_t\{x^2 cos^2\ t\} - L_x L_t\{u^2(x,t)\}$$

$$(s^2 - p^2)(\bar{u}(p,s)) - \frac{s}{p^2(s^2+1)} = L_x L_t\{x^2 cos^2 t - u^2(x,t)\}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(s^2 - p^2)} L_x L_t\{x^2 cos^2 t - u^2(x,t)\} + \frac{s}{p^2(s^2+1)}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{s}{p^2(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2 - p^2)} L_x L_t\{x^2 cos^2 t - u^2(x,t)\}$$

4.2 Menerapkan Invers Transformasi Double Laplace

$$u(x,t) = L_x{}^{-1} L_t{}^{-1} \bar{u}(p,s)$$

$$u(x,t) = L_x{}^{-1} L_t{}^{-1} \left[\frac{s}{p^2(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2 - p^2)} L_x L_t\{x^2 cos^2\ t - u^2(x,t)\}\right]$$

$$u(x,t) = L_x{}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} . L_t{}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$+ L_x{}^{-1} L_t{}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 - p^2)} L_x L_t\{x^2 cos^2\ t - u^2(x,t)\}\right]$$

$$u(x,t) = x . \cos t + L_x{}^{-1} L_t{}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 - p^2)} L_x L_t\{x^2 cos^2\ t - u^2(x,t)\}\right]$$

4.3 Metode Iterative untuk Menemukan Solusi Eksak

$$L_x^{-1}L_t^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-p^2)}L_xL_t\{x^2cos^2\,t-\,u^2(x,t)\}\right]$$

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\,(x,t)$$

- $u_0(x,t)=x.\cos t$
- $u_1(x,t)=\,L_x^{-1}L_t^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-p^2)}L_xL_t\{x^2cos^2\,t-\,u_0{}^2(x,t)\}\right]$

$$=L_x^{-1}L_t^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-p^2)}L_xL_t\{x^2cos^2\,t-\,(x.\cos t)^2\}\right]$$

$$=L_x^{-1}L_t^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-p^2)}L_xL_t\{0\}\right]$$

$$=0$$

- $u_2(x,t)=L_x^{-1}L_t^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-p^2)}L_xL_t\{(u_0+u_1)^2-u_0{}^2\}\right]$

$$=\,L_x^{-1}L_t^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-p^2)}L_xL_t\{u_0{}^2+u_0u_1+u_1{}^2-u_0{}^2\}\right]$$

$$=0$$

Sehingga didapatkan solusi sebagai berikut:

$$u(x,t)=x.\cos t+L_x^{-1}L_t^{-1}[L_xL_t\{x^2cos^2\,t-\,u^2(x,t)\}]$$

$$=x.\cos t+0$$

$$=x.\cos t$$

4.4 Pembuktian x cos t merupakan Solusi Persamaan Klien Gordon

Berdasarkan pembahasan di atas, telah didapatkan solusi analitik dari persamaan klien gordon menggunakan metode transformasi double laplace. Solusi analitik dari persamaan klien gordon $U_{tt}-U_{xx}+\,U^2=\,-x\,cos\,t+x^2\,cos^2\,t$

pada kondisi awal $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 0$ da kondisi batas $u(0,t) = 0$, $u_x(0,t) = \cos t$ adalah:

$$u(x,t) = x.\cos t.$$

Agar solusi yang didapatkan dinyatakan benar, perlu dilakukan pembuktian yaitu dengan mensubstitusikan hasil analitiknya ke dalam persamaan awal menjadi

$$U_{tt} - U_{xx} + U^2 = -x \, cos \, t + x^2 \, cos^2 \, t$$

Dimana;

$$U(x,t) = x \, cos \, t$$

$$U_t \quad = - x \, sin \, t$$

$$U_{tt} \quad = - x \, cos \, t$$

$$U_x \quad = cos \, t$$

$$U_{xx} = 0.$$

Sehingga menjadi persamaan sebagai berikut:

$$U_{tt} - U_{xx} + U^2 = - x \, cos \, t - 0 + (x \, cos \, t)^2$$

$$U_{tt} - U_{xx} + U^2 = -x \, cos \, t + x^2 \, cos^2 \, t.$$

Berdasarkan pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa solusi analitik dari penyelesaian persamaan klien gordon dengan menggunakan metode transformasi double Laplace dikatakan benar.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa solusi eksak dari persamaan klien gordon bisa didapatkan dengan menggunakan metode transformasi double laplace. Namun, metode tersebut memiliki kelemahan saat mencari invers dari persamaan klien gordon. Oleh karena itu dibutuhkan metode iterative agar mempermudah mendapatkan hasil invers dari persamaan klein gordon. Adapun solusi eksak dari persamaan klien gordon dengan menggunakan metode transformasi double laplace yaitu sebagai berikut:

$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x \cos t + x^2 cos^2 t$

Dengan nilai awal u(x,0) = x, $u_t(x,0) = 0$

Dan kondisis batas $u(0,t) = 0, u_x(0,t) = cos\ t$, adalah $u(x,t) = x.cos\ t$

5.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial lainnya dengan menggunakan metode transformasi double Laplace.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an Terjemahan, 20015. *Department Agama RI*. Bandung: CV. Darus Sunnah.

Bronson, Richard, dan Gabriel B. Costa. 2007. *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga.* Jakarta: Erlangga.

Dhunde, Ranjit. R. dan G.L. Waghmare. 2013. Double Laplace Transform and It's Applications. International Journal of Engineering Research & Techno;ogy (IJERT)Vol. 2 Issue 12.

Deghan, M. & Shokri, A. 2009. Numerical Solution of The Nonlinear Klein-Gordon Equation using Radial Basis Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230: 400-410.

Effendy, N. & Sugiyono, V. 2013. *Matematika Teknik I*. Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service).

Jabir, A.B. 2009. *Tafsir al-Aishar*. Jatinegara: Darussunnah Press.

Rizkayani, Sarah. 2020. *Transformasi Double Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial.*Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

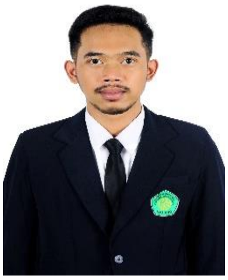
Sarboland, M. & Aminataei. A. 2015. Numerical Solution of Nonlinear Klein-Gordon Equation using Multiquadric Quasi-interpolation Scheme. *Journal of Applied Mathematics*, 3,3:40-49.

Shihab, M.Q. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 15.* Jakarta: Lentera Hati.

Tang, K.T. 2005. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 2: Vector Analysis, Ordinary Differential Equations and Laplace Trasforms*. Tacoma: Springer Science & Business Media.

Yildiray, K. Sema. & Galip. 2011. *Reduced Differential Transform Method for Solving Klein Gordon Equations.* London:World Congress.

RIWAYAT HIDUP



Mohammad Ulil Albab, lahir di Tuban pada tanggal 11 Juli 1997. Biasa dipanggil Albab. Anak pertama dari 3 bersaudara dan merupakan putra dari pasangan Bapak Wiyanto dan Ibu Hidayatus Sholihah.

Pendidikan dasarnya di tempuh di SDN 02 Widang Tuban dan lulus pada tahun 2009. Lalu melanjutkan Pendidikan di MTsN 1 Lamongan dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMA A. Wahid Hasyim Jombang dan lulus tahun 2015. Pada tahun yang sama melanjutkan ke jenjang yang lebih tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Jurusan Matematika Murni dan selama di Malang tinggal di Jl. Joyo Suko, no. 20, sejak semester 6.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Mohammad Ulil Albab
NIM	:	15610098
Fakultas/Jurusan	:	Sains danTeknologi/Matematika
JudulSkripsi	:	Penerapan Metode Transformasi Double Laplace pada Penyelesaian Persamaan Klein Gordon
Pembimbing I	:	Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II	:	Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	TandaTangan	
1	30 Maret 2021	Konsultasi dan Revisi Bab I	1.	
2	28 April 2021	Konsultasi Integrasi Bab I, Bab II dan Bab IV		2.
3	17 Mei 2022	Konsultasi dan Revisi Bab II dan III	3.	
4	19 Mei 2022	Konsultasi dan Revisi Bab IV		4.
5	31 Mei 2022	Revisi Agama Bab I, Bab II dan Bab IV	5.	
6	9 Juni 2022	Revisi Bab I, II dan III		6.
7	23 Juni 2022	Revisi Bab IV	7.	
8	23 Juni 2022	Revisi Integrasi		8.
9	23 Juni 2022	ACC Bab IV	9.	
10	23 Juni 2022	ACC Integrasi		10.
11	27 Juni 2022	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 28 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M. Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005