

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-
INFECTIOUS-HOSPITALIZED-CRITICAL-RECOVERED-DEAD*
(SEIHCRD) PADA PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

**OLEH
FAHMA MU'JIZATIL QUR'ANI
NIM. 18610060**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-
INFECTIOUS-HOSPITALIZED-CRITICAL-RECOVERED-DEAD*
(SEIHCRD) PADA PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Fahma Mu'jizatil Qur'ani
NIM. 18610060**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-
INFECTIOUS-HOSPITALIZED-CRITICAL-RECOVERED-DEAD*
(SEIHCIRD) PADA PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

Oleh
Fahma Mu'jizatil Qur'ani
NIM. 18610060

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal 08 Juni 2022

Dosen Pembimbing I



Dr. Heri Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Dosen Pembimbing II



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-
INFECTIOUS-HOSPITALIZED-CRITICAL-RECOVERED-DEAD*
(SEIHCIRD) PADA PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

Oleh
Fahma Mu'jizatil Qur'ani
NIM. 18610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 15 Juni 2022

Ketua Penguji : Juhari, M.Si

Anggota Penguji 1 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji 3 : Dr. Elly Susanti, M.Sc



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika




Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Fahma Mu'jizatil Qur'ani
NIM : 18610060
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Susceptible-Exposed-Infectious-Hospitalized-Critical-Recovered-Dead* (SEIHCARD) pada Penyebaran COVID-19

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 15 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,



Fahma Mu'jizatil Qur'ani

NIM. 18610060

MOTO

“Nobody learns without getting it wrong” – Zootopia

“Jika kamu lelah maka istirahatlah, tetapi jangan lupa untuk kembali bangkit”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua, Bapak Moch. Jakup Effendi dan Ibu Suna'yah, yang senantiasa mendo'akan kelancaran penulis serta menjadi sumber motivasi bagi penulis untuk selalu semangat menyelesaikan pendidikan.

Kedua kakak tercinta, Aprilia Ningsih dan Dewi Meilisa, yang telah memberikan semangat dan dorongan kepada penulis.

Serta diri sendiri, yang telah berjuang dan bertahan dalam menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan anugerah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model *Susceptible-Exposed-Infectious-Hospitalized-Critical-Recovered-Dead* (SEIHCRD) pada Penyebaran COVID-19”. Sholawat serta salam tak lupa penulis haturkan kepada baginda Nabi Muhammad SAW karena dengan perjuangannya telah berhasil membawa umat Islam dari zaman kegelapan yaitu zaman Jahiliyyah menuju jaman terang-benderang yang penuh ilmu pengetahuan seperti saat ini.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih dan penghargaan yang tinggi penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I, yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan, motivasi, serta saran yang membangun dalam perbaikan penulisan ini.
5. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku dosen pembimbing II, yang juga telah memberikan bimbingan dan saran kepada penulis.
6. Juhari, M.Si, selaku dosen penguji seminar proposal, seminar hasil, dan sidang skripsi yang telah memberikan saran dan kritikan yang bermanfaat bagi penulis.
7. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen penguji seminar hasil dan sidang skripsi yang juga telah memberikan saran yang bermanfaat bagi penulis.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya.
9. Orang tua dan seluruh keluarga yang senantiasa selalu memberikan semangat dan memanjatkan do'a untuk kelancaran penulis.

Semoga penulisan skripsi ini dapat memberikan manfaat baik untuk penulis maupun pembaca. Aamiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Malang, 30 Mei 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori Pendukung	8
2.1.1 Sistem <i>Autonomous</i>	8
2.1.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	11
2.1.3 Titik Keseimbangan	12
2.1.4 Linearisasi	13
2.1.5 Kriteria Routh-Hurwitz	15
2.1.6 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	17
2.1.7 Analisis Sensitivitas	18
2.1.8 Metode Runge-Kutta Orde 4	19
2.1.9 Model SEIHCRD	21
2.2 Kajian Integrasi Penyebaran COVID-19 Model SEIHCRD dengan Al-Qur'an dan Hadits	33
2.3 Kajian Penyebaran COVID-19 Model SEIHCRD dengan Teori Pendukung	35
BAB III METODE PENELITIAN	39
3.1 Jenis Penelitian	39
3.2 Pra Penelitian	39
3.3 Tahapan Penelitian	40
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	41
4.1 Analisis Dinamik Model SEIHCRD	41
4.1.1 Titik Keseimbangan	41
4.1.2 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan	45

4.1.3	Bilangan Reproduksi Dasar	53
4.2	Analisis Sensitivitas R_0	57
4.3	Simulasi Numerik Penyebaran Penyakit Model SEIHCRD.....	61
4.3.1	Simulasi Ketika $R_0 < 1$	61
4.3.2	Simulasi Ketika $R_0 > 1$	65
4.3.3	Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia	68
BAB V PENUTUP.....		73
5.1	Kesimpulan.....	73
5.2	Saran.....	75
DAFTAR PUSTAKA		76
LAMPIRAN.....		78
RIWAYAT HIDUP		80

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai Parameter Model SEIHCRD	57
Tabel 4.2	Nilai Indeks Sensitivitas.....	59
Tabel 4.3	Nilai Parameter Jaga Jarak (η) dan Pengujian Massal (ζ)	68

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartmen Model SEIHCRD	22
Gambar 4.1	Analisis Sensitivitas R_0	58
Gambar 4.2	Grafik Solusi E, I, H, C Ketika $R_0 < 1$	64
Gambar 4.3	Grafik Solusi <i>Susceptible</i> Ketika $R_0 < 1$	64
Gambar 4.4	Grafik Solusi E, I, H, C Ketika $R_0 > 1$	67
Gambar 4.5	Grafik Solusi <i>Susceptible</i> Ketika $R_0 > 1$	67
Gambar 4.6	Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia Kelas <i>Infectious</i>	69
Gambar 4.7	Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia Kelas <i>Hospitalized</i>	70
Gambar 4.8	Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia Kelas <i>Critical</i> ...	71

DAFTAR SIMBOL

N	: Total populasi individu hidup
S	: Banyaknya individu yang rentan, belum pernah terinfeksi
E	: Banyaknya individu yang terpapar, individu tanpa gejala
I	: Banyaknya individu yang tertular (terinfeksi)
H	: Banyaknya individu dirawat di rumah sakit
C	: Banyaknya individu di kelas ICU
R	: Banyaknya individu yang pulih dan memiliki kekebalan
D	: Banyaknya individu yang meninggal karena penyakit
Λ	: Tingkat kelahiran alami
ζ	: Probabilitas keefektifan pengujian massal
η	: Probabilitas dari efek jaga jarak
κ	: Probabilitas pemulihan setelah terinfeksi
ω	: Probabilitas pemulihan setelah rawat inap
β_0	: Probabilitas kontak efektif antara individu rentan dan terinfeksi
β_1	: Probabilitas kontak efektif antara individu rentan dan dirawat inap di rumah sakit
β_2	: Probabilitas kontak efektif antara individu rentan dan yang berada di ICU
γ	: Probabilitas transisi dari yang terpapar (E) ke tertular (I)
α	: Probabilitas rawat inap dari individu terinfeksi
δ	: Probabilitas transfer perawatan ke ICU
σ	: Probabilitas pemulihan dari ICU
μ_I	: Probabilitas kematian individu terinfeksi
μ_C	: Probabilitas kematian individu kritis di ICU
μ_h	: Probabilitas kematian individu rawat inap
μ	: Tingkat kematian alami

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Data <i>Actual</i> Indonesia Bulan Juli-Agustus 2022.....	78
------------	---	----

ABSTRAK

Qur'ani, Fahma Mu'jizatil, 2022. **Analisis Dinamik Model *Susceptible-Exposed-Infectious-Hospitalized-Critical-Recovered-Dead* (SEIHCRD) pada Penyebaran COVID-19**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Dr. Elly Susanti, M.Sc.

Kata Kunci : analisis dinamik, analisis sensitivitas, bilangan reproduksi dasar, model matematika SEIHCRD, titik kesetimbangan.

Pada penelitian ini dibahas mengenai model matematika *SEIHCRD* dengan jaga jarak dan pengujian massal untuk penyebaran COVID-19. Model tersebut terdiri dari tujuh subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan (S), subpopulasi individu terpapar (E), subpopulasi individu terinfeksi (I), subpopulasi individu dirawat inap (H), subpopulasi individu kritis (C), subpopulasi individu yang pulih (R), dan subpopulasi individu yang meninggal (D). Analisis dinamik dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Hasil dari analisis dinamik didapatkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1). Titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$. Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui parameter yang berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar. Berdasarkan hasil analisis didapatkan bahwa parameter probabilitas jaga jarak dan pengujian massal memiliki indeks sensitivitas negatif yang artinya dengan menaikkan nilai parameter tersebut maka R_0 akan semakin menurun. Selanjutnya, simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika $R_0 < 1$ solusi menuju titik kesetimbangan E_0 dan ketika $R_0 > 1$ solusi menuju titik kesetimbangan E_1 . Simulasi model *SEIHCRD* dengan jaga jarak dan pengujian massal yang diterapkan pada kasus harian di Indonesia didapatkan hasil keefektifan jaga jarak di Indonesia adalah 55% dan keefektifan pengujian massal adalah 20%.

ABSTRACT

Qur'ani, Fahma Mu'jizatil, 2022. **Dynamic Analysis of the Susceptible-Exposed-Infectious-Hospitalized-Critical-Recovered-Dead (SEIHCRD) Model on the Spread of COVID-19.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Dr. Elly Susanti, M.Sc.

Keyword : basic reproduction number, dynamic analysis, equilibrium point, SEIHCRD mathematical model, sensitivity analysis.

This study discussed the *SEIHCRD* mathematical model with social distancing and mass testing for the spread of COVID-19. The model consists of seven subpopulations, namely a subpopulation of susceptible individuals (*S*), a subpopulation of exposed individuals (*E*), a subpopulation of infected individuals (*I*), a subpopulation of hospitalized individuals (*H*), a subpopulation of critical individuals (*C*), a subpopulation of recovered individuals (*R*), and the subpopulation of individuals who died (*D*). The dynamic analysis was carried out by determining the equilibrium point, local stability analysis of the equilibrium point, and the basic reproduction number (R_0). The results of the dynamic analysis obtained two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point (E_0) and the endemic equilibrium point (E_1). The equilibrium point E_0 is locally asymptotically stable if $R_0 < 1$ and the equilibrium point E_1 is locally asymptotically stable if $R_0 > 1$. Sensitivity analysis was carried out to determine the parameter that affect on the basic reproduction number. Based on the results, it is found that parameter of social distancing and mass testing has a negative sensitivity index, which means that by increasing the value of these parameters, so R_0 will decrease. Then, numerical simulations shown that when $R_0 < 1$ the solution goes to a equilibrium point E_0 and when $R_0 > 1$ the solution goes to an equilibrium point E_1 . The *SEIHCRD* model simulation with social distancing and mass testing which is applied to daily cases in Indonesia had the results that the effectiveness of social distancing in Indonesia is 55% and the effectiveness of mass testing is 20%.

مستخلص البحث

القرآن، فهمى معجزة، ٢٠٢٢. التحليل الديناميكي للنموذج المعرض للحساسية - المعرض - للعدوى - في المستشفى - حرج - تعافى - الميث (SEIHCRD) في انتشار كوفيد-19. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١)الدكتورة، هني ويدياني، الماجستير، (٢)الدكتورة، إيلي سوسانتي، الماجستير. الكلمات المفتاحية : النموذج الرياضي، التحليل الديناميكي، تحليل الحساسية، رقم الاستنساخ الأساسي، نقطة التوازن.

تناقش هذه الدراسة نموذج *SEIHCRD* الرياضيات مع التباعد الاجتماعي والاختبار الشامل لانتشار كوفيد-19. يتكون النموذج الشامل من سبع مجموعات سكانية فرعية، وهي فئة سكانية فرعية فردية (S)، مجموعة سكانية فرعية حساسة من الأفراد المعرضين (E)، مجموعات سكانية فرعية من الأفراد المصابين (I)، مجموعة سكانية فرعية من الأفراد في المستشفيات (H)، مجموعة سكانية فرعية من المصابين بأمراض خطيرة (C)، السكان من الأفراد المتعافين (R)، والسكان الفرعيين من الأفراد الذين لقوا حتفهم (D). يتم إجراء التحليل الديناميكي عن طريق تحديد النقطة وكذلك تحليل ثبات النقاط وعددها التكاثر الأساسي (R_0). حصلت نتائج هذه التحليل الديناميكي على نقطتين هما النقطة خالية من الأمراض (E_0) ونقطة متوطنة (E_1). نقطة الرصيد E_0 مستقر مقارب إذا كانت نقطة $R_0 < 1$ و نقطة الرصيد E_1 مستقر محليًا بشكل مقارب إذا كان $R_0 > 1$. يتم إجراء تحليل الحساسية لتحديد العوامل التي تؤثر على عدد التكاثر الأساسي. بناءً على نتائج التحليل، وجد أن معامل الاحتمالية للحفاظ على المسافة والاختبار الشامل له مؤشر حساسية سلبى، مما يعني أنه بزيادة قيمة المعلمة R_0 ستخف. أظهرت المحاكاة العددية عندما $R_0 < 1$ يتعلق الأمر بحل النقاط الخالية من الأمراض ومتى $R_0 > 1$ حل النقطة المتوطنة. أظهرت محاكاة نموذج *SEIHCRD* مع التباعد الاجتماعي والاختبار الجماعي المطبق على الحالات اليومية في إندونيسيا أن فعالية التباعد الاجتماعي في إندونيسيا بلغت 55% وفعالية الاختبار الجماعي 20%.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) merupakan penyakit menular yang masuk ke negara-negara dunia tak terkecuali Indonesia pada awal 2020. Dalam tingkat penularannya, COVID-19 memiliki tingkat penularan yang tinggi sehingga penyakit akan lebih cepat menular dan mengakibatkan peningkatan jumlah individu terinfeksi pada waktu yang singkat. Tingginya tingkat penularan COVID-19 hingga ditetapkan pada level pandemi mengharuskan masyarakat untuk membatasi kegiatan di luar rumah. Rasulullah telah memerintahkan umatnya untuk menahan diri dari bepergian ketika terjadi wabah di suatu wilayah. Menahan diri untuk bepergian dan pemberlakuan *lockdown* pada situasi saat ini ketika penyakit COVID-19 mewabah adalah tindakan yang bijaksana. Sebagaimana Rasulullah SAW bersabda terkait adanya wabah *tha'un* pada zaman Rasulullah yang dituliskan pada (Arofi, 2021):

إِذَا سَمِعْتُمْ بِالطَّاعُونَ بِأَرْضٍ فَلَا تَدْخُلُوهَا، وَإِذَا وَقَعَ بِأَرْضٍ وَأَنْتُمْ بِهَا فَلَا تَخْرُجُوا مِنْهَا

“Jika kamu mendengar wabah di suatu wilayah, maka janganlah kalian memasukinya. Tapi jika terjadi wabah di tempat kamu berada, maka jangan tinggalkan tempat itu.” (HR Bukhari).

Gelombang kedua pandemi di Indonesia yang terjadi pada bulan Juni-Juli 2021 mencatat kenaikan kasus lebih tinggi dari gelombang pertama. Hal tersebut berdampak signifikan terhadap tingkat hunian rawat inap dan tempat tidur unit perawatan intensif (ICU) sehingga beberapa rumah sakit terpaksa menutup layanan gawat darurat karena penuhnya keterisian BOR-RS dan BOR-ICU.

Beberapa model matematika telah dirumuskan untuk mensimulasikan penyebaran COVID-19. Seperti pada penelitian (Annas et al., 2020),

model dinamika SEIR digunakan untuk mensimulasikan penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi individu terinfeksi sebagai parameter model. Dari penelitian ini didapatkan informasi bahwa vaksin dapat mempercepat pemulihan dan dilakukannya isolasi efektif dapat mengurangi penyebaran COVID-19. Namun seiring berkembangnya waktu, terdapat beberapa pertimbangan yang belum tercakup pada model tersebut seperti contohnya banyaknya individu yang dirawat inap dan rawat ICU akan memengaruhi kapasitas ketersediaan rumah sakit sehingga dibutuhkan model dinamika penyebaran penyakit dengan melihat adanya angka pasien dirawat di rumah sakit dan ketersediaan tempat tidur intensif. Sehingga pada penelitian ini, akan digunakan model dengan 3 tambahan kompartmen yaitu *Hospitalized*, *Critical*, dan *Dead* sehingga menjadi model SEIHCRD yang dapat digunakan rujukan bagi pengambil kebijakan dalam memprediksi kebutuhan rawat inap, kebutuhan tempat tidur di ICU, dan tingkat kematian kasus yang mana model tersebut dianggap sebagai model yang lebih kompleks untuk digunakan di masa mendatang.

Model SEIHCRD terdiri dari 7 kelas yang terdiri dari *Susceptible*, *Exposed*, *Infectious*, *Hospitalized*, *Critical*, *Recovered*, dan *Dead*. Individu di kelas *Susceptible* merupakan individu rentan yang belum pernah terinfeksi COVID-19 kemudian individu di kelas *Exposed* merupakan individu terpapar yang belum ada gejala ia terinfeksi. Kelas *Infectious* merupakan kelas individu terinfeksi yang diisolasi mandiri, dan kelas *Hospitalized* merupakan kelas individu terinfeksi yang membutuhkan perawatan medis sehingga ia harus dirawat inap di rumah sakit. Sedangkan untuk kelas *Critical* merupakan kelas individu dari kelas

rawat inap yang keadaannya kritis sehingga harus dirawat di ruang ICU. Kelas *Recovered* adalah kelas individu yang telah sembuh dari COVID-19 dan kelas *Dead* merupakan kelas individu yang meninggal karena COVID-19. Penelitian yang dilakukan (Singh & Bajpai, 2020) dengan menggunakan model SEIHCRD untuk melakukan *curve fitting* pada penyebaran COVID-19 di Brazil, India, Italia, Spanyol, Inggris dan Amerika Serikat didapatkan hasil bahwa model tersebut memiliki hasil yang baik dalam memprediksi penyebaran COVID-19 dengan mempertimbangkan adanya *Case Fatality Rate*, angka hunian rumah sakit serta ICU. Sedangkan pada penelitian (Mbogo & Orwa, 2021) menggunakan model SEIHCRD untuk menggambarkan penyebaran di Kenya dengan faktor jaga jarak dan pengujian massal. Berbeda pada penelitian tersebut, pada penelitian ini model SEIHCRD akan dikaji ulang dimana pada subpopulasi *Exposed* hanya memiliki 2 kemungkinan setelah dilakukan pengujian massal, yaitu masuk ke kelas *Infectious* atau *Hospitalized*. Selain itu, individu dari subpopulasi *Infectious* dapat pulih dan masuk ke kelas *Recovered* tanpa perlu dirawat inap terlebih dahulu.

Banyaknya total populasi manusia yang masih hidup N dalam penelitian ini diasumsikan tertutup dan tidak bernilai konstan sehingga pada kelas *Susceptible* terdapat kelahiran alami yang sebanding dengan total N yakni $Susceptible$, *Exposed*, *Infectious*, *Hospitalized*, *Critical*, dan *Recovered* laju sebesar ΛN . Kemudian, individu rentan menjadi individu terpapar setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi sebesar proporsi β_0 , dengan individu rawat inap sebesar β_1 , dan dengan individu kritis sebesar β_2 . Parameter η menunjukkan keefektifan jaga jarak dan ζ adalah pengujian massal. Setelah individu di kelas

Exposed melakukan uji massal, individu positif dapat masuk ke kelas *Infectious* dengan laju sebesar $(1 - \zeta)\gamma E$ atau masuk ke kelas *Hospitalized* dengan laju sebesar $\zeta\gamma E$. Individu terinfeksi yang tidak memiliki komorbid dan mampu merawat diri di rumah maka dapat melakukan isolasi mandiri di rumah sedangkan individu yang memiliki komorbid dan memerlukan perawatan medis maka disarankan untuk rawat inap di rumah sakit. Jika keadaan individu yang melakukan isolasi mandiri memburuk, maka akan dipindahkan ke rumah sakit dengan laju sebesar αI . Jika keadaan individu di kelas rawat inap memburuk, maka akan dipindahkan ke kelas ICU dengan laju sebesar δH . Selanjutnya jika keadaan individu di ICU telah membaik maka dapat dimasukkan kembali ke kelas rawat inap biasa. Individu di kelas *Recovered* yaitu individu yang telah pulih baik dari yang sembuh setelah melakukan isolasi mandiri dengan laju sebesar κI maupun dari rawat inap sebesar ωH . Sedangkan individu yang masuk kelas *Dead* merupakan individu yang meninggal karena COVID-19 baik setelah isolasi mandiri dengan laju kematian sebesar $\mu_l I$, dari kelas rawat inap sebesar $\mu_h H$, dan dari kelas ICU sebesar $\mu_c C$.

Pada penelitian ini, model SEIHCRD dengan faktor jaga jarak dan pengujian massal akan dianalisis menggunakan analisis dinamik kemudian kontribusi parameter terhadap bilangan reproduksi dasar juga akan dilihat pada analisis sensitivitas. Digunakannya parameter jaga jarak dan pengujian massal bertujuan sebagai upaya pengontrolan dalam mengurangi penyebaran. Setelah diketahui kontribusi dari parameter jaga jarak, pengujian massal, dan parameter lainnya selanjutnya akan dibuat tindakan yang dapat dilakukan agar tidak terjadi penyebaran secara meluas. Kemudian digunakan metode Runge-Kutta orde 4

untuk menggambarkan simulasi dari perhitungan analisis dinamik dan simulasi penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan menggunakan 3 nilai berbeda dari parameter jaga jarak dan pengujian massal. Dengan mengetahui model dinamika penyebaran penyakit, maka diharapkan dapat membantu mengidentifikasi dan memahami hubungan penyebaran penyakit dengan parameter epidemiologis, mempertimbangkan tindakan yang harus dilakukan dalam pengendalian dan memprediksi potensi pertumbuhan di Indonesia pada masa yang akan datang.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang sebelumnya, maka didapatkan rumusan masalah pada penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis dinamik model matematika pada penyebaran COVID-19 dengan menggunakan model SEIHCRD?
2. Bagaimana analisis sensitivitas parameter jaga jarak dan pengujian massal terhadap bilangan reproduksi dasar?
3. Bagaimana simulasi numerik yang dihasilkan dari perhitungan model matematika menggunakan Runge-Kutta orde 4 untuk penyebaran COVID-19 dengan model SEIHCRD?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai berdasarkan rumusan masalah yang ada yakni sebagai berikut:

1. Mengetahui analisis dinamik model matematika pada penyebaran COVID-19 dengan menggunakan model SEIHCRD.
2. Mengetahui analisis sensitivitas parameter jaga jarak dan pengujian massal terhadap bilangan reproduksi dasar.

3. Mengetahui simulasi numerik yang dihasilkan dari perhitungan model matematika menggunakan Runge-Kutta untuk penyebaran COVID-19 dengan model SEIHCRD.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yakni sebagai berikut.

1. Untuk menambah wawasan ilmu pengetahuan mengenai model matematika penyebaran penyakit.
2. Dapat digunakan sebagai alat untuk mensimulasikan suatu strategi tindakan yang dapat dilakukan terkait jaga jarak dan pengujian massal sehingga dapat digunakan sebagai bahan informasi untuk instansi terkait.
3. Untuk menambah informasi mengenai kondisi di masa yang akan datang dan diharapkan mampu menjadi salah satu sumber pustaka untuk penelitian berikutnya maupun kebijakan pihak terkait.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Penelitian ini merupakan pengembangan dari (Mbogo & Orwa, 2021) dengan adanya laju kelahiran dan kematian alami serta tidak ada migrasi di populasi yang dikaji.
2. Penyebaran virus SARS-CoV-2 dapat terjadi karena interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi, individu rawat inap, dan individu kritis.
3. Individu di kelas *Exposed* memiliki 2 kemungkinan setelah dilakukan *tracing*, yaitu masuk ke kelas *Infectious* atau *Hospitalized*. Hal ini berbeda dengan penelitian (Mbogo & Orwa, 2021) dimana pada penelitian tersebut

individu kelas *Exposed* memiliki kemungkinan untuk berpindah langsung ke kelas *Recovered*.

4. Adapun model SEIHCRD pada penelitian ini yang merupakan modifikasi dari (Mbogo & Orwa, 2021) adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda N(t) - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - \mu S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \mu) E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (1 - \zeta) \gamma E(t) - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha I(t) + \zeta \gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h + \mu) H(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta H(t) - (\sigma + \mu_c + \mu) C(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \kappa I(t) + \omega H(t) - \mu R(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_h H(t) + \mu_c C(t)$$

5. Individu yang telah sembuh dan masuk kelas *Recovered* memiliki kekebalan sementara terhadap virus.
6. Ruang lingkup efektifitas pengaruh jaga jarak dan pengujian massal terhadap penyebaran COVID-19 menggunakan model penyebaran SEIHCRD.

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Sistem *Autonomous*

Misalkan terdapat sistem persamaan differensial biasa berdimensi n seperti berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}; \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

dimana variabel tak bebas atau *dependent* adalah x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebasnya adalah t . Sistem *autonomous* adalah sistem persamaan differensial biasa yang tidak bergantung pada variabel bebas (Boyce & DiPrima, 2000). Pada sistem ini, variabel bebas t tidak muncul secara eksplisit pada fungsi f sehingga sistem *autonomous* dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sistem *autonomous* terbagi menjadi sistem *autonomous* linear dan sistem *autonomous* nonlinear. Sistem *autonomous* linear terdiri dari 2 atau lebih

persamaan yang tidak mengandung perkalian antar variabel tak bebasnya. Berikut adalah contoh dari sistem *autonomous* linear.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

Sistem *autonomous* linear secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2.4}$$

Sistem (2.4) dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ dimana \mathbf{A} adalah sebuah matriks yang dituliskan sebagai

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\tag{2.5}$$

Sistem *autonomous* nonlinear merupakan sistem dimana masing-masing fungsi f_i yaitu f_1, f_2, \dots, f_n tidak terbentuk secara linear dan dapat diturunkan secara parsial. Sistem ini disebut nonlinear karena pada fungsi tersebut terdapat perkalian antar variabel tak bebasnya. Berikut adalah contoh dari sistem *autonomous* nonlinear.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(1 - x_1) - x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_2 + x_1x_2\end{aligned}$$

Teorema 2.1

Misalkan $f_i = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\right)$ kontinu di daerah R dengan $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < y_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < y_n < \beta_n$, dan memuat titik $(t_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$. Maka pada suatu interval $|t - t_0| < h$ terdapat solusi unik $y_1 = \varphi_1(t), y_2 = \varphi_2(t), \dots, y_n = \varphi_n(t)$ dari masalah nilai awal

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t_0) = y_2^0, \quad y_n(t_0) = y_n^0 \quad (2.6)$$

Teorema 2.1 telah menyatakan bahwa dalam kondisi tertentu yaitu pada $f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ dengan masalah nilai awal memiliki keunikan solusi pada interval yang mengandung $t_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$. Misalnya diberikan *autonomous* dengan masalah nilai awal sebagai berikut lalu tentukan dimana solusi ada.

$$y' = y^2 \quad y(0) = 1$$

Teorema 2.1 menjamin adanya solusi unik jika $f(y) = y^2$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ kontinu dimana-mana. Untuk mencari solusi, maka akan digunakan metode pemisahan variabel

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\int y^{-2} dy = \int dt$$

$$-y^{-1} = t + c$$

$$y = -\frac{1}{t + c}$$

dengan mensubstitusikan nilai awal $y(0) = 1$ maka diperoleh $c = -1$, sehingga didapatkan solusi dari masalah nilai awal yang diberikan yaitu

$$y = \frac{1}{1 - t}$$

Solusi tersebut menjadi takterbatas untuk $t \rightarrow 1$ sehingga solusi tersebut hanya akan ada pada interval $-\infty < t < 1$ (Boyce & DiPrima, 2000).

2.1.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1

Misalkan A adalah sebuah matriks ber orde $n \times n$ dan vektor tak nol $\bar{x} \in R^n$, \bar{x} disebut vektor eigen (*eigenvector*) dan λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) yang bersesuaian (pasangan eigen) dari matriks A jika memenuhi persamaan

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (2.7)$$

Selanjutnya persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0 \quad (2.8)$$

dimana I adalah matriks identitas. Dengan demikian diperoleh bahwa nilai eigen dari λ haruslah terdapat solusi tidak nol dari persamaan (2.8). Persamaan (2.8) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.9)$$

Dengan begitu, persamaan (2.9) disebut persamaan karakteristik dari matriks A dan λ merupakan akar karakteristik (Boyce & DiPrima, 2000).

Contoh:

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-4) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Sehingga didapatkan nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$. Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari masing-masing nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 2$,

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dari setiap baris akan mendapatkan kondisi $x_1 - x_2 = 0$, sehingga $x_1 = x_2$. Jika $x_1 = x_2 = c$ maka didapatkan vektor eigen $\bar{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. Artinya, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen yang terkait $\lambda_1 = 2$. Dengan cara yang sama maka vektor eigen dari $\lambda_2 = -1$ adalah $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.1.3 Titik Kesetimbangan

Definisi 2.2

Titik $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ merupakan titik kesetimbangan dari sistem $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$.

Titik kesetimbangan atau titik equilibrium merupakan kondisi dimana titik tersebut tidak akan berubah terhadap waktu, dengan kata lain nilai titik ketika $t = 1, 2, \dots, n$ tetap sama. Suatu titik disebut titik equilibrium apabila $\frac{dx}{dt} = 0$.

Definisi 2.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous Linear*

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A , maka titik kesetimbangan bersifat:

1. Stabil asimtotik lokal jika semua bagian real nilai eigen adalah negatif.
2. Stabil jika terdapat bagian real nilai eigen tak positif.
3. Tidak stabil jika terdapat setidaknya satu bagian real nilai eigen positif.

(Boyce & DiPrima, 2000)

Definisi 2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous Nonlinear*

Titik kesetimbangan sistem *autonomous nonlinear* bersifat:

1. Stabil asimtotik jika hasil linearisasi sistem nonlinear stabil asimtotik.
2. Tidak stabil jika hasil linearisasi sistem nonlinear tidak stabil.

(Boyce & DiPrima, 2000)

2.1.4 Linearisasi

Linearisasi merupakan metode yang dapat membawa bentuk nonlinear ke dalam bentuk linear. Linearisasi dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangannya. Linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan Deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan. Deret Taylor dari sistem $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ dengan persekitaran titik kesetimbangan $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ adalah

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 = f_1(x) &= \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*) \\ &+ O(\|x - x^*\|^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = f_2(x) &= \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*) \\ &+ O(\|x - x^*\|^2)\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\dot{x}_n = f_n(x) &= \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*) \\ &+ O(\|x - x^*\|^2)\end{aligned}$$

Apabila bagian nonlinear dari sistem diabaikan, maka menjadi

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x) = \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*)$$

⋮

$$\dot{x}_n = f_n(x) = \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*)$$

Selanjutnya apabila dimisalkan $y_1 = (x_1 - x_1^*)$, $y_2 = (x_2 - x_2^*)$, $y_n = (x_n - x_n^*)$ maka derivatifnya adalah $\dot{y}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{y}_2 = \dot{x}_2$, $\dot{y}_n = \dot{x}_n$. Sehingga linearisasi sistem menjadi

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2}y_2 + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n}y_n$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2}y_2 + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}y_n$$

⋮

$$\dot{y}_n = \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2}y_2 + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}y_n$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^*))\mathbf{y} \quad (2.10)$$

dimana $\mathbf{J}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^*))$ merupakan matriks jacobii dari f di x^* yaitu $\mathbf{J}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ Persamaan (2.10) disebut}$$

linearisasi dari sistem nonlinear di sekitar titik kesetimbangan x^* (Lynch, 2004).

Matriks Jacobi merupakan suatu konsep untuk menganalisis sifat kestabilan dari titik kesetimbangan. Sifat kestabilan pada sistem nonlinear dapat dilakukan dengan metode linearisasi yang dapat membawa bentuk nonlinear ke dalam bentuk linear. Hasil linearisasi dapat diperoleh dengan menggunakan

matriks jacob. Tipe kestabilan sistem *autonomous* nonlinear bergantung pada nilai eigen dari metode linearisasi.

Teorema 2.2

Matriks jacob $Jf(x^*)$ dari sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai eigen λ akan

1. Kondisi stabil secara asimtotik lokal jika semua bagian real nilai eigen matriks $Jf(x^*)$ bernilai negatif.
2. Kondisi tidak stabil jika terdapat setidaknya satu nilai eigen matriks $Jf(x^*)$ yang bagian realnya bernilai positif.

Contoh:

Misalkan diketahui sistem *autonomous* nonlinear

$$\dot{x} = F(x, y) \text{ dan } \dot{y} = G(x, y) \quad (2.11)$$

memiliki titik kesetimbangan di titik (x_0, y_0) . Maka matriks Jacobian dari linearisasi sistem pada suatu titik (x_0, y_0) adalah

$$J = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Kestabilan pada titik (x_0, y_0) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dan matriks jacob dari metode linearisasi. Jika semua nilai eigen dari matriks J bernilai real negatif, maka titik kesetimbangan pada sistem bersifat stabil asimtotik. Sebaliknya, apabila terdapat salah satu nilai eigen matriks J bernilai real positif maka titik kesetimbangan pada sistem akan bernilai tidak stabil.

2.1.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan metode yang digunakan pada sistem linear untuk memeriksa kestabilan berdasarkan akar persamaan karakteristik pada sistem tersebut. Pada beberapa contoh kasus didapati kesulitan dalam mencari

akar karakteristik dari polinomial berorde tinggi. Sehingga digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengetahui jenis kestabilan dengan menjamin bagian real dari nilai eigennya negatif atau ada yang positif. Misalkan persamaan karakteristik dari suatu sistem linear berderajat n adalah sebagai berikut

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.13)$$

dimana $a_n \neq 0$. Sehingga pengurutan koefisien persamaan (2.13) dapat dilihat dalam tabel Routh yaitu sebagai berikut

$$\begin{array}{l|llll} \lambda^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ \lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\ \lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \lambda^1 & y_1 & y_2 & & & \\ \lambda^0 & z_1 & & & & \end{array}$$

dimana

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} \quad b_n = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_{2n} \\ a_1 & a_{2n+1} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_{2n+1} \\ b_1 & b_{n+1} \end{vmatrix}$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyatakan bahwa semua akar suatu polinomial adalah negatif jika dan hanya jika semua elemen di kolom pertama tabel Routh memiliki tanda yang sama atau tidak mengalami perubahan tanda. Jika didefinisikan n matriks, maka koefisien dari persamaan (2.13) dapat dibentuk kedalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\mathbf{H}_1 = (a_1)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

dengan $a_k = 0$ untuk $k > n$. Akar-akar persamaan karakteristik (2.13) akan bernilai real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif:

$$\det(\mathbf{H}_n) > 0$$

Jika $|\mathbf{H}_n| > 0$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$ maka titik kesetimbangan pada sistem tersebut stabil (Peña, 2004).

2.1.6 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar atau *basic reproduction number* merupakan banyaknya kasus infeksi baru yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi dalam suatu populasi rentan. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*). Metode ini melibatkan kompartmen yang menyebabkan infeksi. Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ menyatakan proporsi terinfeksi pada waktu t , dengan setiap $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya jika matriks rata-rata infeksi baru pada subpopulasi ke- i dari individu rentan dituliskan sebagai F_i dan V_i sebagai matriks penurunan banyaknya individu terinfeksi dengan laju perpindahan individu dari subpopulasi ke- i , maka dapat dituliskan $V_i = V_i^- - V_i^+$. Perpindahan keluar dari subpopulasi i dinyatakan dalam V_i positif dan perpindahan masuk dinyatakan dalam V_i bernilai negatif. Sehingga didapatkan model kompartmen dari subpopulasi terinfeksi adalah sebagai berikut

$$x'_i = F_i - V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dengan m adalah proporsi subpopulasi yang terinfeksi, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$, dan $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_m)^T$. Misalkan \mathbf{F} dan \mathbf{V} adalah matriks ber-orde $m \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_j}(E_0); \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j}(E_0)$$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, m$ dan E_0 menyatakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Kemudian didefinisikan matriks generasi selanjutnya dari bilangan reproduksi dasar sebagai

$$\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1}$$

dan diperoleh perhitungan $R_0 = \rho(\mathbf{K})$ sebagai *spectral radius* dari matriks \mathbf{K} .

2.1.7 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas merupakan suatu pengujian untuk mengetahui kontribusi parameter-parameter terhadap bilangan reproduksi dasar. Jika nilai indeks sensitivitas semakin besar, maka semakin besar pula pengaruh parameter tersebut terhadap bilangan reproduksi dasar. Indeks sensitivitas didapatkan dengan menurunkan R_0 terhadap parameter p yang dapat dituliskan sebagai berikut (Resmawan & Yahya, 2020)

$$C_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0}$$

Pada penelitian ini, parameter yang akan diuji adalah parameter jaga jarak dan pengujian massal terhadap variabel yang akan dianalisis yaitu bilangan reproduksi dasar. Sehingga, indeks sensitivitas dari parameter jaga jarak adalah sebagai berikut

$$C_\eta^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \eta} \times \frac{\eta}{R_0}$$

Sedangkan indeks sensitivitas dari parameter pengujian massal adalah

$$C_{\zeta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \zeta} \times \frac{\zeta}{R_0}$$

2.1.8 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan metode lain dari deret Taylor karena tidak memerlukan turunan fungsi. Berbeda dengan penyelesaian persamaan diferensial biasa menggunakan deret Taylor yang membutuhkan perhitungan turunan fungsi $f(t, y)$, metode Runge-Kutta berusaha mendapatkan ketelitian hasil yang lebih tinggi sekaligus menghindari mencari turunan yang lebih tinggi dengan mengevaluasi fungsi $f(t, y)$ pada titik terpilih di setiap selang langkah. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde- n adalah sebagai berikut.

$$y_{r+1} = y_r + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n)h \quad (2.14)$$

dengan a_1, a_2, \dots, a_n adalah konstanta yang merupakan tetapan dan

$$k_1 = f(t_r, y_r)$$

$$k_2 = f(t_r + p_1 h, \quad y_r + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_r + p_2 h, \quad y_r + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

⋮

$$k_n = f(t_r + p_{n-1} h, \quad y_r + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

dimana p dan q adalah konstanta.

Metode Runge-Kutta orde 4 mempunyai hasil ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan orde sebelumnya dengan nilai hampiran yang diperoleh memiliki galat yang lebih kecil. Metode Runge-Kutta orde 4 diperoleh dengan menggunakan cara yang sama yaitu menguraikan ke dalam deret Taylor orde 4. Bentuk persamaan Runge-Kutta orde 4 adalah sebagai berikut

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

dimana

$$k_1 = f(t_r, y_r)$$

$$k_2 = f\left(t_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(t_r + h, y_r + k_3h)$$

Contoh:

Gunakan Runge-Kutta orde 4 untuk mengaproksimasi solusi $y(0.10)$ dengan langkah $h = 0.10$ jika diketahui masalah nilai awal

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1$$

$$t_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$$

$$t_1 = 0.10 \rightarrow y_1 = ?$$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = 5$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1h\right) = 5.95$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2h\right) = 6.14$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3h) = 7.356$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$= 1 + \frac{0.1}{6}(36.536) = 1.6089333$$

Jadi, $y(0.10) \approx 1.6089333$

(Boyce & DiPrima, 2000)

2.1.9 Model SEIHCRD

Pada penelitian (Mbogo & Orwa, 2021), model yang terdiri dari 7 subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infectious*, *Hospitalized*, *Critical*, *Recovered*, *Dead* (SEIHCRD) diterapkan pada data kasus COVID-19 di Kenya untuk melihat transmisi infeksi dari waktu ke waktu. Model SEIHCRD pada penelitian tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \rho\Lambda - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \kappa)E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (1 - \rho)\Lambda + (1 - \zeta)\gamma E(t) - (\alpha + \mu_I)I(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha I(t) + \zeta\gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h)H(t)$$

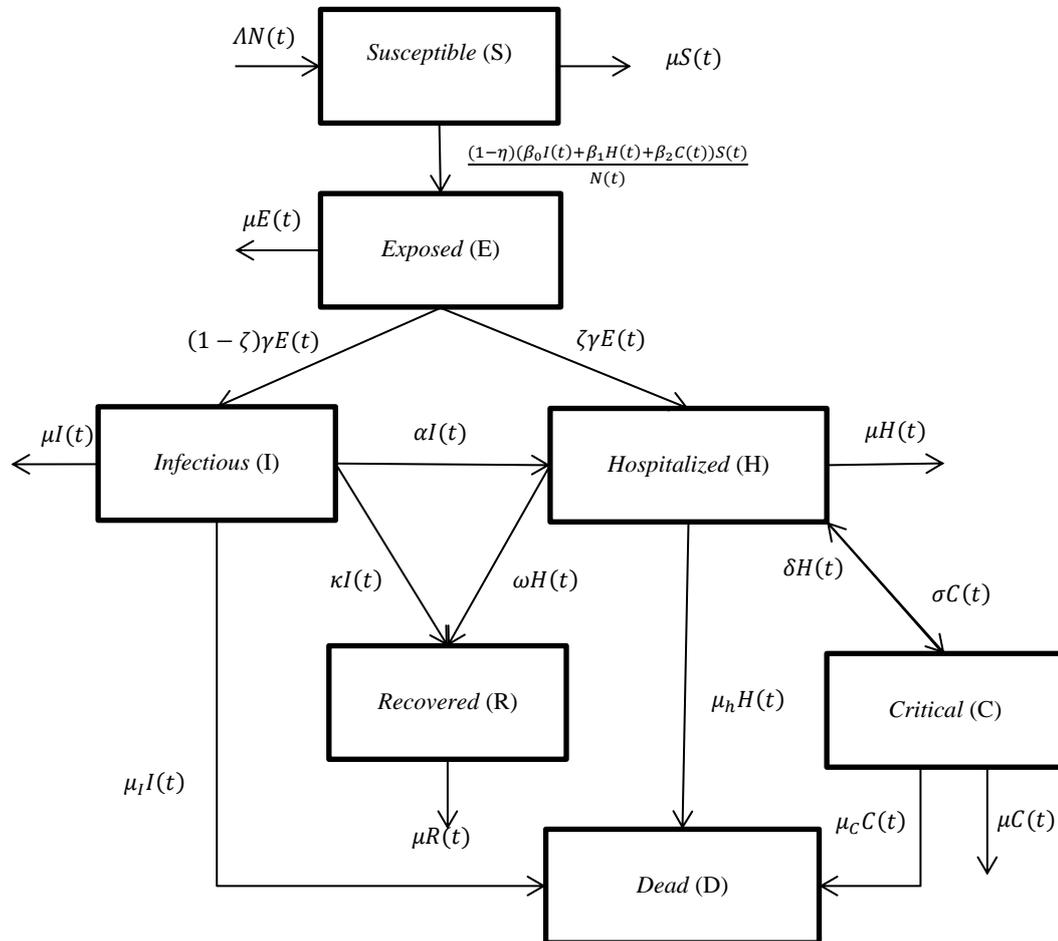
$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta H(t) - (\sigma + \mu_c)C(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \kappa E(t) + \omega H(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_h H(t) + \mu_c C(t)$$

Model ini memiliki struktur yang ringkas dan berhasil menggambarkan penyebaran wabah COVID-19. Sehingga hasil yang diperoleh dapat memberikan pemahaman mengenai tren wabah tersebut. Dengan melihat faktor-faktor yang mendorong terjadinya infeksi, keefektifan pengujian massal serta perubahan perilaku juga digambarkan pada model SEIHCRD. Hasil analisis model pada penelitian ini menunjukkan bahwa pengujian massal yang dilakukan secara agresif dan efektif diperlukan untuk mengisolasi pasien tanpa gejala. Selain itu, analisis pada penelitian ini mengungkapkan bahwa perubahan perilaku oleh

individu dan peningkatan perawatan rumah sakit membuat Kenya bebas dari kasus baru, kematian, dan peningkatan angka pemulihan.



Gambar 2.1 Diagram Kompartmen Model SEIHCARD

Model SEIHCARD pada penelitian ini merupakan modifikasi dari penelitian (Mbogo & Orwa, 2021). Modifikasi tersebut dilakukan karena pada kasus yang terjadi sebenarnya, individu yang telah menjalani tes dan mendapatkan hasil positif terinfeksi maka ia dapat isolasi mandiri atau dirawat di rumah sakit sesuai dengan kondisi yang dimilikinya. Selain itu, individu yang diisolasi mandiri di rumah juga dapat sembuh tanpa perlu di rawat inap terlebih dahulu. Sehingga pada penelitian ini individu dari kelas *Exposed* memiliki 2 kemungkinan setelah diuji massal, yaitu masuk ke kelas *Infectious* atau *Hospitalized*. Individu di kelas

Infectious merupakan individu yang terinfeksi penyakit dan masih tidak membutuhkan perawatan medis di rumah sakit, yang mana artinya individu tersebut melakukan isolasi mandiri di rumah. Sedangkan individu yang masuk kelas *Hospitalized* merupakan individu terinfeksi yang membutuhkan perawatan medis atau memiliki penyakit bawaan (komorbid) sehingga di rawat inap di rumah sakit. Selain itu pada penelitian ini kelas *Infectious* dapat masuk ke kelas *Recovered* tanpa perlu memasuki *Hospitalized* terlebih dahulu apabila sudah pulih dari penyakit. Diagram kompartmen yang telah dimodifikasi digambarkan pada Gambar 2.1. Selanjutnya, faktor yang mempengaruhi jumlah individu di setiap kompartmen dapat dijelaskan sebagai berikut.

a. Perubahan individu di dalam kompartmen *Susceptible*

Terdapat faktor penambahan dan pengurangan jumlah individu yang mengakibatkan perubahan pada kompartmen *Susceptible*. Penambahan jumlah individu rentan pada kompartmen ini dipengaruhi oleh kelahiran alami dengan asumsi semua bayi baru lahir adalah rentan. Individu baru lahir akan masuk ke dalam kompartmen *S* sebanding dengan total populasi manusia yang hidup yakni $N = S + E + I + H + C + R$ sebesar laju λN . Populasi diasumsikan tertutup dengan total populasi individu hidup N tidak konstan. Sehingga, semakin banyak total populasi N maka kelahiran juga akan semakin banyak.

Pengurangan jumlah individu pada kompartmen ini dipengaruhi oleh perubahan individu yang mulanya rentan menjadi terpapar sehingga masuk ke kompartmen *Exposed* (*E*). Individu rentan dapat menjadi terpapar dikarenakan adanya laju kekuatan infeksi yaitu interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi dengan proporsi sebesar β_0 , interaksi antara individu rentan dan

individu rawat inap dengan sebesar β_1 , dan interaksi antara individu rentan dan individu kritis dengan sebesar β_2 , dimana pada setiap interaksi terdapat $(1 - \eta)$ sebagai probabilitas individu tidak melakukan jaga jarak. Pengurangan selanjutnya dipengaruhi oleh individu yang meninggal secara alami dengan laju kematian alami sebesar μS .

Dengan demikian didapatkan laju perpindahan kompartmen *Susceptible* (S) terhadap waktu t yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda N(t) - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - \mu S(t) \quad (2.15)$$

b. Perubahan individu di dalam kompartmen *Exposed*

Penambahan jumlah individu terpapar pada kompartmen ini dipengaruhi oleh adanya laju kekuatan infeksi yaitu interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi dengan proporsi sebesar β_0 , interaksi antara individu rentan dengan individu rawat inap sebesar β_1 , dan interaksi antara individu rentan dengan individu kritis dengan sebesar β_2 , dimana pada setiap interaksi terdapat $(1 - \eta)$ sebagai probabilitas individu tidak melakukan jaga jarak.

Pengurangan jumlah individu dipengaruhi oleh perubahan individu dari kelas terpapar ke kelas *Hospitalized*. Individu terpapar yang masuk ke rawat inap adalah individu terpapar yang setelah diuji massal terkonfirmasi positif dan memerlukan perawatan medis karena memiliki penyakit komorbid. Hal ini menyebabkan pengurangan individu sebesar laju $\zeta \gamma E$. Pengurangan lainnya juga dipengaruhi oleh perubahan individu yang mulanya terpapar dan belum menunjukkan gejala menjadi terinfeksi. Individu yang berpindah ke kelas *Infectious* adalah individu yang setelah diuji terkonfirmasi terinfeksi namun tidak di rawat di rumah sakit. Sehingga individu tersebut dapat melakukan

isolasi mandiri dengan menerapkan protokol kesehatan. Hal ini menyebabkan pengurangan individu sebesar laju $(1 - \zeta)\gamma E$. Pengurangan selanjutnya dipengaruhi oleh individu yang meninggal secara alami dengan laju kematian alami sebesar μE .

Dengan demikian didapatkan laju perpindahan kompartemen *Exposed* terhadap waktu t :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{(1 - \eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \mu)E(t) \quad (2.16)$$

c. Perubahan individu di dalam kompartemen *Infectious*

Penambahan jumlah individu terinfeksi pada kompartemen ini dipengaruhi oleh masuknya individu dari yang terpapar, dimana ia sebelumnya tidak menunjukkan gejala tertularnya penyakit. Individu yang berpindah dari kompartemen *Exposed* ke *Infectious* adalah individu yang terinfeksi namun tidak di rawat di rumah sakit. Laju perpindahan individu dari kompartemen *Exposed* ke *Infectious* adalah sebesar γE dengan proporsi $(1 - \zeta)$ yang lolos dari pengujian massal dan melakukan isolasi mandiri.

Pengurangan jumlah individu pada kompartemen ini dipengaruhi oleh individu yang mulanya terinfeksi dan isolasi mandiri berpindah ke *Hospitalized* dengan laju αI . Perpindahan ini dikarenakan individu yang terinfeksi tersebut memerlukan perawatan medis dan dirawat inap di rumah sakit. Pengurangan selanjutnya dipengaruhi oleh individu yang telah pulih dan masuk ke *Recovered* dengan laju pemulihan sebesar κI . Pengurangan lainnya juga dipengaruhi oleh individu yang meninggal, yaitu meninggal karena penyakit sehingga akan masuk ke dalam *Dead* dengan laju sebesar $\mu_1 I$ dan meninggal secara alami dengan laju kematian alami sebesar μI .

Dengan demikian didapatkan laju perpindahan kompartemen *Infectious* terhadap waktu t :

$$\frac{dI(t)}{dt} = (1 - \zeta)\gamma E(t) - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I(t) \quad (2.17)$$

d. Perubahan individu di dalam kompartemen *Hospitalized*

Penambahan jumlah individu rawat inap pada kompartemen ini dipengaruhi oleh masuknya individu yang terinfeksi dari kelas *Infectious* ke rumah sakit dengan laju rawat inap sebesar αI dan masuknya individu dari kelas *Exposed* setelah dilakukan pengujian massal dengan proporsi sebesar ζ dan laju penambahan γE . Penambahan juga dipengaruhi oleh masuknya individu kritis ICU ke kelas rawat inap sebesar σC karena individu tersebut telah melewati masa kritisnya.

Pengurangan jumlah individu pada kompartemen ini dipengaruhi oleh individu rawat inap yang sudah sembuh dan masuk ke kelas *Recovered* dengan laju pemulihan setelah di rawat inap sebesar ωH . Kemudian pengurangan juga terjadi karena individu rawat inap yang kondisinya menjadi kritis sehingga masuk ke ICU dengan laju perawatan δH . Pengurangan selanjutnya adalah individu rawat inap yang meninggal karena COVID-19 sebesar $\mu_h H$ dan meninggal secara alami dengan laju sebesar μH .

Dengan demikian didapatkan laju perpindahan kompartemen *Hospitalized* terhadap waktu t :

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha I(t) + \zeta \gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)H(t) \quad (2.18)$$

e. Perubahan individu di dalam kompartemen *Critical*

Penambahan jumlah individu pada kompartmen ini dipengaruhi oleh masuknya individu yang di rawat inap ke ICU. Perpindahan individu dari kompartmen *Hospitalized* ke *Critical* disebabkan oleh kondisi individu yang semakin kritis dengan laju transfer perawatan sebesar δH .

Pengurangan jumlah individu pada kompartmen ini dipengaruhi oleh perpindahan individu kritis yang sudah berangsur pulih sehingga masuk kembali ke kompartmen *Hospitalized* (H) dengan laju pemulihan sebesar σC . Pengurangan lainnya juga dipengaruhi oleh individu yang meninggal setelah kritis di ICU dengan laju kematian sebesar $\mu_c C$ dan meninggal secara alami dengan laju kematian alami sebesar μC .

Dengan demikian didapatkan laju perpindahan kompartmen *Critical* (C) terhadap waktu t yaitu

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta H(t) - (\sigma + \mu_c + \mu)C(t) \quad (2.19)$$

f. Perubahan individu di dalam kompartmen *Recovered*

Penambahan jumlah individu sembuh pada kompartemen *Recovered* yang pertama dipengaruhi oleh masuknya individu dari *Infectious* yang sudah sembuh dengan laju pemulihan sebesar κI . Kemudian penambahan lain dipengaruhi oleh individu rawat inap yang telah sembuh dengan laju pemulihan sebesar ωH .

Pengurangan dipengaruhi oleh individu yang meninggal secara alami bukan karena penyakit COVID-19. Kondisi ini menunjukkan kompartmen *Recovered* berkurang dengan laju kematian alami sebesar μR .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan kompartmen *Recovered* terhadap waktu t yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \kappa I(t) + \omega H(t) - \mu R(t) \quad (2.20)$$

g. Perubahan individu di dalam kompartmen *Dead*

Perubahan jumlah individu pada kompartmen *Dead* hanya dipengaruhi oleh faktor penambahan. Penambahan jumlah individu pada kompartemen ini dipengaruhi oleh masuknya individu meninggal dari kompartmen *Infectious* dengan laju kematian sebesar $\mu_I I$, individu meninggal karena penyakit setelah di rawat inap dengan laju kematian sebesar $\mu_h H$, dan individu meninggal setelah kritis dengan laju kematian sebesar $\mu_c C$. Dengan demikian diperoleh laju perpindahan kompartmen *Dead* terhadap waktu t yaitu

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_h H(t) + \mu_c C(t) \quad (2.21)$$

Dari persamaan (2.15) – (2.21) diperoleh Model SEIHCRD penyebaran penyakit COVID-19 yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda N(t) - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \mu) E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (1 - \zeta) \gamma E(t) - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \alpha I(t) + \zeta \gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h + \mu) H(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \delta H(t) - (\sigma + \mu_c + \mu) C(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \kappa I(t) + \omega H(t) - \mu R(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \mu_I I(t) + \mu_h H(t) + \mu_c C(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Berikut akan ditunjukkan kepositifan solusi

$(S(t), E(t), I(t), H(t), C(t), R(t), D(t))$ untuk $\forall t \geq 0$.

Dari persamaan pertama yaitu (2.15) kita mempunyai,

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda N - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)S}{N} - \mu S \geq - \left(\frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)}{N} + \mu \right) S$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\int \frac{dS}{S} \geq \int - \left(\frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)}{N} + \mu \right) dt,$$

$$\ln S \geq - \left(\frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)}{N} + \mu \right) t + c,$$

$$S \geq e^{- \left(\frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)}{N} + \mu \right) t + c},$$

$$S(t) \geq c_1 e^{- \left(\frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} + \mu \right) t},$$

dimana c_1 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$S(0) = c_1,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$S(t) \geq S(0) e^{- \left(\frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} + \mu \right) t} \geq 0.$$

Oleh karena itu, solusi S bernilai non-negatif untuk semua $t > 0$.

Dari persamaan (2.16) kita mempunyai,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)}{N} S - (\gamma + \mu) E \geq -(\gamma + \mu) E$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\int \frac{dE}{E} \geq \int -(\gamma + \mu) dt,$$

$$\ln E \geq -(\gamma + \mu)t + c,$$

$$E \geq e^{-(\gamma + \mu)t + c},$$

$$E(t) \geq c_2 e^{-(\gamma + \mu)t},$$

dimana c_2 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$E(0) = c_2,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$E(t) \geq E(0)e^{-(\gamma+\mu)t} \geq 0.$$

Oleh karena itu, solusi E bernilai non-negatif untuk semua $t > 0$.

Dari persamaan (2.17) kita mempunyai,

$$\frac{dI}{dt} = (1 - \zeta)\gamma E - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I \geq -(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{I} &\geq \int -(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) dt, \\ \ln I &\geq -(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)t + c, \\ I &\geq e^{-(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)t + c}, \\ I(t) &\geq c_3 e^{-(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)t}, \end{aligned}$$

dimana c_3 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$I(0) = c_3,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$I(t) \geq I(0)e^{-(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)t} \geq 0.$$

Oleh karena itu, solusi I bernilai non-negatif untuk semua $t > 0$.

Dari persamaan (2.18) kita mempunyai,

$$\frac{dH}{dt} = \alpha I + \zeta\gamma E + \sigma C - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)H \geq -(\omega + \delta + \mu_h + \mu)H$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\begin{aligned} \int \frac{dH}{H} &\geq \int -(\omega + \delta + \mu_h + \mu) dt, \\ \ln H &\geq -(\omega + \delta + \mu_h + \mu)t + c, \\ H &\geq e^{-(\omega + \delta + \mu_h + \mu)t + c}, \\ H(t) &\geq c_4 e^{-(\omega + \delta + \mu_h + \mu)t}, \end{aligned}$$

dimana c_4 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$H(0) = c_4,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$H(t) \geq H(0)e^{-(\omega+\delta+\mu_h+\mu)t} \geq 0.$$

Oleh karena itu, solusi H bernilai non-negatif untuk semua $t > 0$.

Dari persamaan (2.19) kita mempunyai,

$$\frac{dC}{dt} = \delta H - (\sigma + \mu_c + \mu)C \geq -(\sigma + \mu_c + \mu)C$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\int \frac{dC}{C} \geq \int -(\sigma + \mu_c + \mu) dt,$$

$$\ln C \geq -(\sigma + \mu_c + \mu)t + c,$$

$$C \geq e^{-(\sigma+\mu_c+\mu)t+c},$$

$$C(t) \geq c_5 e^{-(\sigma+\mu_c+\mu)t},$$

dimana c_5 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$C(0) = c_5,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$C(t) \geq C(0)e^{-(\sigma+\mu_c+\mu)t} \geq 0.$$

Oleh karena itu, solusi C bernilai non-negatif untuk semua $t > 0$.

Dari persamaan (2.20) kita mempunyai,

$$\frac{dR}{dt} = \kappa I + \omega H - \mu R \geq -\mu R$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\int \frac{dR}{R} \geq \int -\mu dt,$$

$$\ln R \geq -\mu t + c,$$

$$R \geq e^{-\mu t+c},$$

$$R(t) \geq c_6 e^{-\mu t},$$

dimana c_6 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$R(0) = c_6,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$R(t) \geq R(0)e^{-\mu t} \geq 0.$$

Oleh karena itu, solusi R bernilai non-negatif untuk semua $t > 0$.

Dari persamaan (2.21) kita mempunyai,

$$\frac{dD}{dt} = \mu_I I + \mu_h H + \mu_C C \geq 0$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\int \frac{dD}{D} \geq \int 0 dt,$$

$$\ln D \geq 0t + c,$$

$$D \geq e^{0+c},$$

$$D(t) \geq c_7,$$

dimana c_7 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$D(0) = c_7,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$D(t) \geq D(0) \geq 0.$$

Dari hasil yang telah didapatkan terbukti bahwa solusi dari S, E, I, H, C, R, D bernilai non-negatif untuk semua nilai $t > 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan keterbatasan solusi dari total individu dalam populasi $N = S + E + I + H + C + R$ yaitu

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dH}{dt} + \frac{dC}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda N(t) - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - \mu S(t) + \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \\
&\mu)E(t) + (1-\zeta)\gamma E(t) - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I(t) + \alpha I(t) + \zeta\gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h + \\
&\mu)H(t) + \delta H(t) - (\sigma + \mu_c + \mu)C(t) + \kappa I(t) + \omega H(t) - \mu R(t) \\
&= \Lambda N(t) - \mu S(t) - \mu E(t) - \mu I(t) - \mu H(t) - \mu C(t) - \mu R(t) - \mu_c C(t) - \mu_h H(t) - \mu_I I(t) \leq \\
&\Lambda N(t) - \mu S(t) - \mu E(t) - \mu I(t) - \mu H(t) - \mu C(t) - \mu R(t) \\
\frac{dN}{dt} &\leq (\Lambda - \mu)N
\end{aligned}$$

dengan menggunakan metode pemisahan variabel kita dapatkan,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dN}{N} &\leq \int (\Lambda - \mu) dt, \\
\ln N &\leq (\Lambda - \mu)t + c, \\
N &\leq e^{(\Lambda - \mu)t + c}, \\
N(t) &\leq c_8 e^{(\Lambda - \mu)t},
\end{aligned}$$

dimana c_8 merupakan suatu konstanta. Untuk $t = 0$ maka diperoleh,

$$N(0) = c_8,$$

sehingga dapat kita tuliskan,

$$N(t) \leq N(0)e^{(\Lambda - \mu)t}$$

Oleh karena itu, solusi N bernilai terbatas pada $0 \leq N(t) \leq N(0)e^{(\Lambda - \mu)t}$. Dari

perhitungan tersebut diperoleh $\frac{dN}{dt} \leq (\Lambda - \mu)N$ yang artinya $N(t)$ bernilai tidak

konstan dan terbatas di atas oleh $N(0)e^{(\Lambda - \mu)t}$.

2.2 Kajian Integrasi Penyebaran COVID-19 Model SEIHCRD dengan Al-Qur'an dan Hadits

Islam merupakan agama yang telah mengatur segala aspek tentang kehidupan manusia, tak terkecuali dengan aspek kesehatan. Al-Qur'an berperan penting sebagai pedoman utama dalam kehidupan umat manusia dan hadits

sebagai pendukung dalam ajaran syariat Islam. Al-Qur'an mengandung kebenaran mutlak dan di dalam hadits telah dijabarkan sebagian dari isi kandungan Al-Qur'an. Dengan menjadikan kedua sumber suci tersebut sebagai pegangan, maka setiap manusia akan dihantarkan pada kondisi terbaik, termasuk dalam menyikapi permasalahan kehidupan. Jika dilihat dari beberapa dalil dalam Al-Qur'an dan hadits, sesungguhnya Allah dan Rasulullah telah menjawab beberapa persoalan-persoalan yang terjadi dalam kehidupan, salah satunya tentang menyikapi suatu penyakit. Salah satu hal penting dalam menyikapi adanya penyebaran penyakit dari menggunakan model matematika sebagaimana dalam Q.S. Al Hujurat ayat 6 dijelaskan bahwa segala sesuatu harus ditelaah terlebih dahulu akan kebenarannya. Allah SWT berfirman pada Q.S. Al Hujurat Ayat 6,

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِن جَاءَكُمْ فَاسِقٌ بِنَبَأٍ فَتَبَيَّنُوا أَن تُصِيبُوا قَوْمًا بِجَهَالَةٍ فَتُصْحَبُوا عَلَيَّ مَا فَعَلْتُمْ نَادِمِينَ

“Wahai orang-orang yang beriman, jika seorang fasik datang kepadamu membawa berita penting, maka telitilah kebenarannya agar kamu tidak mencelakakan suatu kaum karena ketidaktahuan(-mu) yang berakibat kamu menyesali perbuatanmu itu” (Q.S. Al-Hujurat/49: 6)

Menurut Tafsir Al-Misbah karya M. Quraish Shihab, ayat ini memiliki maksud bahwa suatu kebenaran informasi tidak dapat diterima begitu saja hanya berdasarkan banyaknya orang yang mengetahui atau menyebarkan isu tersebut. Interaksi dalam kehidupan harus dilakukan dengan kejelasan. Untuk mengetahui suatu informasi manusia tidak dapat bergerak sendiri, tentunya terdapat pihak lain yang membantu. Pihak lain yang memiliki integritas dan kejujuran maka akan menyampaikan informasi dengan benar, dan sebaliknya. Sehingga dari sini kita harus memahami bahwa informasi yang telah didapatkan harus disaring terlebih dahulu agar tidak membuat rugi diri sendiri maupun orang lain (Nasicha, 2016). Begitu pula pada suatu model dinamika yang digunakan harus dilakukan uji

validasi untuk membuktikan kebenaran dari model tersebut. Model yang dianggap valid adalah model yang hasil interpretasinya mendekati keadaan nyata. Jika model tidak memenuhi syarat, maka diperlukan penelitian ulang.

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan sebelumnya, dapat diketahui bahwa ayat ini berhubungan dengan pembahasan pada penelitian ini. Model matematika yang digunakan untuk mensimulasikan penyebaran COVID-19 dapat berperan penting dalam bidang ilmu terapan, bidang kedokteran, bahkan bidang lainnya apabila telah terbukti kebenarannya. Sehingga diperlukannya uji validasi agar model layak digunakan untuk memprediksi penyebaran COVID-19 di waktu mendatang.

2.3 Kajian Penyebaran COVID-19 Model SEIHCRD dengan Teori Pendukung

Analisis dinamik dilakukan untuk menganalisis perilaku pada model matematika penyebaran COVID-19. Dengan mengetahui model dinamika penyebaran penyakit, maka diharapkan dapat membantu mengidentifikasi dan memahami hubungan penyebaran penyakit dengan parameter epidemiologis, mempertimbangkan tindakan yang harus dilakukan dalam pengendalian dan memprediksi potensi pertumbuhan di Indonesia pada masa yang akan datang. Analisis dinamik dilakukan dengan beberapa langkah antara lain menganalisis titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan pada titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar beserta analisis sensitivitas terhadap parameter, dan melakukan simulasi numerik.

Pada penelitian ini, model SEIHCRD akan dikaji lebih lanjut sehingga dapat menggambarkan penyebaran COVID-19 di Indonesia. Pada (Mbogo &

Orwa, 2021) kelas *Exposed* diasumsikan dapat mengalami kesembuhan sehingga dapat berpindah langsung ke kelas *Recovered*. Padahal, pada kenyataannya kelas terpapar belum bisa dikategorikan sebagai individu positif terinfeksi COVID-19 sebelum dilakukan *tracing*. Sehingga pada penelitian ini, model tersebut akan dikaji ulang dimana individu yang tidak menunjukkan gejala dalam subpopulasi *Exposed* (E) hanya memiliki dua kemungkinan setelah dilakukan *tracing*, yakni masuk ke kelas terinfeksi dirawat mandiri (*Infectious*) atau terinfeksi dirawat inap (*Hospitalized*). Individu yang terinfeksi dan memiliki penyakit bawaan atau komorbid akan dirawat di rumah sakit dan masuk kelas *Hospitalized*. Sedangkan individu terinfeksi yang tidak memerlukan perawatan medis akan dimasukkan ke kelas *Infectious* dengan isolasi mandiri di rumah. Model SEIHCRD yang dibahas dalam penelitian ini yaitu pada Gambar 2.1 akan digunakan untuk mengetahui pengaruh jaga jarak dan pengujian massal dari suatu populasi terhadap penyebaran COVID-19. Berikut merupakan model SEIHCRD sebelum dan sesudah dimodifikasi.

- a. Model SEIHCRD (Mbogo & Orwa, 2021) sebelum dimodifikasi:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \rho\Lambda - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \kappa)E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (1 - \rho)\Lambda + (1 - \zeta)\gamma E(t) - (\alpha + \mu_I)I(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha I(t) + \zeta\gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h)H(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta H(t) - (\sigma + \mu_c)C(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \kappa E(t) + \omega H(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_h H(t) + \mu_c C(t)$$

b. Model SEIHCRD setelah dimodifikasi:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda N(t) - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - \mu S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{(1-\eta)(\beta_0 I(t) + \beta_1 H(t) + \beta_2 C(t))}{N(t)} S(t) - (\gamma + \mu) E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (1 - \zeta) \gamma E(t) - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha I(t) + \zeta \gamma E(t) + \sigma C(t) - (\omega + \delta + \mu_h + \mu) H(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta H(t) - (\sigma + \mu_c + \mu) C(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \kappa I(t) + \omega H(t) - \mu R(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_h H(t) + \mu_c C(t)$$

Perubahan yang terjadi pada setiap subpopulasi akan membentuk persamaan diferensial biasa nonlinear, karena terdapat 7 subpopulasi maka terbentuklah sistem nonlinear. Selanjutnya akan dicari solusi dari setiap persamaan dengan menggunakan Teorema 2.1 lalu dilanjutkan dengan mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kesetimbangan dilakukan untuk menentukan titik tetap pada model SEIHCRD. Berdasarkan Definisi 2.2, titik kesetimbangan sistem dapat diperoleh jika $f(\bar{x}) = 0$. Setelah titik kesetimbangan didapatkan, selanjutnya akan di analisis kestabilan di setiap titik kesetimbangan.

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Karena sistem berbentuk nonlinear, maka untuk menentukan solusi diperlukan linearisasi pada sistem. Kestabilan pada titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi. Jika persamaan karakteristik yang didapatkan berbentuk polinomial dan sulit didapatkan nilai eigennya maka akan digunakan

kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan sifat kestabilan berdasarkan akar karakteristiknya.

Selanjutnya akan dicari bilangan reproduksi dasar yang diperoleh dari *spectral radius* yang merupakan nilai eigen terbesar dari hasil matriks generasi selanjutnya. Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk mengetahui ambang batas dari parameter model penyakit akan mewabah. Analisis sensitivitas digunakan untuk mengidentifikasi parameter yang berpengaruh signifikan pada nilai R_0 . Parameter yang memiliki nilai paling tinggi artinya berpengaruh besar terhadap penyebaran COVID-19. Pada penelitian ini akan diidentifikasi mengenai pengaruh parameter jaga jarak dan pengujian massal terhadap penyebaran COVID-19.

Simulasi numerik bertujuan untuk mensimulasikan hasil yang telah didapatkan pada analisis sebelumnya. Metode numerik yang digunakan sebagai aproksimasi solusi adalah Runge-Kutta orde 4. Metode ini cukup baik dalam mencari solusi numerik karena memiliki ketelitian yang cukup tinggi dan tidak membutuhkan turunan fungsi dalam penyelesaiannya. Simulasi ini dilakukan dengan bantuan *software* Octave. Grafik yang diperoleh dari hasil simulasi numerik akan menggambarkan kondisi ketika $R_0 < 1$ dan ketika $R_0 > 1$. Selain itu penyebaran COVID-19 di Indonesia juga disimulasikan dengan menggunakan model SEIHCRD. Simulasi dilakukan terhadap kelas *Infectious*, *Hospitalized*, dan *Critical* dengan menggunakan data infeksi harian, data BOR-RS, dan data BOR-ICU bulan Juli-Agustus 2021.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan gabungan dari penelitian kualitatif dan kuantitatif. Penelitian kualitatif berkaitan dengan fenomena yang terjadi di lingkungan sosial dan digunakan untuk menyelidiki motif yang mendasari perilaku manusia (Kusumastuti & Khoiron, 2019). Penelitian kualitatif digunakan untuk menganalisa perilaku model dan penelitian kuantitatif digunakan pada bagian simulasi yang menggambarkan penyebaran COVID-19 di Indonesia. Data yang digunakan dalam simulasi yaitu data Indonesia pada bulan Juli-Agustus 2021.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum penelitian dimulai, peneliti melakukan studi literatur mengenai topik dan konsep yang akan dibahas. Studi literatur dilakukan dengan mengumpulkan dan mempelajari informasi mengenai topik yang dibahas dari berbagai sumber, seperti buku-buku, jurnal, artikel, website resmi yaitu <https://covid19.go.id/>, <https://www.kemkes.go.id/>, serta referensi lainnya yang relevan. Topik yang diambil oleh peneliti berdasarkan permasalahan yang sedang terjadi. Setelah topik ditemukan, selanjutnya peneliti memahami permasalahan yang terjadi kemudian mencari literatur mengenai pemodelan matematika, teori-teori yang akan digunakan, model yang digunakan beserta parameteranya.

3.3 Tahapan Penelitian

Setelah melakukan pra penelitian, selanjutnya peneliti akan melakukan penelitian dengan langkah-langkah sebagai berikut

1. Menganalisis perilaku pada model SEIHCRD terhadap penyebaran COVID-19 dengan menggunakan analisis dinamik. Adapun langkah-langkah dalam melakukan analisis dinamik yaitu:
 - a) Menentukan titik kesetimbangan dari model SEIHCRD.
 - b) Mengidentifikasi jenis kestabilan lokal setiap titik kesetimbangan yang diperoleh berdasarkan akar karakteristik.
 - c) Mencari bilangan reproduksi dasar dengan metode matriks generasi selanjutnya.
2. Melakukan analisis sensitivitas terhadap bilangan reproduksi dasar dengan langkah-langkah
 - a) Menentukan parameter yang akan dianalisis kemudian mencari nilai indeks sensitivitas dengan menurunkan persamaan R_0 terhadap parameter tersebut.
 - b) Melakukan analisis terhadap hasil indeks sensitivitas dan mempertimbangkan tindakan yang dapat dilakukan untuk membuat $R_0 < 1$.
3. Melakukan simulasi numerik penyebaran COVID-19 model SEIHCRD
 - a) Melakukan simulasi numerik ketika $R_0 < 1$.
 - b) Melakukan simulasi numerik ketika $R_0 > 1$.
 - c) Melakukan simulasi pada data penyebaran di Indonesia sehingga diperoleh pola model yang mendekati data sebenarnya.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model SEIHCRD

4.1.1 Titik Keseimbangan

Model penyebaran penyakit COVID-19 dengan model SEIHCRD berupa sistem persamaan diferensial nonlinear. Titik keseimbangan sistem diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dD}{dt} = 0$. Sehingga untuk mencari titik keseimbangan maka persamaan yang bergantung terhadap waktu pada sistem (2.22) dapat dituliskan menjadi:

$$\Lambda N - \frac{(1 - \eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*)S^*}{N} - \mu S^* = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{(1 - \eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*)S^*}{N} - (\gamma + \mu)E^* = 0 \quad (4.2)$$

$$(1 - \zeta)\gamma E^* - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I^* = 0 \quad (4.3)$$

$$\alpha I^* + \zeta\gamma E^* + \sigma C^* - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)H^* = 0 \quad (4.4)$$

$$\delta H^* - (\sigma + \mu_c + \mu)C^* = 0 \quad (4.5)$$

$$\kappa I^* + \omega H^* - \mu R^* = 0 \quad (4.6)$$

$$\mu_c C^* + \mu_h H^* + \mu_I I^* = 0 \quad (4.7)$$

Selanjutnya persamaan (4.6) dan (4.7) tidak dimasukkan ke dalam sistem (4.8) berikut karena persamaan (4.1) – (4.5) tidak bergantung secara eksplisit terhadap R^* dan D^* . Sistem (4.8) memiliki dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit atau *disease free equilibrium (DFE)* dan titik keseimbangan endemik atau *endemic equilibrium (END)*.

$$\begin{aligned}
\Lambda N - \frac{(1-\eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*)S^*}{N} - \mu S^* &= 0 \\
\frac{(1-\eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*)S^*}{N} - (\gamma + \mu)E^* &= 0 \\
(1-\zeta)\gamma E^* - (\alpha + \kappa + \mu_l + \mu)I^* &= 0 \\
\alpha I^* + \zeta\gamma E^* + \sigma C^* - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)H^* &= 0 \\
\delta H^* - (\sigma + \mu_c + \mu)C^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

a. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit didefinisikan sebagai titik dimana tidak ada penyakit dalam suatu populasi ($I^* = 0$). Dari persamaan (4.5) diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta H^* - (\sigma + \mu_c + \mu)C^* &= 0 \\
\delta H^* &= (\sigma + \mu_c + \mu)C^* \\
H^* &= \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)C^*}{\delta}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substitusikan $I = 0$ ke dalam persamaan (4.3) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
(1-\zeta)\gamma E^* - (\alpha + \kappa + \mu_l + \mu)I^* &= 0 \\
E^0 &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Sehingga, dengan memasukkan nilai $I^* = 0$, persamaan (4.9) dan (4.10) ke dalam persamaan (4.4) maka diperoleh titik keseimbangan

$$\begin{aligned}
\alpha I^* + \zeta\gamma E^* + \sigma C^* - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)H^* &= 0 \\
\sigma C^* - \frac{(\omega + \delta + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu)C^*}{\delta} &= 0 \\
C^*(\delta\sigma - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu)) &= 0 \\
C^0 &= 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.11) ke dalam persamaan (4.9) maka didapatkan

$$H^0 = 0 \quad (4.12)$$

Sehingga persamaan (4.1) akan diperoleh

$$\begin{aligned} \Lambda N - \frac{(1 - \eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*)S^*}{N} - \mu S^* &= 0 \\ \Lambda N^2 - (1 - \eta)(\beta_0(0) + \beta_1(0) + \beta_2(0))S^* - \mu N S^* &= 0 \\ \Lambda N^2 - \mu N S^* &= 0 \\ S^0 &= \frac{\Lambda N}{\mu} \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka telah didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0(S^0, E^0, I^0, H^0, C^0) = E_0\left(\frac{\Lambda N}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right) \quad (4.13)$$

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan titik dimana kelas terinfeksi tidak nol sehingga penyakit dalam suatu populasi dapat mewabah. Dengan kata lain, pada suatu populasi akan selalu ada individu yang terserang penyakit sehingga pada kondisi ini $I^* > 0$. Berdasarkan persamaan (4.5) diperoleh

$$\begin{aligned} \delta H^* - (\sigma + \mu_c + \mu)C^* &= 0 \\ H^* &= \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)C^*}{\delta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dari persamaan (4.3) diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - \zeta)\gamma E^* - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I^* &= 0 \\ E^* &= \frac{(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I^*}{(1 - \zeta)\gamma} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substitusikan persamaan (4.14) dan (4.12) ke dalam persamaan (4.4) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha I^* + \zeta \gamma E^* + \sigma C^* - (\omega + \delta + \mu_h + \mu) H^* &= 0 \\
\alpha I^* + \frac{(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) \zeta I^*}{(1 - \zeta)} + \sigma C^* - \frac{(\omega + \delta + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) C^*}{\delta} &= 0 \\
\frac{I^* \delta (\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta)}{(1 - \zeta) \delta} - \frac{C^* (1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)]}{(1 - \zeta) \delta} &= 0 \\
I^* \delta (\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) &= C^* (1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)] \\
C^* &= \frac{(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) \delta I^*}{(1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)]} \\
H^* &= \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) I^*}{(1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)]}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Substitusikan persamaan (4.16) ke dalam persamaan (4.1)

$$\begin{aligned}
\Lambda N - \left(\frac{(1 - \eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*)}{N} + \mu \right) S^* &= 0 \\
S^* &= \frac{\Lambda N^2}{(1 - \eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*) + \mu N} \\
S^* &= \frac{\Lambda N^2}{(1 - \eta) \left(\beta_0 I^* + \beta_1 \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) I^*}{(1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)]} + \beta_2 \frac{(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) \delta I^*}{(1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)]} \right) + \mu N}
\end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
x &= (1 - \eta) (\beta_0 (1 - \zeta) [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)] \\
&\quad + \beta_1 (\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) + \beta_2 \delta (\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta))
\end{aligned}$$

$$y = [(\omega + \mu_h + \mu)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta (\mu_c + \mu)]$$

maka

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\Lambda N^2 (1 - \zeta) y}{I^* x + \mu N (1 - \zeta) y} \\
C^* &= \frac{(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) \delta I^*}{(1 - \zeta) y} \\
H^* &= \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) I^*}{(1 - \zeta) y}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.17) ke dalam persamaan (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{(1-\eta)(\beta_0 I^* + \beta_1 H^* + \beta_2 C^*) S^*}{N} - (\gamma + \mu) E^* &= 0 \\ \frac{(1-\eta) \left(\beta_0 I^* + \beta_1 \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) I^*}{(1-\zeta)y} + \beta_2 \frac{(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) \delta I^*}{(1-\zeta)y} \right) \Lambda N (1-\zeta)y}{I^* x + \mu N (1-\zeta)y} - \frac{(\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I^*}{(1-\zeta)\gamma} &= 0 \\ \frac{(1-\eta)(1-\zeta) \Lambda N y I^* (\beta_0 (1-\zeta)y + \beta_1 (\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) + \beta_2 \delta (\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta))}{(1-\zeta)y (I^* x + \mu N (1-\zeta)y)} - \frac{(\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I^*}{(1-\zeta)\gamma} &= 0 \\ \frac{(1-\zeta) \Lambda N x y I^*}{(1-\zeta)y (I^* x + \mu N (1-\zeta)y)} &= \frac{(\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I^*}{(1-\zeta)\gamma} \\ (1-\zeta) \gamma \Lambda N x &= (\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) (I^* x + \mu N (1-\zeta)y) \\ I^* x &= \frac{(1-\zeta) \gamma \Lambda N x}{(\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)} - \mu N (1-\zeta)y \\ I^* &= \frac{(1-\zeta) \gamma \Lambda N x - \mu N y (1-\zeta)(\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)}{x(\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)} \end{aligned}$$

dengan memisalkan $z = (\gamma + \mu)(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)$ maka

$$I^* = \frac{(1-\zeta)N(\gamma \Lambda x - \mu y z)}{xz} \quad (4.18)$$

Maka didapatkan titik kesetimbangan endemik $E_1(S^*, E^*, I^*, H^*, C^*)$ yaitu

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda N^2 (1-\zeta)y}{I^* x + \mu N (1-\zeta)y} \\ E^* &= \frac{(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) I^*}{(1-\zeta)\gamma} \\ I^* &= \frac{(1-\zeta)N(\gamma \Lambda x - \mu y z)}{xz} \\ H^* &= \frac{(\sigma + \mu_c + \mu)(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) I^*}{(1-\zeta)y} \\ C^* &= \frac{(\alpha + \kappa \zeta + \mu_I \zeta + \mu \zeta) \delta I^*}{(1-\zeta)y} \end{aligned}$$

4.1.2 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Model matematika pada sistem persamaan (2.22) berbentuk nonlinear. Sehingga analisis kestabilan dilakukan dengan melakukan linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Karena jumlah individu pada kompartmen R dan D tidak

mempengaruhi laju perubahan individu pada kompartmen lainnya, maka persamaan tersebut dapat diabaikan sementara untuk dilakukan linearisasi.

Matriks jacobi hasil linearisasi adalah sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial E} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial H} & \frac{\partial S}{\partial C} \\ \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial E} & \frac{\partial E}{\partial I} & \frac{\partial E}{\partial H} & \frac{\partial E}{\partial C} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial E} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial H} & \frac{\partial I}{\partial C} \\ \frac{\partial H}{\partial S} & \frac{\partial H}{\partial E} & \frac{\partial H}{\partial I} & \frac{\partial H}{\partial H} & \frac{\partial H}{\partial C} \\ \frac{\partial C}{\partial S} & \frac{\partial C}{\partial E} & \frac{\partial C}{\partial I} & \frac{\partial C}{\partial H} & \frac{\partial C}{\partial C} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -H_0 - \mu & 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_1 H_1 & -\beta_2 H_1 \\ H_0 & -(\gamma + \mu) & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 & \beta_2 H_1 \\ 0 & (1 - \zeta)\gamma & -H_2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta\gamma & \alpha & -H_3 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -H_4 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \frac{(1 - \eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)}{N}$$

$$H_1 = \frac{(1 - \eta)S}{N}$$

$$H_2 = (\alpha + \kappa + \mu_l + \mu)$$

$$H_3 = (\omega + \delta + \mu_h + \mu)$$

$$H_4 = (\sigma + \mu_c + \mu)$$

a. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Matriks jacobi hasil linearisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_1 H_1 & -\beta_2 H_1 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 & \beta_2 H_1 \\ 0 & (1 - \zeta)\gamma & -H_2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta\gamma & \alpha & -H_3 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -H_4 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \frac{(1 - \eta)S^0}{N}$$

$$H_2 = (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)$$

$$H_3 = (\omega + \delta + \mu_h + \mu)$$

$$H_4 = (\sigma + \mu_c + \mu)$$

Nilai eigen dari matriks $\mathbf{J}(\mathbf{E}_0)$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\det|\mathbf{J}(\mathbf{E}_0) - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_1 H_1 & -\beta_2 H_1 \\ 0 & -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 & \beta_2 H_1 \\ 0 & (1 - \zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)\mathbf{M} = 0 \quad (4.19)$$

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 & \beta_2 H_1 \\ (1 - \zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-H_4 - \lambda) \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 \\ (1 - \zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$- \delta \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_2 H_1 \\ (1 - \zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & (-H_4 - \lambda)(\beta_1 H_1 \alpha (1 - \zeta)\gamma + \beta_1 H_1 \zeta\gamma(H_2 + \lambda) - (H_3 + \lambda)(\gamma + \mu + \lambda)(H_2 + \lambda) + \\ & (H_3 + \lambda)(1 - \zeta)\gamma\beta_0 H_1) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha (1 - \zeta)\gamma + \beta_2 H_1 \zeta\gamma(H_2 + \lambda) + \sigma(\gamma + \mu + \lambda)(H_2 + \lambda) - \\ & \sigma(1 - \zeta)\gamma\beta_0 H_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-H_4 - \lambda)(\beta_1 H_1 \alpha \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_1 H_1 \zeta \gamma \lambda - \lambda^3 - (H_2 + H_3 + \gamma + \mu)\lambda^2 - \\ & (H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma)\lambda - H_2 H_3 \mu - H_2 H_3 \gamma + (\beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta)\lambda + \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \\ & \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_2 H_1 \zeta \gamma \lambda + \lambda^2 \sigma + (H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma)\lambda + \\ & H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \sigma \gamma \beta_0 H_1 + \zeta \sigma \gamma \beta_0 H_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + (H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu)\lambda^3 + (H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \beta_0 H_1 \gamma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma + \\ & H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma)\lambda^2 + (H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + \\ & H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + \\ & H_2 H_3 \gamma)\lambda + H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + \\ & H_2 H_3 \gamma) - \delta \sigma \lambda^2 - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + \\ & H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \sigma \gamma \beta_0 H_1 + \zeta \sigma \gamma \beta_0 H_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + (H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu)\lambda^3 + ((H_4 + H_3 + H_2)(\gamma + \mu) + H_3(H_2 + H_4) + H_2 H_4 + \\ & H_1 \gamma(\zeta \beta_0 - \zeta \beta_1 - \beta_0) - \delta \sigma)\lambda^2 + (H_2 H_3 H_4 + (H_3 H_4 + H_2 H_3 + H_2 H_4)(\gamma + \mu) + \\ & H_1 H_4 \gamma(\zeta \beta_0 - \zeta \beta_1 - \beta_0) - \delta \sigma(\gamma + \mu + H_2) + H_1 \gamma(\zeta - 1)(H_3 \beta_0 + \alpha \beta_1) - H_1 \gamma \zeta(H_2 \beta_1 + \\ & \beta_2 \delta))\lambda + H_2(\gamma + \mu)(H_3 H_4 - \delta \sigma) + H_1 \gamma(\zeta - 1)(H_3 H_4 \beta_0 + H_4 \alpha \beta_1 + \alpha \beta_2 \delta - \beta_0 \delta \sigma) - \\ & H_1 H_2 \gamma \zeta(H_4 \beta_1 + \beta_2 \delta) = 0 \end{aligned}$$

Dari matriks \mathbf{M} akan didapatkan persamaan karakteristik

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (4.20)$$

dimana

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \gamma + \mu + H_2 + H_3 + H_4$$

$$a_2 = (H_4 + H_3 + H_2)(\gamma + \mu) + H_3(H_2 + H_4) + H_2 H_4 + H_1 \gamma(\zeta \beta_0 - \zeta \beta_1 - \beta_0) - \delta \sigma$$

$$a_3 = H_2 H_3 H_4 + (H_3 H_4 + H_2 H_3 + H_2 H_4)(\gamma + \mu) + H_1 H_4 \gamma(\zeta \beta_0 - \zeta \beta_1 - \beta_0) - \delta \sigma(\gamma + \mu + H_2) + H_1 \gamma(\zeta - 1)(H_3 \beta_0 + \alpha \beta_1) - H_1 \gamma \zeta(H_2 \beta_1 + \beta_2 \delta)$$

$$a_4 = H_2(\gamma + \mu)(H_3 H_4 - \delta \sigma) + H_1 \gamma(\zeta - 1)(H_3 H_4 \beta_0 + H_4 \alpha \beta_1 + \alpha \beta_2 \delta - \beta_0 \delta \sigma) - H_1 H_2 \gamma \zeta(H_4 \beta_1 + \beta_2 \delta)$$

Karena nilai dari akar-akar persamaan karakteristik (4.20) sulit didapatkan, maka akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengetahui sifat kestabilan dari titik kesetimbangan E_0 . Dengan menggunakan kriteria tersebut, titik kesetimbangan E_0 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi

- i. $a_1 > 0$,
- ii. $a_1 a_2 - a_3 > 0$,

- iii. $a_3(a_1a_2 - a_3) - (a_1)^2a_4 > 0$,
- iv. $a_4 > 0$, dimana a_4 bernilai positif jika $R_0 < 1$ dan bernilai negatif jika $R_0 > 1$.

b. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Matriks jacobi hasil linearisasi di sekitar titik kesetimbangan endemik adalah sebagai berikut

$$J(\mathbf{E}_1) = \begin{bmatrix} -H_0 - \mu & 0 & -\beta_0H_1 & -\beta_1H_1 & -\beta_2H_1 \\ H_0 & -(\gamma + \mu) & \beta_0H_1 & \beta_1H_1 & \beta_2H_1 \\ 0 & (1 - \zeta)\gamma & -H_2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta\gamma & \alpha & -H_3 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -H_4 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \frac{(1 - \eta)(\beta_0I^* + \beta_1H^* + \beta_2C^*)}{N}$$

$$H_1 = \frac{(1 - \eta)S^*}{N}$$

$$H_2 = (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)$$

$$H_3 = (\omega + \delta + \mu_h + \mu)$$

$$H_4 = (\sigma + \mu_c + \mu)$$

Nilai eigen dari matriks $J(\mathbf{E}_1)$ diperoleh dari persamaan berikut

$$\det|J(\mathbf{E}_1) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -H_0 - \mu - \lambda & 0 & -\beta_0H_1 & -\beta_1H_1 & -\beta_2H_1 \\ H_0 & -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0H_1 & \beta_1H_1 & \beta_2H_1 \\ 0 & (1 - \zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-H_0 - \mu - \lambda)J_{1E_1} - H_0J_{2E_1} = 0 \quad (4.21)$$

$$J_{1E_1} = \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0H_1 & \beta_1H_1 & \beta_2H_1 \\ (1 - \zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$J_{2E_1} = \begin{vmatrix} 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_1 H_1 & -\beta_2 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari determinan matriks J_{1E_1} diperoleh

$$J_{1E_1} = \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 & \beta_2 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-H_4 - \lambda) \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_1 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu) - \lambda & \beta_0 H_1 & \beta_2 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(-H_4 - \lambda)(\beta_1 H_1 \alpha (1 - \zeta)\gamma + \beta_1 H_1 \zeta\gamma(H_2 + \lambda) - (H_3 + \lambda)(\gamma + \mu + \lambda)(H_2 + \lambda) + (H_3 + \lambda)(1 - \zeta)\gamma\beta_0 H_1) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha (1 - \zeta)\gamma + \beta_2 H_1 \zeta\gamma(H_2 + \lambda) + \sigma(\gamma + \mu + \lambda)(H_2 + \lambda) - \sigma(1 - \zeta)\gamma\beta_0 H_1) = 0$$

$$(-H_4 - \lambda)(\beta_1 H_1 \alpha \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_1 H_1 H_2 \zeta\gamma + \beta_1 H_1 \zeta\gamma \lambda - \lambda^3 - (H_2 + H_3 + \gamma + \mu)\lambda^2 - (H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma)\lambda - H_2 H_3 \mu - H_2 H_3 \gamma + (\beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta)\lambda + \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta\gamma + \beta_2 H_1 \zeta\gamma \lambda + \lambda^2 \sigma + (H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma)\lambda + H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \sigma \gamma \beta_0 H_1 + \zeta \sigma \gamma \beta_0 H_1) = 0$$

$$\lambda^4 + (H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu)\lambda^3 + (H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \beta_0 H_1 \gamma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta\gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma - \delta\sigma)\lambda^2 + (H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta\gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta\gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta\gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma)\lambda + H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta\gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta\gamma + H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \sigma \gamma \beta_0 H_1 + \zeta \sigma \gamma \beta_0 H_1) = 0$$

Sehingga $(-H_0 - \mu - \lambda)J_{1E_1}$ adalah

$$(-H_0 - \mu - \lambda)(\lambda^4 + (H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu)\lambda^3 + (H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \beta_0 H_1 \gamma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta\gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma - \delta\sigma)\lambda^2 + (H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta\gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta\gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta\gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma)\lambda + H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta\gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta\gamma + H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \sigma \gamma \beta_0 H_1 + \zeta \sigma \gamma \beta_0 H_1)) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^5 + (H_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + 2\mu)\lambda^4 + ((\mu + H_0)(H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu) + H_4(H_2 + H_3 + \\
& \gamma + \mu) - \beta_0 H_1 \gamma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma - \delta \sigma)\lambda^3 + \\
& ((\mu + H_0)(H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \delta \sigma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + \\
& H_3 \mu + H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) + H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + \\
& H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + \\
& H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma)\lambda^2 + ((\mu + H_0)(H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + \\
& H_3 \mu + H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \\
& \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) + H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \\
& \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + H_2 \mu \sigma + \\
& H_2 \gamma \sigma - \beta_0 H_1 \sigma \gamma + \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma))\lambda + (\mu + H_0)(\beta_0 H_1 H_3 H_4 \gamma \zeta + H_2 H_3 H_4 \mu + H_2 H_3 H_4 \gamma + \\
& \beta_1 H_1 H_4 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 H_4 \gamma - \beta_1 H_1 H_2 H_4 \zeta \gamma - \beta_1 H_1 H_4 \alpha \gamma - \delta \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma + \delta \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta - \delta H_2 \mu \sigma - \\
& \delta H_2 \gamma \sigma - \delta \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma - \delta \beta_2 H_1 \alpha \gamma + \delta \beta_0 H_1 \sigma \gamma) = 0
\end{aligned}$$

Dari determinan matriks J_{2E_1} diperoleh

$$\begin{aligned}
J_{2E_1} &= \begin{vmatrix} 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_1 H_1 & -\beta_2 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -H_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
(-H_4 - \lambda) & \begin{vmatrix} 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_1 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -H_3 - \lambda \end{vmatrix} \\
& - \delta \begin{vmatrix} 0 & -\beta_0 H_1 & -\beta_2 H_1 \\ (1-\zeta)\gamma & -H_2 - \lambda & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & \sigma \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-H_4 - \lambda)(-\beta_1 H_1 \alpha (1 - \zeta)\gamma + \beta_1 H_1 \zeta \gamma (-H_2 - \lambda) + (-H_3 - \lambda)(1 - \zeta)\gamma \beta_0 H_1) - \\
& \delta(-\beta_2 H_1 \alpha (1 - \zeta)\gamma + \beta_2 H_1 \zeta \gamma (-H_2 - \lambda) + \sigma(1 - \zeta)\gamma \beta_0 H_1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-H_4 - \lambda)(-\beta_1 H_1 \alpha \gamma + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_1 H_1 \zeta \gamma \lambda - \beta_0 H_1 H_3 \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta - \\
& \beta_0 H_1 \gamma \lambda + \beta_0 H_1 \gamma \zeta \lambda) - \delta(-\beta_2 H_1 \alpha \gamma + \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_2 H_1 \zeta \gamma \lambda + \beta_0 H_1 \sigma \gamma - \\
& \beta_0 H_1 \sigma \gamma \zeta) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta)\lambda^2 + (H_4(\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \\
& \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_0 H_1 H_3 \gamma + \beta_1 H_1 \alpha \gamma)\lambda + H_4(\beta_1 H_1 \alpha \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \\
& \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta) + \delta \beta_2 H_1 \zeta \gamma \lambda - \delta(-\beta_2 H_1 \alpha \gamma + \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \sigma \gamma - \\
& \beta_0 H_1 \sigma \gamma \zeta) = 0
\end{aligned}$$

Sehingga $H_0 J_{2E_1}$ adalah

$$(\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) H_0 \lambda^2 + (H_4 (\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_0 H_1 H_3 \gamma + \beta_1 H_1 \alpha \gamma + \delta \beta_2 H_1 \zeta \gamma) H_0 \lambda + H_0 H_4 (\beta_1 H_1 \alpha \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta) - H_0 \delta (-\beta_2 H_1 \alpha \gamma + \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \sigma \gamma - \beta_0 H_1 \sigma \gamma \zeta)$$

Dari persamaan yang telah didapatkan pada perhitungan sebelumnya, maka diperoleh $(-H_0 - \mu - \lambda) J_{1E_1} - H_0 J_{2E_1}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \lambda^5 + (H_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + 2\mu) \lambda^4 + \left((\mu + H_0)(H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu) + \right. \\ & H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \beta_0 H_1 \gamma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma - \\ & \left. \delta \sigma \right) \lambda^3 + \left((\mu + H_0)(H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \delta \sigma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + \right. \\ & H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) + H_0(\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \\ & \left. \gamma \sigma) + H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \right. \\ & \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) \lambda^2 + \left((\mu + \right. \\ & H_0)(H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + \\ & H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + \\ & H_2 H_3 \gamma) + H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + \\ & H_2 H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \beta_0 H_1 \sigma \gamma + \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma) + \\ & H_0(H_4(\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_0 H_1 H_3 \gamma + \\ & \left. \beta_1 H_1 \alpha \gamma + \delta \beta_2 H_1 \zeta \gamma) \right) \lambda + (\mu + H_0)(\beta_0 H_1 H_3 H_4 \gamma \zeta + H_2 H_3 H_4 \mu + H_2 H_3 H_4 \gamma + \beta_1 H_1 H_4 \alpha \gamma \zeta - \\ & \beta_0 H_1 H_3 H_4 \gamma - \beta_1 H_1 H_2 H_4 \zeta \gamma - \beta_1 H_1 H_4 \alpha \gamma - \delta \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma + \delta \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta - \delta H_2 \mu \sigma - \delta H_2 \gamma \sigma - \\ & \delta \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma - \delta \beta_2 H_1 \alpha \gamma + \delta \beta_0 H_1 \sigma \gamma) - H_0 H_4 (\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \\ & \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma) + H_0 \delta (\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \sigma \gamma + \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristik

$$a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0 \quad (4.22)$$

dimana

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = H_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + 2\mu$$

$$a_2 = (\mu + H_0)(H_2 + H_3 + H_4 + \gamma + \mu) + H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \beta_0 H_1 \gamma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma - \delta \sigma$$

$$a_3 = (\mu + H_0)(H_4(H_2 + H_3 + \gamma + \mu) - \delta\sigma + \beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) + H_0(\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) + H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma$$

$$a_4 = (\mu + H_0)(H_4(\beta_0 H_1 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \gamma + H_2 H_3 + H_2 \mu + H_2 \gamma + H_3 \mu + H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \zeta \gamma + H_2 \sigma + \mu \sigma + \gamma \sigma) - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) + H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma + H_2 H_3 \mu + H_2 H_3 \gamma) - \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma + H_2 \mu \sigma + H_2 \gamma \sigma - \beta_0 H_1 \sigma \gamma + \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma) + H_0(H_4(\beta_1 H_1 \zeta \gamma + \beta_0 H_1 \gamma - \beta_0 H_1 \gamma \zeta) + \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta - \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_0 H_1 H_3 \gamma + \beta_1 H_1 \alpha \gamma + \delta \beta_2 H_1 \zeta \gamma)$$

$$a_5 = (\mu + H_0)(\beta_0 H_1 H_3 H_4 \gamma \zeta + H_2 H_3 H_4 \mu + H_2 H_3 H_4 \gamma + \beta_1 H_1 H_4 \alpha \gamma \zeta - \beta_0 H_1 H_3 H_4 \gamma - \beta_1 H_1 H_2 H_4 \zeta \gamma - \beta_1 H_1 H_4 \alpha \gamma - \delta \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma + \delta \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta - \delta H_2 \mu \sigma - \delta H_2 \gamma \sigma - \delta \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma - \delta \beta_2 H_1 \alpha \gamma + \delta \beta_0 H_1 \sigma \gamma) - H_0 H_4(\beta_0 H_1 H_3 \gamma \zeta + \beta_1 H_1 \alpha \gamma \zeta - \beta_1 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 H_3 \gamma - \beta_1 H_1 \alpha \gamma) + H_0 \delta(\beta_2 H_1 \alpha \gamma - \beta_2 H_1 \alpha \gamma \zeta + \beta_2 H_1 H_2 \zeta \gamma - \beta_0 H_1 \sigma \gamma + \beta_0 H_1 \zeta \sigma \gamma)$$

Karena nilai dari akar-akar persamaan karakteristik (4.22) sulit didapatkan, maka akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengetahui sifat kestabilan dari titik kesetimbangan E_1 . Dengan menggunakan kriteria tersebut, titik kesetimbangan E_1 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi

- i. $a_1 > 0$,
- ii. $a_1 a_2 - a_3 > 0$,
- iii. $a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1(a_1 a_4 - a_5) > 0$,
- iv. $(a_5)^2 + 2a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5 - (a_3)^2 a_4 - (a_1)^2 (a_4)^2 - a_1 (a_2)^2 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4 > 0$,
- v. $a_5 > 0$, dimana a_5 bernilai positif jika $R_0 > 1$ dan bernilai negatif jika $R_0 < 1$.

4.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menggunakan nilai eigen terbesar dari metode matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Model*).

Matriks Generasi Selanjutnya terbentuk dari subpopulasi yang mengandung komponen terinfeksi. Berikut adalah langkah-langkah mencari reproduksi dasar dengan matriks generasi selanjutnya.

1. Ambil persamaan-persamaan yang mengandung komponen kasus terinfeksi baru dan perubahan kompartmen terinfeksi dari sistem yang disebut subsistem terinfeksi. Pada sistem (2.22), subsistem terinfeksi adalah E, I, H, C .

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{(1-\eta)(\beta_0 I + \beta_1 H + \beta_2 C)S}{N} - (\gamma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= (1 - \zeta)\gamma E - (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)I \\ \frac{dH}{dt} &= \alpha I + \zeta\gamma E + \sigma C - (\omega + \delta + \mu_h + \mu)H \\ \frac{dC}{dt} &= \delta H - (\sigma + \mu_c + \mu)C\end{aligned}\tag{4.23}$$

2. Selanjutnya lakukan linearisasi pada subsistem terinfeksi terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit. Sehingga akan diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial E} & \frac{\partial E}{\partial I} & \frac{\partial E}{\partial H} & \frac{\partial E}{\partial C} \\ \frac{\partial I}{\partial E} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial H} & \frac{\partial I}{\partial C} \\ \frac{\partial H}{\partial E} & \frac{\partial H}{\partial I} & \frac{\partial H}{\partial H} & \frac{\partial H}{\partial C} \\ \frac{\partial C}{\partial E} & \frac{\partial C}{\partial I} & \frac{\partial C}{\partial H} & \frac{\partial C}{\partial C} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(\gamma + \mu) & \frac{(1-\eta)\beta_0 S}{N} & \frac{(1-\eta)\beta_1 S}{N} & \frac{(1-\eta)\beta_2 S}{N} \\ (1 - \zeta)\gamma & -(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -(\omega + \delta + \mu_h + \mu) & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -(\sigma + \mu_c + \mu) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(\gamma + \mu) & \frac{(1-\eta)\beta_0 \Lambda}{\mu} & \frac{(1-\eta)\beta_1 \Lambda}{\mu} & \frac{(1-\eta)\beta_2 \Lambda}{\mu} \\ (1 - \zeta)\gamma & -(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) & 0 & 0 \\ \zeta\gamma & \alpha & -(\omega + \delta + \mu_h + \mu) & \sigma \\ 0 & 0 & \delta & -(\sigma + \mu_c + \mu) \end{bmatrix}$$

3. Dekomposisi matriks Jacobi menjadi $J = F - V$, F merupakan matriks transmisi dan V merupakan matriks transisi.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1-\eta)\beta_0\Lambda}{\mu} & \frac{(1-\eta)\beta_1\Lambda}{\mu} & \frac{(1-\eta)\beta_2\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} (\gamma + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ -(1-\zeta)\gamma & (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu) & 0 & 0 \\ -\zeta\gamma & -\alpha & (\omega + \delta + \mu_h + \mu) & -\sigma \\ 0 & 0 & -\delta & (\sigma + \mu_c + \mu) \end{bmatrix}$$

Hitung V^{-1}

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\gamma+\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma(1-\zeta)}{Y(\gamma+\mu)} & \frac{1}{Y} & 0 & 0 \\ \frac{X}{YZ(\gamma+\mu)} & \frac{\alpha(\sigma+\mu_c+\mu)}{YZ} & \frac{\sigma+\mu_c+\mu}{Z} & \frac{\sigma}{Z} \\ \frac{A}{YZ(\gamma+\mu)} & \frac{\alpha\delta}{YZ} & \frac{\delta}{Z} & \frac{\omega+\delta+\mu_h+\mu}{Z} \end{bmatrix}$$

dimana,

$$X = \gamma(\sigma + \mu_c + \mu)(\zeta(\kappa + \mu_I + \mu) + \alpha)$$

$$Y = (\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)$$

$$Z = [(\mu_h + \mu + \omega)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta(\mu + \mu_c)]$$

$$A = \gamma\delta(\zeta(\mu_I + \kappa + \mu) + \alpha)$$

4. Menghitung nilai R_0 dengan *spectral radius* $R_0 = \rho(FV^{-1})$.

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana,

$$j_{11} = \frac{\Lambda(1-\eta)[Z\beta_0\gamma(1-\zeta)+\beta_1X+\beta_2A]}{\mu YZ(\gamma+\mu)}$$

$$j_{12} = \frac{\Lambda(1-\eta)[Z\beta_0+\alpha[\beta_1(\sigma+\mu_c+\mu)+\beta_2\delta]]}{\mu YZ(\gamma+\mu)}$$

$$j_{13} = \frac{\Lambda(1-\eta)[\beta_1(\sigma+\mu_c+\mu)+\beta_2\delta]}{\mu Z}$$

$$j_{14} = \frac{\Lambda(1-\eta)[\beta_1\sigma+\beta_2(\omega+\delta+\mu_h+\mu)]}{\mu Z}$$

Nilai eigen matriks (\mathbf{FV}^{-1}) diperoleh dari persamaan berikut

$$\det|\mathbf{FV}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Dari persamaan karakteristik matriks \mathbf{FV}^{-1} diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = j_{11} = \frac{\Lambda(1-\eta)[Z\beta_0\gamma(1-\zeta)+\beta_1X+\beta_2A]}{\mu YZ(\gamma+\mu)}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$$

Bilangan reproduksi dasar yang diperoleh dari nilai eigen terbesar yaitu

$$J(\mathbf{FV}^{-1}) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \text{ adalah}$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\Lambda(1-\eta)[Z\beta_0\gamma(1-\zeta)+\beta_1X+\beta_2A]}{\mu YZ(\gamma+\mu)} \\ &= \frac{\gamma\Lambda(1-\eta)[\beta_0Z(1-\zeta)+(\zeta(\mu_I+\kappa+\mu)+\alpha)(\beta_1(\sigma+\mu_c+\mu)+\beta_2\delta)]}{\mu YZ(\gamma+\mu)} \\ &= \frac{\gamma\Lambda(1-\eta)[\beta_0(1-\zeta)((\mu_h+\mu+\omega)(\sigma+\mu_c+\mu)+\delta(\mu+\mu_c)) + \beta_1(\sigma+\mu_c+\mu)(\zeta(\mu_I+\kappa+\mu)+\alpha) + \beta_2\delta(\zeta(\mu_I+\kappa+\mu)+\alpha)]}{\mu(\alpha+\kappa+\mu_I+\mu)(\gamma+\mu)[(\mu_h+\mu+\omega)(\sigma+\mu_c+\mu)+\delta(\mu+\mu_c)]} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$R_0 = R_I + R_H + R_C$, maka didapatkan

$$R_I = \frac{\gamma\Lambda\beta_0(1-\eta)(1-\zeta)}{\mu(\alpha+\kappa+\mu_I+\mu)(\gamma+\mu)}$$

$$R_H = \frac{\gamma\Lambda\beta_1(1-\eta)(\sigma+\mu_c+\mu)(\zeta(\mu_I+\kappa+\mu)+\alpha)}{\mu(\alpha+\kappa+\mu_I+\mu)(\gamma+\mu)[(\mu_h+\mu+\omega)(\sigma+\mu_c+\mu)+\delta(\mu+\mu_c)]}$$

$$R_C = \frac{\gamma\Lambda\beta_2\delta(1-\eta)(\zeta(\mu_I+\kappa+\mu)+\alpha)}{\mu(\alpha+\kappa+\mu_I+\mu)(\gamma+\mu)[(\mu_h+\mu+\omega)(\sigma+\mu_c+\mu)+\delta(\mu+\mu_c)]}$$

Bilangan reproduksi dasar R_0 merupakan penjumlahan dari rata-rata infeksi baru pada setiap subkelas terinfeksi. R_I merupakan *basic reproduction*

number pada kelas *Infectious* dengan β_0 merupakan laju kontak antara individu rentan dengan terinfeksi. R_H merupakan *basic reproduction number* pada kelas *Hospitalized* dengan β_1 adalah laju kontak antara individu rentan dengan individu yang di rawat inap. Sedangkan R_C merupakan *basic reproduction number* pada kelas *Critical* dengan laju kontak antara individu rentan dengan individu kritis adalah β_2 .

4.2 Analisis Sensitivitas R_0

Tabel 4.1 Nilai Parameter Model SEIHCRD

Parameter	Nilai	Satuan	Referensi
λ	6.25×10^{-3}	<i>per hari</i>	(Annas et al., 2020)
κ	0.05	<i>per hari</i>	Asumsi
ω	0.064	<i>per hari</i>	Asumsi
β_0	0.15	<i>per hari</i>	Asumsi
β_1	0.09	<i>per hari</i>	(Mbogo & Orwa, 2021)
β_2	0.009	<i>per hari</i>	(Mbogo & Orwa, 2021)
γ	0.37	<i>per hari</i>	Asumsi
α	0.13	<i>per hari</i>	(Mbogo & Orwa, 2021)
δ	0.0035	<i>per hari</i>	Asumsi
σ	0.027	<i>per hari</i>	Asumsi
μ_I	0.0004	<i>per hari</i>	Asumsi
μ_h	0.0003	<i>per hari</i>	Asumsi
μ_c	0.0002	<i>per hari</i>	Asumsi
η	0.09	<i>per hari</i>	(Mbogo & Orwa, 2021)
	0.5		
ζ	0.1	<i>per hari</i>	(Mbogo & Orwa, 2021)
	0.5		
μ	6.25×10^{-3}	<i>per hari</i>	(Annas et al., 2020)

Berdasarkan Tabel 4.1 di atas yang digunakan pada penelitian ini, didapatkan nilai indeks sensitivitas R_0 terhadap masing-masing parameter. Adapun tahapan

analisis sensitivitas untuk parameter efektivitas jaga jarak (η) dan pengujian massal (ζ) yaitu sebagai berikut

a. Jaga jarak (η)

$$C_{\eta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \eta} \times \frac{\eta}{R_0}$$

$$= \frac{-\gamma\Lambda[\beta_0(1-\zeta)((\mu_h + \mu + \omega)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta(\mu + \mu_c)) + \beta_1(\sigma + \mu_c + \mu)(\zeta(\mu_I + \kappa + \mu) + \alpha) + \beta_2\delta(\zeta(\mu_I + \kappa + \mu) + \alpha)]}{\mu(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)(\gamma + \mu)[(\mu_h + \mu + \omega)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta(\mu + \mu_c)]} \times \frac{\eta}{R_0}$$

$$= -0.09890109894$$

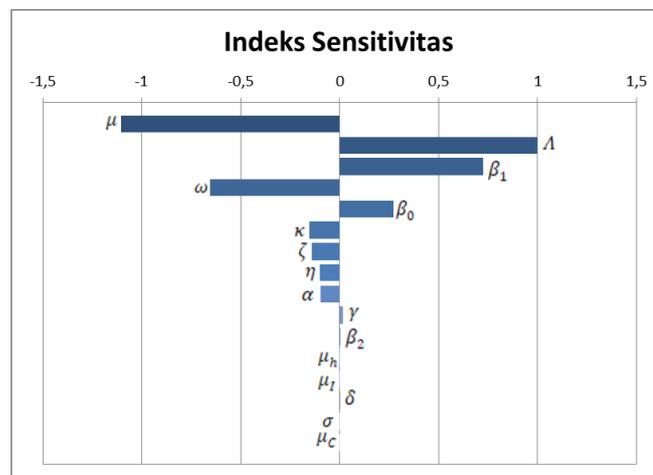
b. Pengujian massal (ζ)

$$C_{\zeta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \zeta} \times \frac{\zeta}{R_0}$$

$$= \frac{\gamma\Lambda(1-\eta)[- \beta_0((\mu_h + \mu + \omega)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta(\mu + \mu_c)) + \beta_1(\sigma + \mu_c + \mu)(\mu_I + \kappa + \mu) + \beta_2\delta(\mu_I + \kappa + \mu)]}{\mu(\alpha + \kappa + \mu_I + \mu)(\gamma + \mu)[(\mu_h + \mu + \omega)(\sigma + \mu_c + \mu) + \delta(\mu + \mu_c)]} \times \frac{\zeta}{R_0}$$

$$= -0.1401643950$$

Analisis sensitivitas untuk parameter lain diperoleh dengan cara serupa, sehingga diperoleh indeks sensitivitas R_0 terhadap masing-masing parameter adalah sebagai berikut.



Gambar 4.1 Analisis Sensitivitas R_0

Tabel 4.2 Nilai Indeks Sensitivitas

Parameter	Indeks Sensitivitas	Parameter	Indeks Sensitivitas
μ	-1.105079262	α	-0.09762320552
Λ	+1.0000000	γ	+0.01661129595
β_1	+0.7235234270	β_2	+0.005828151890
ω	-0.6568001727	μ_h	-0.003078750809
β_0	+0.2706484214	μ_l	-0.001221713791
κ	-0.1527142238	δ	+0.0004961381149
ζ	-0.1401643950	σ	-0.0004224880185
η	-0.09890109894	μ_c	-0.0001676174809

Parameter-parameter di atas mempunyai pengaruh terhadap besarnya nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Parameter dengan nilai indeks sensitivitas positif memiliki arti bahwa dengan memperbesar nilai pada parameter tersebut dan nilai parameter yang lain tetap sama maka akan meningkatkan bilangan reproduksi dasar. Begitu pula dengan menurunkan nilai parameter yang memiliki indeks sensitivitas positif dengan nilai parameter yang lain tetap sama maka akan menurunkan bilangan reproduksi dasar. Sebaliknya dengan indeks sensitivitas negatif, dengan memperbesar nilai parameter yang memiliki indeks negatif, dengan parameter yang lainnya tetap sama, maka akan memperkecil bilangan reproduksi dasar. Begitu juga dengan menurunkan nilai parameter tersebut dan parameter yang lain tetap sama maka akan memperbesar bilangan reproduksi dasar.

Berdasarkan tabel indeks sensitivitas di atas, selain parameter laju kelahiran dan kematian alami yang berpengaruh pada besarnya bilangan reproduksi dasar, bilangan reproduksi dasar dapat diturunkan dengan menurunkan nilai parameter yang memiliki indeks positif, seperti contohnya parameter β_1 (laju kontak efektif antara individu rentan dan individu rawat inap) dan β_0 (laju kontak

efektif antara individu rentan dan terinfeksi). Ketika parameter β_1 dengan nilai indeks sebesar 0.7235 diperkecil sebesar 10% maka bilangan reproduksi dasar akan menurun sebesar 7.235%. Indeks sensitivitas ω (laju pemulihan setelah di rawat inap) merupakan salah satu parameter yang berpengaruh signifikan (negatif) terhadap bilangan reproduksi dasar. Ketika parameter ω dengan indeks sebesar -0.656 dinaikkan sebesar 10% maka bilangan reproduksi dasar akan menurun sebesar 6.56%. Berdasarkan hasil analisis sensitivitas R_0 , tindakan selanjutnya yang dapat dilakukan untuk membuat $R_0 < 1$ antara lain:

1. Mengurangi kontak individu rentan dengan terinfeksi (β_0). Misalkan dengan penggunaan masker baik bagi individu yang sehat maupun yang sakit. Penggunaan masker untuk individu yang sakit dapat mencegah penyebaran virus ke orang lain. Sedangkan individu sehat juga wajib menggunakan masker sebagai upaya perlindungan diri untuk mencegah virus dari orang lain masuk ke dalam tubuh. Selain itu, usahakan mengisolasi diri di rumah jika dirasa tubuh kurang sehat serta rajin untuk menjaga kebersihan.
2. Mengurangi kontak individu rentan dengan di rawat inap (β_1). Misalnya membatasi orang luar yang menjenguk pasien di rumah sakit dan menerapkan prosedur operasional penanganan COVID-19 dengan ketat.
3. Meningkatkan pemulihan baik dari individu yang isolasi mandiri (κ) maupun rawat inap (ω) yaitu dengan menerapkan protokol isolasi dan perawatan dengan baik salah satunya dengan memastikan asupan gizi terpenuhi, serta menjaga kebersihan.

4. Meningkatkan parameter efektivitas jaga jarak (η) dengan membatasi kerumunan, dan tidak membuat acara secara besar-besaran.
5. Meningkatkan parameter pengujian massal (ζ) yaitu dengan melakukan *tracing* terhadap individu-individu yang dicurigai terinfeksi maupun individu lainnya.

4.3 Simulasi Numerik Penyebaran Penyakit Model SEIHCRD

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi yang bertujuan untuk mensimulasikan hasil yang telah didapatkan pada analisis sebelumnya. Pada simulasi pertama akan digambarkan kondisi ketika $R_0 < 1$ yang mana berdasarkan analisis sebelumnya titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak eksis. Simulasi selanjutnya akan digambarkan kondisi ketika $R_0 > 1$ yang mana pada perhitungan analisis sebelumnya terdapat sebuah titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan bebas penyakit eksis namun tidak stabil. Simulasi ketiga akan digambarkan penyebaran COVID-19 yang terjadi di Indonesia bulan Juli-Agustus 2021 dengan menggunakan model SEIHCRD. Simulasi tersebut dilakukan untuk mendapatkan pola yang mendekati data sebenarnya.

4.3.1 Simulasi Ketika $R_0 < 1$

Berdasarkan perhitungan yang dilakukan pada analisis sebelumnya, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Sehingga pada simulasi numerik ini akan ditunjukkan simulasi yang menggambarkan kondisi tersebut. Dengan

menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.1 dengan nilai $\eta = 0.5$ dan $\zeta = 0.1$ maka didapatkan nilai

$$R_0 = 0.8118562506 < 1.$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (2.702 \times 10^8, 0, 0, 0, 0)$$

Berikut merupakan perhitungan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dari analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit.

- i. $a_1 = 0.68040 > 0$,
- ii. $a_1 a_2 - a_3 = 0.07203627230 > 0$,
- iii. $a_3(a_1 a_2 - a_3) - (a_1)^2 a_4 = 0.0003213812076 > 0$,
- iv. $a_4 = 0.00004080071006 > 0$.

dengan

$$a_1 = 0.68040 > 0$$

$$a_2 = 0.1128157850 > 0$$

$$a_3 = 0.004723587814 > 0$$

$$a_4 = 0.00004080071006 > 0.$$

Pada perhitungan di atas didapatkan bahwa semua nilai dari syarat i – iv adalah positif. Dengan terpenuhinya keempat syarat tersebut, maka semua nilai eigen dari persamaan karakteristik titik kesetimbangan bebas penyakit bernilai negatif yang artinya titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Pada kondisi $R_0 = 0.8118562506 < 1$, maka nilai titik kesetimbangan endemik $E_1 = (3.328175397 \times 10^8, -1.040158467 \times 10^6, -1.855734098 \times 10^6, -3.936021066 \times 10^6, -3.170557821 \times 10^5)$. Selanjutnya akan dilakukan

perhitungan dengan kriteria Routh-Hurwitz dari analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik yaitu sebagai berikut.

- i. $a_1 = 0.685346201 > 0$,
- ii. $a_1 a_2 - a_3 = 0.07146126447 > 0$,
- iii. $a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1(a_1 a_4 - a_5) = 0.0002813075694 > 0$,
- iv. $(a_5)^2 + 2a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5 - (a_3)^2 a_4 - (a_1)^2 (a_4)^2 - a_1 (a_2)^2 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4 = 4.859120344 \times 10^{-9} > 0$,
- v. $a_5 = -2.550044369 \times 10^{-7} < 0$.

dengan

$$a_1 = 0.6854741016 > 0$$

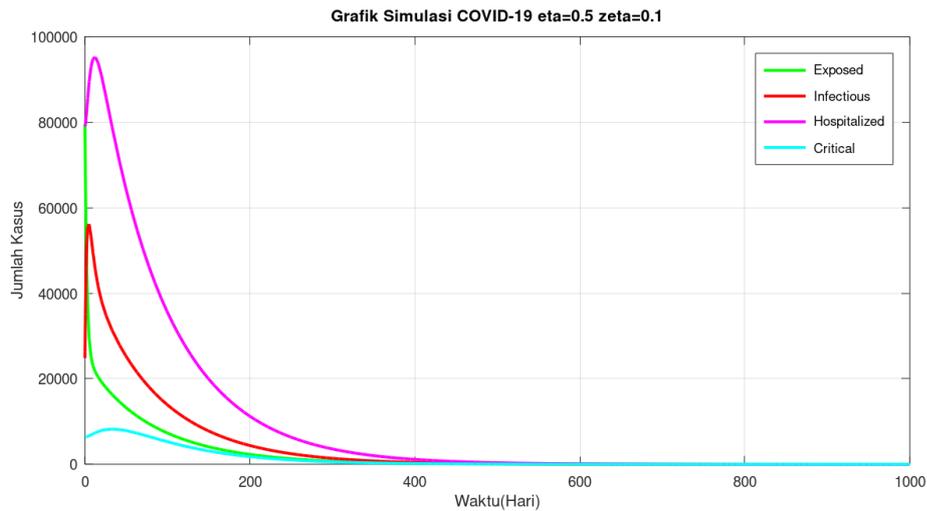
$$a_2 = 0.1100945129 > 0$$

$$a_3 = 0.004005672854 > 0$$

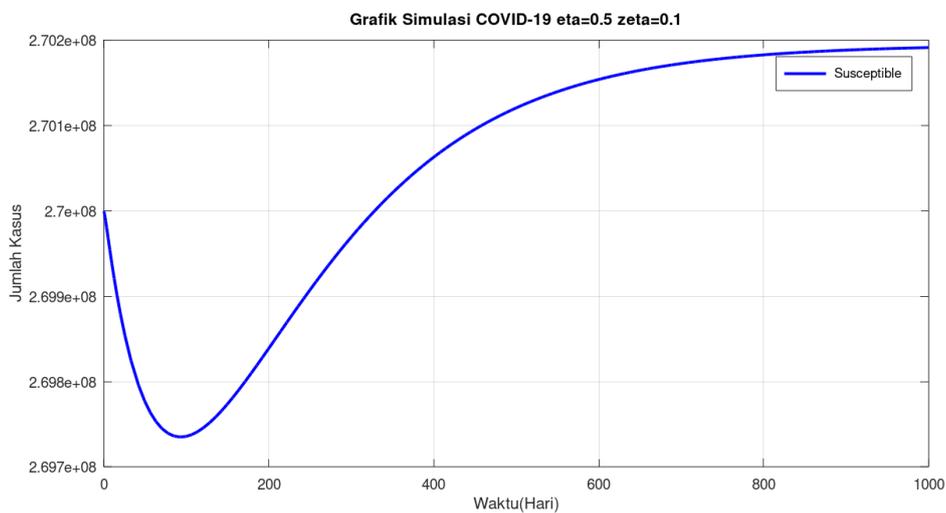
$$a_4 = 0.00001014755293 > 0$$

$$a_5 = -2.550044369 \times 10^{-7} < 0$$

Pada perhitungan di atas didapatkan bahwa syarat kelima tidak terpenuhi yaitu a_5 bernilai negatif. Artinya, dari persamaan karakteristik kestabilan titik kesetimbangan endemik terdapat nilai eigen yang bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan endemik tidak stabil. Selanjutnya akan dilakukan simulasi untuk melihat solusi yang digambarkan oleh sistem dengan menggunakan nilai awal $S(0) = 2.7 \times 10^8$; $E(0) = 79585$; $I(0) = 24836$; $H(0) = 78927$; $C(0) = 6274$; $R(0) = 9874$; $D(0) = 504$.



Gambar 4.2 Grafik Solusi E, I, H, C Ketika $R_0 < 1$



Gambar 4.3 Grafik Solusi $Susceptible$ Ketika $R_0 < 1$

Hasil simulasi pada Gambar 4.2 menunjukkan bahwa seiring bertambahnya waktu, jumlah populasi pada kompartmen individu terpapar dan belum menunjukkan gejala (E), individu terinfeksi (I), individu dirawat inap (H), dan individu kritis di ICU (C) akan menuju nol. Dari hal tersebut dapat dilihat bahwa penyakit akan menghilang dan tidak terjadi penyebaran seiring bertambahnya waktu. Dengan demikian, hasil solusi didapatkan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 jika $R_0 < 1$ sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal.

4.3.2 Simulasi Ketika $R_0 > 1$

Berdasarkan perhitungan yang dilakukan pada analisis sebelumnya, titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Sehingga pada simulasi numerik ini akan ditunjukkan simulasi yang menggambarkan kondisi tersebut. Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.1 dengan nilai parameter $\eta = 0.09$ dan $\zeta = 0.5$ maka didapatkan nilai

$$R_0 = 1.328600399 > 1.$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan yaitu

$$E_0 = (2.702 \times 10^8, 0, 0, 0, 0)$$

$$E_1 = (2.033719093 \times 10^8, 1.110101174 \times 10^6, 1.100287796 \times 10^6, 4.902325516 \times 10^6, 3.948938851 \times 10^5)$$

Berikut merupakan perhitungan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dari analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit.

- i. $a_1 = 0.68040 > 0$,
- ii. $a_1 a_2 - a_3 = 0.06583346188 > 0$,
- iii. $a_3(a_1 a_2 - a_3) - (a_1)^2 a_4 = 0.0001357799812 > 0$,
- iv. $a_4 = -0.0000712600321 < 0$.

dengan

$$a_1 = 0.68040 > 0$$

$$a_2 = 0.09905178500 > 0$$

$$a_3 = 0.00156137263 > 0$$

$$a_4 = -0.0000712600321 < 0.$$

Pada perhitungan di atas didapatkan bahwa syarat keempat tidak terpenuhi yaitu a_4 bernilai negatif. Artinya, dari persamaan karakteristik kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit terdapat nilai eigen yang bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Selanjutnya akan dilakukan perhitungan dengan kriteria Routh-Hurwitz dari analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik yaitu sebagai berikut.

- i. $a_1 = 0.688703752 > 0$,
- ii. $a_1a_2 - a_3 = 0.07437675275 > 0$,
- iii. $a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1(a_1a_4 - a_5) = 0.0003229356270 > 0$,
- iv. $(a_5)^2 + 2a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5 - (a_3)^2a_4 - (a_1)^2(a_4)^2 - a_1(a_2)^2a_5 + a_1a_2a_3a_4 = 1.019862023 \times 10^{-8} > 0$,
- v. $a_5 = 4.453752015 \times 10^{-7} > 0$.

dengan

$$a_1 = 0.688703752 > 0$$

$$a_2 = 0.1146947084 > 0$$

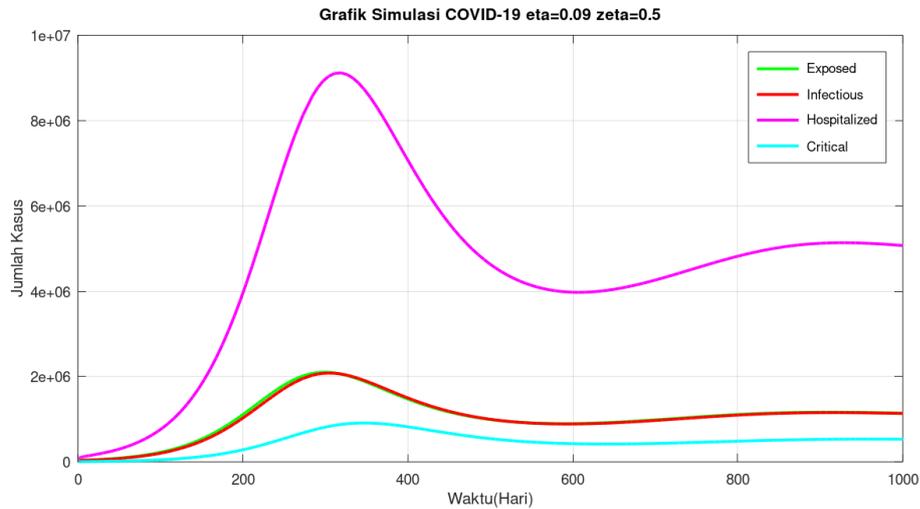
$$a_3 = 0.00461392326 > 0$$

$$a_4 = 0.00004330418983 > 0$$

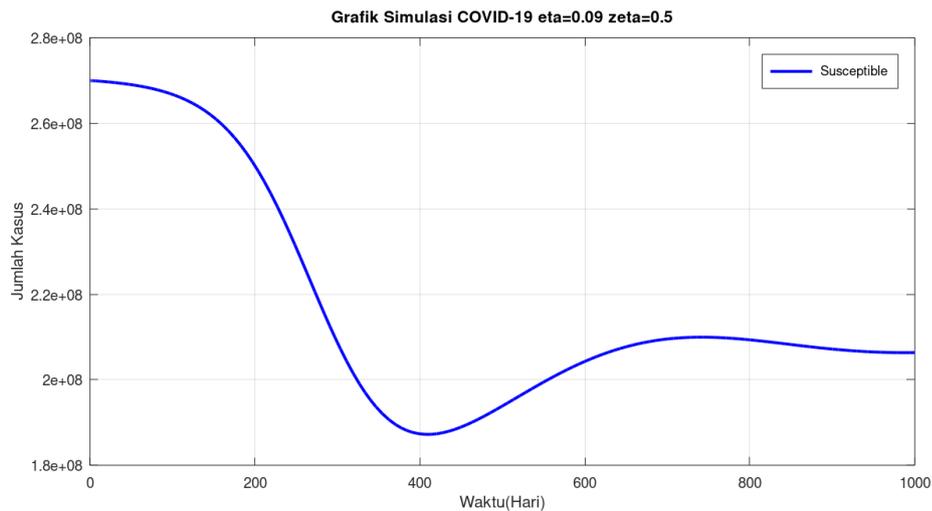
$$a_5 = 4.453752015 \times 10^{-7} > 0$$

Pada perhitungan di atas didapatkan bahwa semua nilai dari syarat i – v adalah positif. Dengan terpenuhinya kelima syarat tersebut, maka semua nilai eigen dari persamaan karakteristik titik kesetimbangan endemik bernilai negatif yang artinya titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal. Selanjutnya akan dilakukan simulasi untuk melihat solusi yang digambarkan oleh sistem dengan

menggunakan nilai awal $S(0) = 2.7 \times 10^8$; $E(0) = 79585$; $I(0) = 24836$; $H(0) = 78927$; $C(0) = 6274$; $R(0) = 9874$; $D(0) = 504$.



Gambar 4.4 Grafik Solusi E, I, H, C Ketika $R_0 > 1$



Gambar 4.5 Grafik Solusi *Susceptible* Ketika $R_0 > 1$

Hasil simulasi pada Gambar 4.4 menunjukkan bahwa seiring bertambahnya waktu, jumlah populasi pada kompartmen individu terinfeksi (I) akan menuju 1.100287796×10^6 dan individu dirawat inap (H) akan menuju 4.902325516×10^6 . Dari hal tersebut dapat dilihat bahwa penyakit akan terus ada dan terjadi penyebaran seiring bertambahnya waktu. Dengan demikian,

solusi grafik yang diperoleh jika $R_0 > 1$ adalah menuju titik kesetimbangan endemik E_1 yang artinya titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal.

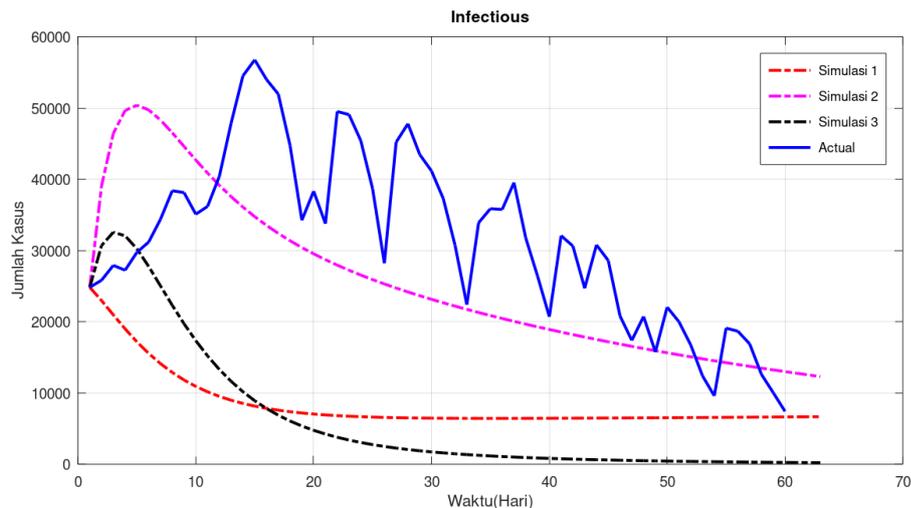
4.3.3 Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia

Waktu yang digunakan sebagai penyelesaian model Runge-Kutta orde 4 adalah selama 60 hari dari Juli-Agustus 2021 menggunakan data kasus harian, BOR-RS, dan BOR-ICU (KEMENKES, 2021). Dengan menggunakan variasi nilai parameter dari beberapa jurnal dan asumsi, maka akan dilakukan tiga simulasi dengan nilai efektivitas jaga jarak dan pengujian massal yang berbeda seperti pada Tabel 4.3

Tabel 4.3 Nilai Parameter Jaga Jarak (η) dan Pengujian Massal (ζ)

Parameter	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3
η	20%	55%	90%
ζ	90%	20%	55%

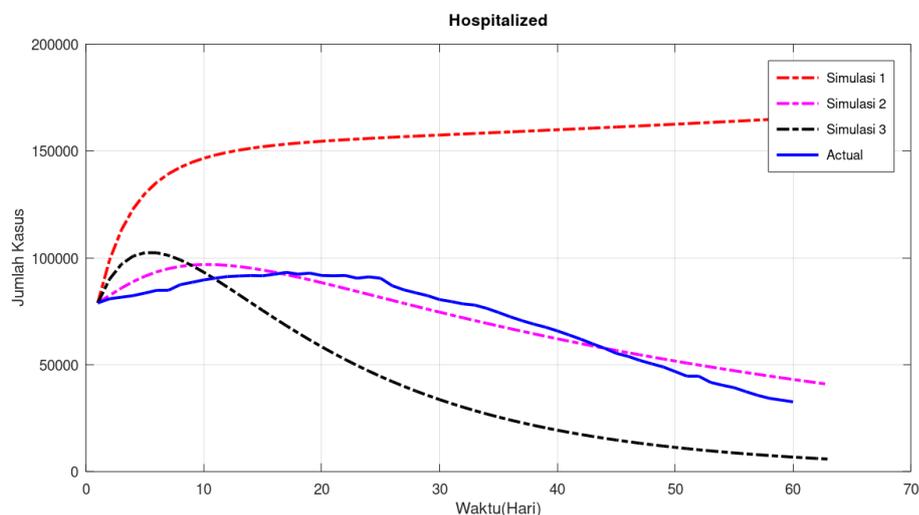
Selanjutnya akan dilakukan simulasi menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.1 dengan nilai parameter jaga jarak dan pengujian massal seperti pada Tabel 4.3 di atas. Pada simulasi pertama, diasumsikan bahwa persentase efektivitas jaga jarak adalah 20% dan pengujian massal adalah 90%, simulasi kedua persentase efektivitas jaga jarak mencapai 55% dan pengujian massal adalah 20%, dan simulasi ketiga efektivitas jaga jarak mencapai 90% dan pengujian massal adalah 55%. Berikut adalah grafik hasil simulasi beserta grafik kasus *actual* pada kelas *Infectious*, *Hospitalized*, dan *Critical*.



Gambar 4.6 Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia Kelas *Infectious*

Berdasarkan Gambar 4.6 terdapat 4 grafik penyebaran COVID-19 dengan grafik garis berwarna biru merupakan data kasus infeksi harian di Indonesia selama 60 hari mulai 01 Juli 2021. Grafik garis putus-putus berwarna merah merupakan simulasi 1 dengan persentase efektivitas jaga jarak 20% dan pengujian massal 90%. Grafik garis putus-putus berwarna merah muda adalah simulasi 2 dengan efektivitas jaga jarak 55% dan pengujian massal 20%. Simulasi ketiga adalah grafik putus-putus berwarna hitam dengan efektivitas jaga jarak 90% dan pengujian massal 55%. Dari simulasi yang ada pada kelas *Infectious* di atas, grafik yang mendekati data *actual* kasus infeksi di Indonesia adalah simulasi 2. Grafik tersebut memiliki pola yang mendekati data sebenarnya meskipun puncak pada grafik simulasi terjadi lebih awal daripada data sebenarnya. Puncak kasus infeksi yang digambarkan pada simulasi 2 terjadi sekitar hari ke 6 sedangkan pada data sebenarnya terjadi pada hari ke 15. Namun pola pada simulasi tersebut mendekati data sebenarnya yaitu terjadi puncak kasus yang kemudian melandai hingga hari ke-60. Simulasi 3 memiliki pola yang hampir sama dengan simulasi 2 namun angka kasus pada grafik tersebut

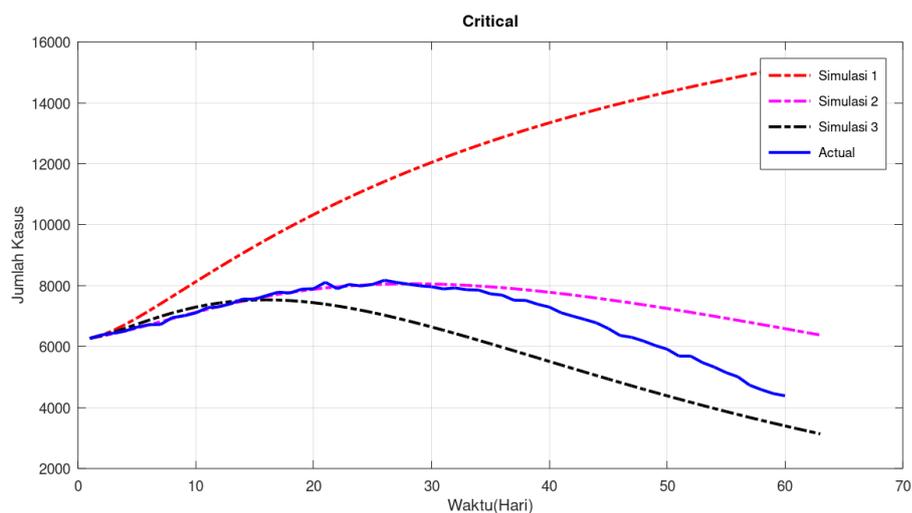
jauh di bawah data sebenarnya. Sedangkan pada simulasi 1, kasus infeksi yang digambarkan tidak mengalami puncak dan angka positif COVID-19 semakin menurun selama 60 hari ke depan.



Gambar 4.7 Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia Kelas *Hospitalized*

Pada Gambar 4.7 terdapat 4 grafik penyebaran COVID-19 dengan grafik garis berwarna biru merupakan data kasus pasien rawat inap harian di Indonesia sedangkan grafik garis putus-putus merupakan grafik hasil simulasi. Data pasien rawat inap tersebut merupakan data infeksi COVID-19 yang dirawat di rumah sakit dan diambil dari data BOR-RS Indonesia selama 60 hari mulai 01 Juli 2021. Dari hasil simulasi di atas, grafik simulasi yang mendekati data sebenarnya adalah grafik simulasi 2. Grafik tersebut memiliki pola yang mendekati data sebenarnya meskipun puncak pada grafik simulasi terjadi lebih awal daripada data sebenarnya. Pada simulasi 2, angka hunian BOR-RS tertinggi digambarkan terjadi sekitar pada hari ke-10 sedangkan pada data sebenarnya terjadi sekitar hari ke-17. Dengan terjadinya puncak lebih awal pada simulasi tersebut, maka hal itu dapat dijadikan persiapan untuk menyediakan kapasitas BOR-RS sehingga dapat mencakup pasien ketika terjadi puncak yang

sebenarnya. Pada simulasi 1 angka hunian BOR-RS yang digambarkan jauh di atas data sebenarnya dan terus terjadi kenaikan selama 60 hari ke depan. Simulasi 3 memiliki pola seperti simulasi 2 namun angka kasus yang digambarkan belum mendekati data sebenarnya.



Gambar 4.8 Simulasi Penyebaran COVID-19 di Indonesia Kelas *Critical*

Berdasarkan Gambar 4.8 terdapat 4 grafik penyebaran COVID-19 dengan grafik garis berwarna biru merupakan data hunian pasien yang mengalami kritis di Indonesia sedangkan grafik garis putus-putus merupakan grafik hasil simulasi. Data hunian pasien kritis yang digunakan diambil dari data BOR-ICU selama 60 hari mulai 01 Juli 2021. Grafik simulasi yang memiliki pola hampir sama dengan data BOR-ICU sebenarnya adalah simulasi 2 dan 3. Pada simulasi 1, angka pasien yang digambarkan terus mengalami kenaikan selama 60 hari tersebut. Grafik simulasi 2 dan simulasi 3 berada di sekitar grafik data sebenarnya namun puncak dari simulasi 3 lebih rendah dari simulasi 2. Dari kedua simulasi tersebut, grafik yang cukup mendekati data sebenarnya adalah simulasi 2 dengan puncak yang hampir sama terjadi pada hari ke-26.

Dari hasil simulasi 1, simulasi 2, dan simulasi 3, baik yang digambarkan pada kelas *Infectious*, *Hospitalized*, maupun kelas *Critical*, simulasi yang lebih mendekati data sebenarnya dari data kasus infeksi harian, BOR-RS, dan BOR-ICU adalah simulasi 2. Dari ketiga simulasi tersebut dapat dilihat bahwa grafik simulasi 2 berada cukup dekat dengan grafik *actual* dan masih berada pada rentang grafik simulasi 1 dan simulasi 3. Sehingga dari hasil tersebut dapat diketahui bahwa efektivitas jaga jarak yang dilakukan sebesar 55% dan pengujian massal sebesar 20%. Hasil dari grafik model tersebut belum bisa digunakan untuk memprediksi dengan angka yang tepat, namun pola yang digambarkan dari model cukup sesuai dengan tren yang digambarkan pada data sebenarnya di bulan Juli-Agustus 2021. Berdasarkan perbandingan dari grafik simulasi tersebut, dapat diketahui bahwa dengan meningkatkan persentase efektivitas jaga jarak dan pengujian massal, maka diperkirakan kasus infeksi harian, BOR-RS, dan BOR-ICU akan lebih cepat melandai menuju nol. Oleh sebab itu, dibutuhkan kesadaran dari masyarakat sendiri untuk disiplin dan menaati peraturan agar dapat mengurangi penambahan kasus baru. Hal itu dapat diwujudkan dengan membatasi interaksi dengan orang lain yaitu dengan tidak sering beraktivitas di luar rumah namun hanya seperlunya, menjaga jarak ketika berada di tempat umum, menjalankan protokol kesehatan, dan memakai masker saat keluar rumah.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Berdasarkan analisis dinamik yang telah dilakukan pada model SEIHCRD penyebaran penyakit COVID-19 didapatkan dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1). Dari hasil analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan ada jika $R_0 > 1$.
2. Berdasarkan hasil analisis sensitivitas diperoleh bahwa parameter jaga jarak dan pengujian massal memiliki indeks negatif, sehingga tindakan selanjutnya yang dapat dilakukan untuk membuat $R_0 < 1$ antara lain:
 - a. Mengurangi kontak individu rentan dengan terinfeksi (β_0). Misalkan dengan penggunaan masker baik bagi individu yang sehat maupun yang sakit. Penggunaan masker untuk individu yang sakit dapat mencegah penyebaran virus ke orang lain. Sedangkan individu sehat juga wajib menggunakan masker sebagai upaya perlindungan diri untuk mencegah virus dari orang lain masuk ke dalam tubuh. Selain itu, usahakan mengisolasi diri di rumah jika dirasa tubuh kurang sehat serta rajin untuk menjaga kebersihan.

- b. Mengurangi kontak individu rentan dengan di rawat inap (β_1). Misalnya membatasi orang luar yang menjenguk pasien di rumah sakit dan menerapkan prosedur operasional penanganan COVID-19 dengan ketat.
 - c. Meningkatkan pemulihan baik dari individu yang isolasi mandiri (κ) maupun rawat inap (ω) yaitu dengan menerapkan protokol isolasi dan perawatan dengan baik salah satunya dengan memastikan asupan gizi terpenuhi, serta menjaga kebersihan.
 - d. Meningkatkan parameter (η) sebagai upaya jaga jarak yaitu membatasi kerumunan, dan tidak membuat acara secara besar-besaran.
 - e. Meningkatkan parameter pengujian massal (ζ) yaitu dengan melakukan *tracing* terhadap individu-individu yang dicurigai terinfeksi maupun individu lainnya.
3. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan dengan nilai awal $S(0) = 2.7 \times 10^8$; $E(0) = 79585$; $I(0) = 24836$; $H(0) = 78927$; $C(0) = 6274$; $R(0) = 9874$; $D(0) = 504$; solusi sistem akan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit jika $R_0 < 1$ sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal. Selanjutnya dengan menggunakan parameter yang menghasilkan $R_0 > 1$, solusi sistem menuju titik kesetimbangan endemik E_1 dan titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal. Dari grafik perbandingan simulasi penyebaran COVID-19 di Indonesia bulan Juli-Agustus 2021 pada kelas *Infectious*, *Hospitalized*, dan *Critical*, didapatkan pola yang cukup mendekati tren data sebenarnya

adalah dengan melakukan jaga jarak dengan persentase sebesar 55% dan pengujian massal sebesar 20%. Jika pembatasan interaksi masyarakat terus dilakukan dengan menaikkan persentase efektivitas jaga jarak juga persentase pengujian massal, maka angka kasus harian akan lebih cepat melandai menuju nol.

5.2 Saran

Pada penelitian ini telah membahas model matematika penyebaran Covid-19 dengan 7 subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infectious*, *Hospitalized*, *Critical*, *Recovered*, dan *Dead* yang melibatkan parameter jaga jarak dan pengujian massal. Pada penelitian selanjutnya dapat ditambahkan kontrol lain contohnya vaksinasi. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan data pengujian massal yang lebih lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemahnya*. (2019). Kementrian Agama RI.
- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 Spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.
<https://doi.org/10.1016/J.CHAOS.2020.110072>
- Arofi, Z. (2021). Optimis di Tengah Pandemi: Cara Rasulullah Menyelesaikan Masalah Pandemi. *COMMUNITY EMPOWERMENT*, 6(1), 91–98.
<https://doi.org/https://doi.org/10.31603/ce.4417>
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2000). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (seventh ed).
- KEMENKES. (2021). *Rekap Tempat Tidur Covid di RS*. 1–3.
<https://www.kemkes.go.id/downloads/resources/download/Ketersediaan-Tempat-Tidur-RS-Covid19/BOR-RS-30-JUNI-2021.pdf>
- Kusumastuti, A., & Khoiron, A. M. (2019). *Metode Penelitian Kualitatif*. Lembaga Pendidikan Sukarno Pressindo Kota Semarang.
- Lynch, S. (2004). *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*. Springer Science+Business Media, LLC.
- Mbogo, R. W., & Orwa, T. O. (2021). SARS-COV-2 outbreak and control in Kenya - Mathematical model analysis. *Infectious Disease Modelling*, 6, 370–380. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2021.01.009>
- Nasicha, D. (2016). *MAKNA TABAYYUN DALAM AL-QUR'AN (Studi Perbandingan Antara Tafsir Al-Muyassar dan Tafsir Al-Misbah)*.
- Peña, J. M. (2004). Characterizations and stable tests for the Routh – Hurwitz conditions and for total positivity *6*. 393, 319–332.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2003.11.013>

Resmawan, R., & Yahya, L. (2020). Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission. *Cauchy*, 6(2), 91.
<https://doi.org/10.18860/ca.v6i2.9165>

Singh, A., & Bajpai, M. K. (2020). SEIHCRD Model for COVID-19 Spread Scenarios, Disease Predictions and Estimates the Basic Reproduction Number, Case Fatality Rate, Hospital, and ICU Beds Requirement. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 125(3), 991–1031.
<https://doi.org/10.32604/cmes.2020.012503>

LAMPIRAN

Lampiran 1 Data *Actual* Indonesia Bulan Juli-Agustus 2022

Tanggal	Infeksi Harian	BOR-RS	BOR-ICU
01/07/2021	24836	78927	6274
02/07/2021	25830	80876	6386
03/07/2021	27913	81625	6444
04/07/2021	27233	82350	6513
05/07/2021	29745	83548	6641
06/07/2021	31189	84829	6722
07/07/2021	34379	84870	6727
08/07/2021	38391	87485	6954
09/07/2021	38124	88389	7019
10/07/2021	35094	89706	7108
11/07/2021	36197	90557	7281
12/07/2021	40427	91269	7312
13/07/2021	47899	91549	7414
14/07/2021	54517	91744	7564
15/07/2021	56757	91638	7557
16/07/2021	54000	92930	7689
17/07/2021	51952	93256	7788
18/07/2021	44721	92412	7760
19/07/2021	34257	92887	7889
20/07/2021	38325	91787	7901
21/07/2021	33772	91641	8114
22/07/2021	49509	90867	8098
23/07/2021	49071	90506	8042
24/07/2021	45416	90783	8087
25/07/2021	38679	90506	8042
26/07/2021	28228	86957	8179
27/07/2021	45203	85035	8111
28/07/2021	47791	83662	8052
29/07/2021	43479	82331	7998
30/07/2021	41168	80519	7967

31/07/2021	37284	79580	7894
01/08/2021	30738	78494	7926
02/08/2021	22404	77922	7868
03/08/2021	33900	76421	7858
04/08/2021	35867	74501	7733
05/08/2021	35764	72469	7692
06/08/2021	39532	70657	7524
07/08/2021	31753	69021	7518
08/08/2021	26415	67593	7393
09/08/2021	20709	65868	7299
10/08/2021	32081	63949	7113
11/08/2021	30625	61966	7001
12/08/2021	24709	59873	6894
13/08/2021	30788	57764	6780
14/08/2021	28598	55380	6596
15/08/2021	20813	53964	6368
16/08/2021	17384	52072	6307
17/08/2021	20741	50487	6185
18/08/2021	15768	48983	6037
19/08/2021	22053	46843	5918
20/08/2021	20004	44682	5691
21/08/2021	16744	44682	5691
22/08/2021	12408	41789	5478
23/08/2021	9604	40466	5331
24/08/2021	19106	39311	5150
25/08/2021	18671	37454	5012
26/08/2021	16899	35723	4737
27/08/2021	12618	34315	4589
28/08/2021	10050	33507	4462
29/08/2021	7427	32664	4390
30/08/2021	5436	31230	4165
31/08/2021	10534	29975	4021

RIWAYAT HIDUP



Fahma Mu'jizatil Qur'ani, biasa dipanggil Fahma, lahir di Kota Malang pada tanggal 16 Maret 2001. Tinggal di Kota Malang, anak ketiga dari tiga bersaudara dari Bapak Moch. Yacoeb Effendi dan Ibu Suna'yah, serta merupakan adik bungsu dari Aprilia Ningsih dan Dewi Meilisa. Penulis menempuh pendidikan dasar di SDN Jatimulyo 3 dan lulus pada tahun 2013. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 4 Malang hingga tahun 2016. Setelah itu penulis melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 9 Malang dan lulus pada tahun 2018. Penulis melanjutkan pendidikan yang lebih tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil Program Studi Matematika. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis mengikuti beberapa kegiatan seperti menjadi pengurus HMJ "Integral" Matematika, dan pengurus *Mathematics English Club*. Penulis juga dipercayai untuk menjadi asisten laboratorium mata kuliah Praktikum Pemodelan Matematika pada tahun 2021. Di luar kampus sendiri penulis mengikuti kegiatan seperti seminar, *volunteer*, dan juga kursus online.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No 50 Dinoyo Malang Telp. / Fax: (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fahma Mu'jizatul Qur'ani
NIM : 18610060
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Susceptible-Exposed-Infectious-Hospitalized-Critical-Recovered-Dead* (SEIHCRD) pada Penyebaran COVID-19
Pembimbing I : Dr. Hani Widayani, M.Si
Pembimbing II : Dr. Ely Susanti, M.Sc.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Januari 2022	Konsultasi BAB I, II	1.
2.	20 Januari 2022	Konsultasi BAB I, II	2.
3.	23 Januari 2022	Revisi BAB I, II	3.
4.	03 Februari 2022	Revisi BAB II (Kajian Agama dan Topik)	4.
5.	10 Februari 2022	ACC BAB I, II	5.
6.	16 Februari 2022	Konsultasi BAB III	6.
7.	01 Maret 2022	ACC BAB I, II, III	7.
8.	16 Maret 2022	Konsultasi BAB IV	8.
9.	06 April 2022	Revisi BAB II, III & Konsultasi BAB IV	9.
10.	07 April 2022	Konsultasi Kajian Agama	10.
11.	01 Mei 2022	Konsultasi BAB IV, V	11.
12.	20 Mei 2022	ACC BAB IV, V	12.
13.	31 Mei 2022	Revisi BAB I, II	13.
14.	09 Juni 2022	ACC seluruh BAB	14.

Malang, 20 Juni 2022

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Ely Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP.197411292000122005