ORTOGONALITAS-*D* PADA RUANG NORM-2 BAKU

SKRIPSI

OLEH
KIRANIA RAMARA INSANI
NIM. 18610014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ORTOGONALITAS-*D* PADA RUANG NORM-2 BAKU

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
KIRANIA RAMARA INSANI
NIM. 18610014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ORTOGONALITAS-*D* PADA RUANG NORM-2 BAKU

SKRIPSI

Oleh
Kirania Ramara Insani
NIM. 18610014

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 21 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19741129 200012 2 005	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ORTOGONALITAS-*D* PADA RUANG NORM-2 BAKU

SKRIPSI

Oleh
Kirania Ramara Insani
NIM. 18610014

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 Juni 2022

Ketua Penguji	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Anggota Penguji 1	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc	....
Anggota Penguji 3	: Fachrur Rozi, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

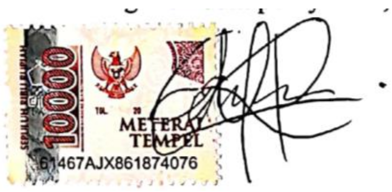
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Kirania Ramara Insani
NIM	: 18610014
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Ortogonalitas-*D* Pada Ruang Norm-2 Baku

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,



Kirania Ramara Insani
NIM.18610014

MOTO

سمعنا واطعنا

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah Mas'ud Ramli dan Ibu Hustaniah, yang selalu mendo'akan untuk kesuksesan serta kelancaran dalam penulisan skripsi ini serta yang menjadi alasan kuat penulis untuk terus berjuang menggapai mimpi. Limpahan kasih sayang yang tak pernah putus diberikan kepada penulis sebagai sumber semangat. Adik tercinta, Iqiyaz Rania Insani dan Raziq Afhamdu Ijtihad Ramli yang selalu mengirimkan dukungan dan semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Ucapan syukur dihaturkan kepada Allah Yang Maha Esa yang memberikan karunia berupa informasi, nafas kehidupan, kesejahteraan dan motivasi berfikir sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku dengan baik. Sholawat tak lupa dihaturkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menerangi umat Islam dari zaman jahiliyah menuju zaman terang, yakni Addiynul Islam.

Adanya skripsi ini bertujuan untuk memenuhi tugas akhir Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis memahami bahwa masih terdapat kekurangan dalam proses penelitian dan penyusunan, oleh karena itu dengan hormat penulis menghaturkan terima kasih untuk setiap individu yang selalu memberikan perubahan. Apresiasi ditujukan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat serta motivasi untuk penulis menyelesaikan skripsi ini.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang juga telah memberikan arahan serta bimbingan kepada peneliti.

6. Intan Nisfulaila, M.Si, selaku dosen penguji utama dalam ujian skripsi yang telah banyak memberikan masukan kepada penulis.
7. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah banyak membantu penulis dalam pemberian masukan serta arahan untuk menyelesaikan skripsi.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
9. Ibu, ayah dan adik-adik penulis yang selalu memberikan semangat, motivasi dan doa untuk kelancaran penyelesaian skripsi ini.
10. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018 yang sama-sama berjuang menuju kesuksesan.
11. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Malang, 22 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini yaitu:

$<$	: Kurang dari
$>$	: Lebih dari
$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	: Lebih dari atau sama dengan
$+$	: Penjumlahan pada vektor
$\oplus$	: Penjumlahan pada skalar
.	: Perkalian pada vektor
$*$	: Perkalian pada skalar
$\forall$	: Untuk setiap
ε	: Epsilon
α	: Alpha
β	: Beta
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan Asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan Riil
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan Kompleks
$\in$	: Elemen dari himpunan
Σ	: Sigma
$\boldsymbol{x}$	: Vektor *x*
$\lvert x\rvert$	: Mutlak *x*
(X, d)	: Ruang metrik
$\lVert\cdot\rVert$	: Norm

$\|\cdot,\cdot\|$	: Norm-2
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	: Hasil kali dalam
$\langle x_n\rangle$	: Suatu barisan
$\perp$	: Ortogonalitas
$\perp_{\boldsymbol{p}}$	: Ortogonalitas-*P*
$\perp_{\boldsymbol{I}}$	: Ortogonalitas-*I*
$\perp_{\boldsymbol{BJ}}$	: Ortogonalitas-*BJ*
$\perp_{\boldsymbol{D}}$	: Ortogonalitas-*D*
$\perp_{\boldsymbol{g}}$	: Ortogonalitas-*g*
$\perp_{\boldsymbol{b}}$	: Ortogonalitas-*b*

ABSTRAK

Insani, Kirania Ramara. 2022. **Ortogonalitas-*D* pada Ruang Norm-2 Baku**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: *Ruang Vektor, Ruang Bernorma, Ruang Bernorma-2, Ruang Hasil Kali Dalam, dan Ortogonalitas.*

Terdapat konsep yang diterapkan dalam ruang hasil kali dalam, yaitu ortogonalitas yang dikarenakan ortogonalitas berkaitan dengan besar sudut antar dua vektor. Diberikan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ yang memenuhi $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ pada ruang hasil kali dalam, maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ dikatakan ortogonal. Terdapat beberapa ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam, yaitu ortogonalitas-*P*, ortogonalitas-*I*, ortogonalitas-*BJ*, ortogonalitas-*g*, ortogonalitas-*D* dan ortogonalitas-*b*. Penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Hendra Gunawan dkk (2005), dimana penelitian tersebut memaparkan bahwa terdapat pemetaan pada ruang norm-2 dimana untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ didefinisikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$ memenuhi sifat-sifat ruang norm-2 serta ortogonalitas-*D* memenuhi beberapa sifat dasar ortogonalitas pada ruang norm-2, namun tidak dilakukan pembuktian secara rinci mengenai hal tersebut. Penelitian ini dilakukan untuk membuktikan pemaparan yang dilakukan oleh Hendra Gunawan dkk. secara lebih rinci. Langkah pertama yaitu melakukan pembuktian bahwa pemetaan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$ memenuhi sifat-sifat norm-2. Selanjutnya melakukan pembuktian bahwa ortogonalitas-*D* memenuhi beberapa sifat dasar ortogonalitas pada norm-2 baku. Berdasarkan pembuktian tersebut diperoleh bahwa pemetaan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$ memenuhi sifat-sifat norm-2 serta ortogonalitas-*D* memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, homogen dan kontinuitas pada norm-2 baku.

ABSTRACT

Insani, Kirania Ramara. 2022. ***D*-Orthogonality in Standard Norm-2 Space**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Vector Space, Normed Space, 2-Normed Space, Inner Product Space, and Orthogonality.

There is a concept that is applied to the inner product space, namely orthogonality because orthogonality is related to the angle between two vectors. Given that $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ satisfies $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ in the inner product space, then $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ is said to be orthogonal. There are several orthogonalities in the inner product space, namely *P*-orthogonality, *I*-orthogonality, *BJ*-orthogonality, *g*-orthogonality, *D*-orthogonality and *b*-orthogonality. Previous research has been carried out by Hendra Gunawan et al, in which the study explained that there is a mapping in the norm-2 space where for each $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ defined $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\boldsymbol{1/2}}$ satisfies the properties of a norm-2 space and *D*-orthogonality fulfills some basic properties of orthogonality in a norm-2 space, but no detailed proof has been carried out on this. This research was conducted to prove the explanation made by Hendra Gunawan et al. in more detail. The first step is to prove that the mapping $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\boldsymbol{1/2}}$ satisfies the properties of norm-2. Next, proving that the *D*-orthogonality satisfies some basic properties of orthogonality in the standard norm-2. Based on this evidence, it is found that the mapping $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\boldsymbol{1/2}}$ fulfills the properties of norm-2 and *D*-orthogonality satisfies the properties of non-degeneration, symmetry, homogeneity and continuity in the standard norm-2.

مستخلص البحث

إنساني، كيرانيا رامارا. ٢.٢٢. **متعامد-د على محل معيار-٢ الفصيح**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) الدكتورة، إيلي سوسانتي، الماجستير، المشرف (٢) فخر الرازي، الماجستير

الكلمات الأساسية: محل الكمية، محل المعيار، محل معيار-٢، محل نتائج المضاعفة الداخلية، والمتعامد (*ortogonalitas*)

إن فى محل نتائج المضاعفة الداخلية فكرة مطبقة وهي المتعامد (*ortogonalitas*)حيث أنه متعلق بكبير الزوية بين الكميتين. وإذا قدم$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$الذي يستوفي$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ فى محل نتائج المضاعفة الداخلية، فيعتبر أن $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ متعامد. وهناك بعض المتعامدات فى محل نتائج المضاعفة الداخلية وهي متعامد-ف (*ortogonalitas-P*)، متعامد-أ (*ortogonalitas-I*)، متعامد ب.ج (*ortogonalitas-BJ*)، متعامد-غ (*ortogonalitas-g*)، متعامد-د (*ortogonalitas-D*)، ومتعامد-ب (*ortogonalitas*-b). وقام هيندرا غوناوان وأخرون بالبحث العلمي حيث كانت نتيجة ذلك البحث دلت على وجود الوضع على معيار-٢ حيث لكل $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ معرفة$\|x, y\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{١/٢}$ يستوفي موصفات معيار-٢ ومع متعامد-د يستوفي بعض الموصفات الأساسية من المتعامد على محل المعيار-2، ولكن، ما أجري فيه التحقيق التفصيلي عن تلك الأمور. فإجراء هذا البحث العلمي هو لتحقيق التوضيح الذي عرضه هيندرا غوناوان وأخرون تفصيليا. الخطوة الأولى هي إجراء التحقيق على أن وضع $\|x, y\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{١/٢}$يستوفي موصفات معيار-٢. وبالتالي، إجراء التحقيق على أن متعامد-د يستوفي بعض المصفات الأساسية من المتعامد على معيار-٢ الفصيح. وانطلاقا من ذلك التحقيق يحصل أن وضع $\|x, y\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{١/٢}$يستوفي بعض موصفات معيار-٢ ومع متعامد-د يستوفي صفات غير الانحلال، التماثل، التشابه، الاستمرار على معيار-٢ الفصيح.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang vektor yaitu persepsi yang mendasari ruang bernorma dan ruang hasil kali dalam. Ruang bernorma secara umum merupakan suatu ruang vektor. Ruang vektor (*vector space*) atas lapangan (*field*) $\mathbb{R}$ merupakan himpunan tak kosong V yang dilengkapi dua fungsi, yaitu fungsi dari $V \times V$ ke Vdan fungsi dari $\mathbb{R} \times V$ ke V, yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan $\alpha\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{V}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, serta memenuhi sifat-sifat ruang vektor yaitu sifat komutatif penjumlahan, asosiatif penjumlahan, identitas penjumlahan, invers penjumlahan, asosiatif perkalian dan distributif perkalian pada penjumlahan (Rynne & Youngson, 2008).

Pada dasarnya, secara umum pengambilan konsep dalam ruang bernorma dan ruang hasil kali dalam memiliki kesamaan. Kedua jenis ruang tersebut merupakan ruang vektor namun memiliki fungsi serta sifat yang berbeda untuk melengkapi tiap konsep pada tiap ruang. Suatu ruang vektor yang memiliki fungsi norma serta memenuhi sifat-sifat ruang bernorma disebut ruang bernorma. Konsep ortogonalitas terdapat pada ruang hasil kali dalam, dimana ortogonalitas menunjukkan konsep bahwa terdapat vektor-vektor yang ada di dalamnya merupakan ortogonal.

Konsep ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam termotivasi dari sudut yang terbentuk antara dua vektor di $\mathbb{R}^2$. Jika digambarkan secara geometri pada dimensi-2, konsep ortogonal akan menghasilkan dua vektor yang membentuk garis tegak lurus. Dua vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ pada ruang hasil kali dalam dikatakan ortogonal apabila $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ (Anton & Rorres, 2004). Dalam al-Qur'an terdapat konsep ortogonalitas yang dapat diandaikan seperti dua vektor yang membentuk sudut tegak lurus. Secara tersirat ayat al-Qur'an yang memaparkan perihal tersebut adalah surat Qashash (28) ayat 77 yang berbunyi:

وَابْتَغِ فِيْمَا اٰتٰىكَ اللّٰهُ الدَّارَ الْاٰخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيْبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَاَحْسِنْ كَمَا اَحْسَنَ اللّٰهُ اِلَيْكَ
وَلَا تَبْغِ الْفَسَادَ فِى الْاَرْضِ ۗاِنَّ اللّٰهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِيْنَ

Artinya: *"Dan, carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah kepadamu (pahala) negeri akhirat, tetapi janganlah kamu lupakan bagianmu di dunia. Berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik kepadamu dan janganlah kamu berbuat kerusakan di bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan"*

Al-Qur'an surat Qashash (28) ayat 77, disebutkan bahwa manusia diperintahkan untuk berupaya berbuat baik dengan harta benda yang telah dianugerahkan oleh Allah SWT dengan menafkahkannya di jalan ketaatan (*hablumminallah*) serta bersedekah kepada orang lain sebagaimana Allah telah berbuat baik kepadamu (*hablumminannas*). Sehingga dapat diandaikan bahwa hubungan manusia dengan Allah SWT (*hablumminallah*) sebagai garis vertikal, dan hubungan antar manusia (*hablumminannas*) sebagai garis horizontal.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Nursupiamin (2013) mengkaji mengenai ortogonalitas di ruang bernorma, yang melakukan pembuktian ortogonalitas pada ruang bernorma menggunakan sifat-sifat dasar ortogonalitas. Penelitian tersebut menggunakan ortogonalitas-*BJ*, ortogonalitas-*I*, ortogonalitas-*P* serta ortogonalitas-*D*.

Muh Nur (2016) juga melakukan penelitian mengenai ortogonalitas pada ruang norm-2 dengan judul "*Ortogonalitas-P di Ruang Norm-2*". Penelitiannya membuktikan bahwa terpenuhinya empat sifat pada ortogonalitas-*P* yaitu nondegenerasi, simetri, kontinuitas dan resolvabilitas serta berlakunya ortogonalitas-*I* dan ortogonalitas-*BJ* di ruang norm-2. Penelitian tersebut juga menunjukkan ruang norm-2 juga ruang hasil kali dalam-2.

Penelitian mengenai beberapa konsep ortogonalitas di ruang norm juga dilakukan oleh Gunawan dkk (2005). Dalam penelitian tersebut, Gunawan dkk. memaparkan bahwa terdapat pemetaan pada ruang norm-2 dimana untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ didefinisikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$ memenuhi sifat-sifat ruang norm-2. Namun pada penelitian tersebut tidak dipaparkan pembuktian bahwa pemetaan tersebut memenuhi sifat-sifat pada ruang norm-2.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, penulis terinspirasi untuk melanjutkan penelitian mengenai ortogonalitas pada ruang norm-2 baku. Dalam hal ini, penulis akan membuktikan pemetaan yang diutarakan oleh Gunawan dkk. memenuhi sifat-sifat ruang norm-2 serta melakukan pembuktian ortogonalitas-*D* memenuhi beberapa sifat dasar ortogonalitas pada ruang norm-2 baku. Sehingga penelitian ini berjudul "**Ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku**".

1.2 Rumusan Masalah

Berlandaskan latar belakang yang telah dijabarkan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bukti bahwa fungsi $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$ merupakan norm-2?
2. Sifat dasar ortogonalitas apa saja yang memenuhi ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan diadakannya penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menunjukka bahwa fungsi $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$ merupakan norm-2
2. Untuk mengetahui sifat dasar ortogonalitas apa saja yang memenuhi ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun terdapat beberapa manfaat dalam penelitian ini, yaitu:

1. Manfaat bagi penulis

   Pada penelitian ini, penulis menambah serta memperdalam ilmu matematika yang telah dipelajari serta mengembangkan wawasan ilmu pengetahuan dan cara berfikir terutama mengenai analisis.

2. Manfaat bagi instansi

   Manfaat yang diperoleh oleh instansi dalam penelitian ini yaitu dapat digunakan sebagai acuan atau referensi pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Manfaat bagi pembaca

   Pembaca dapat menggunakan penelitian ini sebagai sumber referensi, informasi serta dapat menambah wawasan keilmuan mengenai ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Pendefinisian ortogonalitas-*D* hanya pada norm-2 baku
2. Kajian integrasi ortogonalitas hanya berlandaskan pada Al-Qur'an

1.6 Definisi Istilah

Untuk menghindari ketidak tepatan penafsiran pada penelitian ini, maka penulis perlu menjelaskan terlebih dahulu pembatasan istilah sebagai berikut:

1. Ortogonalitas

   Konsep ortogonalitas terdapat pada ruang hasil kali dalam (Nursupiamin, 2013). Pada penelitian ini, hanya menggunakan definisi ortogonalitas-*D* yang didefinisikan pada norm-2.

2. Ruang norm-2 baku

   Pendefinisian pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$ pada ruang norm-2 didefinisikan sebagai berikut:

   $$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\mathbf{1/2}}$$

   Sehingga pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$ disebut sebagai norm-2 baku.

3. Ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku

   Pada penelitian ini, akan dibuktikan ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku memenuhi sifat-sifat norm serta beberapa sifat dasar ortogonalitas.

4. Ortogonalitas pada al-Qur'an

   Integrasi konsep ortogonalitas pada al-Qur'an dengan menggunakan konsep umum ortogonal, yaitu suatu vektor dikatakan ortogonal apabila hasil kali dalam kedua vektor tersebut sama dengan nol.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ruang Vektor (*Vector Space*)

Definisi 2.1

Ruang vektor (vector space) atas lapangan (field) F merupakan himpunan tak kosong V yang memiliki dua fungsi, yaitu fungsi dari $V \times V$ *ke* V *dan fungsi dari* $F \times V$ *ke V, yang ditandai dengan* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ *dan* $\alpha\boldsymbol{x}$*, untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ *dan* $\alpha \in F$*, sedemikian hingga untuk setiap* $\alpha, \beta \in F$ *dan* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ *berlaku:*

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ *(komutatif penjumlahan)*
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ *(asosiatif penjumlahan)*
3. *Terdapat elemen* $\boldsymbol{0} \in V$*, sedemikian hingga berlaku* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ *(identitas penjumlahan)*
4. *Terdapat elemen* $-\boldsymbol{x} \in V$*, sedemikian hingga berlaku* $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ *(invers penjumlahan)*
5. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ *(invers perkalian)*
6. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ *(asosiatif perkalian)*
7. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ *dan* *(distributif perkalian)*
   $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$

Jika $F = \mathbb{R}$ *serta* $F = \mathbb{C}$ *maka V dikatakan ruang vektor Riil dan ruang vektor kompleks. Maka elemen F merupakan skalar, serta elemen V merupakan vektor. Operasi penjumalahan* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ *dikatakan sebagai penjumlahan vektor (vector addition), sedangkan operasi perkalian dari* $\alpha\boldsymbol{x}$ *dikatakan sebagai perkalian skalar* (*scalar multiplication*) (Rynne & Youngson, 2008).

Contoh 2.1

Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}^3$ merupakan ruang vektor.

Penyelesaian:

1. Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ dan $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, i_3)$,

   Akan dibuktikan $\boldsymbol{g} + \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{g}$

   $\boldsymbol{g} + \boldsymbol{i} = (g_1, g_2, g_3) + (i_1, i_2, i_3)$

   $= (g_1 + i_1, g_2 + i_2, g_3 + i_3)$

   $= (i_1 + g_1, i_2 + g_2, i_3 + g_3)$ (Definisi 2.1 bagian 1)

   $= (i_1, i_2, i_3) + (g_1, g_2, g_3)$

   $= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{g}$

2. Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}, \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$, $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, i_3)$ dan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$,

   Akan dibuktikan $(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} + (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{w})$

   $(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{w} = \big((g_1, g_2, g_3) + (i_1, i_2, i_3)\big) + (w_1, w_2, w_3)$

   $= \big((g_1 + i_1, g_2 + i_2, g_3 + i_3)\big) + (w_1, w_2, w_3)$

   $= \big((g_1 + i_1) + w_1, (g_2 + i_2) + w_2, (g_3 + i_3) + w_3\big)$

   $= \big(g_1 + (i_1 + w_1), g_2 + (i_2 + w_2),\ g_3 + (i_3 + w_3)\big)$

   $= (g_1, g_2, g_3) + (i_1 + w_1, i_2 + w_2, i_3 + w_3)$

   $= (g_1, g_2, g_3) + \big((i_1, i_2, i_3) + (w_1, w_2, w_3)\big)$

   $= \boldsymbol{g} + (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{w})$

3. Akan dibuktikan terdapat elemen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, pilih $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

   Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$, sedemikian hingga berlaku $\boldsymbol{g} + \mathbf{0} = \boldsymbol{g}$,

$\boldsymbol{g} + \mathbf{0} = (g_1, g_2, g_3) + (0, 0, 0)$

$= (0 + g_1, 0 + g_2, 0 + g_3)$ (Operasi penjumlahan)

$= (g_1, g_2, g_3)$

$= \boldsymbol{g}$

4. Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ dan pilih $-\boldsymbol{g} = (-g_1, -g_2, -g_3) \in \mathbb{R}^3$,

   Akan dibuktikan elemen $-\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$, berlaku $\boldsymbol{g} + (-\boldsymbol{g}) = \mathbf{0}$

   $\boldsymbol{g} + (-\boldsymbol{g}) = (g_1, g_2, g_3) + (-g_1, -g_2, -g_3)$

   $= \big(g_1 + (-g_1), g_2 + (-\,g_2), g_3 + (-g_3)\big)$

   $= (g_1 - g_1, g_2 - g_2, g_3 - g_3)$

   $= (0{,}0{,}0)$

   $= \mathbf{0}$

5. Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$,

   Akan dibuktikan $1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$

   $1\boldsymbol{w} = 1(w_1, w_2, w_3)$

   $= (1w_1, 1w_2, 1w_3)$

   $= (w_1, w_2, w_3)$

   $= \boldsymbol{w}$

6. Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{i} \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, i_3)$, dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

   Akan dibuktikan $\alpha(\beta\boldsymbol{i}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{i}$

   $\alpha(\beta\boldsymbol{i}) = \alpha\big(\beta(i_1, i_2, i_3)\big)$

   $= \alpha\big((\beta i_1, \beta i_2, \beta i_3)\big)$

   $= \big(\alpha(\beta i_1), \alpha(\beta i_2), \alpha(\beta i_3)\big)$

$= \big((\alpha\beta)i_1, (\alpha\beta)i_2, (\alpha\beta)i_3\big)$

$= (\alpha\beta)(i_1, i_2, i_3)$

$= (\alpha\beta)\boldsymbol{i}$

7. Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ dan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

   Akan dibuktikan $(\alpha + \beta)\boldsymbol{g} = \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{g}$ dan $\alpha(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{g} + \alpha\boldsymbol{w}$

   $(\alpha + \beta)\boldsymbol{g} = (\alpha + \beta)(g_1, g_2, g_3)$

   $= \big((\alpha + \beta)g_1, (\alpha + \beta)g_2, (\alpha + \beta)g_3\big)$

   $= (\alpha g_1 + \beta g_1, \alpha g_2 + \beta g_2, \alpha g_3 + \beta g_3)$

   $= (\alpha g_1, \alpha g_2, \alpha g_3) + (\beta g_1, \beta g_2, \beta g_3)$

   $= \alpha(g_1, g_2, g_3) + \beta(g_1, g_2, g_3)$

   $= \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{g}$

   dan

   $\alpha(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{w}) = \alpha\big((g_1, g_2, g_3) + (w_1, w_2, w_3)\big)$

   $= \alpha(g_1 + w_1, g_2 + w_2, g_3 + w_3)$

   $= \big(\alpha(g_1 + w_1), \alpha(g_2 + w_2), \alpha(g_3 + w_3)\big)$

   $= (\alpha g_1 + \alpha w_1, \alpha g_2 + \alpha w_2, \alpha g_3 + \alpha w_3)$

   $= (\alpha g_1, \alpha g_2, \alpha g_3 + \alpha w_1, \alpha w_2, \alpha w_3)$

   $= \big(\alpha(g_1, g_2, g_3) + \alpha(w_1, w_2, w_3)\big)$

   $= \big(\alpha(\boldsymbol{g}) + \alpha(\boldsymbol{w})\big)$

   $= \alpha(\boldsymbol{g}) + \alpha(\boldsymbol{w})$

Teorema 2.1

Misalkan V adalah suatu ruang vektor. Diberikan suatu vektor $\boldsymbol{e}$ *anggota V dan k skalar, maka akan berlaku sifat-sifat berikut* (Anton & Rorres, 2004):

1. $0\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$
2. $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
3. $-1(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{e}$
4. *Jika* $k\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ *maka* $k = 0$ *atau* $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$

Bukti:

1. Perhatikan bahwa untuk $0 \in \mathbb{R}$ berlaku

   $0\boldsymbol{e} = (0 + 0)\boldsymbol{e}$

   $= 0\boldsymbol{e} + 0\boldsymbol{e}$

   sehingga diperoleh

   $0\boldsymbol{e} = (0\boldsymbol{e} + 0\boldsymbol{e})$

   $0\boldsymbol{e} + (-0\boldsymbol{e}) = (0\boldsymbol{e} + 0\boldsymbol{e}) + (-0\boldsymbol{e})$ (Definisi 2.1 bagian 4)

   $0\boldsymbol{e} + (-0\boldsymbol{e}) = 0\boldsymbol{e} + (0\boldsymbol{e} + (-0\boldsymbol{e}))$ (Definisi 2.1 bagian 2)

   $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{0}$ (Definisi 2.1 bagian 4)

   $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{e}$ (Definisi 2.1 bagian 3)

   Terbukti bahwa $0\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$.

2. Akan dibuktikan $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

   $k\boldsymbol{0} = k\,(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0})$

   $= k\boldsymbol{0} + k\boldsymbol{0}$

   sehingga berlaku

   $k\boldsymbol{0} = (k\boldsymbol{0} + k\boldsymbol{0})$

$k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0}) = (k\mathbf{0} + k\mathbf{0}) + (-k\mathbf{0})$ (Definisi 2.1 bagian 4)

$k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0}) = k\mathbf{0} + (k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0}))$ (Definisi 2.1 bagian 2)

$\mathbf{0} = k\mathbf{0} + \mathbf{0}$ (Definisi 2.1 bagian 4)

$\mathbf{0} = k\mathbf{0}$ (Definisi 2.1 bagian 3)

Terbukti bahwa $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3. Akan dibuktikan $-1(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{e}$

$-1(\boldsymbol{e}) = -1(\boldsymbol{e}) + \mathbf{0}$ (Definisi 2.1 bagian 3)

$= -1(\boldsymbol{e}) + \big(\boldsymbol{e} + (-\boldsymbol{e})\big)$ (Definisi 2.1 bagian 4)

$= \Big(\big(-1(\boldsymbol{e})\big) + \boldsymbol{e}\Big) + (-\boldsymbol{e})$ (Definisi 2.1 bagian 2)

$= \Big(\big(-1(\boldsymbol{e})\big) + (1)\boldsymbol{e}\Big) + (-\boldsymbol{e})$ (Definisi 2.1 bagian 5)

$= \boldsymbol{e}\big((-1) + 1\big) + (-\boldsymbol{e})$ (Definisi 2.1 bagian 7)

$= \boldsymbol{e}(0) + (-\boldsymbol{e})$ (Definisi 2.1 bagian 4)

$= \mathbf{0} + (-\boldsymbol{e})$ (Perkalian 0)

$= -\boldsymbol{e}$ (Definisi 2.1 bagian 3)

Terbukti bahwa $-1(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{e}$.

4. Akan dibuktikan apabila $k\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ maka $k = 0$ atau $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$

Asumsikan $k \neq 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$

Karena $k \neq 0$, maka terdapat $k - 1 \in \mathbb{R}$, sehingga diperoleh

$k\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$

$(k-1)(k\boldsymbol{e}) = (k-1)\mathbf{0}$ (Kedua ruas dikalikan dengan $(k-1)$)

$((k-1)k)\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ (Definisi 2.1 bagian 6)

$(k^2 - k)\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\mathbf{0}}{(k^2 - k)}$$

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{0} \qquad \text{(Pembagian 0)}$$

2.1.2 Ruang Metrik (*Metric Space*)

Definisi 2.2

Ruang metrik didefinisikan sebagai pasangan (X, d), *dimana* X *merupakan suatu himpunan tak kosong serta* d *merupakan metrik di* X *dengan domain* $X \times X$ *dimana untuk semua* $x, y, z \in X$ *memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:*

1. $d(x, y) \geq 0$, *untuk semua* $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0, \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$, *untuk semua* $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *untuk semua* $x, y, z \in X$ *(Ketaksamaan segitiga)* (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.2

Terdapat ruang metrik (X, d) dengan $(X, d) = (\mathbb{R}, d)$ dimana d didefinisikan sebagai $d(g, w) = |g - w|$ untuk setiap $g, w \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan (X, d) merupakan ruang metrik!

Penyelesaian:

1. Akan dibuktikan $d(g, w) \geq 0$

   Ambil sebarang $g, w \in \mathbb{R}$

   $d(g, w) = |g - w| \geq 0$ (teorema nilai mutlak pada $\mathbb{R}$)

   Sehingga terbukti bahwa $d(g, w) \geq 0$

2. Akan dibuktikan $d(g, w) = 0 \Leftrightarrow g = w$

   Ambil sebarang $g, w \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow) d(g,w) = 0$

$|g - w| = 0$

$g - w = 0$

$g = w$

$\Longleftarrow)\ g = w$

Karena $g = w$ maka diperoleh

$d(g,w) = d(g,g)$

$= |g - g|$

$= |0 - 0|$

$= |0|$

$= 0$

3. Akan dibuktikan $d(g,w) = d(w,g)$

$d(g,w) = |g - w| = |g + (-w)|$ (definisi *substraction*)

$= |(-w) + g|$ (komutatif penjumlahan)

$= |w - g|$ (dikalikan dengan (-1))

$= d(w,g)$

4. Akan dibuktikan $d(g,w) \leq d(g,l) + d(l,w)$,

$d(g,w) = |g - w|$

$= |(g + (-l)) + (l + (-w)|$

$\leq |g + (-l)| + |l + (-w)|$

$= |g - l| + |l - w|$

$= d(g,l) + d(l,w)$

Sehingga terbukti bahwa $d(g,w) \leq d(g,l) + d(l,w)$

Dikarenakan semua syarat terpenuhi, terbukti bahwa $d(g,w) = |g - w|$ merupakan ruang metrik.

2.1.3 Bebas Linier

Suatu himpunan vektor dapat dikatakan bebas linier apabila memenuhi definisi sebagai berikut:

Definisi 2.3

Jika diberikan $Z = \{\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3}, \dots, \boldsymbol{z_n}\}$ *himpunan tak kosong pada ruang vektor* V*. Himpunan Z dikatakan bebas linier apabila persamaan*

$$e_1\boldsymbol{z_1} + e_2\boldsymbol{z_2} + e_3\,\boldsymbol{z_3} + \dots + e_n\boldsymbol{z_n} = 0$$

dengan $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}$ *berakibat* $e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 0, \dots, e_n = 0$. *Jika salah satu* $e_i \neq 0$, *maka Z dikatakan bergantung linier* (Anton & Rorres, 2013).

Contoh dari dua vektor yang bebas linier adalah jika terdapat $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ dikatakan bebas linier apabila $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = 0$, yang mengakibatkan $\alpha = \beta = 0$. Serta dikatakan bergantung linier apabila $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = 0$, yang mengakibatkan $\alpha \neq 0$ atau $\beta \neq 0$.

2.1.4 Determinan

Determinan suatu matriks dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.4

Jika A *merupakan matriks* $n \times n$ *maka jumlah yang diperoleh dari mengalikan setiap entri pada baris atau kolom pada* A *dengan kofaktor yang sesuai serta menambahkan hasil dari perkalian tiap entri disebut determinan* A*, dan penjumlahan tersebut dikatakan sebagai kofaktor ekspansi dari* A*. dimana*

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(kofaktor ekspansi kolom j)

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(kofaktor ekspansi baris i)

(Anton & Rorres, 2013).

Determinan dari matriks A dimana A merupakan matriks dengan ordo 2×2 dapat dinotasikan dengan

$$\det(A) = ad - bc \text{ atau } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.1.5 Ruang Bernorma (*Norm Space*)

Definisi 2.5

Jika X merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$*, suatu norma pada X adalah suatu fungsi* $\|,\|: X \to \mathbb{R}$ *yang memenuhi* $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *berlaku:*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
3. $\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\| \forall\, a \in \mathbb{R}$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

Ruang vektor yang dilengkapi suatu norma disebut ruang bernorma (Rynne & Youngson, 2008).

Definisi 2.6

Pada umumnya, fungsi suatu norma di $\mathbb{R}^n$*, dimana* $1 \leq p \leq \infty$ *dirumuskan sebagai berikut*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dimana fungsi norma di $\mathbb{R}^n$ *untuk* $p = 1$ *dirumuskan sebagai berikut*

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{1}} = |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}}| + |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}}| + |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{3}}| + \cdots + |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}|$$

Dan fungsi norma pada $\mathbb{R}^n$ *untuk* $p = 2$ *dirumuskan sebagai berikut*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga untuk fungsi norma pada $\mathbb{R}^n$ *untuk* $p = \infty$ *dirumuskan sebagai*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = max\{|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}}| + |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}}| + |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{3}}| + \cdots + |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}|\}$$

(Debnath & Mikusinski, 1990)

Contoh 2.3

Jika X suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$, diberikan vektor $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in X$ dengan $\boldsymbol{r} = (2, 6)$ dan $\boldsymbol{s} = (-1, 3)$**.** Diberikan fungsi norma pada X yang didefinisikan sebagai $\|\boldsymbol{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, maka $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$**:**

1. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{r}\| \geq 0$

$$\|\boldsymbol{r}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|r_1|^2 + |r_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|2|^2 + |6|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (4 + 36)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{4 + 36}$$

$$= \sqrt{40}$$

$= 6{,}324 \geq 0$

Jika $\|\boldsymbol{r}\| = 0$, maka $r_1 = r_2 = 0$. Sehingga $\boldsymbol{r} = 0$

2. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{r}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{r}\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

   a. Akan dicari nilai $\|\alpha\boldsymbol{r}\|$

$$\|\alpha\boldsymbol{r}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha\boldsymbol{r}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha r_1|^2 + |\alpha r_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha.2|^2 + |\alpha.6|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2|2|^2 + |\alpha|^2|6|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(4 + 36)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{4 + 36}\right)$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{40}\right)$$

$$= |\alpha|(6{,}324)$$

   b. Akan dicari nilai $|\alpha|\|\boldsymbol{r}\|$

$$|\alpha|\|\boldsymbol{r}\| = (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(|r_1|^2 + |r_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(|2|^2 + |6|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(4 + 36)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{4 + 36}\right)$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{40}\right)$$

$= |\alpha|(6{,}324)$

Sehingga $\|\alpha \boldsymbol{r}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{r}\|$

3. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\| \leq \|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{s}\|$

a. $\|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\| = (\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{s_i}|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|r_1 + s_1|^2 + |r_2 + s_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|2 + (-1)|^2 + |6 + 3|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|1|^2 + |9|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (1 + 81)^{\frac{1}{2}}$

$= (82)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{82}$

$= 9{,}055$

b. $\|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{s}\| = (\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r_i}|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{s_i}|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|r_1|^2 + |r_2|^2)^{\frac{1}{2}} + (|s_1|^2 + |s_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|2|^2 + |6|^2)^{\frac{1}{2}} + (|-1|^2 + |3|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (|2|^2 + |6|^2)^{\frac{1}{2}} + (|-1|^2 + |3|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (4 + 36)^{\frac{1}{2}} + (1 + 9)^{\frac{1}{2}}$

$= (40)^{\frac{1}{2}}(10)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{40} + \sqrt{10}$

$= 6{,}324 + 3{,}162$

$= 9{,}486$

Karena nilai $9{,}055 \leq 9{,}486$, maka $\|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\| \leq \|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{s}\|$

Definisi 2.7

Misalkan X merupakan ruang vektor berdimensi d, dimana $2 \leq d \leq \infty$. *Norm-2 pada X merupakan fungsi* $\|,\|: X \times X \to \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\ \in X$ *memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *bergantung linier*
2. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \in X$
3. $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |a|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\ \in X$

Sehingga pasangan $(X, \|,\|)$ *disebut suatu ruang norm-2* (Rynne & Youngson, 2008).

Salah satu contoh pemetaan norm-2 baku pada ruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

2.1.6 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Suatu barisan akan konvergen serta lengkap apabila beberapa definisi berikut terpenuhi.

Definisi 2.8

Barisan $\langle x_n\rangle$ *pada suatu ruang metrik* $X = (X, d)$ *akan konvergen jika terdapat suatu* $x \in X$, *sehingga* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ *dimana x merupakan nilai limit dari* $\langle x_n\rangle$, *secara matematis ditulis*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ atau } x_n \to x$$

Sedangkan suatu barisan $\langle x_n \rangle$ *dikatakan divergen apabila barisan tersebut tidak konvergen* (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.9

Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ *pada ruang metrik* (X, d) *disebut sebagai barisan Cauchy apabila untuk setiap* $\varepsilon > 0,$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $\forall\, n, m \geq n_0$ *berlaku*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ (Kreyszig, 1978).}$$

Contoh 2.4

Selidiki apakah barisan $\langle x_g \rangle = \left(\frac{1}{g}\right)$ merupakan barisan Cauchy?

Penyelesaian:

Akan diselidiki apakah barisan $\langle x_g \rangle = \left(\frac{1}{g}\right)$

Karena terdapat barisan $\langle x_g \rangle = \left(\frac{1}{g}\right)$ maka akan mengakibatkan terdapat barisan $\langle x_w \rangle = \left(\frac{1}{w}\right)$ sehingga

$$\begin{aligned}
|x_g - x_w| &= \left|\frac{1}{g} - \frac{1}{w}\right| = \left|\frac{w-g}{gw}\right| \\
&\leq \left|\frac{w+g}{gw}\right| \\
&= \left|\frac{w}{gw} + \frac{g}{gw}\right| \\
&\leq \left|\frac{w}{gw}\right| + \left|\frac{g}{gw}\right| \\
&= \left|\frac{1}{g}\right| + \left|\frac{1}{w}\right| \\
&\leq \frac{2}{g_0} < \varepsilon
\end{aligned}$$

didapatkan

$$\frac{2}{g_0} < \varepsilon$$

$$g_0 > \frac{2}{\varepsilon}, g_0 \in \mathbb{N}$$

Contoh kongkrit:

Diambil $\varepsilon = 1,$ dan $g_0 = 3$,

Untuk $\varepsilon = 1,$ terdapat $g_0 = 3$ sehingga untuk setiap $g, w \geq 3$ berlaku

$$|x_3 - x_3| < 1 \iff \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right| < 1$$

$$|x_3 - x_4| < 1 \iff \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right| < 1$$

Dapat disimpulkan bahwa jika diambil sembarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $g_0 = \left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil \in \mathbb{N} \forall\, g, w \ \geq \left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil$ berlaku

$$\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{w}\right| < \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan $\langle x_g \rangle = \left(\frac{1}{g}\right)$ barisan Cauchy

Definisi 2.10

Suatu ruang metrik (X, d) *merupakan ruang metrik lengkap jika untuk setiap barisan Cauchynya konvergen ke suatu titik di X* (Sherbert & Bartle, 2000).

Teorema 2.2

Barisan yang konvergen pada suatu metrik (X, d) *adalah barisan Cauchy* (Sherbert &Bartle, 2000).

Bukti:

Jika diambil sebarang suatu barisan yang dalam kasus ini yaitu $\langle x_g \rangle \to x$, maka$\forall\, \varepsilon > 0$ terdapat $g_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian terdapat $g, w \geq\ g_0$, berlaku

$$\left|x_g - x_w\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Maka untuk setiap $g, w \geq g_0$ berlaku ketaksamaan segitiga dimana dapat ditulis

$$\left|x_g - x_w\right| \leq \left|x_g - x\right| + |x - x_w|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan $\langle x_g \rangle$ merupakan barisan Cauchy.

Definisi 2.11

Suatu ruang vektor bernorma linear dikatakan ruang Banach apabila lengkap (Kreyszig, 1978).

2.1.7 Ruang Hasil Kali Dalam (*Inner Product Space*)

Definisi 2.12

Misalkan V adalah ruang vektor Riil. Hasil kali dalam pada V merupakan fungsi $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian hingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ memenuhi:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
3. $\langle \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ (Rynne & Youngson, 2008).

Contoh 2.5

Buktikan bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat pada ruang hasil kali dalam, dimana $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \rangle = r_1 s_1 + 4 r_2 s_2$$

Penyelesaian:

Ambil sebarang vektor $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. Akan dibuktikan $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle \geq 0$

   $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle = r_1 r_1 + 4 r_2 r_2$

   $= r_1{}^2 + 4(r_2)^2$

   Dikarenakan sifat perpangkatan, dimana $\boldsymbol{r_i}{}^2$ akan selalu bernilai positif, untuk $i > 0$, maka

   $$\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle = r_1{}^2 + 4(r_2)^2 \geq 0$$

2. Akan dibuktikan $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{r} = 0$

   Jika $\boldsymbol{r} = 0$, maka

   $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle = r_1 r_1 + 4 r_2 r_2$

   $= r_1{}^2 + 4(r_2)^2$

   $= 0^2 + 4.0^2$

   $= 0 + 0$

   $= 0$

   Jika $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle = 0$, maka diperoleh $r_1 = r_2 = 0$ sehingga $\boldsymbol{r} = 0$

3. Akan dibuktikan $\langle \alpha \boldsymbol{r} + \beta \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{t} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \rangle$

   $\langle \alpha \boldsymbol{r} + \beta \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \rangle = \langle \alpha r_1 + \beta s_1, t_1 \rangle + 4 \langle \alpha r_2 + \beta s_2, t_2 \rangle$

   $= (\alpha r_1 + \beta s_1) t_1 + 4(\alpha r_2 + \beta s_2) t_2$

   $= (\alpha r_1 t_1 + \beta s_1 t_1) + (4 \alpha r_2 t_2 + 4 \beta s_2 t_2)$

   $= (\alpha r_1 t_1 + 4 \alpha r_2 t_2) + (\beta s_1 t_1 + 4 \beta s_2 t_2)$

   $= \alpha (r_1 t_1 + 4 r_2 t_2) + \beta (s_1 t_1 + 4 s_2 t_2)$

   $= \alpha \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{t} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \rangle$

4. Akan dibuktikan $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \rangle = \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{r} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \rangle &= r_1 s_1 + 4 r_2 s_2 \\ &= s_1 r_1 + 4 s_2 r_2 \\ &= \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{r} \rangle \end{aligned}$$

Definisi 2.13

Misalkan V ruang vektor kompleks. Hasil kali dalam di V merupakan fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ sehingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ serta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ memenuhi:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ *dan* $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \in \mathbb{R}$
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
3. $\langle \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}} \rangle$ (Rynne & Youngson, 2008).

Teorema 2.3

Jika terdapat H ruang hasil kali dalam, untuk semua $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{w} \in H$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, akan berlaku:

1. $\langle 0, \boldsymbol{i} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, 0 \rangle = 0$
2. $\langle \boldsymbol{g}, \alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{w} \rangle = \bar{\alpha} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \rangle + \bar{\beta} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{w} \rangle$
3. $\langle \alpha \boldsymbol{g} + \beta \boldsymbol{i}, \alpha \boldsymbol{g} + \beta \boldsymbol{i} \rangle = |\alpha|^2 \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \rangle + \alpha \beta \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \rangle + \beta \alpha \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{g} \rangle + |\beta|^2 \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \rangle$

   (Rynne & Youngson, 2008)

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\langle 0, \boldsymbol{i} \rangle = 0$

$\langle 0, \boldsymbol{i} \rangle = \langle \boldsymbol{i} + (-\boldsymbol{i}), \boldsymbol{i} \rangle$ (Definisi 2.1 bagian 4)

$= \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \rangle + \langle (-\boldsymbol{i}), \boldsymbol{i} \rangle$ (Definisi 2.1 bagian 7)

$= \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \rangle - \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \rangle$ (Sifat perkalian)

$= 0$ (Sifat pengurangan)

Sehingga terbukti $\langle 0, \boldsymbol{i} \rangle = 0$

2. Akan dibuktikan $\langle \boldsymbol{g}, 0 \rangle = 0$

$\langle \boldsymbol{g}, 0 \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} + (-\boldsymbol{g}) \rangle$ (Definisi 2.1 bagian 4)

$= \langle \overline{\boldsymbol{g} + (-\boldsymbol{g}), \boldsymbol{g}} \rangle$ (Definisi 2.12 bagian 4)

$= \langle \overline{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}} \rangle + \langle \overline{(-\boldsymbol{g}), \boldsymbol{g}} \rangle$ (Definisi 2.1 bagian 7)

$= \langle \overline{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}} \rangle - \langle \overline{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}} \rangle$ (Sifat perkalian)

$= 0$ (Sifat pengurangan)

Sehingga terbukti $\langle \boldsymbol{g}, 0 \rangle = 0$

Maka terbukti pula $\langle 0, \boldsymbol{i} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, 0 \rangle = 0$

3. Akan dibuktikan $\langle \boldsymbol{g}, \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{w} \rangle = \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \rangle + \bar{\beta}\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{w} \rangle$

$\langle \boldsymbol{g}, \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{w} \rangle = \langle \overline{\alpha\boldsymbol{\imath} + \beta\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}} \rangle$ (Definisi 2.12 bagian 4)

$= \bar{\alpha}\langle \overline{\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{g}} \rangle + \bar{\beta}\langle \overline{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g}} \rangle$ (Definisi 2.1 bagian 7)

$= \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \rangle + \bar{\beta}\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{w} \rangle$ (Definisi 2.12 bagian 4)

Sehingga terbukti $\langle \boldsymbol{g}, \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{w} \rangle = \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \rangle + \bar{\beta}\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{w} \rangle$

4. Akan dibuktikan

$\langle \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i}, \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i} \rangle = |\alpha|^2\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \rangle + \alpha\beta\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i} \rangle + \beta\alpha\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{g} \rangle + |\beta|^2\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \rangle$

$\langle \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i}, \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i} \rangle = \langle \alpha\boldsymbol{g}, \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i} \rangle + \langle \beta\boldsymbol{i}, \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i} \rangle$

(Definisi 2.1 bagian 7)

$= \langle \overline{\alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{\imath}, \alpha\boldsymbol{g}} \rangle + \langle \overline{\alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{\imath}, \beta\boldsymbol{\imath}} \rangle$ (Definisi 2.12 bagian 4)

$= \langle \overline{\alpha\boldsymbol{g}, \alpha\boldsymbol{g}} \rangle + \langle \overline{\beta\boldsymbol{\imath}, \alpha\boldsymbol{g}} \rangle + \langle \overline{\alpha\boldsymbol{g}, \beta\boldsymbol{\imath}} \rangle + \langle \overline{\beta\boldsymbol{\imath}, \beta\boldsymbol{\imath}} \rangle$ (Definisi 2.1 bagian 7)

$= \overline{\alpha\langle \boldsymbol{g}, \alpha\boldsymbol{g} \rangle} + \overline{\beta\langle \boldsymbol{\imath}, \alpha\boldsymbol{g} \rangle} + \overline{\alpha\langle \boldsymbol{g}, \beta\boldsymbol{\imath} \rangle} + \overline{\beta\langle \boldsymbol{\imath}, \beta\boldsymbol{\imath} \rangle}$

$= \bar{\alpha}\langle \alpha\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}\rangle + \bar{\beta}\langle \alpha\boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}\rangle + \bar{\alpha}\langle \beta\boldsymbol{i}, \boldsymbol{g}\rangle + \bar{\beta}\langle \beta\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\rangle$ (Definisi 2.12 bagian 4)

$= \bar{\alpha}\alpha\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}\rangle + \bar{\beta}\alpha\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}\rangle + \bar{\alpha}\beta\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{g}\rangle + \bar{\beta}\beta\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\rangle$

$= |\alpha|^2\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}\rangle + \alpha\beta\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}\rangle + \beta\alpha\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{g}\rangle + |\beta|^2\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\rangle$

Sehingga terbukti bahwa $\langle \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i}, \alpha\boldsymbol{g} + \beta\boldsymbol{i}\rangle = |\alpha|^2\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}\rangle + \alpha\beta\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}\rangle + \beta\alpha\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{g}\rangle + |\beta|^2\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\rangle$

Definisi 2.14

Ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang vektor yang dilengkapi fungsi hasil kali dalam. Suatu fungsi norma atau panjang (length) di ruang hasil kali dalam dapat ditulis sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$$

(Debnath & Mikusinski, 1990)

Sifat-sifat pada ruang hasil kali dalam:

a. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle$ (aditif)

b. $\langle \boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}\rangle = k\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ (homogen)

c. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$ (simetri)

2.1.8 Ortogonalitas

Definisi 2.15

Jika V suatu ruang vektor dengan dilengkapi fungsi hasil kali dalam, maka vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ disebut ortogonal jika $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$. Apabila suatu vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ saling ortogonal, maka dituliskan dengan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ (Rynne & Youngson, 2008).

Berikut merupakan sifat-sifat dasar ortogonalitas yang terdapat pada ruang hasil kali dalam:

1. Nondegenerasi, jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}$ maka $\boldsymbol{x} = 0$

2. Simetri, jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, maka $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$
3. Homogenitas, jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ maka $\alpha\boldsymbol{x} \perp \beta\boldsymbol{y}\ \forall\ \alpha, \beta$ merupakan skalar
4. Aditif Kanan, jika $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{z}$ maka $\boldsymbol{x} \perp (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
5. Resolvabilitas,$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ terdapat skalar α sedemikian sehingga $\boldsymbol{x} \perp (\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$
6. Kontinuitas, jika $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$dan $\boldsymbol{x_n} \perp \boldsymbol{y_n}$ untuk setiap n, maka $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$

   (Gunawan dkk, 2005)

Terdapat beberapa definisi ortogonalitas, yaitu sebagai berikut:

a. Ortogonalitas-*P* (*Pythagoras*)

Definisi 2.16

$\boldsymbol{x}$ disebut ortogonalitas-P pada $\boldsymbol{y}$ (ditulis $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}$) jika dan hanya jika

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

(Gunawan dkk, 2005)

Teorema 2.4

Diberikan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ruang bernorma atas lapangan (field) $\mathbb{R}$, maka $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku:

1) *Sifat Nondegenerasi, jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{x}$ maka $\boldsymbol{x} = 0$, untuk $\boldsymbol{x} \in X$*
2) *Sifat Simetri, jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}$ maka $\boldsymbol{y} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{x}$, $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$*
3) *Sifat Kontinuitas, jika $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x_n} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y_n}$ untuk setiap n, maka $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}$*

Bukti:

1) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-*P* memiliki sifat nondegenerasi

   Dengan menggunakan Definisi 2.16, didapat

   $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2$

$$0 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$$

Selanjutnya dengan mengaplikasikan teorema 2.3 didapatkan

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0, \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$$

2) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-P memiliki sifat simetri yaitu $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|^2$,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \|(-1)(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\|^2 \\ &= |(-1)|^2\|(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\|^2 \\ &= \|(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|^2\end{aligned}$$

dan

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2$$

Sehingga dengan pembuktian tersebut diperoleh hubungan jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}$ maka $\boldsymbol{y} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

3) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-P memiliki sifat kontinuitas

Dimisalkan jika $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x_n} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y_n}$ untuk setiap n, serta diketahui bahwa untuk norma $\|.\|$ yang merupakan pemetaan kontinu, akan diperoleh

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \lim\|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{y_n}\|^2 \\ &= \lim(\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2) \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

dimana dengan penjabaran tersebut berarti bahwa $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{y}$

b. Ortogonalitas-*I* (*Isosceles*)

Definisi 2.17

$\boldsymbol{x}$ *dikatakan ortogonalitas-I pada* $\boldsymbol{y}$ *(ditulis* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y}$*) jika dan hanya jika*

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

(Gunawan dkk, 2005)

Teorema 2.5

Diberikan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *ruang bernorma atas lapangan (field) pada bilangan Riil, maka* $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *serta* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *berlaku:*

1) *Sifat Nondegenerasi, jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{x}$ *maka* $\boldsymbol{x} = 0$*, untuk* $\boldsymbol{x} \in X$
2) *Sifat Simetri, jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y}$ *maka* $\boldsymbol{y} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{x}$*,* $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$
3) *Sifat Kontinuitas, jika* $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$ *dan* $\boldsymbol{x_n} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y_n}$ *untuk setiap* n*, maka* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y}$

Bukti:

1) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-*I* memiliki sifat nondegenerasi

   Dengan menggunakan Definisi 2.17 didapat

   $$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\|$$
   $$\|2\boldsymbol{x}\| = 0$$
   $$|2|\|\boldsymbol{x}\| = 0$$
   $$\|\boldsymbol{x}\| = \frac{0}{|2|}$$
   $$\|\boldsymbol{x}\| = 0$$

   Selanjutnya dengan mengaplikasikan teorema 2.3 didapatkan

   $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} = 0$, jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$

2) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-I memiliki sifat simetri

Dengan menggunakan Definisi 2.17 didapat

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^{2} &= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^{2} + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{x}\|^{2} \\
&= \|\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\|^{2}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{2} &= \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle (-\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^{2} - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{x}\|^{2} \\
&= \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^{2}
\end{aligned}$$

dikarenakan

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$$

maka diketahui jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y}$ maka $\boldsymbol{y} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

3) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-*I* memiliki sifat kontinuitas

Dapat dimisalkan jika $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x_n} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y_n}$ untuk setiap n, serta diketahui bahwa untuk norma $\|.\|$ yang merupakan pemetaan kontinu, akan diperoleh

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| &= \lim\|\boldsymbol{x_n}+\boldsymbol{y_n}\| \\ &= \lim\|\boldsymbol{x_n}-\boldsymbol{y_n}\| \\ &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\end{aligned}$$

dimana dengan penjabaran tersebut berarti bahwa $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{y}$

c. Ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James*)

Definisi 2.18

$\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-BJ pada $\boldsymbol{y}$ (ditulis $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y}$) jika dan hanya jika

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| \textit{ untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}$$

(Gunawan dkk, 2005)

Teorema 2.6

Diberikan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ruang bernorma atas lapangan (field) pada bilangan Riil, maka untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka berlaku:

1) *Sifat Nondegenerasi, jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{x}$ maka $\boldsymbol{x} = 0$, untuk $\boldsymbol{x} \in X$*
2) *Sifat Homogenitas, jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y}$ maka $\alpha\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \beta\boldsymbol{y}$, $\forall\, \alpha, \beta$ skalar*
3) *Sifat Kontinuitas, jika $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x_n} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y_n}$ untuk setiap n, maka $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y}$*

***Bukti**:*

1) Akan dibuktikan bahwa ortogonalitas-*BJ* memiliki sifat nondegenerasi

Dengan menggunakan definisi 2.18 didapat

$$\|\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{x}\|^{\boldsymbol{2}} = \langle \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{x}\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x} \rangle + \langle t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x} \rangle + \langle t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x} \rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + t\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + t\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + t^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|^2 + t\|\boldsymbol{x}\|^2 + t\|\boldsymbol{x}\|^2 + t^2\|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t\|\boldsymbol{x}\|^2 + t^2\|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t\|\boldsymbol{x}\|^2 + t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 \geq \|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x}\|^2 \geq \|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{x}\|$$

ketaksamaan di atas akan berlaku jika dan hanya jika $\|\boldsymbol{x}\| = 0,$ dan $\|\boldsymbol{x}\| = 0$.

2) Akan dibuktikan ortogonalitas-*BJ* memiliki sifat homogenitas

Dapat diasumsikan $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y}$ dimana untuk nilai $\alpha, \beta \neq 0$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka akan diperoleh

$$\|\boldsymbol{x} + \alpha\beta\boldsymbol{y}\| = |\alpha|.\|\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{y}\| \geq |\alpha|\|\boldsymbol{x}\| = \|\alpha\boldsymbol{x}\|, \text{dengan } \delta = \frac{\alpha\beta}{\alpha}$$

Berarti bahwa $\alpha\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \beta\boldsymbol{y}$

3) Akan dibuktikan ortogonalitas-*BJ* memiliki sifat kontinuitas

Dapat dimisalkan jika $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_n} \to \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{x_n} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y_n}$ untuk setiap n, serta mengingat bahwa untuk norma $\|.\|$ yang merupakan pemetaan kontinu, diperoleh

$$\|\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}\| = \lim\|\boldsymbol{x_n} + \alpha\boldsymbol{y_n}\|^2$$

$$\geq \lim\|\boldsymbol{x_n}\|$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|$$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, dimana dengan penjabaran tersebut berarti bahwa $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{BJ}} \boldsymbol{y}$

d. Ortogonalitas-*D*

Definisi 2.19

Jika X merupakan ruang bernorma dilengkapi norm-2, maka $\boldsymbol{x}$ *disebut ortogonalitas-D ke* $\boldsymbol{y}$*, ditulis* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$(Gunawan dkk, 2006).

e. Ortogonalitas-*g*

Definisi 2.20

Misalkan g merupakan suatu semi hasil kali dalam pada X*, dimana untuk X adalah suatu ruang yang bernorma Riil serta* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$*, maka* $\boldsymbol{x}$ *dikatakan ortogonal-g ke* $\boldsymbol{y}$ *(ditulis* $\boldsymbol{x} \perp_{g} \boldsymbol{y}$*) jika dan hanya jika* $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Jika terdapat suatu fungsi g*, dimana g didefinisikan sebagai fungsional* $g: X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$*, maka dapat ditulis*

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \coloneqq \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}[\tau + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tau - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]$$

dengan

$$\tau \pm (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \coloneqq \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\|}{t}$$

Definisi 2.21

Misalkan terdapat g sebagai semi hasil kali dalam pada X serta $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$*, maka akan berlaku:*

1) $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 \forall\, \boldsymbol{x} \in X$
2) $g(\alpha\boldsymbol{x}, \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3) $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *untuk semua* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$
4) $|g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ *untuk semua* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

Jika fungsional $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ linier terhadap $\boldsymbol{y} \in X$, maka g disebut semi hasil kali dalam pada X (Gunawan dkk, 2006).

f. Ortogonalitas-*b*

Definisi 2.22

$\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonalitas-b pada $\boldsymbol{y}$ (ditulis $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{y}$) jika dan hanya jika terdapat $b \in X$ dengan $\|\boldsymbol{x}, b\| \neq 0$ sehingga

$$\|\boldsymbol{x}, b\| \geq \|\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}, b\| \text{ untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}$$

(Gunawan dkk, 2010).

2.2 Kajian Tersirat Konsep Ortogonalitas dalam Al-Qur'an

Dalam matematika, konsep dasar ortogonalitas yaitu berhubungan dengan besarnya sudut antara dua vektor. Kedua vektor tersebut dapat dikatakan ortogonal, apabila hasil kali dalam kedua vektor tersebut sama dengan nol. Jika digambarkan secara geometri pada dimensi-2, konsep ortogonal akan membentuk garis tegak lurus (Nursupiamin, 2013). Salah satu ayat dalam al-Qur'an secara tersirat menjelaskan hubungan tegak lurus. Konsep hubungan horizontal pada al-Qur'an dapat dianalogikan sebagai hubungan antar sesama manusia (*hablumminannas*), sedangkan hubungan vertikal dapat dianalogikan sebagai hubungan antara manusia dengan Allah SWT (*hablumminallah*).

Ayat dalam al-Qur'an mengenai *hablumminallah wa hablumminannas* terdapat pada surat Qashash (28) ayat 77 yang berbunyi:

وَابْتَغِ فِيْمَا اٰتٰىكَ اللّٰهُ الدَّارَ الْاٰخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيْبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَاَحْسِنْ كَمَا اَحْسَنَ اللّٰهُ اِلَيْكَ
وَلَا تَبْغِ الْفَسَادَ فِى الْاَرْضِ ۗاِنَّ اللّٰهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِيْنَ

Artinya: *"Dan, carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah kepadamu (pahala) negeri akhirat, tetapi janganlah kamu lupakan bagianmu di*

> *dunia. Berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik kepadamu dan janganlah kamu berbuat kerusakan di bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan"*

Ayat di atas memerintahkan manusia untuk menafkahkan harta benda yang telah dianugerahkan oleh Allah SWT di jalan ketaatan kepada Allah untuk amalan atau tabungan kebahagiaan di akhirat. Serta hendaklah manusia tidak melupakan untuk selalu berbuat baik kepada orang-orang (manusia-manusia lainnya) dengan cara bersedekah kepadanya sebagaimana Allah SWT telah berbuat baik kepadanya. Ayat di atas juga mengatakan untuk tidak melakukan kerusakan atau melakukan perbuatan-perbuatan maksiat di dunia, karena sesungguhnya Allah SWT tidak menyukainya dan perbuatan tersebut akan mendapatkan ganjarannya.

2.3 Kajian Teori Ortogonalitas-*D* pada Ruang Norm-2

Diketahui bahwa suatu ruang vektor dapat dikatakan sebagai ruang bernorma apabila memenuhi sifat-sifat norm pada Definisi 2.5 berikut

Definisi 2.5

Jika X merupakan vektor di $\mathbb{R}$, maka untuk suatu norma pada X didefinisikan dengan fungsi $\|,\|: X \to \mathbb{R}$ dikatakan sebagai vektor yang bernorma jika $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ berlaku:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
3. $\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\| \;\forall\, a \in \mathbb{R}$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \;\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ (Rynne & Youngson, 2008).

dan dapat dikatakan sebagai ruang vektor bernorma-2 apabila memenuhi sifat-sifat pada Definisi 2.7 berikut

Definisi 2.7

Misalkan X merupakan ruang vektor berdimensi d, dimana $2 \leq d \leq \infty$. *Norm-2 pada X merupakan fungsi* $\|,\|: X \times X \to \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *bergantung linier*
2. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$
3. $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$

sehingga pasangan $(X, \|,\|)$ *disebut suatu ruang norm-2* (Rynne & Youngson, 2008).

Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ didefinisikan sebagai pemetaan pada ruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sebagai berikut

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Terdapat definisi ortogonalitas-*D* yang diungkapkan oleh Gunawan dkk, pada Definisi 2.19

Definisi 2.19

Jika X merupakan ruang bernorma dilengkapi norma-2, maka $\boldsymbol{x}$ *disebut ortogonalitas-D ke* $\boldsymbol{y}$, *ditulis* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$, $\Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (Gunawan dkk, 2006).

Pada penelitian sebelumnya telah dilakukan pembuktian mengenai ortogonalitas pada ruang norm-2. Sehingga pada penelitian kali ini akan dilakukan pembuktian mengenai ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku memenuhi sifat-sifat pada norm-2 dan beberapa sifat dasar ortogonalitas.

Adapun norm-2 baku didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Sehingga dengan persamaan (1) akan dilakukan pembuktian:

Sifat 1

Diberikan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$*. Untuk setiap* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*, pemetaan* $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$ *didefinisikan sebagai berikut*

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$$

merupakan norm-2.

Dengan menggunakan persamaan (1) akan dilakukan pembuktian bahwa ortogonalitas-*D* memenuhi:

Sifat 2

Diberikan ruang hasil kali dalam X atas lapangan $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *berlaku sifat nondegenerasi, yaitu jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{x}$*, maka* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Sifat 3

Diberikan ruang hasil kali dalam X atas lapangan $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ *berlaku sifat simetri, yaitu jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$*, maka* $\boldsymbol{y} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{x}$.

Sifat 4

Diberikan ruang hasil kali dalam X *atas lapangan* $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *berlaku sifat homogen, yaitu jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$, *maka* $\alpha\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \beta\boldsymbol{y}$ *untuk setiap* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Sifat 5

Diberikan ruang hasil kali dalam X *atas lapangan* $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *berlaku sifat kontinuitas, yaitu jika* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ *(dalam norma) dan* $\boldsymbol{x}_n \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}_n$ *untuk setiap* n, *maka* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif menggunakan metode kepustakaan (*library research*) dimana peneliti menggabungkan data serta informasi melalui beberapa sumber seperti buku-buku, jurnal, artikel serta referensi lainnya.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang ditempuh peneliti sebelum memulai penelitian adalah:

1. Menentukan suatu topik atau tema yang dapat diteliti lebih lanjut dengan membaca artikel-artikel, skripsi terdahulu serta beberapa buku sebagai rujukan.
2. Menentukan rumusan masalah yang akan diangkat pada penelitian ini.
3. Membuat tujuan serta manfaat dari diadakannya penelitian ini.
4. Membuat latar belakang dengan memahami definisi serta konsep-konsep dasar sebagai acuan dalam penelitian ini. Dimulai dengan memahami tentang definisi ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, bagaimana kekonvergenan serta kelengkapan pada ruang bernorma, memahami konsep ruang hasil kali dalam, ortogonalitas pada ruang bernorma serta mencari ayat-ayat al-Qur’an yang dapat diintegrasikan dengan penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Setelah memahami definisi serta konsep-konsep yang digunakan untuk penelitian ini, selanjutnya peneliti melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Memahami serta mengkaji jurnal penelitian yang dipaparkan oleh Gunawan dkk (2005) yang berjudul "*Beberapa Konsep Ortogonalitas di Ruang Norm*".
2. Mencari sumber atau referensi lain baik dari buku, jurnal atau penelitian lainnya untuk mengkaji lebih dalam teorema serta definisi apa saja yang dibutuhkan untuk melakukan pembuktian bahwa pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ memenuhi sifat-sifat ruang norm-2 serta ortogonalitas-*D* memenuhi beberapa sifat dasar ortogonalitas.
3. Memaparkan definisi mengenai ruang vektor (*vector space*), ruang metrik (*metric space*), ruang bernorma (*normaed space*), kekonvergenan dan kelengkapan pada ruang bernorma, ruang hasil kali dalam (*inner product space*), ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam dan sifat dasar ortogonalitas pada hasil kali dalam.
4. Menentukan ayat-ayat al-Qur'an yang dapat digunakan dalam penelitian.
5. Mengkaji teori integrasi ortogonalitas pada al-Qur'an.
6. Membuktikan pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ memenuhi sifat-sifat ruang norm-2 menggunakan Definisi 2.7.
7. Membuktikan ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku melalui Definisi 2.19 sehingga ortogonalitas-*D* memenuhi sifat dasar ortogonalitas yaitu nondegenerasi, simetri, homogen dan kontinuitas.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan pembahasan mengenai (1) pembuktian apakah pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ merupakan norm-2 serta (2) pembuktian apakah ortogonalitas-*D* memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, homogen dan kontinuitas pada ruang norm-2 baku yang telah ditentukan.

4.1 Fungsi $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ merupakan Norm-2

Ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang vektor yang dilengkapi fungsi hasil kali dalam. Suatu fungsi norma atau panjang (*length*) di ruang hasil kali dalam dapat ditulis sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}$$

(Debnath & Mikusinski, 1990).

Diketahui bahwa suatu ruang vektor dapat dikatakan sebagai ruang bernorma apabila memenuhi sifat-sifat norm yang didefinisikan pada Definisi 2.5. Dan dapat dikatakan sebagai ruang vektor bernorma-2 apabila memenuhi sifat-sifat pada Definisi 2.7.

Untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ didefinisikan pemetaan pada ruang hasil kali dalam $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ sebagai berikut

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Akan dibuktikan bahwa pemetaan tersebut memenuhi sifat-sifat norm-2.

Teorema 4.1

Diberikan X ruang hasil kali dalam atas lapangan $\mathbb{R}$. Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, pemetaan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$ didefinisikan sebagai berikut

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

merupakan norm-2.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier

   Bukti:

   Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

   Akan dibuktikan jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier, maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$

   Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier maka terdapat $\alpha \neq 0$ sedemikian sehingga berlaku $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$, maka dengan menggunakan persamaan (1) didapatkan

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| &= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\langle \alpha\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha\langle \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha.\alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha.\alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \alpha.\alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Jadi $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$

   Maka terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

2. Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\| \; \forall \; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

   Bukti:

   Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

   $$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

   $$= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(determinan matriks)}$$

   Karena $\forall \; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, dimana $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R}$ yang berarti bahwa $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbb{R}$ sehingga akan berlaku sifat komutatif pada bilangan *Riil* dan akan menyebabkan

   $$= (\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(sifat komutatif)}$$

   $$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

   $$= \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$$

   Sehinga terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$

3. Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$

   Bukti:

   Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

   $$\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \alpha\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

   $$= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \alpha\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(determinan matriks)}$$

   $$= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \alpha \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(sifat homogen)}$$

   $$= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \alpha \langle \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(sifat simetri)}$$

   $$= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \alpha . \alpha \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(sifat homogen)}$$

$= (\alpha.\alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \alpha.\alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}}$ (sifat komutatif)

$= (\alpha.\alpha(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle))^{\frac{1}{2}}$ (sifat distributif)

$= (\alpha.\alpha)^{\frac{1}{2}}(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}}$

$= (\alpha.\alpha)^{\frac{1}{2}}(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle)^{\frac{1}{2}}$ (sifat simetri)

$= |\alpha.\alpha|^{\frac{1}{2}}(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle)^{\frac{1}{2}}$

$= |\alpha^2|^{\frac{1}{2}}(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle)^{\frac{1}{2}}$

$= |\alpha|(\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle)^{\frac{1}{2}}$ (perkalian akar pangkat)

$$= |\alpha| \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$= |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$

Sehingga terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$

4. Akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in X$

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in X$.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$= [\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle(\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle)] - [\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle(\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle)]^{\frac{1}{2}}$

(determinan matriks)

$= [\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle]^{\frac{1}{2}} - [\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle]^{\frac{1}{2}}$

dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, maka akan diperoleh

$\leq [\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle]^{\frac{1}{2}} + [\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle]^{\frac{1}{2}}$

$$\leq \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$$

Sehingga terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$

Karena semua sifat terbukti, maka pemetaan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ merupakan norm-2. Norm $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$ yang didefiniskan dengan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ disebut norm-2 baku.

4.2 Sifat-Sifat Ortogonalitas-*D* pada Ruang Norm-2 Baku

Diketahui bahwa definisi ortogonalitas-*D* terdapat pada Definisi 2.19. Dengan menggunakan persamaan (1) serta Definisi 2.19, akan dilakukan pembuktian bahwa ortogonalitas-*D* memenuhi sifat dasar ortogonalitas yaitu sifat nondegenerasi, simetri, homogen serta kontinuitas.

Teorema 4.2

Diberikan ruang hasil kali dalam X atas lapangan $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *berlaku sifat nondegenerasi, yaitu jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{x}$*, maka* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in X$ dengan $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{x}$, maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\|$.

Akan dibuktikan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(determinan matriks)}$$

$= \left((0)(0) - (0)(0)\right)^{\frac{1}{2}}$ (definisi 2.12 bagian 2)

$= 0$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\| = 0$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\|^{\mathbf{2}} = 0$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\| = 0$

$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$

Sehingga terbukti bahwa ortogonalitas-*D* memenuhi sifat nondegenerasi.

Teorema 4.3

Diberikan ruang hasil kali dalam X atas lapangan $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *berlaku sifat simetri, yaitu jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$, *maka* $\boldsymbol{y} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{x}$.

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dengan $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$ maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

Karena norm-2 memiliki sifat simetri, maka akan berlaku

$$\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{x}\|$$

Jadi terbukti bahwa ortogonalitas-*D* memenuhi sifat simetri.

Teorema 4.4

Diberikan ruang hasil kali dalam X atas lapangan $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *berlaku sifat homogen, yaitu jika* $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$, *maka* $\alpha\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \beta\boldsymbol{y}$ *untuk setiap* α, β *merupakan skalar.*

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Akan dibuktikan jika $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$, maka $\alpha\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \beta\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$ artinya $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$, sehingga

$\|\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}\| = \ |\beta|\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$ (definisi 2.5 bagian 3)

$= |\beta|\|\boldsymbol{y},\alpha\boldsymbol{x}\|$ (definisi 2.5 bagian 2)

$= |\beta||\alpha|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|$ (definisi 2.5 bagian 3)

$= |\beta||\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$ (definisi 2.5 bagian 2)

$= |\beta||\alpha|\|\boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|$

$= |\beta|\|\alpha\boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|$ (definisi 2.3 bagian 3)

$= \|\alpha\boldsymbol{x}\|.|\beta|\|\boldsymbol{y}\|$ (sifat komutatif)

$= \|\alpha\boldsymbol{x}\|.\|\beta\boldsymbol{y}\|$ (definisi 2.3 bagian 3)

Karena $\|\alpha\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}\| = \|\alpha\boldsymbol{x}\|.\|\beta\boldsymbol{y}\|$, maka terbukti bahwa ortogonalitas-*D* memenuhi sifat homogen.

Teorema 4.5

Diberikan ruang hasil kali dalam X atas lapangan $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan norm-2 baku. Untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ berlaku sifat kontinuitas, yaitu jika $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ (dalam norma) dan $\boldsymbol{x}_n \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}_n$untuk setiap n, maka $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$.

Bukti:

Barisan $\langle x_n \rangle$ pada suatu ruang metrik $X = (X,d)$ akan konvergen jika terdapat suatu $x \in X$, sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ dimana x merupakan nilai limit dari $\langle x_n \rangle$, secara matematis ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ atau \ x_n \to x$$

$x_n \to x$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_1$ berlaku $|x_n - x|$. Begitu pula dengan barisan $\langle y_n \rangle$ pada suatu ruang metrik $X = (X,d)$ akan konvergen jika terdapat suatu $y \in X$, sehingga $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0$ dimana y merupakan nilai limit dari $\langle y_n \rangle$, secara matematis ditulis

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \; atau \; y_n \to y$$

$y_n \to y$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_2 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_2$ berlaku $|y_n - y|$. Sehingga apabila dikonversi ke dalam ortogonalitas-*D* untuk sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ akan menghasilkan

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \big|\|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}\|, \|\boldsymbol{y_n} - \boldsymbol{y}\|\big|$$

$$= \big|\|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|\big|$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, maka akan didapat

$$\leq \big|\|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}\| - \|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y}\|\big| + \big|\|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|\big|$$

$$\leq \|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$

(sifat pengurangan pada hasil kali dalam)

Jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq C\|\boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|\;\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ maka

$$\leq \|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$

$$\leq C\,[\|\boldsymbol{x_n}\|.\|\boldsymbol{y_n} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|]$$ (definisi ortogonalitas-*D*)

Sehingga mengakibatkan $\|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}\| \to \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$, maka

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}\|$$

$$= \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \|\boldsymbol{x_n}\|\,.\,\|\boldsymbol{y_n}\|$$ (definisi ortogonalitas-*D*)

$$= \|\boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|$$

dimana $\forall\, n = \max n_1, n_2$

yang berarti bahwa $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$. Karena $\boldsymbol{x} \perp_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{y}$ maka ortogonalitas-*D* memenuhi sifat kontinuitas.

Pada bab sebelumnya, telah dipaparkan salah satu ayat al-Qur'an yang didalamnya tersirat konsep ortogonalitas. Surat Qashash (28) ayat 77 secara tersirat menjelaskan konsep ortogonalitas yang jika digambarkan secara geometri pada dimensi-2 akan membentuk garis tegak lurus. Surat Qashash (28) ayat 77 secara tersirat menjelaskan mengenai hubungan manusia dengan Allah (*hablumminallah*) yaitu manusia diperintahkan untuk menafkankan sebagian harta benda yang telah Allah SWT anugerahkan kepadanya sebagai bekal untuk akhirat serta terdapat juga hubungan antar manusia (*hablumminannas*) yaitu manusia diperintahkan untuk tidak lupa bersedekah sebagaimana Allah SWT telah memberikan rezeki kepadanya serta selalu berbuat baik kepada sesama.

Surat Qashash (28) ayat 77 juga memerintahkan manusia untuk tidak berbuat kerusakan atau melakukan perbuatan maksiat, karena sesungguhnya Allah SWT akan memberikan ganjaran atas perbuatan-perbuatan tersebut. Dengan mengintegrasikan pada konsep ortogonal dimana kedua vektor yang saling ortogonal tidak berpengaruh satu dengan yang lain, maka dapat diandaikan bahwa *hablumminallah wa hablumminannas* juga tidak berpengaruh satu sama lain.

Terdapat kasus dimana hubungan seseorang dengan Tuhannya (*hablumminallah*) sangatlah baik. Selalu melakukan ketaatan dengan manjauhi laranganNya dan memenuhi semua perintahNya. Namun, hubungan dengan sesama manusia (*hablumminannas*) tidaklah baik. Sebaliknya, terdapat seseorang yang hubungannya dengan sesama manusia (*hablumminannas*) sangatlah baik. Selalu membantu sesama dikala ada yang membutuhkan, saling tolong menolong, melakukan kegiatan sosial yang bermanfaat dan sebagainya. Namun, hubungannya dengan sang pencipta (*hablumminallah*) tidaklah baik. Tidak mengerjakan apa yang diperintahkan dan tidak menjauhi apa yang dilarang olehNya.

Sebagai seorang muslim yang beriman, sepatutnya hubungan dengan Allah SWT (*hablumminallah*) serta hubungan antar manusia (*hablumminannas*) haruslah baik. Selalu mengerjakan perintahNya dan menjauhi segala laranganNya, selalu berada dalam jalan ketaatan serta berbuat baik sesama manusia dengan saling tolong menolong serta saling member dikala ada yang membutuhkan.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan definisi yang diberikan mengenai sifat-sifat pada ruang bernorma serta pendefinisian ortogonalitas-*D* pada norm-2 baku terdapat beberapa teorema, sehingga berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan didapatkan kesimpulan bahwa (1) pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ memenuhi sifat-sifat norm-2 yang berarti bahwa pemetaan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ merupakan norm-2 serta (2) ortogonalitas-*D* pada norm-2 baku memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, homogeny dan kontinuitas.

5.2 Saran

Skripsi ini diharapkan dapat menjadi sarana pembelajaran serta informasi bagi pembaca mengenai ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku. Skripsi ini hanya terbatas dalam ortogonalitas-*D* pada ruang norm-2 baku. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan ortogonalitas pada ruang bernorma lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur’an Al-Karim dan Terjemahannya. 2013. *Kementerian Agama Republik Indonesia*. Surabaya: Halim Publishing & Distributing.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Delapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. and Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra Aplication Version* 11^{th} *Edition*. United States: John Wiley and Sons.

Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. USA: John Wiley and Sons.

Debnath, L. dan Mikusinski, P.. 1990. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. San Diego: Academic Press.

Gunawan, H. 2006. *Orthogonality in 2-Normed Spaces Revisited*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak Ser. Mat.17.

Gunawan, H. dan Gozali S. M, 2010.*On b-Orthogonality in 2-Normed Spaces*. Bandung: J. Indones.Math.Soc. Volume 16 halaman 127-132.

Gunawan, H., Nursupiamin., dan Kikianty, E., 2005. *Beberapa Konsep Ortogonalitas di Ruang Norm*. Program Riset ITB.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Aplication*. Canada: John Wiley and Sons.

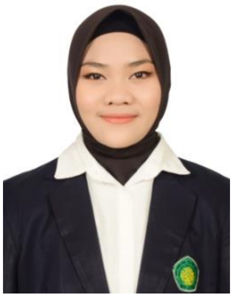
Nur Muh. 2016. *Ortogonalitas-P di Ruang Norm-2*. Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi. Volume 13 no.1 halaman 78-84.

Nursupiamin, 2013. *Konsep Ortogonalitas dalam Al-Qur’an*. S. Al-Khwarizmi. Volume 2 halaman 101-110.

Nursupiamin, 2013.*Ortogonalitas di Ruang Bernorma*. Al-Khwarizmi. Volume 1.

Rynne, B.P. dan Youngson, M.A.. 2008. *Linear Functional Analysis Second Edition*. London: Springer-Verlag.

RIWAYAT HIDUP



Kirania Ramara Insani, lahir di Tanak Beak, 22 Juni 2000. Putri pertama dari Bapak Mas'ud Ramli dan Ibu Hustaniah. Perempuan dengan sapaan Kiran ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari jenjang TK Qamarul Huda Bagu yang lulus pada tahun 2006, dilanjutkan dengan pendidikan dasar di SDN 7 Lembuak sehingga lulus pada tahun 2012. Kemudian ia melanjutkan pendidikan formalnya ke jenjang menengah pertama di SMPN 1 Narmada dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya menempuh pendidikan di SMAN 1 Narmada dan lulus pada tahun 2018. Setelah menempuh jenjang sekolah menengah akhir, ia melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Perempuan yang pernah mendapat gelar Duta Anak NTB pada tahun 2016 ini mulai aktif mengikuti berbagai organisasi pada saat SMP. Dimulai dari mengiktui kegiatan bidang olahraga sampai dengan kegiatan ilmiah. Selama menjadi mahasiswa di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, perempuan ini pernah menjadi anggota HMJ Integral Matematika, sekretaris pada acara Kompetisi Matematika (KOMET) XIX tingkat nasional, serta berperan aktif dalam berbagai acara yang diadakan oleh Program Studi Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Kirania Ramara Insani
NIM : 18610014
Fakultas /Program Studi : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Ortogonalitas-*D* pada Ruang Norm-2 Baku
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	7 Februari 2022	Konsultasi BAB I dan BAB II	1.
2.	16 Februari 2022	Revisi BAB I dan BAB II	2.
3.	21 Februari 2022	Revisi BAB I, BAB II dan BAB III	3.
4.	7 Maret 2022	ACC Pembimbing I untuk Seminar Proposal	4.
5.	10 Maret 2022	Perbaikan Penggunaan Kalimat BAB I dan Integrasi Al-Qur'an	5.
6.	16 Maret 2022	Revisi Integrasi Al-Qur'an	6.
7.	18 Maret 2022	ACC Pembimbing II untuk Seminar Proposal	7.
8.	3 Juni 2022	Revisi BAB IV dan BAB V	8.
9.	5 Juni 2022	Konsultasi Kajian Integrasi	9.
10.	7 Juni 2022	ACC Pembimbing I untuk Seminar Hasil	10.
11.	8 Juni 2022	ACC Pembimbing II untuk Seminar Hasil	11.
12.	17 Juni 2022	Konsultasi Bab IV dan Bab V Setelah Seminar Hasil	12.
13.	20 Juni 2022	ACC Pembimbing II untuk Ujian Skripsi	13.
14.	21 Juni 2022	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 24 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc
NIP.19741129 200012 2 005