ESTIMASI PARAMETER SUKU BUNGA *HULL-WHITE* MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE* DAN *ORDINARY LEAST SQUARE*

SKRIPSI

OLEH
LISA SHERLY CHOLIQA
NIM. 15610114

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ESTIMASI PARAMETER SUKU BUNGA *HULL-WHITE* MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE* DAN *ORDINARY LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lisa Sherly Choliqa
NIM. 15610114

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

ESTIMASI PARAMETER SUKU BUNGA *HULL-WHITE* MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE* DAN *ORDINARY LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh
Lisa Sherly Choliqa
NIM. 15610114

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 30 Mei 2022

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Ria Dhea Layla N.K., M.Si	Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd
NIDT.19900709 20180201 2 228	NIP.19770521 200512 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M. Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

ESTIMASI PARAMETER MODEL SUKU BUNGA *HULL-WHITE* MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE* DAN *ORDINARY LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh
Lisa Sherly Choliqa
15610114

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 15 Juni 2022

Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji 1	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji 2	: Ria Dhea Layla N.K., M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd	....

Mengetahui
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M. Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Lisa Sherly Choliqa
NIM	: 15610114
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:Estimasi Parameter Suku Bunga *Hull-White* Menggunakan Metode *Jackknife* dan *Ordinary Least Square*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
10000
SEPULUH RIBU RUPIAH
D5AEAJX891415299

Lisa Sherly Choliqa
NIM. 15610114

MOTO

“ Percayalah bahwa apapun yang terjadi dalam hidup kita merupakan jalan yang terbaik yang telah ditetapkan Allah SWT ”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Saeri dan Ibunda Lina Cholidiyawati tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas dan istiqomah mendoakan, memberi nasihat, semangat dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Achmad Ridhlo Ilahi dan Tria Fatma Putri yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ria Dhea Layla N.K., M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku Penguji Utama dalam Ujian Skripsi.
7. Evawati Alisah, M.Pd, selaku Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi.
8. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas sains dan teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
9. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
10. Sahabat-sahabat terbaik penulis, yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

11. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 khususnya Matematika-C (Ciss Math), yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin*.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{X_i}$	:	Variabel bebas periode ke- i
$\boldsymbol{\varepsilon_i}$	:	*Error* periode ke-i
$\boldsymbol{\beta}$	:	Parameter
$W(t)$	:	Proses Wiener
$\boldsymbol{a}$	:	Kelajuan r menuju level θ
$\boldsymbol{y^i}$	:	Vektor y yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1)\times 1$
$\boldsymbol{X^i}$	:	Matriks X yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1)\times k$
$\boldsymbol{\beta^i}$	:	Vektor parameter *Jackknife* yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $k\times 1$
$\boldsymbol{\varepsilon^i}$	:	Vektor *error* yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran$(n-1)\times 1$ untuk $i=1,2,3\ldots,n$.
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	:	Penduga dari metode *jackknife*
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$	:	Penduga dari metode *Jackknife* yang parameternya sudah dihilang-kan pada data baris ke-i
$\boldsymbol{r}$	:	Tingkat suku bunga
$\boldsymbol{\theta}$	:	Level rata-rata (*reversion level*)
$\boldsymbol{\sigma}$	:	Volatilitas

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Choliqa, Lisa Sherly. 2022. **Estimasi Parameter Model Suku Bunga *Hull-White* Menggunakan Metode *Jackknife* dan *Ordinary Least Square*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Ria Dhea Layla K.S., M.Si., (II) Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd.

Kata kunci : estimasi, model suku bunga *Hull-White*, metode *Jackknife*, metode *Ordinary Least Square* (OLS), suku bunga Bank Indonesia.

Model suku bunga *Hull-White* merupakan salah satu contoh dari model suku bunga *no-arbitrage*. Nilai suku bunga dalam suatu periode tertentu dapat berubah - ubah atau tidak tetap. Penelitian ini membahas mengenai bentuk estimasi dan hasil estimasi parameter model suku bunga *Hull-White* menggunakan Metode *Ordinary Least Square* dan metode *Jackknife*. Prinsip pada metode *Jackknife* yaitu dengan menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel data yang ada. Data yang digunakan merupakan rata-rata tingkat suku bunga setiap 3 bulan dimulai dari bulan Januari 2014 hingga Desember 2021 sebanyak 32 data. Model suku bunga *Hull-White* yang akan dilakukan estimasi parameter yaitu $dr(t) = \left(\theta - ar(t)\right)dt + \sigma dW(t)$. Setelah dilakukan estimasi parameter, maka model dari suku bunga *Hull-White* berubah menjadi $r(t_{i+1}) \ = r(t_i)(1 - a\Delta t) + \theta\Delta t + \sigma\Delta W_i$. Tahap selanjutnya yaitu mencari nilai dari parameter suku bunga *Hull-White* dengan mengimplementasikan data suku bunga. Nilai parameter model suku bunga *Hull-White* yang diperoleh menggunakan metode *Ordinary Least Square* yaitu parameter a sebesar $0{,}0297$, θ sebesar $0{,}0369$ dan σ sebesar $0{,}3434$. Sedangkan nilai parameter model suku bunga *Hull-White* yang diperoleh menggunakan metode *Jackknife* yaitu parameter a sebesar $0{,}0272$, θ sebesar $0{,}0205$ dan σ sebesar $0{,}3432$.

ABSTRACT

Choliqa, Lisa Sherly. 2022. **Parameter Estimation of Hull-White Interest Rate Model using Jackknife Method and Ordinary Least Square Method .** Thesis. Study Program Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Ria Dhea Layla K.S., M.Si., (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Keywords: estimation, Hull-White Interest Rate Model, Jackknife Method, Ordinary Least Square (OLS) Method, BI interest rate.

The Hull-White interest rate model is an example of a no-arbitrage interest rate model. The value of interest rates in a certain period can change. This study discusses the estimation form and the parameter estimation results of the Hull-White interest rate model using the Ordinary Least Square method and the Jackknife method. The principle of the Jackknife method is to eliminate one piece of data and repeat it as many as the number of the existing data samples. The data used is the average interest rate every three months starting from January 2014 to December 2021 as many as 32 data. The Hull-White interest rate model that will be used for parameter estimation is $dr(t) = \big(\theta - ar(t)\big)dt + \sigma dW(t)$. After parameter estimation, the model of the Hull-White interest rate is $r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - a\Delta t) + \theta\Delta t + \sigma\Delta W_i$. The next stage is to find the value of the Hull-White interest rate parameter by implementing interest rate data. The parameter values of the Hull-White interest rate model obtained using the Ordinary Least Square method are parameter a of 0.0297, θ of 0.0369 and σ of 0.3434. While the parameter values of the Hull-White interest rate model obtained using the Jackknife method are parameter a of 0.0272, θ of 0.0205 and σ of 0.3432.

ملخص

خلق، ليسا سيرلي. **٢٠٢٢. تقدير المعلمة لنموذج سعر الفائدة *Hull-White* باستخدام طريقة *Jackknife***.
البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جا معة مو لا نا مالك ا بر ا هيم ا لإسلا مية ا لحكو مية بما لا نج. المشرفة : (١) ريا دياء ليلا نوركارسما الماجستير (٢) اري كوسوماستوتي الماجستير

الكلمات الرئيسية :تقدير، نموذج سعر الفائدة ***Hull-White***، طريقة ***Jackknife***، طريقة ***Ordinary Least Square***، سعر الفائدة***Bank Indonesia***.

نموذج سعر الفائدة Hull-White هو مثال على نموذج سعر الفائدة بدون المراجحة. يمكن أن تتغير قيمة أسعار الفائدة في فترة معينة. تناقش هذه الدراسة نموذج التقدير ونتائج تقدير المعلمات لنموذج سعر الفائدة Hull-White باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة*Jackknife* . مبدأ طريقة *Jackknife* هو ا لتخلص من جز ء واحدة من البيانات والتكرارها بقدر عدد عينات البيانات الحالية. البيانات المستخدمة هي متوسط سعر الفائدة كل ثلا ثة أشهر ويبدأ شهر من يناير ٢٠١٤ إلى ديسمبر ٢٠٢١ بما يصل إلى ٣٢ بيانات. نموذج سعر الفائدة Hull-White الذي سيتم استخدامه لتقدير المعلمة هو $dr(t) = \big(\theta - ar(t)\big)dt + \sigma dW(t)$. بعد تقدير المعلمة ، يكون نموذج سعر الفائدة Hull-White إلى $r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - a\Delta t) + \theta\Delta t + \sigma\Delta W_i$. تتمثل المرحلة التالية في العثور على قيمة معامل سعر الفائدة $Hull - White$ من خلال تنفيذ بيانات أسعار الفائدة. قيم معلمات نموذج سعر الفائدة Hull-White التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة Ordinary Least Square هي المعلمة a من 0.0297 و θ من 0.0369 و σ من 0.3434. في حين أن قيم لمعلمات نموذج سعر الفائدة Hull-White التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة *Jackknife* هي المعلمة a من 0.0272 و θ من 0.0205 و σ من 0.3432.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Estimasi merupakan sebuah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menaksir atau menduga hubungan parameter yang tidak diketahui. Berdasarkan jenis parameternya, estimasi dibagi menjadi empat jenis yaitu estimasi rata-rata, estimasi proporsi, estimasi varians, dan estimasi simpangan baku. Estimasi dibagi dua berdasarkan cara penyajiannya yaitu estimasi tunggal dan estimasi interval (Hasan, 2002).

Estimasi juga dapat disebut sebagai peramalan atau perkiraan. Peramalan merupakan proses perkiraan besarnya atau jumlah sesuatu pada waktu yang akan datang berdasarkan data pada masa lampau yang dianalisis secara ilmiah khususnya menggunakan metode statistika (Sudjana, 1989). Terdapat salah satu ayat dalam Al-Quran pada surah Yusuf ayat 47 – 48 yang menyinggung mengenai estimasi atau perkiraan yang artinya :

"Yusuf berkata: "supaya kamu bertanam tujuh tahun (lamanya) sebagaimana biasa, maka apa yang kamu tuai hendaknya kamu biarkan dibulirnya kecuali sedikit untuk kamu makan. Kemudian sesudah itu akan datang tujuh tahun yang amat sulit, yang akan menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya (tahun sulit), kecuali dari bibit gandung yang kamu simpan"."

Tafsir Al-Misbah mengemukakan Yusuf berkata, "Takwil mimpi itu adalah bahwa kalian akan bertani gandum selama tujuh tahun berturut-turut dan sungguh-sungguh. Kemudian, ketika kalian menuai hasilnya, simpanlah buah itu bersama tangkainya. Ambillah sedikit saja sekadar cukup untuk kalian makan pada tahun-tahun itu dengan tetap menjaga asas hemat. Setelah tujuh tahun masa subur itu, akan datang tujuh tahun masa kering. Pada saat itu kalian dapat memakan apa yang selama ini kalian simpan, dengan tetap menyisakan sedikit untuk disimpan, guna dijadikan benih pada musim tanam berikutnya,"(M. Quraish Shihab, 2002).

Dunia investasi menjadi salah satu alternatif pilihan yang saat ini banyak digunakan untuk menambah aset kekayaan. Hal ini terlihat pada perkembangan dunia investasi yang sangat pesat belakangan ini. Kegiatan investasi bukan hanya dapat berupa barang, tetapi juga dalam bentuk surat berharga seperti saham ataupun surat hutang (obligasi). Faktor yang berpengaruh sangat besar terhadap sebuah investasi adalah tingkat suku bunga, sehingga perlu dilakukan pemodelan terhadap tingkat suku bunga.

Pemodelan tingkat suku bunga dapat dibentuk melalui dua pendekatan, yaitu melalui model-model tingkat suku bunga derivatif (*interest rate derivatives models*) dan model-model deret waktu (*times series models*). Perkembangan analisis finansial banyak menggunakan konsep stokastik dalam memodelkan suku bunga. Memodelkan suku bunga dapat dilakukan apabila telah diketahui perilaku suku bunga, yaitu probabilitas nilai dari suku bunga tersebut dari waktu ke waktu atau disebut *term structure*. Model *term structure* dibangun dengan cara menentukan nilai suku bunga pada selang waktu yang singkat. Model tingkat suku bunga untuk memprediksi pergerakan suku bunga dalam waktu singkat dibedakan menjadi dua kategori, yaitu model equilibrium dan *no-arbitrage*. Adapun contoh model equilibrium adalah model *Rendlemen-Bartter*, *Vasicek*, dan *Cox-Ingersoll Ross*, dan contoh model *no-arbitrage* adalah model *Ho-Lee*, dan *Hull-White* (Calin, 2012).

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi model suku bunga *Hull-White*. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode *Jackknife*. Metode *Jackknife* adalah suatu metode non parametrik yang mengestimasi bias. Metode *Jackknife* merupakan metode yang baik digunakan untuk menentukan nilai estimasi suatu parameter dan memperkirakan nilai interval konfidensi parameter sehingga dapat digunakan untuk mengestimasi suku bunga *Hull-White*. Metode *Jackknife* juga digunakan untuk mengestimasi variansi sebuah estimasi parameter (Sprent, 1989). Prinsip dari metode *Jackknife* adalah menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak sampel yang ada. Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang menjelaskan tentang metode *Jackknife* dalam mengestimasi parameter.

Ariani, dkk, (2017) dalam penelitiannya tentang perbandingan metode *Bootstrap* dan *Jackknife Resampling* dalam menentukan nilai estimasi dan interval konfidensi parameter regresi, menjelaskan bahwa metode *Jackknife* lebih unggul dari pada metode *Bootstrap*. Nilai *standard error* yang dihasilkan oleh metode *Jackknife* lebih kecil dibanding dengan nilai *standard error* yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* sehingga menyebabkan interval konfidensi *Jackknife* memiliki selisih interval yang lebih sempit dibandingkan dengan interval konfidensi yang dimiliki *Bootstrap*. Rodliyah (2016) dalam penelitiannya tentang perbandingan metode *Bootstrap* dan *Jackknife* dalam mengestimasi parameter regresi berganda menjelaskan bahwa nilai *standard error* tiap koefisien regresi *Jackknife* lebih kecil dibandingkan dengan regresi *Bootstrap*, selain itu selang kepercayaan regresi *Jackknife* lebih sempit dibandingkan dengan regresi *Bootstrap*. Jadi regresi *Jackknife* merupakan metode yang lebih baik untuk mengestimasi parameter regresi linier berganda khususnya untuk metode yang mengabaikan asumsi distribusi.

Penelitian terakhir dilakukan oleh Yoon (2014) yang menjelaskan tentang penggunaan metode Transformasi *Mellin* untuk mendapatkan solusi tertutup opsi tipe Eropa dengan menggunakan model *Black-Scholes* dengan tingkat suku bunga *Hull White*. Suku bunga *Hull-White* digunakan sebagai alat untuk mendapatkan nilai dan persamaan diferensial parsial untuk harga opsi tipe Eropa. Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan tadi, penulis tertarik untuk membahas mengenai estimasi parameter terhadap model suku bunga *Hull-White* dengan menggunakan metode *Jackknife*. Pada penelitian ini menggunakan data suku bunga dari Bank Indonesia mulai Januari 2014 hingga Desember 2021.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah dari penelitian ini yaitu bagaimana hasil estimasi parameter model *Hull-White* dengan metode *Jackknife* dan metode *Ordinary Least Square* pada data suku bunga Bank Indonesia mulai bulan Januari 2014 hingga Desember 2021?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui hasil estimasi parameter model *Hull-White* dengan metode *Jackknife* dan metode *Ordinary Least Square* pada data suku bunga Bank Indonesia mulai bulan Januari 2014 hingga Desember 2021.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Bagi Peneliti

Penelitian ini merupakan kesempatan bagi peneliti untuk mengaplikasikan metode *Jackknife* dengan pengetahuan tentang model *Hull-White*. Selain itu, dapat menjadi pengembangan ilmu pengetahuan khususnya pada bidang Aktuaria.

b. Bagi Pembaca

1. Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pengembangan pembelajaran ekonometri.
2. Sebagai contoh studi kasus mata kuliah pilihan ekonometri yang pernah dipelajari di bangku kuliah.
3. Penelitian ini dapat memberikan metode alternatif tentang estimasi parameter untuk model-model suku bunga yang lain.

c. Bagi Lembaga

1. Penelitian ini dapat meningkatkan pengembangan wawasan keilmuan matematika.
2. Membandingkan penelitian yang sudah ada dengan metode lain.
3. Menerapkan dan mengaktualisasikan ilmu matematika khususnya pada ekonometri.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu parameter yang dicari adalah parameter a, θ dan σ.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Suku Bunga *Hull-White*

Model suku bunga *Hull-White* adalah model suku bunga masa depan. Model suku bunga ini termasuk dalam suku bunga *no-arbitrage* yang dapat disesuaikan dengan struktur suku bunga saat ini. Model suku bunga *Hull-White* juga sering disebut dengan model *Hull-White Extended Vasicek*, karena model suku bunga *Hull-White* merupakan bentuk umum dari model *Vasicek*. Model *short rate* dari suku bunga *Hull-White* sebagai berikut (Hull, 1946):

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW(t) \tag{2.1}$$

atau

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dW(t) \tag{2.2}$$

dimana:

r : suku bunga

a : kelajuan r menuju level θ

θ : level rata-rata (*reversion level*)

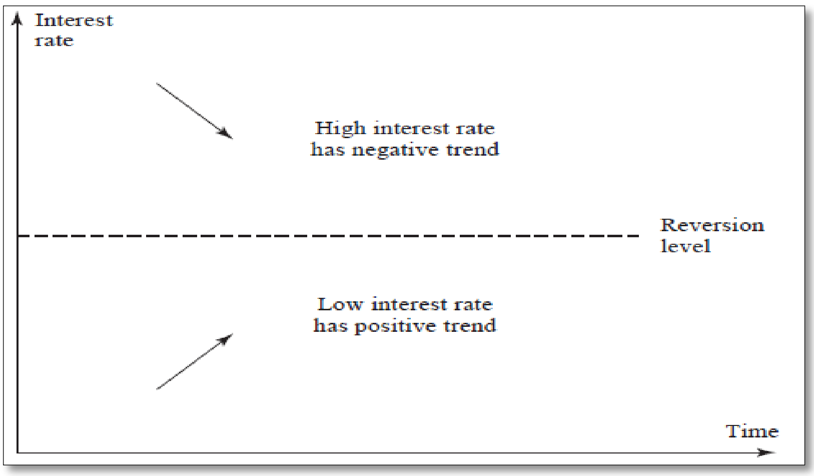
σ : simpangan baku sesaat dari r

$W(t)$: proses *Wiener*

Hal terpenting dari model ini adalah *mean reversion*, yaitu suatu kecenderungan nilai $r(t)$ berada di sekitar level rata-rata atau dapat dikatakan bahwa tingkat suku bunga bergerak dalam range terbatas. Faktor *drift* model *Hull-White* adalah $(\theta - ar(t))$. Oleh karena itu, suku bunga jangka pendek adalah *mean revertion* dengan *mean* jangka panjang θ. Saat suku bunga mendekati nol maka volatilitas σ mendekati nol yang dapat membatalkan pengaruh secara acak, sehingga suku bunga tetap selalu positif. Ketika tingkat bunga tinggi maka volatilitasnya tinggi dan ini adalah sifat yang diinginkan (Zeytun dan Gupta, 2007).

Sebuah argumentasi ekonomi yang mendukung mengenai *mean reversion* menyatakan bahwa ketika suku bunga tinggi, ekonomi cenderung melambat dan mengakibatkan rendahnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu, suku bunga akan ditarik kembali ke nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan naiknya permintaan dana dari peminjam. Teori *mean reversion* sangat tepat untuk menggambarkan tingkat suku bunga, karena jika tanpa teori tersebut, pergerakan suku bunga dapat meningkat secara permanen seperti halnya harga saham, yang di dalam kehidupan nyata seharusnya tingkat suku bunga bergerak secara tidak permanen (dapat naik ataupun turun dalam periode tertentu) (Zeytun dan Gupta, 2007).

Teori *mean reversion* ditunjukkan pada Gambar 2.1 (Hull, 1946).



Gambar 2.1 Mean Reversion

Gambar 2.1 menunjukkan tentang *Mean Reversion*. Apabila suku bunga tinggi, ekonomi cenderung akan melambat. Oleh karena itu, suku bunga akan kembali menuju nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan meningkatnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu, suku bunga juga akan kembali menuju nilai keseimbangannya.

2.1.2 Estimasi Parameter

Parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi. Hasan (2002) berpendapat bahwa parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu sistem persamaan. Sedangkan pendugaan (estimasi) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkirakan hubungan parameter populasi yang tidak diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Sehingga, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Penduga (*estimator*) adalah suatu statistik (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Pendugaan dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak diketahui berada di sekitar sampel. Secara umum, parameter dinyatakan dengan θ dan penduga dinyatakan dengan $\hat{\theta}$. Berikut ini beberapa parameter dan penduganya (Hasan, 2002):

Tabel 2.1 Parameter dan Penduganya

Parameter (θ)	Penduga ($\hat{\theta}$)
μ(rata-rata populasi)	$\bar{X}$ atau $\hat{\mu}$
π (populasi/presentase)	$\hat{p}$
σ^2 (varians)	S^2 atau $\hat{S}^2$
σ (simpangan baku)	S atau $\hat{S}$
ρ (koefisien korelasi)	ρ atau $\hat{r}$
β (koefisien regresi)	β atau $\hat{b}$

Penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk variabel acak dan memiliki distribusi pemilihan sampel (Hasan, 2002). Terdapat beberapa sifat untuk menentukan apakah sebuah penduga tergolong baik atau tidak. Suatu penduga dikatakan baik apabila memiliki sifat berikut:

a. Tak Bias (*Unbiased*)

Estimator tidak bias jika untuk setiap ukuran sampel n, nilai rata-rata estimator atas semua sampel yang mungkin adalah nilai parameter populasi. Semua estimator adalah jumlah acak. Beberapa sampel, penaksiran terlalu besar dan untuk sampel lain penaksir yang sama akan terlalu kecil. Rata-rata estimator yang tidak bias akan tepat. Misalkan *T* adalah statistik sampel, digunakan sebagai penduga untuk parameter populasi θ, jadi $\hat{\theta}$ = T. Bias dari estimator *T* adalah $E[T] - \theta$, yang merupakan nilai rata-rata yang diharapkan atau T minus nilai sebenarnya dari parameter populasi θ. Estimator T dikatakan tidak bias jika $E[T] = \theta$ (Sleeper, 2006).

b. Konsisten

Estimator konsisten jika seiring n bertambah besar, penaksir akan mendekati nilai parameter populasi sebenarnya. Jika sampel ukuran tak terbatas dapat dianalisis, penaksir yang konsisten memberikan nilai parameter populasi yang tepat, sedangkan penaksir yang tidak konsisten tidak akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat. Misalkan sampel ukuran *n* dipilih dari suatu populasi. θ menjadi parameter populasi, dan biarkan T_n menjadi penaksir θ berdasarkan sampel ukuran *n*, T_n membentuk urutan penaksiran *n* bertambah besar. Urutan estimator T_n dikatakan konsisten jika untuk setiap nilai$a > 0$ dan untuk setiap kemungkinan θ. $P[|T_n - \theta| > a] \to 0$ dengan $n \to \infty$ (Sleeper, 2006).

A. Gerak *Brown* dan Proses *Wiener*

Gerak *Brown* adalah gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan dalam suatu fluida (cair ataupun gas). Gerak ini dinamakan gerak *Brown* karena yang pertama kali mengamati adalah seorang botanis asal Skotlandia bernama Robert Brown pada tahun 1827. Menggunakan mikroskop, Brown menemukan gejala gerak acak saat mengamati partikel dari serbuk sari ketika dilarutkan dalam air dimana partikel menyebar ke segala arah dengan lintasan yang tidak teratur. Brown kemudian mengambil kesimpulan bahwa lintasan dari gerak partikel sangat tidak teratur dan gerakan akan semakin cepat bila temperatur dinaikkan (Taylor dan Karlin,1998).

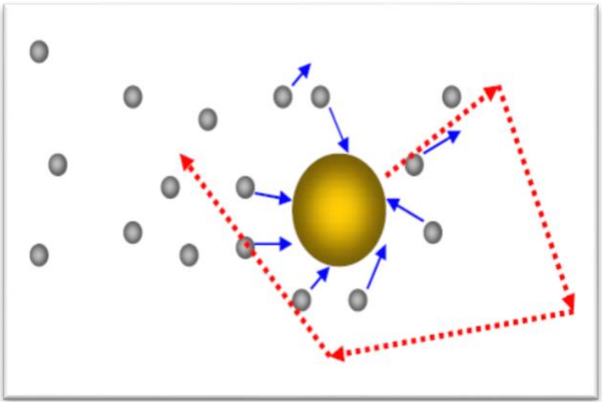
Setelah Brown, seorang peneliti bernama Gouy melakukan eksperimen untuk membuktikan keberadaan gerak *Brown* dan mendapatkan kesimpulan sebagai berikut (Taylor dan Karlin,1998):

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.
2. Dua partikel nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibandingkan diameter mereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk partikel yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan partikel.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.

7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

Penelitian dari kedua ilmuwan tersebut tidak memberikan penjelasan mengenai penyebab gerak *Brown* namun hanya menyatakan sifat-sifat gerak Brown tersebut. Penjelasan mengenai asal usul gerak *Brown* pertama kali dilakukan oleh Einstein. Melalui disertasinya, Einstein mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari tersebut berasal dari tumbukan molekul-molekul penyusun fluida yang bergerak terus-menerus dalam fluida dan pergerakan dari partikel serbuk sari sangat tidak teratur sehingga hanya dapat dijelaskan menggunakan konsep probabilistik (Taylor dan Karlin,1998).

Perhatikan gambar skema dari gerak *Brown* berikut (Ahmadi,2002):

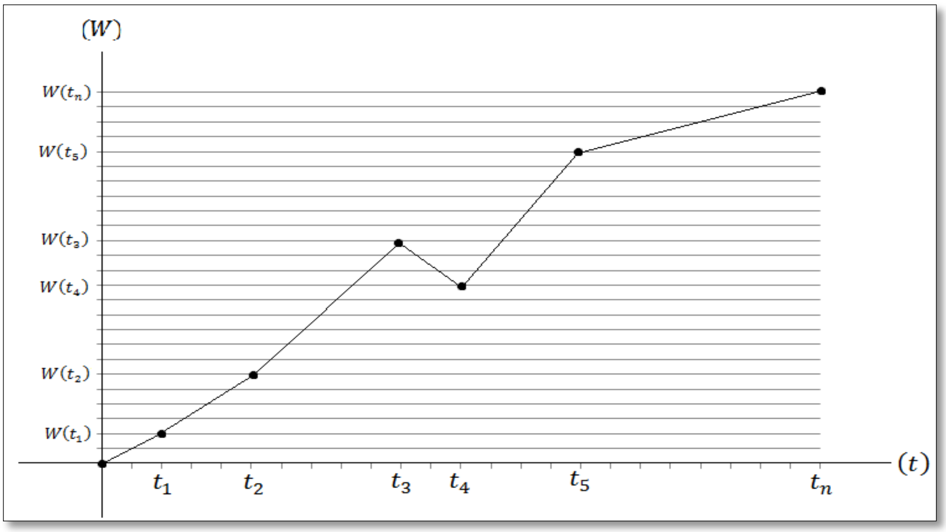


Gambar 2.2 Skema Gerak Brown

Gambar 2.2 merupakan gambar dari Gerak *Brown*. Misalkan partikel yang terlihat pada gambar tersebut, bergerak naik kekanan, turun ke kanan, turun kekiri, dan naik kekiri yang ditunjukkan dengan anak panah merah secara acak. Hal tersebut menunjukkan partikel-partikel zat cair ataupun gas bergerak terus menerus secara acak atau tidak beraturan.

Wiersema (2008) berpendapat bahwa proses *Wiener* adalah bentuk dari proses stokastik pada waktu kontinu, terdefinisi pada ruang keadaan, tidak ada pengaruh gaya luar serta berangkat dari waktu dan posisi 0. Sesuai definisi di atas, proses stokastik $W(t)$disebut gerak *Brown* jika memenuhi:

1. $W(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka $W(0) = 0$
2. $W(t)$ memiliki kenaikan yang independen, yakni untuk setiap $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ merupakan kumpulan peubah acak yang independen atau saling bebas.



Gambar 2.3 Grafik Kenaikan yang Independen

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa kenaikan yang dimiliki tidak selalu naik, kenaikan yang dimiliki gambar tersebut bersifat independen atau kenaikannya bebas sehingga bisa turun bisa saja naik.

3. Setiap pergerakan atau kenaikan yang terjadi pada interval waktu dengan panjang $0 \leq t < t + dt$ hampir semua lintasan sampel dari $W(t + dt) - W(t) = dW(t)$ berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi sama dengan panjang interval waktu tersebut.

B. Proses Stokastik

Ross (2010) berpendapat bahwa sebuah proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah kumpulan variabel acak, untuk setiap $t \in T, X(t)$ adalah variabel acak.

t didefinisikan sebagai waktu. $X(t)$ didefinisikan sebagai proses pada waktu t. Contoh untuk proses stokastik adalah $X(t)$ merupakan jumlah total pelanggan yang telah memasuki supermarket pada waktu t.

Himpunan T disebut himpunan indeks dari proses. Ketika T adalah himpunan yang dapat dihitung, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses diskrit. Contoh, $\{X_n, n = 0,1, \dots\}$ adalah proses stokastik diskrit yang indeksnya oleh bilangan bulat non negatif. Ketika T adalah interval pada garisnya, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu kontinu. Contoh $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses stokastik kontinu yang indeksnya oleh bilangan real non-negatif (Ross, 2010).

Wiersema (2008) berpendapat bahwa sebuah proses stokastik $\{W(t), t \geq 1\}$ disebut sebagai proses *Wiener* jika memenuhi beberapa syarat, salah satunya yaitu fungsi kepadatan peluang dari variabel random yang berdistribusi normal, dengan rata-rata adalah μ dan variansi σ^2 adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2.3}$$

Kumpulan dari sebuah proses *Wiener* pada interval $[t, t + dt]$berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi sama dengan panjang interval. Fungsi distribusi dari kenaikan tersebut ditulis sebagai berikut:

$$P[W(t+dt) - W(t) \leq a] = \int_{x=-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{dt}\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{dt}}\right)^2\right] dx \tag{2.4}$$

Kovarians dari proses *Wiener* pada waktu s dan t dimana $s < t$ merupakan nilai harapan dari variabel random tersebut, yaitu:

$$Cov[W(s), W(t)] = E[\{W(s) - E[W(s)]\}\{W(t) - E[W(t)]\}] \tag{2.5}$$

Jika mengikuti syarat dari proses *Wiener* nilai dari $E[W(s)]$dan $E[W(t)]$ adalah 0, sehingga

$$Cov[W(s), W(t)] = E[W(s)W(t)] \quad (2.6)$$

Dengan sedikit modifikasi pada $W(t)$ maka dapat ditulis:

$$W(t) = W(s) + \{W(t) — W(s)\} \quad (2.7)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
E[W(s)W(t)] &= Cov(W(s)W(t)) \\
&= E[\{W(s) - E(W(s))\}\{W(t) - E(W(t))\}] \\
&= E[\{W(s) - E(W(s))\}\{W(s) + (W(t) - W(s)) - E(W(s) \\
&\qquad + (W(t) - W(s))\}] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s)^2) - E(W(s)^2 \\
&\qquad + (W(s)W(t) - W(s)^2) - E(W(s)^2 \\
&\qquad + E(W(s)W(t) - W(s)^2) + (E\big(W(s)\big)^2 \\
&\qquad + E(W(s)W(t) - W(s)^2)] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s)) - 0] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s))] \\
&= E[W(s)^2 + W(s)\{W(t) - W(s)\}] \\
&= E[W(s)^2] + E[W(s)]E[W(t) - W(s)] \\
&= s + 0 \\
&= s \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Apabila $t < s$ maka $E[W(s)W(t)] = t$ untuk sembarang waktu s dan t sehingga ditulis

$$E[W(s)W(t)] = \min(s, t) \quad (2.9)$$

C. Proses Ito

Jenis selanjutnya dari proses stokastik dikenal dengan proses *Ito*. Proses *Ito* adalah proses *Wiener* umum dimana parameter a dan b adalah fungsi-fungsi dari nilai variabel yang yang bersangkutan x dan waktu t, yaitu (Hull, 1946):

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW(t) \tag{2.10}$$

Baik laju drift maupun laju varians dari proses *Ito* dapat berubah dari waktu ke waktu. Interval waktu yang kecil antara t dan $t + \Delta t$, variabelnya berubah dari x ke $x + \Delta x$, dimana

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.11}$$

Hubungan ini melibatkan perkiraan yang kecil. Diasumsikan bahwa laju drift dan laju varians x tetap konstan, nilai-nilainya sama pada waktu t, selama interval waktu antara t dan $t + \Delta t$ (Hull, 1946).

Menurut Øksendal (2000) bentuk umum dari persamaan diferensial stokastik adalah sebagai berikut:

$$dXt = b(t, Xt)dt + \sigma(t, Xt)dWt \tag{2.12}$$

atau bisa juga ditulis dalam bentuk integral stokastik

$$\int_0^t dX(t) = \int_0^t b\big(s, X(s)\big)ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dWs$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b\big(s, X(s)\big)ds + \int_0^t \sigma\big(s, X(s)\big)dWs$$

$$Xt = X(0) + \int_0^t b(s, Xs)ds + \int_0^t \sigma(s, Xs)dWs$$

Terdapat istilah *Ito Isometri*, yaitu fakta penting tentang integral stokastik *Ito* . Salah satu aplikasi utamanya adalah untuk memungkinkan penghitungan varian untuk variabel acak yang diberikan sebagai *Ito* integral. Terdapat $W: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ menunjukkan proses *Wiener* bernilai real kanonik yang ditentukan hingga waktu $T > 0$, dan terdapat $X: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ menjadi proses stokastik yang disesuaikan dengan filtrasi alami dari proses *Wiener*. *Ito Isometri* dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(t)\, dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2\, dt\right] \tag{2.13}$$

dimana $\mathbb{E}$ menunjukkan ekspektasi sehubungan dengan ukuran Wiener klasik (Øksendal, 2000).

D. Metode Euler-Maruyama

Metode Euler-Maruyama atau juga biasa disebut metode Euler adalah metode untuk solusi numerik perkiraan persamaan diferensial stokastik (SDE). Ini adalah generalisasi sederhana dari metode Euler untuk persamaan diferensial biasa untuk persamaan diferensial stokastik. Metode ini dinamai Leonhard Euler dan Gisiro Maruyama. Sayangnya, generalisasi yang sama tidak dapat dilakukan untuk metode deterministic sewenang-wenang (Allen, 2010).

Menurut Allen (2010), berdasarkan persamaan diferensial stokastik pada (2.12), metode *Euler-Maruyama* memperkirakan $X(t)$ berada pada titik pasti t_i, $X(t_i) \approx X_i$ pada interval $[0, T]$. Rumus umum dari metode *Euler-Maruyama* adalah sebagai berikut:

$$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\sqrt{\Delta t} Z_i \tag{2.14}$$

dimana $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ dan $Z_i \sim N(0,1)$.

Metode *Euler-Maruyama* diaplikasikan ke dalam persamaan diferensial stokastik sebagai berikut :

$$dX(t) = dW(t)$$

dimana $X(0) = W(0) = 0$. Solusi dari $X(t) = W(t)$ adalah proses *Wiener*. Metode Euler-Maruyama untuk persamaan diferensial stokastik adalah (Allen, 2010) :

$$X_{i+1} = X_i + \sqrt{\Delta t}Z_i$$

2.1.3 Metode *Ordinary Least Square*

Ordinary Least Square (OLS) adalah regresi menggunakan metode kuadrat kesalahan terkecil yang sederhana. OLS adalah keluarga estimator *Least Square* yang paling sederhana. Estimator ini memiliki banyak asumsi yang harus dipenuhi agar didapatkan hasil regresi yang tidak bias, konsisten, dan efisien. Metode estimator *Least Square* pada prinsipnya menentukan nilai parameter dengan cara meminimumkan kuadrat kesalahan (Ekananda, 2005).

Menurut Aziz (2010), misalkan model statistik linier

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta_1 X_1} + \boldsymbol{\beta_2 X_2} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k X_k} + \boldsymbol{e} \tag{2.15}$$

dimana variabel terikat $\boldsymbol{y}$ bergantung kepada variabel bebas $\boldsymbol{X}$ sebesar $\boldsymbol{\beta}$, dengan sejumlah n data observasi maka model linier ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

sehingga model ini dapat disederhanakan sebagai

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e} \tag{2.16}$$

Menurut Aziz (2010), berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel *e* sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel e adalah sama dengan nol atau

$$E(e) = 0$$

yang berarti nilai bersyarat e yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai x. Sehingga, untuk nilai x tertentu mungkin saja nilai e sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk banyak nilai x secara keseluruhan nilai rata-rata e diharapkan sama dengan nol.

2. Tidak terdapat korelasi serial atau *autokorelasi* antar variabel untuk setiap observasi. Sehingga dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negatif antara e_i dan e_j, dan tidak terdapat *heteroskedastisitas* antar variabel e untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel e memenuhi syarat *homoskedastisitas.* Artinya variabel e mempunyai variansi yang positif dan konstan yang nilainya σ^2, yaitu

$$Var(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\boldsymbol{cov(e)} = \begin{bmatrix} var(e_1) & cov(e_1, e_2) & \dots & cov(e_1, e_n) \\ cov(e_2, e_1) & var(e_2) & \dots & cov(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(e_n, e_1) & cov(e_n, e_2) & \dots & var(e_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$Cov(e) = E\left[\left(e - E(e)\right)(e - E(e))'\right] = E(ee') = \sigma^2 I_n \qquad (2.17)$$

3. Variabel x dan variabel e adalah saling tidak tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Cov}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{e_i}) &= \boldsymbol{E}\big[\big(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x_i})\big)\big(\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{e_i})\big)\big] \\ &= \boldsymbol{E}[(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{0})] \\ &= \boldsymbol{E}[(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e_i}] \\ &= \boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{2.18}$$

sehingga berdasarkan ketiga asumsi diperoleh,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X\beta}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{e}) \\ &= \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{X\beta}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}Cov(y) &= E\left[\big(y - E(y)\big)\big(y - E(y)\big)'\right] \\ &= E[(y - X\beta)(y - X\beta)'] \\ &= E[(X\beta + e - X\beta)(X\beta + e - X\beta)'] \\ &= E[ee'] \\ &= \sigma^2 I_n\end{aligned}$$

Misalkan sampel untuk $\boldsymbol{y}$ diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari $\boldsymbol{\beta}$ adalah dengan membuat $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}$ sekecil mungkin. Aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematik yang lebih berperan dari pada komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang $\boldsymbol{y}$, dengan kata lain $\boldsymbol{X}$ tidak mampu menjelaskan $\boldsymbol{y}$. Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter $\boldsymbol{\beta}$ sehingga,

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2.19}$$

sekecil mungkin (minimal) (Aziz, 2010).

Persamaan (2.19) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Akibatnya, transpose skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= (\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta})' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{2\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama $\boldsymbol{S}$ terhadap β (Aziz, 2010):

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{\beta}} &= 0 - 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})' \\ &= -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \end{aligned} \tag{2.21}$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2.22}$$

yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2.23}$$

yang dinamakan sebagai penaksir (estimator) parameter β secara kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*).

Selanjutnya, karena mencari nilai minimum dari errornya, maka dilakukan turunan parsial kedua S terhadap β yang harus bernilai lebih besar dari nol :

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\beta}'}\left(\frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{\beta}}\right) = \frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{\beta}'}(-2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= 0 + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

$$= 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \qquad (2.24)$$

dimana $2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} > 0$.

2.1.4 Metode *Jackknife*

Metode *Jackknife* pertama kali diperkenalkan oleh Quenouille (1949) dengan tujuan untuk estimasi bias sedangkan *Jackknife* untuk menduga standar deviasi dikenalkan oleh Tukey (1958). Prinsip metode *Jackknife* adalah dengan cara menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel data yang ada. Berikut prosedur dari metode *Jackknife* yang digunakan untuk estimasi parameter dengan menghilangkan satu buah data (Sprent, 1989):

Mengambil sampel sebanyak $n-1$ secara random, dimana (Sprent, 1989)

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nj} \end{bmatrix}$ merupakan sampel yang sebenarnya.

Tahapan selanjutnya pada *Jackknife* yaitu menghilangkan satu baris dari vektor, untuk *Jackknife* menghilangkan baris yang pertama pada vektor sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y^1} = \begin{bmatrix} y_2^1 \\ y_3^1 \\ \vdots \\ y_n^1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{X^1} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21}^1 & X_{22}^1 & \cdots & X_{2j}^1 \\ 1 & X_{31}^1 & X_{32}^1 & \cdots & X_{3j}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1}^1 & X_{n1}^1 & \cdots & X_{nj}^1 \end{bmatrix} \qquad (2.25)$$

Data yang sudah dihilangkan baris pertama pada vektor disebut data *Jackknife* dan dapat dinotasikan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y^i} = \begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \vdots \\ y_n^i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^i} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11}^i & X_{12}^i & \cdots & X_{1j}^i \\ 1 & X_{21}^i & X_{22}^i & \cdots & X_{2j}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{(n-1)1}^i & X_{(n-1)2}^i & \cdots & X_{(n-1)j}^i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e^i} = \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ \vdots \\ e_n^i \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

dimana :

$\boldsymbol{y^i}$ = matriks dari variabel terikat data yang sudah dihilangkan baris ke-i yang berukuran $(n-1)x1$

$\boldsymbol{X^i}$ = matriks dari variabel bebas data yang sudah dihilangkan baris ke-*i* yang berukuran $(n-1)x\ (j+1)$

$\boldsymbol{\varepsilon^i}$ = matriks dari variabel galat acak data yang sudah dihilangkan baris ke-*i* yang berukuran $(n-1)x1$

Estimasi parameter $\boldsymbol{\widehat{\beta}^i}$ dicari menggunakan metode kuadrat terkecil guna untuk meminimumkan jumlah kuadrat *error* seperti pada persamaan (2.19) – persamaan (2.22) sehingga diperoleh nilai estimasi $\boldsymbol{\widehat{\beta}^i}$ sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\widehat{\beta}^i} = (\boldsymbol{X^{i\prime}X^i})^{-1}\boldsymbol{X^{i\prime}y^i} \tag{2.27}$$

Langkah selanjutnya yaitu pengambilan sampel yang sebenarnya seperti pada persamaan (2.15) Kemudian baris kedua dihilangkan dan diestimasi parameternya menggunakan persamaan (2.25) Secara analog diterapkan pada baris ketiga hingga ke-*n*. maka diperoleh parameter *Jackknife* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{n}}$. Estimasi parameter *Jackknife* didapatkan dengan mencari nilai rata-rata dari setiap parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{n}}$ sebagai berikut (Ariani, 2017):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i}^{n} \frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}}{n} \tag{2.28}$$

dimana :

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ = estimasi dari metode *Jackknife*

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$ = estimasi ke-*i* dari metode *Jackknife*

n = banyaknya data

2.1.5 Uji Asumsi Klasik

a. Uji Normalitas

Uji normalitas adalah untuk melihat apakah nilai residual berdistribusi normal atau tidak. Model regresi yang baik adalah memiliki nilai residual yang berdistribusi normal. Jadi uji normalitas bukan dilakukan pada masing-masing variabel tetapi pada nilai residualnya. Uji normalitas dapat dilakukan dengan uji histogram, uji normal *P Plot*, uji *Chi Square*, *Skewness* dan *Kurtosis* atau uji *Kolmogorov Smirnov* (Sunjoyo dkk, 2013).

Uji normalitas bertujuan untuk menguji apakah dalam model regresi, variabel pengganggu atau residual memiliki distribusi normal. Ada dua cara untuk mendeteksi apakah residual berdistribusi normal atau tidak yaitu dengan analisis grafik dan uji statistik. Uji statistik yang digunakan untuk menguji normalitas residual adalah dengan uji *Kolmogorov Smirnov* (Ghozali, 2009).

Salah satu metode uji normalitas data yaitu menggunakan *One Sample Kolmogorov Smirnov Test*, dengan membandingkan *Asymptotic Significance* dengan α = 5%. Hipotesis yang diuji adalah:

H_0: Data berdistribusi normal

H_1: Data tidak berdistribusi normal

Kriteria uji normalitas:

Apabila p-*value* (*Asymp Sig*) > 0,05 maka H_0 diterima, sedangkan apabila p-*value* (*Asymp Sig*) ≤ 0,05 maka H_0 ditolak.

b. Uji Multikolinieritas

Uji multikolinearitas adalah untuk melihat ada atau tidaknya korelasi yang tinggi antara variabel-variabel bebas dalam suatu model regresi linier berganda. Jika ada korelasi yang tinggi di antara variabel-variabel bebasnya, maka hubungan antara variabel bebas terhadap variabel terikatnya menjadi terganggu. Jadi tidak boleh ada korelasi yang tinggi antara variabel bebas. Alat statistik yang sering dipergunakan untuk menguji gangguan multikolinearitas adalah dari aspek berikut ini:

a) Jika nilai VIF tidak lebih dari 10 dan nilai *Tolerance* tidak kurang dari 0,1, maka model dapat dikatakan terbebas dari multikolinearitas, VIF = 1/*Tolerance*, jika VIF = 10, maka *Tolerance* 1/10 = 0,1. Semakin tinggi VIF maka semakin rendah *Tolerance*.

b) Jika nilai koefisien korelasi antar masing-masing variabel independen kurang dari 0,70, maka model dapat dinyatakan bebas dari multikolinearitas, jika nilai korelasi lebih dari 0,70 berarti terjadi korelasi yang sangat kuat antar variabel independen sehingga terjadi multikolinearitas.

c) Jika nilai koefisien determinan, baik R^2 ataupun *adjusted* R^2 diatas 0,60 namun tidak ada variabel independen yang berpengaruh terhadap variabel dependen, maka diasumsikan model terkena multikolinearitas (Sunjoyo dkk, 2013).

Uji multikolinearitas bertujuan untuk menguji apakah model regresi ditemukan adanya korelasi antar variabel bebas (independen). Model regresi yang baik seharusnya tidak terjadi korelasi di antara variabel independen. Jika variabel independen saling berkorelasi, maka variabel-variabel ini tidak ortogonal. Variabel ortogonal adalah variabel independen yang nilai korelasi antar sesama variabel independen sama dengan nol (Ghozali ,2009).

c. Uji Autokorelasi

Uji autokorelasi adalah untuk melihat apakah terjadi korelasi antara suatu periode ke-t dengan periode sebelumnya (t-1). Secara sederhana adalah bahwa analisis regresi adalah untuk melihat pengaruh antara variabel bebas terhadap variabel terikat, jadi tidak boleh ada korelasi antar observasi dengan data observasi sebelumnya. Uji autokorelasi hanya dilakukan pada data *time series* (runtut waktu) dan tidak perlu dilakukan pada data *cross section*. Model regresi pada penelitian di Bursa Efek Indonesia dimana periodenya lebih dari satu tahun biasanya memerlukan uji autokorelasi (Sunjoyo dkk, 2013).

Uji autokorelasi bertujuan untuk menguji apakah dalam model regresi linear ada korelasi antara kesalahan pengganggu pada periode ke-t dengan kesalahan pengganggu pada periode ke-(t-1) (sebelumya). Jika terjadi korelasi, maka dinamakan ada *problem* autokorelasi. Autokorelasi muncul karena observasi yang berurutan sepanjang waktu berkaitan satu sama lainnya. Masalah ini timbul karena residual (kesalahan pengganggu) tidak bebas dari satu observasi ke observasi lainnya. Hal ini sering ditemukan pada data *time series* (Ghozali, 2009).

Untuk mendeteksi ada atau tidaknya autokorelasi dapat dilakukan dengan cara *Run Test*. *Run Test* sebagai bagian dari statistika non-parametrik dapat digunakan untuk menguji apakah antar residual terdapat korelasi yang tinggi. Jika antar residual tidak terdapat hubungan korelasi maka dikatakan bahwa residual adalah acak atau *random*. *Run Test* digunakan untuk melihat apakah data residual terjadi secara *random* atau tidak (Ghozali, 2009). Hipotesis pengujian:

H_0 : Residual (Res_1) *random* → tidak terjadi autokorelasi

H_1 : Residual (Res_1) tidak *random* → terjadi autokorelasi

Kriteria:

Apabila *Asymp sig* $>$ α maka H_0 diterima (data tidak terjadi autokorelasi), sedangkan apabila *Asymp sig* $\leq \alpha$ maka H_0 ditolak (data terjadi autokorelasi).

d. Uji Heteroskedastisitas

Uji heteroskedastisitas adalah untuk melihat apakah terdapat ketidaksamaan varians dari residual satu pengamatan ke pengamatan lain. Model regresi yang memenuhi persyaratan adalah dimana terdapat kesamaan varians dari residual satu pengamatan ke pengamatan lain tetap atau disebut homoskedastisitas. Deteksi heteroskedastisitas dapat dilakukan dengan metode scatter plot dengan memplotkan nilai ZPRED (nilai prediksi) dengan nilai SRESID (nilai residualnya). Model yang baik didapatkan jika tidak terdapat pola tertentu pada grafik, seperti mengumpul di tengah, menyempit kemudian melebar atau sebaliknya melebar kemudian menyempit (Sunjoyo,2013).

Menurut Ghozali (2013) salah satu cara untuk mendeteksi ada tidaknya heteroskedastisitas adalah dengan melakukan uji Glejser. Uji Glejser mengusulkan untuk meregres nilai absolut residual terhadap variabel independen. Dasar pengambilan keputusan sebagai berikut:

a. Jika nilai *sig.* $\geq$ 0,05 maka H_0 diterima yang artinya tidak terdapat masalah heteroskedastisitas.
b. Jika nilai *sig.* $\leq$ 0,05 maka H_0 ditolak yang artinya terdapat masalah heteroskedastisitas.

2.1.6 Penelitian Terdahulu

Yoon (2014) yang menjelaskan tentang penggunaan metode Transformasi *Mellin* untuk mendapatkan solusi tertutup opsi tipe Eropa dengan menggunakan model *Black-Scholes* dengan tingkat suku bunga *Hull White*. Suku bunga *Hull-White* digunakan sebagai alat untuk mendapatkan nilai dan persamaan diferensial parsial untuk harga opsi tipe Eropa. Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu dengan menggunakan tingkat suku bunga *Hull-White* dapat diperoleh solusi tertutup opsi tipe Eropa.

Rodliyah (2016) telah melakukan penelitian tentang perbandingan metode *Bootstrap* dan *Jackknife* dalam mengestimasi parameter regresi berganda. Data yang digunakan adalah rincian dari 40 mobil yang memuat jarak tempuh mobil yang didukung oleh gallon bahan bakar (MGP), kecepatan tertinggi mobil (SP), tenaga kuda mesin mobil (HP) dan berat mobil (WT). Nilai dari standar *error* parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ pada metode Jackknife secara berurutan adalah 85,1812, 0,912296, 0,427649 dan 1,01314. Nilai dari standar *error* parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ pada metode Bootstrap secara berurutan adalah 87,9758, 0,942178, 0,447012 dan 1,06151. Jadi standar *error* yang dihasilkan oleh metode Jackknife lebih kecil dari metode *Bootstrap* sehingga *Jackknife* merupakan metode yang lebih baik untuk mengestimasi parameter regresi linier berganda khususnya untuk metode yang mengabaikan asumsi distribusi.

Ariani, dkk, (2017) telah melakukan penelitian tentang perbandingan metode *Bootstrap* dan *Jackknife Resampling* dalam menentukan interval konfidensi parameter regresi. Data yang digunakan adalah data posisi simpanan masyarakat pada tahun 2009 – 2015. Nilai dari interval konfidensi parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ pada metode Jackknife secara berurutan adalah -157,611, 0,30, 0,45 dan 1,04. Nilai dari interval konfidensi parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ pada metode Bootstrap secara berurutan adalah -221,354, 0,25, 0,40 dan 0,97. Nilai interval konfidensi yang dihasilkan oleh metode *Jackknife* memiliki selisih interval yang lebih sempit dibandingkan dengan interval konfidensi yang dimiliki *Bootstrap*.

Yunizar (2019) telah menentukan solusi rekursif pada model suku bunga dengan menggunakan metode *Jackknife*. Model *Hull-White* pada persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial stokastik. Cara memperoleh penyelesaian model *Hull-White* tersebut dengan mengubah ke dalam persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
dr\,(t) &= \big(\theta - ar(t)\big)dt + \sigma dW(t) \\
&= \theta dt - ar(t)dt + \sigma dW(t)
\end{aligned}
$$

$$dr\,(t) + ar(t)dt = \theta dt + \sigma dW(t) \tag{2.29}$$

Mencari solusi khusus dari kedua ruas pada persamaan (2.29) dilakukan dengan mengalikan dengan e^{at}, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$e^{at}(dr\,(t) + ar(t)dt) = e^{at}\big(\theta dt + \sigma dW(t)\big)$$

$$e^{at}dr\,(t) + ae^{at}r(t)dt = \theta e^{at}dt + \sigma e^{at}dW(t)$$

Mengikuti aturan perkalian dalam menentukan turunan, maka persamaan (2.29) dimisalkan terlebih dahulu,

$$u = e^{at}$$

$$du = ae^{at}dt$$

$$v = r(t)$$

$$dv = dr(t)$$

$$d(u.v) = d\big(e^{at}r(t)\big)$$

Sehingga persamaan (2.29) berubah bentuk menjadi sebagai berikut:

$$d\big(e^{at}r(t)\big) = \theta e^{at}dt + \sigma e^{at}dW(t) \qquad (2.30)$$

Kemudian kedua ruas pada persamaan (2.30) diintegralkan dengan batas $[0, t]$ yaitu:

$$\int_0^t d(e^{as}r(s)) = \int_0^t \theta e^{as}ds + \int_0^t \sigma e^{as}dW(s)$$

$$e^{at}r(t) - e^{a(0)}r(0) = \int_0^t \theta e^{as}ds + \int_0^t \sigma e^{as}dW(s)$$

$$e^{at}r(t) - 1 \cdot r(0) = \theta\int_0^t e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW(s)$$

$$e^{at}r(t) = r(0) + \theta\int_0^t e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW(s)$$

$$r(t) = e^{-at}\left(r(0) + \theta\int_0^t e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW(s)\right)$$

$$= r(0)e^{-at} + \theta e^{-at}\int_0^t e^{as}ds + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-at} + \theta e^{-at}\left(\frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}e^{a0}\right) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-at} + \left(\theta e^{-at}\frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}\theta e^{-a0}\right)$$

$$+\sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-at} + \left(\theta\frac{1}{a} - \theta e^{-at}\frac{1}{a}\right) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-at} + \frac{\theta}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s)$$

Jadi, solusi rekursif dari model *Hull-White* adalah

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \frac{\theta}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW(s) \qquad (2.31)$$

Setelah memperoleh solusi dari model *Hull-White*, persamaan model *Hull-White* didiskritisasi menggunakan metode *Euler* seperti berikut:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

sehingga diperoleh

$$dr(t) = \big(\theta - ar(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

$$\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\Delta \mathrm{t}} = \big(\theta - ar(t)\big)\Delta t + \sigma\Delta W_i$$

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = \big(\theta - ar(t_i)\big)\Delta t + \sigma\Delta W_i$$

$$= \big(\theta - ar(t_i)\big)\Delta t + \sigma\Delta W_i \qquad (2.32)$$

dimana $i = 0, \ldots, n-1$, dan $\sqrt{\Delta t} Z_i$ berdistribusi sama dengan $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$.

Persamaan (2.32) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(t_{i+1}) &= r(t_i) + \big(\theta - a r(t_i)\big)\Delta t + \sigma \Delta W_i \\ &= (1 - a\Delta t) r(t_i) + \theta \Delta t + \sigma \Delta W_i \end{aligned} \tag{2.33}$$

Selanjutnya persamaan (4.5) diubah ke dalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{2.34}$$

dimana :

$$y_t = r(t_{i+1}) \tag{2.35}$$

$$a_0 = \theta \Delta t \tag{2.36}$$

$$y_{t-1} = r(\mathrm{t_i}) \tag{2.37}$$

$$a_1 = (1 - a\Delta t) \tag{2.38}$$

$$\varepsilon_t = \sigma \Delta W_i \tag{2.39}$$

Berdasarkan persamaan (2.34) dan persamaan (2.35) – (2.39) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

misalnya :

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$, dan

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma\sqrt{\Delta t}\begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix}$$

sehingga model matriks (2.40) dapat disederhanakan menjadi:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.41}$$

Proses untuk mengestimasi parameter model *Hull-White* dengan menggunakan metode *Jackknife* adalah dengan menghilangkan satu pengamatan dari data atau menghilangkan baris pertama dari vektor. Langkah tersebut dilakukan dan diulangi sebanyak jumlah yang ada (Sahinler dan Topus, 2007). Langkah pertama dalam estimasi parameter *Jackknife* yaitu menghapus satu baris ke-i, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Untuk $i = 1$, dari persamaan (2.41) diperoleh:

$$\begin{bmatrix} r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

dapat dimisalkan

$$\boldsymbol{y^1} = \begin{bmatrix} r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^1} = \begin{bmatrix} r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta^1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon^1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix}$$

sehingga model linier pada persamaan (2.42) dalam metode *Jackknife* dapat disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$\boldsymbol{y^i} = \boldsymbol{X^i}\boldsymbol{\beta^i} + \boldsymbol{\varepsilon^i} \tag{2.43}$$

Berdasarkan persamaan (2.27), maka diperoleh penduga parameter $\boldsymbol{\hat{\beta}^i}$ yaitu:

$$\boldsymbol{\hat{\beta}^i} = (\boldsymbol{X^{i\prime}}\boldsymbol{X^i})^{-1}\boldsymbol{X^{i\prime}}\boldsymbol{y^i}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} r(t_2) & r(t_3) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} r(t_2) & r(t_3) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Penduga parameter *Jackknife* diperoleh dengan mencari rata-rata nilai dari setiap penduga parameter $\boldsymbol{\hat{\beta}^1}, \boldsymbol{\hat{\beta}^2}, \ldots, \boldsymbol{\hat{\beta}^n}$ seperti pada persamaan (2.28) yaitu:

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\hat{\beta}^i}}{n} \tag{2.45}$$

Persamaan (2.45) dapat diperoleh estimator parameter a_0 dan a_1 Namun parameter yang ditaksir dalam model suku bunga Hull-White adalah a, θ, dan σ. Maka untuk memperoleh estimator parameter tersebut persamaan (2.38) dan (2.39) kemudian diubah ke dalam persamaan berikut:

$$a = \frac{1 - a_1}{\Delta t} \tag{2.46}$$

$$\theta = \frac{a_0}{\Delta t} \tag{2.47}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} y - X\hat{\beta} \tag{2.48}$$

2.2 Kajian Integrasi

Dalam Al Quran surah Yusuf Ayat 47-48 *(QS. 12:47-48)* yang artinya:

"Yusuf berkata: 'Supaya kamu bertanam tujuh tahun (lamanya) sebagaimana biasa, maka apa yang kamu tuai (petik) hendaklah kamu biarkan dibulirnya kecuali sedikit untuk kamu maka. Kemudian sesudah itu akan datang tujuh tahun yang amat sulit, yang menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya (tahun sulit), kecuali sedikit dari bibit gandum yang akan kamu simpan"

Menurut Tafsir Al-Mishbah maksudnya adalah Nabi Yusuf as. berkata seakan-akan berdialog dengan mereka semua. Karena itu, beliau menggunakan bentuk jamak, "Mimpi memerintahkan kamu wahai masyarakat Mesir, melalui Raja, agar kamu terus-menerus bercocok tanam selama tujuh tahun sebagaimana biasa kamu bercocok tanam, yakni dengan memperhatikan keadaan cuaca, jenis tanaman yang ditanam, pengairan dan sebagainnya atau selama tujuh tahun berturut-turut dengan sungguh-sungguh. Maka apa yang kamu tuai dari hasil panen sepanjang itu hendaklah kamu biarkan di bulirnya agar dia tetap segar tidak rusak, karena biasanya gandum Mesir hanya bertahan dua tahun – demikian pakar tafsir Abu Hayyan – kecuali sedikit yaitu yang tidak perlu kamu simpan dan biarkan di bulirnya yaitu yang kamu butuhkan untuk kamu makan. Kemudian sesudah masa tujuh tahun itu, akan datang tujuh tahun yang amat sulit, akibatnya terjadinya paceklik di seluruh negeri yang menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya, yakni untuk menghadapi tahun sulit itu yang dilambangkan oleh tujuh bulir gandum yang kering itu kecuali sedikit dari apa, yakni bibit gandum yang kamu simpan. Itulah takwil mimpi Raja"(Shihab, 2002).

Memperhatikan jawaban Nabi Yusuf as. ini, agaknya kita dapat berkata bahwa beliau memahami *tujuh ekor sapi* sebagai tujuh tahun masa pertanian. Boleh jadi karena sapi digunakan membajak, kegemukan sapi adalah lambang kesuburan, sedang *sapi kurus* adalah masa sulit dibidang pertanian, yakni masa paceklik. *Bulir-bulir gandum* lambang pangan yang tersedia. Setiap bulir sama dengan setahun. Demikian juga sebaliknya. Mimpi raja ini merupakan anugerah Allah SWT. kepada masyarakat Mesir ketika itu. Boleh jadi karena Rajanya yang berlaku adil walau tidak mempercayai keesaan Allah. Keadilan itu menghasilkan kesejahteraan lahiriah buat mereka (Shihab, 2002).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian tentang estimasi parameter suku bunga *Hull-White* menggunakan metode *Jackknife* dan *Ordinary Least Square* menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif dengan studi literatur.

3.2 Data dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yaitu data tingkat suku bunga Bank Indonesia. Data tersebut merupakan rata-rata tingkat suku bunga setiap tiga bulan dimulai dari bulan Januari 2014 hingga Desember 2021. Data diperoleh dari *website* Badan Pusat Statistik (BPS) dan terlampir pada lampiran 1.

3.3 Lokasi Penelitian

Data yang diperoleh diambil secara online dari *website* Badan Pusat Statistik (BPS).

3.4 Teknik Pengumpulan Data

Berdasarkan dari pemaparan sumber data diatas maka teknik pengumpulan data yang digunakan adalah studi kepustakaan, dimana data tersebut merupakan data suku bunga Bank Indonesia yang diakses melalui *website* Badan Pusat Statistik (BPS).

3.5 Instrumen Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan beberapa *software* seperti Minitab, Matlab dan SPSS 18. Sedangkan variabel-variabel yang digunakan untuk mengimplementasikan model *Hull-White* dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

y_{t-1} = rata – rata tingkat suku bunga aktual pada waktu sebelumnya

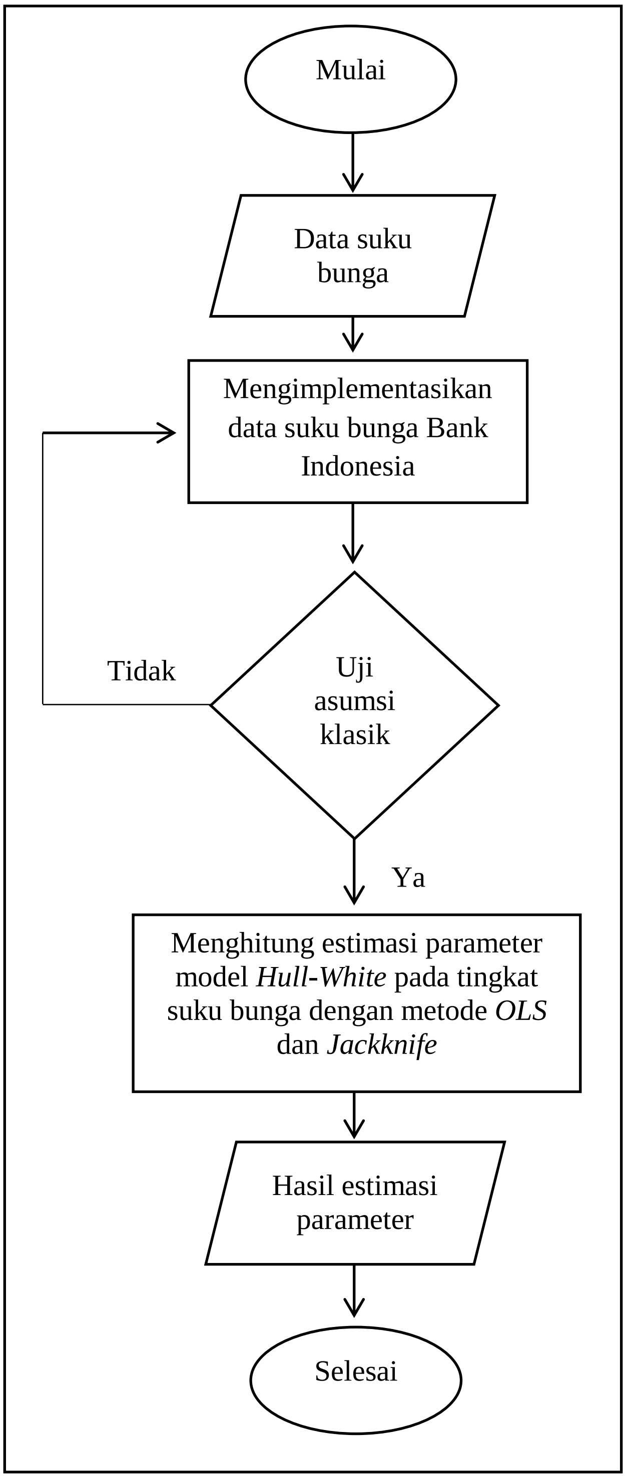
y_t = rata – rata tingkat suku bunga aktual

3.6 Teknik Analisis Data

Adapun langkah – langkah yang dilakukan sebagai berikut :

1. Mengidentifikasi data, langkah ini digunakan untuk mengetahui statistic deskriptif dari variable.
2. Melakukan uji normalitas pada data dengan menggunakan *software* SPSS 18.
3. Melakukan uji multikolinieritas pada data dengan menggunakan *software* SPSS 18.
4. Melakukan uji autokorelasi pada data dengan menggunakan *software* SPSS 18.
5. Melakukan uji heteroskedastisitas pada data dengan menggunakan *software* SPSS 18.
6. Mencari nilai estimasi parameter suku bunga *Hull-White* dengan mengimplementasikan data nilai suku bunga dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS).
7. Mencari nilai estimasi parameter suku bunga *Hull-White* dengan mengimplementasikan data nilai suku bunga dengan metode *Jackknife.*

3.7 *Flow chart*



Gambar 3. 1 *Flow Chart*

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Implementasi Metode *Jackknife* dan Metode *Ordinary Least Square* pada Model *Hull-White*

4.1.1 Statistik Deskriptif

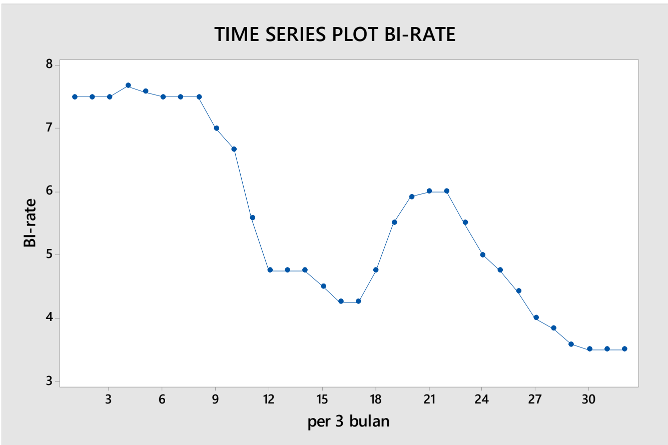
Penelitian ini menggunakan data bulanan BI- rate yang diubah menjadi rata – rata setiap tiga bulan mulai dari 2014 - 2021 yang terdapat pada Lampiran 1. Hasil analisis deskriptif dari data tersebut ditampilkan dalam Tabel 4.1 sebagai berikut:

Tabel 4. 1 Statistika Deskriptif

Variabel	Jumlah data	Minimum	Maksimum	Mean	Std.deviation
BI-rate	32	3,500	7,670	5,516	1,464

Sumber:Olahan Minitab

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dikatakan bahwa nilai rata-rata BI-rate sebesar 5,516, dimana nilai tertingginya adalah 7,670 dan nilai terendah sebesar 3,500 serta nilai std.deviation bernilai 1,464. Berikut merupakan hasil dari *time series plot* pada variabel BI-rate:



Gambar 4.1 Plot Data BI-rate

Berdasarkan Gambar 4.1 BI-rate memiliki nilai yang cenderung naik turun. Rata–rata dari tiga bulan pertama ke tiga bulan selanjutnya relatif stabil, namun pada rata-rata 3 bulan terakhir tahun 2015 mengalami penurunan yang drastis. Kemudian mengalami kenaikan pada rata-rata 3 bulan awal tahun 2018 dan mengalami penurunan kembali pada pertengahan tahun 2019.

4.1.2 Uji Asumsi Klasik

Uji asumsi klasik adalah suatu pengujian hipotesis yang digunakan dalam suatu penelitian yang menunjukkan bahwa model regresi tersebut layak atau tidak untuk dilakukan ke pengujian selanjutnya. Hasil uji asumsi klasik yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Uji Normalitas

Uji Normalitas data digunakan untuk mengetahui apakah data sampel yang digunakan dalam penelitian berdistribusi normal atau tidak. Uji normalitas dalam penelitian ini menggunakan teknik *Kolmogorov-smirnov*. Hasil uji normalitas penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4. 2 Hasil Uji Normalitas

Variabel	*Asymp. Sig. (2-tailed)*	Syarat	Kesimpulan
BI-rate	0,130	$>0{,}05$	Normal

Tabel 4.2 menunjukkan hasil uji normalitas variabel BI-rate. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa nilai signifikansi variabel BI-rate menunjukkan nilai di atas 0,05 yaitu 0,130. Maka, dapat disimpulkan bahwa variabel yang digunakan pada penelitian ini berdistribusi normal.

2. Uji Multikolinieritas

Uji multikolinieritas bertujuan untuk menguji apakah dalam suatu model regresi ditemukan adanya korelasi antara variabel bebas (independen). Model regresi yang baik seharusnya tidak terjadi korelasi diantara variabel independen. Untuk mendeteksi ada atau tidaknya multikolinieritas di dalam model regresi dilihat dari variance inflation factor (VIF). Nilai *cutoff* yang umum dipakai untuk menunjukkan adanya multikolinieritas adalah apabila nilai VIF > 10. Model yang layak digunakan untuk uji regresi adalah model yang mempunyai nilai VIF ≤ 10. Hasil uji multikolinieritas pada penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4. 3 Hasil Multikolinieritas

Variabel	VIF	Syarat	Kesimpulan
BI-rate	$1{,}000$	< 10	Tidak terjadi Multikolinieritas

Tabel 4.3 menunjukkan hasil uji multikolinieritas variabel. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa nilai VIF variabel penelitian menunjukkan nilai dibawah 10. Maka, dapat disimpulkan bahwa model regresi pada penelitian ini menunjukkan tidak terjadi multikolinieritas dan model layak untuk digunakan karena nilai nilai VIF $<$ 10.

3. Uji Autokorelasi

Uji autokorelasi bertujuan untuk menguji dalam model regresi linear ada atau tidak korelasi antara kesalahan pengganggu pada periode ke-t dengan kesalahan pengganggu pada periode ke-$(t-1)$ atau periode sebelumnya. Uji autokorelasi pada penelitian ini menggunakan uji Durbin Watson. Hasil uji autokorelasi ditunjukkan pada Tabel 4.4.

Tabel 4. 4 Hasil Uji Autokorelasi

Variabel	DW	DU	4-DU	Kesimpulan
BI-rate	1,609	1,4957	2,5043	Tidak terjadi Multikolinieritas

Berdasarkan Tabel 4.4 di atas nilai Durbin Watson sebesar 1,609, pembanding menggunakan nilai signifikansi 5%, jumlah sampel 31 (n), dan jumlah variabel independen 1 $(k = 1)$, maka di tabel Durbin Watson akan didapat nilai DU sebesar 1,4957 dan nilai dari $4 - \text{DU}$ adalah 2,504. Berdasarkan kriteria $\text{DU} < \text{DW} < 4-\text{DU}$ maka nilainya $1{,}4957 < 1{,}609 < 2{,}5043$ sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat autokorelasi.

4. Uji Heteroskedastisitas

Uji heteroskedastisitas digunakan untuk mengetahui ada atau tidaknya penyimpangan asumsi klasik heteroskedastisitas yaitu adanya ketidaksamaan varian dari residual untuk semua pengamatan pada model regresi. Uji heteroskedastisitas bertujuan untuk menguji apakah dalam model regresi linear terjadi ketidaksamaan varian dari residual satu pengamatan ke pengamatan yang lain. Hasil uji heteroskedastisitas pada penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 4.5.

Tabel 4. 5 Hasil Uji Heteroskedastisitas

Variabel	Signifikansi	Syarat	Kesimpulan
BI-rate	0,546	$> 0{,}05$	Tidak terjadi heteroskedastisitas

Tabel 4.5 menunjukkan hasil uji heteroskedastisitas variabel. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa nilai signifikansi variabel penelitian menunjukkan nilai diatas 0,05 yaitu 0,546. Maka, dapat disimpulkan bahwa model regresi pada penelitian ini menunjukkan tidak terjadi gejala heteroskedastisitas dan model layak untuk digunakan karena nilai signifikansi $> 0{,}05$.

4.1.3 Estimasi Parameter Model *Hull-White* dengan Metode *Jackknife* dan Metode *Ordinary Least Square*

Setelah melakukan uji asumsi klasik pada suku bunga selanjutnya dilakukan perhitungan estimasi parameter dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* dan metode *Jackknife*.

a. Metode *Ordinary Least Square*

Terdapat sejumlah data dengan $i = 1,2,3, \dots 31$ dan dapat ditulis dalam bentuk matriks berdasarkan (2.40) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{31}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ \vdots & \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

dapat dimisalkan :

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ \vdots & \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh penduga parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ berdasarkan persamaan (2.23) yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 7,50 & 7,50 & 7,50 & \cdots & 3,50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,50 & 1 \\ 7,50 & 1 \\ 7,50 & 1 \\ \vdots & \\ 3,50 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 7,50 & 7,50 & 7,50 & \cdots & 3,50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,50 \\ 7,50 \\ 7,67 \\ \vdots \\ 3,50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,9703 \\ 0,0369 \end{bmatrix}$$

Nilai a_0, a_1dan ε dihitung menggunakan bantuan komputer dan hasil yang diperoleh sama dengan perhitungan manual. Tahap selanjutnya yang dilakukan untuk mendapatkan parameter yang diinginkan yaitu $\theta, a,$ dan σ maka nilai a_1, a_0 dan ε disubstitusikan dalam persamaan berikut:

$$a = \frac{1 - a_1}{\Delta t}$$

$$= 0,0297$$

$$\theta = \frac{a_0}{\Delta t}$$

$$= 0,0369$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \varepsilon = 0,3434$$

Sehingga diperoleh hasil parameter a sebesar 0,0297 ; θ sebesar 0,0369 ; dan σ sebesar 0,3434 maka berdasarkan hasil tersebut diperoleh Model Suku Bunga *Hull-White* setelah dilakukan estimasi parameter menggunakan Metode *OLS* sebagai berikut:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - \Delta t) + \theta a \Delta t + \sigma \Delta W_i$$

$$= r(t_i)(1 - a\Delta t) + \theta \Delta t + \sigma \Delta W_i$$

$$= (1 - 0,0297\Delta t) r(t_i) + 0,0369\Delta t + 0,3434\, \Delta W_i$$

Penjelasan yang diperoleh dari model di atas adalah nilai suku bunga masa mendatang $r(t_{i+1})$ dipengaruhi oleh nilai suku bunga saat ini $r(t_i)$ yang dikalikan dengan nilai kelajuan suku bunga menuju level rata-rata (a) sebesar $1 - 0{,}0297$. Kemudian dipengaruhi juga oleh nilai level rata-rata (θ) sebesar $0{,}0369$ dan juga dipengaruhi oleh nilai volatilitas (σ) sebesar $0{,}3434$ dengan asumsi variabel Δt dan ΔW_i konstan.

b. Metode *Jackknife*

Terdapat sejumlah data dengan $i = 1,2,3, \dots 31$ dan dapat ditulis dalam bentuk matriks berdasarkan persamaan (2.42) sebagai berikut:

Untuk $i = 1$, maka dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} r(t_3) \\ r(t_4) \\ r(t_5) \\ \vdots \\ r(t_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ r(t_4) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{31}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

dapat dimisalkan :

$$\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon^1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{1}}$ berdasarkan persamaan (2.28) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{1}} = \left(\boldsymbol{X^{1'}}\boldsymbol{X^1}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X^{1'}}\boldsymbol{y^1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}67 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}67 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9639 \\ 0{,}0656 \end{bmatrix}$$

Untuk $i = 2$, maka dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_4) \\ r(t_5) \\ \vdots \\ r(t_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ r(t_4) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{31}) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

dapat dimisalkan :

$$\boldsymbol{y^2} = \begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^2} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta^2} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}$ berdasarkan persamaan (2.28) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} = \left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}'}\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}'}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}67 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}67 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9639 \\ 0{,}0656 \end{bmatrix}$$

Untuk $i = 3$, maka dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ r(t_5) \\ \vdots \\ r(t_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ r(t_4) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{31}) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

dapat dimisalkan :

$$\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{3}}$ berdasarkan persamaan (2.28) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{3}} = \left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{3}\prime}\boldsymbol{X}^{\mathbf{3}}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\mathbf{3}\prime}\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}67 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}67 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}67 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}58 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9582 \\ 0{,}0918 \end{bmatrix}$$

Untuk $i = 4{,}5{,}6, \ldots 30$ perhitungan dilakukan seperti cara di atas, dan untuk $i = 31$, dapat dituliskan seperti berikut

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_{31}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{30}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{30} \end{bmatrix}$$

dapat dimisalkan :

$$\boldsymbol{y}^{\mathbf{31}} = \begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathbf{31}} = \begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{31}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{31}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{30} \end{bmatrix}$$

Kemudian diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{31}}$ berdasarkan persamaan (2.28) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{31}} = \left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{31}'}\boldsymbol{X}^{\mathbf{31}}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\mathbf{31}'}\boldsymbol{y}^{\mathbf{31}}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}50 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ 7{,}50 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 3{,}50 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 7{,}50 & 7{,}50 & 7{,}50 & \cdots & 3{,}50 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7{,}50 \\ 7{,}50 \\ 7{,}67 \\ \vdots \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9728 \\ 0{,}0205 \end{bmatrix}$$

Penduga parameter *Jackknife* diperoleh dengan mencari rata-rata nilai dari setiap penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{3}}, \ldots \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{31}}$ seperti pada persamaan (2.28) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{1}{31}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{1}} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{3}} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{31}}\right)$$

$$= \frac{1}{31}\left(\begin{bmatrix} 0{,}9639 \\ 0{,}0656 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}9639 \\ 0{,}0656 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}9582 \\ 0{,}0918 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0{,}9728 \\ 0{,}0205 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9702 \\ 0{,}0371 \end{bmatrix}$$

Nilai a_0, a_1 dan ε dihitung menggunakan bantuan komputer dan hasil yang diperoleh sama dengan perhitungan manual. Tahap selanjutnya yang dilakukan untuk mendapatkan parameter yang diinginkan yaitu $\theta, a,$ dan σ maka nilai a_1, a_0 dan ε disubstitusikan dalam persamaan berikut:

$$a = \frac{1 - a_1}{\Delta t}$$

$$= 0{,}0272$$

$$\theta = \frac{a_0}{\Delta t}$$

$$= 0{,}0205$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \varepsilon = 0{,}3432$$

Sehingga diperoleh hasil parameter a sebesar $0{,}0272$; θ sebesar $0{,}0205$; dan σ sebesar $0{,}3432$ maka berdasarkan hasil tersebut diperoleh Model Suku Bunga *Hull-White* setelah dilakukan estimasi parameter menggunakan Metode *Jackknife* sebagai berikut:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - \Delta t) + \theta a \Delta t + \sigma \Delta W_i$$

$$= r(t_i)(1 - a\Delta t) + \theta \Delta t + \sigma \Delta W_i$$

$$= (1 - 0{,}0272\Delta t) r(t_i) + 0{,}0205\Delta t + 0{,}3432\, \Delta W_i$$

Penjelasan yang diperoleh dari model di atas adalah nilai suku bunga masa mendatang $r(t_{i+1})$ dipengaruhi oleh nilai suku bunga saat ini $r(t_i)$ yang dikalikan dengan nilai kelajuan suku bunga menuju level rata-rata (a) sebesar $1 - 0{,}0272$. Kemudian dipengaruhi juga oleh nilai level rata-rata (θ) sebesar $0{,}0205$ dan juga dipengaruhi oleh nilai volatilitas (σ) sebesar $0{,}3432$ dengan asumsi variabel Δt dan ΔW_i konstan.

Setelah melakukan perhitungan menggunakan metode *Ordinary Least Square* dan metode *Jackknife* diperoleh hasil parameter a, θ dan σ sebagai berikut:

Tabel 4. 6 Hasil Parameter

Parameter	Metode *Ordinary Least Square*	Metode *Jackknife*
a	0,0297	0,0272
θ	0,0369	0,0205
σ	0,3434	0,3432

4.2 Integrasi Al-Qur'an

Memperkirakan segala hal untuk masa depan merupakan sesuatu yang harus kita lakukan demi kebaikan kita di masa depan. Banyak hal yang mungkin terjadi di masa mendatang baik itu baik ataupun buruk, sehingga kita harus mempersiapkan itu semua di masa sekarang. Terdapat salah satu ayat dalam Al-Quran yang menyinggung mengenai hal tersebut, yaitu dalam surah Yusuf ayat 47-48 yang artinya :

"Yusuf berkata: "supaya kamu bertanam tujuh tahun (lamanya) sebagaimana biasa, maka apa yang kamu tuai hendaknya kamu biarkan dibulirnya kecuali sedikit untuk kamu makan. Kemudian sesudah itu akan datang tujuh tahun yang amat sulit, yang akan menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya (tahun sulit), kecuali dari bibit gandung yang kamu simpan"."

Surah Yusuf ayat 47-48 tersebut memberikan kita pelajaran bahwasannya sebelum terjadi sesuatu hal yang buruk ataupun sulit hendaknya lebih baik kita mencari cara untuk menghadapinya atau menyelesaikan masalah yang mungkin akan terjadi di masa mendatang sehingga apabila terjadi sesuatu yang buruk di masa mendatang kita sudah memiliki cara untuk menyelesaikannya.

Hubungan ayat tersebut dengan kehidupan sehari-hari adalah dalam kehidupan banyak hal yang tidak terduga seperti masalah keuangan. Banyak hal yang terjadi tidak sesuai dengan rencana dan hitungan keuangan kita. Banyak dana-dana yang harus dikeluarkan secara tiba-tiba tanpa adanya perencanaan sebelumnya. Untuk mengantisipasi hal semacam itu, kita dapat mengimplementasikan ayat tersebut dalam permasalah keuangan. Apabila kita memiliki atau mendapatkan rezeki yang berlebih jangan dihamburkan dengan cara membeli sesuatu yang tidak diperlukan, hendaknya kita gunakan untuk menabung atau menyimpan dana tersebut. Sehingga apabila di masa mendatang terjadi sesuatu, kita masih mempunyai tabungan atau dana darurat. Hal tersebut sangat membantu untuk menyelesaikan permasalahan keuangan kita apabila terjadi sesuatu yang tidak terduga di masa mendatang.

Sebagaimana Al-Jazairi (2007) menafsirkan surah Yusuf ayat 47-48 bahwasannya Yusuf bermimpi dan menyampaikan kepada masyarakat bahwa Ia diperintah oleh Allah untuk bertanam artinya bercocok tanam selama tujuh tahun secara bertahap seperti biasanya mereka dalam bercocok tanam setiap tahunnya. Kemudian hasil panen yang diperoleh hendaknya dibiarkan ditangkainya, jangan dipetik agar tidak rusak, kecuali sedikit saja atau secukupnya untuk dimakan. Lalu setelah musim subur datanglah tujuh tahun yang amat sulit, yaitu musim kering yang amat sulit dan pada saat itu panen tersebut bisa dimakan, yaitu hasil panen yang telah disimpan dari tujuh tahun musim subur sebagai persiapan untuk menghadapi tahun sulit.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah:

1. Bentuk estimasi parameter model suku bunga *Hull-White*,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - a\Delta t) + \theta\Delta t + \sigma\Delta W_i$$

dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

dengan menggunakan metode *Jackknife* adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{1}{31}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{2}} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{31}}\right)$$

Dimana nilai dari $\hat{\beta}$ disubstitusikan ke dalam persamaan

$$a = \frac{1 - a_1}{\Delta t}$$

$$\theta = \frac{a_0}{\Delta t}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\varepsilon$$

Hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga *Hull-White* menggunakan metode *Ordinary Least Square* pada data suku bunga Bank Indonesia diperoleh parameter a sebesar $0{,}0297$; θ sebesar $0{,}0369$; dan σ sebesar $0{,}3434$. Sehingga diperoleh Model Suku Bunga *Hull-White* setelah dilakukan estimasi parameter menggunakan Metode *Ordinary Least Square* yaitu :

$$r(t_{i+1}) = (1 - 0{,}0297\Delta t)r(t_i) + 0{,}0369\Delta t + 0{,}3434\ \Delta W_i$$

Sedangkan hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga *Hull-White* menggunakan metode *Jackknife* pada data suku bunga Bank Indonesia diperoleh parameter α sebesar $0{,}0272$; θ sebesar $0{,}0205$; dan σ sebesar $0{,}3432$. Sehingga diperoleh Model Suku Bunga *Hull-White* setelah dilakukan estimasi parameter menggunakan Metode *Jackknife* yaitu :

$$r(t_{i+1}) = (1 - 0{,}0272\Delta t)r(t_i) + 0{,}0205\Delta t + 0{,}3432\ \Delta W_i$$

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan estimasi model suku bunga yang lain dan dengan metode yang berbeda. Ataupun menggunakan model suku bunga yang sama tetapi dengan metode yang berbeda. Penelitian selanjutnya juga dapat mencoba menggunakan metode yang sama dengan model suku bunga yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmadi, G. 2002. *Brownian Motion*,http://web2.clarkson.edu/projects/fluidflow/courses/me637/2_Brownian.pdf. (23 April 2019)

Allen, Linda J. S. 2010. *An Introduction to Stochastic Processes with Application to Biology*. London: CRC Press.

Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2007. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Al-Quran Terjemah. 2015. *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.

Ariani, Dessy.,Yuki Novia Nasution,& Desi Yuniarti. 2017. Perbandingan Metode *Bootstrap* dan *Jackknife Resampling* dalam Menentukan Nilai Estimasi dan Interval Konfidensi Parameter Regresi. *Jurnal Eksponensial.* 8 (1). 2085-7829.

Aziz, Abdul. 2010. *Ekonometrika*. Malang: UIN Malang Press.

Calin, O. 2012. An Introduction to Stochastic Calculus with Application to Finance. Department of Mathematics. Eastern Michigan University. USA.

Ekananda, Mahyus. 2005. *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Mitra Wacana Media

Ghozali, Imam. 2009. *Aplikasi Analisis Multivariate dengan Program SPSS*. Semarang: UNDIP.

Ghozali, Imam. 2013. *Aplikasi Analisis Multivariate dengan Program IBM SPSS 21 Update PLS Regresi*. Semarang: Badan Penerbit Universitas Diponegoro.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 2 (Statistik Deskriptif).* Jakarta: Bumi Aksara.

Hull, J.C. 1946. *Options, Futures and Other Derivative*. New jersey: Prentice Hall.

Øksendal B. 2000. *Stochastics Differensial Equation (An Introductions with Applications). New York: Springer-Verlag.*

Rodliyah, Iesyah. 2016. Perbandingan Metode Bootstrap dan Jackknife dalam Mengestimasi Parameter Regresi Linier Berganda. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika.* Vol. 1. No. 1.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models Tenth Edition*. Los Angeles: Academic Press.

Sahinler, S., dan Topuz D. 2007. Boots and Jackknife Resampling Algorithm for Estimation of Regression Parameters. *Journal of Aplied Quantitative Methods*. Vol.2 :188-199.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir al-Misbah; Pesan, Kesan, dan Keserasian Alquran* Vol. 6. Jakarta: Lentera Hati.

Sleeper, Andrew. 2006. *Design for Six Sigma Statistics*. United States: The McGraw-Hill Compnies, Inc.

Sprent, P. 1989. *Applied Nonparametric Statistical Methods*. New York: Chapman and Hall.

Sudjana. (1989). *Metode Statistika*. Bandung: Tarsito.

Sunjoyo, dkk. 2013. *Aplikasi SPSS untuk Smart Riset*. Bandung: Alfabeta.

Taylor, H.M., dan S. Karlin. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. California: Academic Press.

Wiersema, Ubbo F. 2008. *Brownian Motion Calculus*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Yunizar, Elmira Dwi. 2019. *Estimasi Parameter Model Cox Ingersoll Ross Menggunakan Metode Jackknife.* Skripsi. Malang. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Yoon, Ji-Hun. 2014. Mellin Transform Method for European Option Pricing with Hull-White Stochastic Interest Rate. *Journal of Applied Mathematics*. Vol. 2014. 759562.

Zeytun S., dan Gupta, A. 2007. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*. Germany: Fraunhofer Institut Techno-und Wirtschaftsmathematik.

LAMPIRAN

Lampiran 1 : Data Bulanan Suku Bunga

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2014	Januari	7,50	7,50
	Februari	7,50	
	Maret	7,50	
	April	7,50	7,50
	Mei	7,50	
	Juni	7,50	
	Juli	7,50	7,50
	Agustus	7,50	
	September	7,50	
	Oktober	7,50	7,67
	November	7,75	
	Desember	7,75	

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2015	Januari	7,75	7,58
	Februari	7,50	
	Maret	7,50	
	April	7,50	7,50
	Mei	7,50	
	Juni	7,50	
	Juli	7,50	7,50
	Agustus	7,50	
	September	7,50	
	Oktober	7,50	7,67
	November	7,50	
	Desember	7,50	

Lampiran 1 : Data Bulanan Suku Bunga (lanjutan)

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2016	Januari	7,25	7,00
	Februari	7,00	
	Maret	6,75	
	April	6,75	6,67
	Mei	6,75	
	Juni	6,50	
	Juli	6,50	5,58
	Agustus	5,25	
	September	5,00	
	Oktober	4,75	4,75
	November	4,75	
	Desember	4,75	

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2017	Januari	4,75	4,75
	Februari	4,75	
	Maret	4,75	
	April	4,75	4,75
	Mei	4,75	
	Juni	4,75	
	Juli	4,75	4,50
	Agustus	4,50	
	September	4,25	
	Oktober	4,25	4,25
	November	4,25	
	Desember	4,25	

Lampiran 1 : Data Bulanan Suku Bunga (lanjutan)

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2018	Januari	4,25	4,25
	Februari	4,25	
	Maret	4,25	
	April	4,25	4,75
	Mei	4,75	
	Juni	5,25	
	Juli	5,25	5,50
	Agustus	5,50	
	September	5,75	
	Oktober	5,75	5,92
	November	6,00	
	Desember	6,00	

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2019	Januari	6,00	6,00
	Februari	6,00	
	Maret	6,00	
	April	6,00	6,00
	Mei	6,00	
	Juni	6,00	
	Juli	5,75	5,50
	Agustus	5,50	
	September	5,25	
	Oktober	5,00	5,00
	November	5,00	
	Desember	5,00	

Lampiran 1 : Data Bulanan Suku Bunga (lanjutan)

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2020	Januari	5,00	4,75
	Februari	4,75	
	Maret	4,50	
	April	4,50	4,42
	Mei	4,50	
	Juni	4,25	
	Juli	4,00	4,00
	Agustus	4,00	
	September	4,00	
	Oktober	4,00	3,83
	November	3,75	
	Desember	3,75	

Tahun	Bulan	Suku Bunga	Rata-Rata
2021	Januari	3,75	3,58
	Februari	3,50	
	Maret	3,50	
	April	3,50	3,50
	Mei	3,50	
	Juni	3,50	
	Juli	3,50	3,50
	Agustus	3,50	
	September	3,50	
	Oktober	3,50	3,50
	November	3,50	
	Desember	3,50	

Lampiran 2 : Hasil Output Uji Asumsi Klasik

a. Uji Normalitas

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Unstandardized Residual
N		31
Normal Parameters[a,b]	Mean	.0000000
	Std. Deviation	.35468571
Most Extreme Differences	Absolute	.139
	Positive	.139
	Negative	-.123
Test Statistic		.139
Asymp. Sig. (2-tailed)		.130[c]

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

c. Lilliefors Significance Correction.

b. Uji Multikolinieritas

Coefficients[a]

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics	
	B	Std. Error	Beta			Tolerance	VIF
1 (Constant)	.037	.263		.140	.889		
X	.970	.046	.969	21.214	.000	1.000	1.000

a. Dependent Variable: Y

c. Uji Autokorelasi

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	.888[a]	.789	.782	.27607	1.609

a. Predictors: (Constant), Lag_X

b. Dependent Variable: Lag_Y

Lampiran 2 : Hasil Output Uji Asumsi Klasik (lanjutan)

d. Uji Heteroskedastisitas

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.163	.171		.953	.349
	X	.018	.030	.113	.611	.546

a. Dependent Variable: Abs_Res

Lampiran 3 : Program Estimasi Parameter Metode *Jackknife* dan Metode *Ordinary Least Square*

```
%data suku bunga tahun Januari 2014 - Desember 2021
%Estimasi Metode OLS
clc, clear
r=xlsread('lisa2022.xlsx'),('A1:A32');
deltat=1
for t=1:length(r)-1;
    y(t,1)=(r(t+1));
end
display(y)
for t=1: length(r)-1;
    X(t,1)=(r(t));
    X(t,2)= deltat;
end;
display(X)

BetaEst=(X'*X)\X'*y
a1=BetaEst(1,1)
a0=BetaEst(2,1)
E=y-X*BetaEst

a=(1-a1)/deltat;
display(a)
Theta=a0/deltat;
display(Theta)
sigma=(1/sqrt(deltat*length(r))*norm(E));
display(sigma)

%data suku bunga tahun Januari 2014 - Desember 2021
%Estimasi Metode Jackknife
clc, clear
r=xlsread('lisa2022.xlsx'),('A1:A32');
deltat=1
for t=1:length(r)-1;
    y(t,1)=(r(t+1));
end
display(y)
for t=1: length(r)-1;
    X(t,1)=(r(t));
    X(t,2)= deltat;
end;
display(X)

BetaEst=(X'*X)\X'*y;
a1=BetaEst(1,1);
a0=BetaEst(2,1);
E=y-X*BetaEst;
sum=0;
for i=1:31
    display(i)
    if i>1 && i<31
        yj=[y(1:i-1,:);y(i+1:31,:)];
        Xj=[X(1:i-1,:);X(i+1:31,:)];
        Ej=[E(1:i-1,:);E(i+1:31,:)];
        size(E);
```

```
    elseif i==1
        yj=y(2:31,:);
        Xj=X(2:31,:);
        Ej=E(2:31,:);
    elseif i==31
        yj=y(1:30,:);
        Xj=X(1:30,:);
        Ej=E(1:30,:);
    end
    display(yj)
    display(Xj)
    display(Ej)
    Betaj=(Xj'*Xj)\Xj'*yj
    a1j=Betaj(1,1);
    a0j=Betaj(2,1);
    sum=sum+(Betaj);
end

beta_mean=sum/31;
display(sum)
display(beta_mean)
Eja=yj-Xj*beta_mean;
a=(1-a1j)/deltat;
display(a)
Theta=a0j/deltat;
display(Theta)
sigma=(1/sqrt(deltat*length(r))*norm(Eja));
display(sigma)
```

RIWAYAT HIDUP

Lisa Sherly Choliqa, lahir di Kota Probolinggo tanggal 8 Juli 1997. Anak pertama dari 3 bersaudara dari pasangan Bapak Saeri dan Ibu Lina Cholidiyawati. Memiliki 1 adik laki-laki yang bernama Achmad Ridhlo Ilahi dan 1 adik perempuan yang bernama Tria Fatma Putri. Pendidikan Sekolah Dasar ditempuh di SDN Kademangan I Kota Probolinggo. Kemudian setelah lulus Sekolah Dasar melanjutkan pendidikan ke SMP Islam Terpadu Pelita Kota Probolinggo. Selanjutnya dilanjutkan MAN 2 Kota Probolinggo dan pada tahun 2015 penulis menempuh studi S1 Jurusan Matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Lisa Sherly Choliqa
NIM	:	15610114
Fakultas/Jurusan	:	Sains danTeknologi/Matematika
JudulSkripsi	:	Estimasi Parameter Suku Bunga *Hull-White* Menggunakan Metode *Jackknife* dan *Ordinary Least Square*
Pembimbing I	:	Ria Dhea Layla N.K., M.Si
Pembimbing II	:	Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd

No	Tanggal	Hal	TandaTangan
1	7 September 2021	Konsultasi dan Revisi Bab I	1.
2	20 September 2021	Konsultasi Integrasi Bab I, Bab II dan Bab IV	2.
3	13 Oktober 2021	Konsultasi dan Revisi Bab II dan III	3.
4	8 November 2021	Konsultasi dan Revisi Bab IV	4.
5	6 Desember 2021	Revisi Agama Bab I, Bab II dan Bab IV	5.
6	9 Februari 2022	Revisi Bab I, II dan III	6.
7	14 Maret 2022	Revisi Bab IV	7.
8	22 Maret 2022	Revisi Integrasi	8.
9	5 April 2022	ACC Bab IV	9.
10	11 Mei 2022	ACC Integrasi	10.
11	17 Mei 2022	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 15 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M. Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005