PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN HUKUM LAJU REAKSIDENGAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL

SKRIPSI

OLEH
SITI MAFTUHAH
NIM. 17610035

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN HUKUM LAJU REAKSI DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
SITI MAFTUHAH
NIM. 17610035

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN HUKUM LAJU REAKSI DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL

SKRIPSI

Oleh
Siti Maftuhah
NIM. 17610035

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji

Malang, 21 Juni 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Heni Widayani, M.Si	Ari Kusumastuti, M.Pd,. M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN HUKUM LAJU REAKSI DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL

SKRIPSI

Oleh
Siti Maftuhah
NIM. 17610035

Telah Dipertahankan Di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 22 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji I	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Anggota Penguji II	: Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Ari Kusumastuti, M.Pd,. M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Maftuhah

NIM : 17610035

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Hukum Laju Reaksi Dengan Metode Transformasi Differensial

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil; jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2022

Yang membuat pernyataan

Siti Maftuhah

NIM. 17610035

MOTO DAN PERSEMBAHAN

MOTO

"Spirit of Change, Keep Smile and Istiqomah"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Muhammad Ya'ud dan Ibunda Luailik Faizah tersayang, serta suami Bakhtiar Puji S. yang selalu medoakan dan mencurahkan kasih sayang kepada penulis serta selalu memberikan semangat dan motivasi dan juga selalu menguatkan penulis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas berkat, rahmat dan ni'mat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyeleseikan skripsi ini. Penulis pun menyadari bahwa skripsi ini tidak akan dapat di seleseikan hanya oleh perjuangan penulis sendiri, namun banyak yang sama-sama berjuang, merelakan waktu, tenaga, dan pikirannya dalam membantu penulis menyelesikan skripsi ini. Maka dari itu, melalui halaman persembahan ini dengan segala kerendahan dan ketulusan hati, penulis menghaturkan ribuan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayati, M.Si , selaku dosen pembimbing I. Terimakasih atas semua waktu yang rela diberikan di sela-sela kesibukan ibu. Semangat yang terus ibu berikan kepada saya, bimbingannya yang teramat berharga, kesabarannya menghadapi mahasiswi seperti saya. Terimakasih yang teramat sangat besar.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd,. M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasehat dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si dan Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku penguji dalam ujian skripsi yang telah banyak memberikan arahan, nasehat dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
8. Orang tua dan seluruh keluarga yang tak hentinya memberikan dukungan serta menyemangati, kalianlah penyemangat hidup yang tak pernah putus, senyum kalianlah yang menjadi motivasi tiada henti bagi penulis dalam menyeleseikan skripsi ini.

9. Seluruh mahasiswa angkatan 2017 yang sudah terbebas maupun yang masih terjerat, semua pihak yang tidak dapat penulis tuliskan satu persatu. Kalian semua adalah inspirasi, berkat kalian semua, saya bisa bertahan dan akhirnya sukses menyeleseikan ini semua.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan. Mohon maaf atas segala kelebihan dan kekurangannya.

Malang, 22 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Maftuhah, Siti. 2022. **Penyelesaian Sistem Persamaan Hukum Laju Reaksi dengan Metode Transformasi Differensial.** Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Kata kunci: persamaan hukum laju reaksi, metode transformasi differensial

Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian persamaan hukum laju reaksi dengan metode transformasi differensial. Persamaan hukum laju reaksi mendeskripsikan masalah reaksi kimia dari konsentasi suatu reaktan yang menghasilkan suatu produk. Metode transformasi diferensial merupakan suatu metode numerik semi-analitik yang dapat memberikan solusi pendekatan dalam bentuk deret karena metode tersebut diperoleh dari pengembangan ekspansi deret Taylor. Dengan bantuan *software Maple* diperoleh perbandingan plot solusi $y_1(t), y_2\ (t)$dan $y_3(t)$, plot solusi tersebut dapat diamati bahwa perbedaan hasil komputasi antara metode Runge-kutta dan transformasi diferensial tergantung dari orde k-nya. Kurva dari metode transformasi differensial semakin mendekati pada kurva metode Runge-kutta pada nilai k tertentu untuk masing-masing $y_1(t), y_2\ (t)$dan$y_3(t)$. Kesimpulan dari penelitian ini adalah penerapan metode transformasi differensial telah berhasil dilakukan pada kasus sistem persamaan differensial biasa. Untuk penelitian selanjutnya, peneliti menyarankan agar penelitian berikutnya menerapkan metode transformasi differensial pada kasus dan nilai awal yang lebih variatif.

ABSTRACT

Maftuhah, Siti. 2022. **The Solution of the System of Equations of the Law of Reaction Rateswith the Differential Transformation Method.** thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Heni Widayani, M.Sc. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Sc.

Keywords: rate law equation, differential transformation method

This research is focused on solving the rate law equation by using the differential transformation method. The rate law equation describes the chemical reaction problem from the concentration of a reactant that produces a product. The differential transformation method is a semi-analytic numerical method that can provide approximate solutions in the form of a series because the method is obtained from the expansion of the Taylor series expansion. With the help of Maple software, a comparison of the solution plots of $y_1(t), y_2\ (t)$and$y_3(t)$, can be observed that the difference in computational results between the Runge-kutta method and the differential transformation depends on the order of k. The curve of the differential transformation method is getting closer to the curve of the Runge-kutta method at a certain value of k for each $y_1(t), y_2\ (t)$and$y_3(t)$. The conclusion of this research is that the application of the differential transformation method has been successfully carried out in the case of a system of ordinary differential equations. For further research, the researcher suggests that the next research applies the method of differential transformation in cases and initial values that are more varied.

مستخلص البحث

مفتوحه ، ستي. ٢٠٢٢. **استكمال نظام المعادلات لقانون معدلات التفاعلمعطريقةالتحول**. بحث التخرج. قسم الرياضيات ،كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، مالانج . المشرف :(١)الدكتورهيني ويدايانى الماجستيرة (٢)آري كوسوماستوتيالماجستير.

الكلمات المفتاحية:معادلة قانون السعر، طريقة التحويل التفاضلية

أحداث التفاعل الكيميائي لها تأثير كبير على الصناعة البشرية الحديثة ، وخاصة في قطاع الصناعات الغذائية. في ظل ظروف معينة ، سيكون للتفاعل الكيميائي عدد من تركيزات المواد المتفاعلة والمنتجات اعتمادًا على معدل التفاعل. لتحقيق هدف معين في تفاعل كيميائي على النحو الأمثل ، تم تشكيل نموذج قانون معدل التفاعل في شكل نظام من المعادلات التفاضلية. طريقة التحويل التفاضلي هي طريقة عددية شبه تحليلية يمكن أن توفر حلاً تقريبيًا في شكل سلسلة. في السابق ، بمساعدة برنامج Maple، يمكن ملاحظة مقارنة مخططات الحل $y_1(t)$ و $y_2\ (t)$ و $y_3(t)$، أن الاختلاف في النتائج الحسابية بين طريقة Runge-kutta والتحول التفاضلي يعتمد على ترتيب k. منحنى طريقة التحويل التفاضلية هو الاقتراب من منحنى طريقة Runge-kutta عند قيمة معينة من k لكل $y_1(t)$ و $y_2\ (t)$و $y_3(t)$ ، من الضروري أن يكون لديك فهم جيد لتوسيع سلسلة تايلور ليتم تطبيقها على حالة نظام المعادلات التفاضلية لقانون معدل التفاعل حتى يتمكن من إيجاد نهج الحل وفقًا لـ إجراءات طريقة التحويل التفاضلي. ثم بعد الحصول على حل السلسلة ، يرسم المؤلف الحل بعد العثور على النموذج العام.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Untuk mempermudah mengamati suatu fenomena maka suatu masalah yang terjadi umumnya dimodelkan dengan menggunakan persamaan differensial. Salah satu persamaan yang sering digunakan sebagai model adalah persamaan diferensial biasa. Suatu fenomena atau masalah yang terjadi memiliki beberapa faktor penyebab yang saling berkaitan satu sama lain. Ketika faktor–faktor ini saling berinteraksi satu sama lain, umumnya nilai masing–masing faktor inipun dapat berubah–ubah mengikuti suatu pola yang dapat diidentifikasi ataupun tidak. Karena keterkaitan interaksi antar faktor–faktor ini membentuk suatu sistem, maka sistem persamaan diferensial biasa akan memberikan pendekatan yang lebih baik dan kompleks pada penelitian. Pada dasarnya model dari suatu fenomena yang terjadi pada dunia nyata memiliki bentuk yang kompleks, sehingga diperlukan metode–metode tertentu untuk menyelesaikan model tersebut, sebagai contoh yaitu metode dekomposisi adomian, iterasi variasi, analisis homotopi, dan perturbasi homotopi. Namun metode–metode ini memerlukan banyak batasan serta memiliki banyak syarat yang harus dipenuhi supaya konvergen. Salah satu metode yang menawarkan pendekatan solusi yang cukup baik dengan sedikit batasan serta proses komputasi yang efektif adalah metode transformasi diferensial (Khatib, 2016).

Metode transformasi diferensial pertama kali diperkenalkan oleh Zhou (1986) pada penyelesaian persamaan linear dan nonlinear sirkuit listrik.Metode transformasi diferensial adalah metode semi numerik-analitik yang diformulasikan dari deret Taylor. Walaupun metode ini merupakan pengembangan lanjut dari deret Taylor, tetapi metode ini sangat jauh berbeda dari metode deret Taylor lama orde tinggi. Pada metode deret Taylor lama orde tinggi diperlukan perbandingan antara turunan yang diperlukan dengan fungsi data. Hal ini menyebabkan metode tersebut memerlukan waktu yang cukup lama untuk menyelesaikan suatu persamaan. Sedangkan metode transformasi diferensial memungkinkan untuk memberikan solusi dengan keakuratan tinggi atau solusi eksak persamaan diferensial yang diteliti (Abazari, 2010). Tanpa proses linearisasi, komputasi pada metode ini dapat berjalan secara efektif dan efisien serta menghindari error pada pembulatan solusi yang diperoleh (Kangalgil, 2013).

Karena kemudahan dan keefektifan metode ini dalam menyelesaikan berbagai masalah persamaan diferensial, maka pembahasan aplikasi metode inipun semakin meluas. Pada pembahasan masalah nilai Eigen, Chen dan Ho (1996) menggunakan metode ini untuk mengkalkulasi nilai Eigen dan fungsi eigen pada persamaan Sturm-Lioville. Untuk masalah nilai awal, Jang dan Chen (2000) menggunakan metode ini untuk memperoleh solusi aproksimasi dari masalah nilai awal linear dan nonlinear. Kemudian pada sistem persamaan diferensial, Ayaz (2004) juga menggunakan metode transformasi diferensial untuk menyelesaikan sistem persaman diferensial.

Penelitian–penelitian yang telah dilakukan sebelumya membuktikan bahwa para akademisi peneliti berupaya untuk berinovasi dalam memperoleh pendekatan solusi yang terbaik, karena segala sesuatu selalu terjadi dengan ukuran tertentu. Hal ini sesuai dengan Qur’an surat Al Furqan ayat 2 :

الَّذِيْ لَهٗ مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَّلَمْ يَكُنْ لَّهٗ شَرِيْكٌ فِى الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهٗ تَقْدِيْرًا

Artinya:"Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(-Nya), dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat."

Menurut Quraish Shihab (2017) pada tafsir Al–Mishbah, Allah telah menciptakan segala sesuatu dan memberikan ukuran beserta aturan yang sangat cermat kepada masing–masing berupa rahasia–rahasia yang dapat menjamin keberlangsungan tugasnya secara sistematis. Ilmu pengetahuan modern menyatakan bahwa semua makhluk dari sisi kejadian dan perkembangan yang berbeda–beda, berjalan sesuai dengan sistem dan takaran tertentu.

Sistem persamaan diferensial biasa yang diperoleh dari masalah laju reaksi dibahas oleh Robertson (1965) Solusi berbentuk deret pangkat dari sistem ini dikaji oleh Dogan Kaya (2004) menggunakan metode dekomposisi Adomian. Pada penelitian ini, sistem persamaan diferensial biasa akan diselesaikan menggunakan metode transformasi diferensial. Salah satu contoh sistem persamaan diferensial biasa yang diselesaikan serupa dengan yang dikaji oleh Dogan Kaya (2004) namun menggunakan metode yang berbeda.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasakan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimana penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa menggunakan metode transformasi differensial?"

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa menggunakan metode transformasi differensial.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa yang memodelkan laju reaksi serupa dengan kajian pada Doğan Kaya (2004)berikut :

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) y_3(t),$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = k_3 y_1(t) - k_4 y_2(t) y_3(t) - k_5 y_2^2(t),$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = k_6 y_2^2(t)$$

dimanak_1, k_2, k_3, k_4, k_5 dan k_6 adalah parameter konstan, dengan kondisi awal sebagai berikut :

$$y_1(0) = 1,$$

$$y_2(0) = 0,$$

$$y_3(0) = 0$$

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk memperoleh selesaian dari sistem persamaan diferensial biasa menggunakan metode transformasi differensial serta diharapkan dapat digunakan sebagai literatur untuk mengkaji penelitian berikutnya.

1.6 Definisi Istilah

Mengutip dari Komaruddin (1994), definisi istilah adalah merupakan pengertian yang lengkap tentang suatu istilah yang mencakup semua unsur yang menjadi ciri utama istilah yang dijelaskan tersebut.

Definisi istilah bertujuan untuk menyamakan keragaman pemahaman suatu istilah anatara peneliti dan pembaca sehingga menghindari kemungkinan ketidak selarasan pemahaman suatu istilah pada penelitian ini yang membuat penelitian ini dapat dengan mudah dipahami oleh pembaca. Untuk mempermudah pemahaman pada penelitian ini, maka berikut ini adalah definisi–definisi istilah yang digunakan :

1. *Smooth*

   Arti kata *smooth* dalam Bahasa Indonesia adalah lembut. Pengertian ini jika dikorelasikan pada konteks pembahasan kurva yakni mendeskripsikan bahwa suatu kurva yang *smooth* adalah kurva yang selalu memiliki nilai pemetaan pada batasan tertentu dan umumnya dihasilkan oleh fungsi kontinu, sehingga jika tiap titik nilai pemetaannya dihubungkan dengan garis akan menghasilkan garis yang lembut dan tidak patah–patah.

2. Variabel *dummy*

   Variabel *dummy* atau disebut juga variabel boneka adalah variabel kategorikal yang digunakan untuk mengkuantitatifkan variabel yang bersifat kualitatif dan diduga mempunyai pengaruh terhadap variabel kontinu. Pada topik pembahasan regresi variabel ini muncul dengan nilai 1 atau 0 yang mana jika variabelnya bernilai 1 menunjukan keberadaan atribut kualitatif sedangkan 0 tidak.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, sistematika penulisan yang digunakan, yaitu :

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sistemtika penulisan.

Bab II Kajian Pusataka

Kajian pustaka terdiri dari teori–teori yang menunjang topik penelitian skripsi. Pada bagian ini terdiri dari penjelasan tentang hukum newton kedua, hukum hooke, persamaan diferensial biasa, dan kajian al-Qur'an yang berkaitan dengan penelitian ini.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini memaparkan metode yang digunakan pada penelitian, jenis penelitian dan tahapan penelitian yang tertulis dalam bentuk deskrtiptif.

Bab IV Pembahasan

Pada pembahasan akan diuraikan tentang penurunan persamaan dalam membentuk model sistem pegas dua derajat kebebasan, sesuai dengan tahapan yang dipaparkan pada metode peneltian.

Bab V Penutup

Pada bagian penutup ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Hukum Laju Reaksi

Laju reaksi adalah suatu kajian yang menunjukkan perubahan konsentrasi reaktan atau produk per-satuan waktu. Jika terjadi suatu reaksi kimia yang berlangsung dari arah reaktan ke produk maka laju reaksi mengkaji perbandingan pengurangan reaktan dengan penambahan produk pada reaksi kimia tersebut seiring dengan perubahan waktu. Pada umumnya laju reaksi didefinisikan sebagai berikut

$$V = -\frac{d[reaktan]}{dt} = n\frac{d[produk]}{dt}$$

dengan$V$sebagai laju reaksi. Tanda negatif pada turunan reaktan terhadap waktu menunjukkan berkurangnya sejumlah reaktan terhadap waktu yang mana sama dengan naiknya sejumlah produk terhadap waktu yang dikalikan sebanyak n.

Misalkan pada suatu laju reaksi hanya bergantung pada konsentrasi Adan B, maka terdapat suatu faktor k yang berkolerasi terhadap konsentrasi A dan B Maka hukum laju reaksi atau ekspresi laju didefinisikan dengan bentuk sebagai berikut

$$V = k[A]^a[B]^b$$

dengan$[A]$ sebagai konsentrasi dari suatu unsur atau senyawa A dan begitu pula dengan $[B\}$ yang merepresentasikan sebagai konsentrasi suatu unsur atau senyawa B. Sedangkan a dan b menunjukkan orde reaksi pada unsur atau senyawa a dan b secara berurutan. Faktor k dapat dinyatakan sebagai konstanta laju, laju spesifik ataupun koefisien laju, namun pada kebanyakan literatur menggunakan istilah konstanta laju untuk merepresentasikan k ini (Wilkins, 1991).

2.2 Sistem Hukum Laju Reaksi

Konsentrasi suatu reaktan pada system reaksi kimia diberikan bentuk suatu himpunan persamaan diferensial orde satu yang mendefinsikan laju dari perubahan konsentrasi terhadap waktu yang mana konsentrasinya dalam bentuk fungsi, sehingga himpunan sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

atau dalam bentuk vektor yaitu $\frac{dy}{dx} = f(y)$. Ketika suatu sistem persamaan menunjukkan sejumlah reaksi yang cepat sekaligus reaksi yang lambat, maka integrasi maju pada persamaan ini menjadi rumit, yang mana masalah tersebut diilustrasikan pada persamaan berikut

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

dimana$y$ adalah vector dan A matrix. Ketika bagian negatif pada nilai Eigen matrix A berkurang menuju nol untuk x yang besar dan secara eksplisit diberikan bentuk berikut

$$y = \sum b_i e^{\lambda_i x} v_i$$

denganλ_i, v_i merupakan nilai Eigen dan vector dari A, dan b_i merupakan konstanta sembarang. Hal ini mengakibatkan persamaan ini bersifat kaku atau *stiff*, yang mana ketika suatu persamaan atau sistem persamaan dinyatakan kaku maka persamaan atau sistem persamaan tersebut tidak stabil secara numerik, hal ini menyebabkan solusi numerik yang diperoleh akan berubah secara signifikan jika suatu kondisi tertentu dirubah, salah satunya dapat dikarenakan oleh perubahan kondisi awal. Sehingga jika diberikan persamaan sebagai berikut

$$\frac{dy}{dx} = f(y) + g(x) \tag{2.1}$$

dengan transformasi sebagai berikut

$$y = e^{\mu x} u$$

menyebabkan persamaan (2.1) konvergen untuk μ positif, namun menyebabkan variabel u meningkat secara signifikan dan menyebabkan eror pada limit intervalnya. Kemudian jika solusi aproksimasi pada persamaan (2.1) disubstitusi konstanta k_1 dan k_2 berikut

$$\frac{dy}{dx} = k_1 f(y) + k_2 g(x). \tag{2.2}$$

Untuk persamaan linear dengan fungsi gaya eksponen dapat diperoleh eror yang relatif pada titik selanjutnya yang sama dengan aproksimasi awal dan jika diasumsikan fungsi komplemen dari fungsi asli adalah nol pada x_1. Untuk kasus persamaan non-linier maka perlu dibuat persamaan yang sesuai dengan perbedaan antara persamaan saat ini dan persamaan equilibrium, serta untuk menjamin bahwa $f(y)$ dan $g(x)$ adalah nol dengan $x \to \infty$ (Robertson, 1966).

Salah satu contoh kasus penerapan dari sistem persamaan hukum laju reaksi dari Robertson adalah sistem persamaan pada jurnal Doğan Kaya (2004)

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= -k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) y_3(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= k_3 y_1(t) - k_4 y_2(t) y_3(t) - k_5 y_2^2(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} &= k_6 y_2^2(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

dimana $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ adalah parameter kosntan $(k_1 = 0.04, k_2 = 0.01, k_3 = 400, k_4 = 100, k_5 = 3000, k_6 = 30$ dengan kondisi awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0,$ dan $y_3(0) = 0$. Sistem persamaan tersebut memodelkan bagaimana perubahan konsentrasi y_1 terhadap waktu yang dipengaruhi oleh pengurangan konsentrasi y_1 itu sendiri yang ditunjukkan dengan perkaliannya dengan tanda minus dan perkaliannya dengan k_1 dan perkalian konsentrasi dari y_2 dan y_3, lalu untuk laju perubahan konsentrasi y_2 dipengaruhi oleh jumlah konsentrasi y_1 yang dikurangi dengan konsentrasi y_2 dan y_3, sedangkan untuk laju perubahan konsentrasi y_3 hanya dipengaruhi dengan perubahan konsentrasi y_2 saja. Sistem persamaan ini dibahas pada jurnal Doğan Kaya (2004) yang diselesaikan dengan implementasi dari metode dekomposisi Adomian.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Matriks dan vektor mampu merepresentasikan sistem persamaan diferensial biasa dengan lebih sederhana. Umumnya sistem PDB linier setidaknya memuat dua PDB dengan dua fungsi yang tidak diketahui seperti $y_1(t)$ dan $y_2(t)$. Suatu sistem linier PDB dengan orde ke–n dengan n fungsiyang tidak diketahui $y_1(t), \dots, y_n(t)$ memiliki bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

Turunan dari matriks (atau vektor) dengan variabelnya (atau komponennya) diperoleh dari penurunan tiap komponen, maka jika $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ \sin(t) \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ \cos(t) \end{bmatrix}$.

Misalkan terdapat sistem PDB sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \approx -5y_1 + 2y_2 \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \approx 13y_1 + \frac{1}{2}y_2
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Maka dapat ditulis kembali persamaan (2.5) dalam bentuk matriks

$$
\boldsymbol{Y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{AY} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{Y}' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

Transpos adalah operasi matriks yang mengganti lokasi tiap elemen pada baris dan kolom matriks, yang mana elemen pada baris suatu matriks berubah posisi menjadi elemen kolom matriks dan elemen kolom menjadi elemen baris pada matriks. Operasi transpos ini sering dinotasikan dengan T. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks ukuran 2×2 dengan elemen sebagai berikut :

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.6}
$$

Lalu dioperasikan dengan operasi T, maka diperoleh persamaan baru sebagai berikut :

$$
\boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.7}
$$

Jika suatu vektor kolom dengan elemen berikut

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

kemudian dioperasikan dengan operasi T, maka akan menghasilkan vektor baru yaitu vektor baris seperti berikut

$$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}} = [v_1 \quad v_2] \tag{2.9}$$

Jika diberikan matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ dengan ukuran $n \times n$ sedemikian hingga $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ disebut matriks nonsingular dan matriks $\boldsymbol{B}$ disebut invers dari $\boldsymbol{A}$ yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$, yang mana invers dari matriks $\boldsymbol{A}$ dapat diperoleh dengan rumus berikut

$$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

dengan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \boldsymbol{A}$.

Misalkan $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ dengan ukuran $n \times n$, maka persamaan

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x} \tag{2.11}$$

Dengan λ merupakan skalar (bilangan riil atau kompleks) dan x adalah vektor yang dicari. Untuk setiap λ dengan solusi x = 0 sedemikan hingga λ memenuhi suatu vektor x $\neq$ 0maka λtersebut merupakannilai Eigen, dan bentuk vektornya disebut sebagai vektor eigen.

Dari persamaan (2.11) tersebut diperoleh $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{\lambda x} = 0$ maka dapat ditulis kembali menjadi

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\mathrm{x} = 0 \tag{2.12}$$

Pada persamaan ini untuk mendapatkan solusi x $\neq$ 0 maka matriks $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}$ harus sama dengan 0, maka penjabaran persamaan (2.9) adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

atau dapat ditulis seperti berikut

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

karena matriks $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$ singular jika determinan dari $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})$ adalah 0atau disebut sebagai determinan karakteristik dari $\boldsymbol{A}$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Persamaan kuadrat pada λ pada (2.12) disebut sebagai persamaan karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang solusinya adalah nilai Eigen dari λ_1 dan λ_2 d*ari* $\boldsymbol{A}$(Kreyszig, 2011).

2.4 Deret Taylor

Pada dasarnya deret Taylor menghasilkan rata–rata untuk memprediksi nilai suatu fungsi pada suatu titik dan turunannya pada titik lainnya. Teorema Taylor ini menyatakan bahwa setiap fungsi yang *smooth* (mulus) dapat diaproksimasikan dengan polinomial.

Jika suatu fungsi f dan turunan ke $n+1$ kontinu pada interval yang memuat x_0 dan x, maka nilai dari fungsi f pada x didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k \tag{2.16}$$

dengan sisa R_k yang didefinisikan sebagai berikut

$$R_k = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - p)^k}{k!} f^{(k+1)}(p)\, dp \tag{2.17}$$

dimana p adalah variabel *dummy*. Persamaan (2.16) disebut sebagai formula Taylor. Kemudian $f^{(k)}(x_0)$ menotasikan turunan ke-k fungsi f pada $x = x_0$. Kemudian untuk notasi $f^{(0)}(x_0)$ menotasikan bentuk $f(x_0)$. Jika sisa R_k dihilangkan, maka ruas kanan pada (2.16) merupakan pendekatan fungsi $f(x)$ dengan aproksimasi polinomial Taylor.

Persamaan (2.17) adalah bentuk integral dari sisa yang diekspresikan. Formulasi alternatif sisa tersebut dapat diperoleh dari penurunan teorema nilai rata - rata integral.

Teorema 2.1 Jika suatu fungsi g kontinu dan dapat diintegralkan pada interval yang memuat x_0 dan x, maka terdapat satu titik ξ diantara x_0 dan x

$$\int_{x_0}^{x} g(p)\, dp = g(\xi)(x - x_0) \tag{2.18}$$

sehingga teorema ini menyatakan bahwa integral tersebut direpresentasikan dengan nilai rata–rata untuk fungsi $g(\xi)$ dikalikan panjang interval $x - x_0$, karena nilai rata–rata harus berada diantara nilai minimun dan maksimum pada interval sehingga terdapat suatu titik $x = \xi$ yang mana fungsinya memberikan nilai rata–rata.

Teorema 2.2 Jika suatu fungsi g dan h kontinu dan dapat diintegralkan pada interval yang memuat $x_0$dan x, dan h tidak merubah tanda pada interval, maka ada suatu titik ξ diantara x_0 dan x sedemikian hingga

$$\int_{x_0}^{x} g(p)\, h(p) dp = g(\xi) \int_{x_0}^{x} h(p)\, dp. \tag{2.19}$$

Jika $h(p) = 1$ maka persamaan (2.18) dan persamaan (2.19) ekuivalen.

Teorema tersebut dapat diaplikasikan pada persamaan Persamaan (2.17) dengan

$$g(p) = f^{(k+1)}(p) \qquad h(p) = \frac{(x-p)^k}{k!}$$

dengan$t$ bervariasi dari x_0 hingga x, $h(p)$ kontinu dan tidak berubah tanda. Sehingga, jika $f^{(n+1)}(p)$ kontinu, maka teorema nilai rata–rata integral berlaku dan

$$R_k = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) disebut sebagai turunan atau bentuk Lagrange sisa (Chapra, 2010).

Maka bentuk sigma dari aproksimasi polinomial Taylor fungsi f adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.5 Metode Transformasi Differensial

Sejak dua dekade akhir ini persamaan diferensial *stiff* (kaku)telah dipelajari lebih lanjut dengan beragam penerapan metode untuk memperoleh solusi pendekatannya (Shaikh, 2019). Jika suatu solusi dari sistem memiliki komponen yang mengalami perubahan terhadap laju yang berbeda secara signifikan dengan variabel independent yang diberikan, maka sistem tersebut bersifat kaku (Idrees, 2013). Pada kasus persamaan diferensial linier, sifat kekakuan dari persamaan tersebut disebabkan oleh nilai Eigen yang dimiliki sangat kecil (Shaikh, 2019). Persaamaan bersifat *stiff* umumnya ditemukan pada sirkuit listrik, mekanik, meteorology, oseanografi dan getaran. Pada tiga decade akhir ini berbagai macam penelitian telah dilakukan dengan fokus pengembangan metode lebih lanjut yang efisien. Kasusnya semakin rumit ketika meneliti sistem persamaan kaku yang tak-linier (Idrees, 2013).

Metode transformasi differensial (DTM) merupakan teknik semi numerik-analitik yang memberikan solusi dalam bentuk deret dan merupakan pengembangkan dari deret Taylor yang dikenalkan pertama kali oleh Zhou pada penelitiannya tentang sirkuit listrik. Pada beberapa kasus solusi deret yang diperoleh dari kalkulasi metode transformasi diferensial ini dapat dikonversikan menjadi solusi tertutup. Metode ini menghasilkan solusi analitik dalam bentuk polinomial. Umumnya komputasi dari deret Taylor memerlukan waktu yang lama untuk menyelesaikan kasus persamaan differensial orde tinggi. Metode ini memungkinkan untuk memberikan solusi persamaan diferensial dengan keakuratan yang lebih baik, proses yang lebih efektif serta komputasi lebih mudah, sehingga metode ini mampu memberikan solusi pendekatan untuk berbagai macam kasus, seperti persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial maupun sistem persamaan diferensial baik linier maupun nonlinier (Borhanifar, 2011).

Definisi 2.1. Jika suatu fungsi $u(t) \in \mathbb{R}$ diekspansi dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik tetap t_0 maka $u(t)$ direpresentasikan sebagai berikut

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + R(t) \tag{2.22}$$

Jika $u_n(t)$ merupakan jumlah dari deret Taylor hingga ke$-n$ maka persamaan (2.22) menjadi

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + R_n(t) \tag{2.23}$$

dengan$u_n(t)$ merupakan polinomial taylor ke$-n$ untuk $u(t)$ di sekitar t_0 dan $R_n(t)$ adalah sisa.

Definisi 2.2 Jika$U(k)$ merupakan transformasi diferensial dari $u(t)$ didefiniskan sebagai berikut

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0}, \qquad \text{dengan } k = 0,1, \dots, \infty \tag{2.24}$$

Maka persamaan (2.22) dapat direduksi menjadi

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(t - t_0)^k + R(t) \tag{2.25}$$

dan persamaan (2.23) menjadi

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} U(k)(t - t_0)^k + R_n(t). \tag{2.26}$$

Jika $t_0 = 0$ maka persamaan (2.25) menjadi

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k. \tag{2.27}$$

Jika definisi 2.2 pada persamaan 2.24 diaplikasikan pada persamaan (2.27) maka diperoleh invers transformasi diferensial dengan bentuk sebagai berikut

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} t^k \tag{2.28}$$

Berdasarka pemaparan definisi sebelumnya bahwa konsep transformasi diferensial merupakan hasil penurunan dari ekspansi deret Taylor. Seiring dengan kelanjutan pembahasan metode Transformasi diferensial huruf kecil merepresentasikan fungsi asli sedangkan huruf kapital merepresentasikan fungsi transformasi dari metode transformasi diferensial.

Jika $W(k), U(k)$ dan $V(k)$ merupakan transformasi diferensial dari fungsi $w(t)$, $u(t)$ dan $v(t)$berdasarkan definisi–definisi transformasi diferesnial sebelumnya makadiperoleh

Tabel 2.1 Sifat - Sifat Transformasi Diferensial

Sifat 1	Jika $w(t) = u(t) \pm v(t)$, maka $W(k) = U(k) \pm V(k)$.
Sifat 2	Jika $w(t) = \lambda u(t)$, maka $W(k) = \lambda U(k)$.
Sifat 3	Jika $w(t) = \frac{d^m}{dt^m} u(t)$, maka $W(k) = \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m)$.
Sifat 4	Jika $w(t) = u(t)v(t)$, maka $W(k) = \sum_{l=0}^{k} U(i)V(k-i)$

(Borhanifar, 2011).

Bukti–bukti dari sifat transformasi diferensial pada tabel 2.1 adalah sebagai berikut

Sifat 1 : *Jika* $w(t) = u(t) \pm v(t)$, *maka* $W(k) = U(k) \pm V(k)$

Bukti :

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}w(t)\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}\big(u(t)\pm v(t)\big)\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}u(t)\pm\frac{d^k}{dt^k}v(t)\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}u(t)\pm\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}v(t)$$

$$=U(k)\pm V(k)$$

$\therefore w(t)=u(t)\pm v(t)\rightarrow W(k)=U(k)\pm V(k)$ Terbukti.

Sifat 2 :*Jika* $w(t)=\lambda u(t)$, *maka* $W(k)=\lambda U(k)$

Bukti :

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}w(t)\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}(\lambda u(t)\right]=\lambda\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}u(t)\right]$$

$$=\lambda U(k)$$

$\therefore w(t)=\lambda u(t)\rightarrow W(k)=\lambda U(k)$ Terbukti.

Sifat 3 :*Jika* $w(t)=\frac{d^m}{dt^m}u(t)$ *maka* $W(k)=\frac{(k+m)!}{k!}U(k+m)$

Bukti :

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}w(t)\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{d^m}{dt^m}u(t)\right)\right]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}}u(t)\right]$$

$$=\frac{(k+m)!}{(k+m)!}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}}u(t)\right]=\frac{(k+m)!}{k!}\frac{1}{(k+m)!}\left[\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}}u(t)\right]$$

$$=\frac{(k+m)!}{k!}U(k+m)$$

$\therefore w(t)=\frac{d^m}{dt^m}u(t)\rightarrow W(k)=\frac{(k+m)!}{k!}U(k+m)$Terbukti.

Aturan perumuman *Leibniz :*

Misalkan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *dan* $f(x), g(x)$ *adalah fungsi–fungsi yang diturunkan sebanyak* n*-kali, maka turunan ke-*n *dari* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *adalah*

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg)(x) = (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

(Sa'adah, 2020).

Sifat 4 :*Jika* $w(t) = u(t)v(t)$ *maka* $W(k) = \sum_{l=0}^{k} U(i)V(k-i)$

Bukti :

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k} w(t)\right] = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}(u(t)v(t))\right]$$

dengan menggunakan aturan perumuman *Leibniz* maka diperoleh

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} u(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t)\right]$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \frac{d^l}{dt^l} u(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t)\right]$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!\,(k-l)!} \frac{d^l}{dt^l} u(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} u(t) \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} v(t)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} U(l)V(k-l)$$

$\therefore w(t) = u(t)v(t) \rightarrow W(k) = \sum_{l=0}^{k} U(l)V(k-l)$Terbukti.

2.6 Kajian Al-Qur'an pada Penelitian

Manusia umumnya menggunakan konsep matematis untuk memahami pola pada suatu peristiwa alam. Pendekatan matematis yang sering digunakan untuk memahami alur pola suatu fenomena alam umumnya dijabarkan dalam bentuk persamaan diferensial atau bahkan jika suatu peristiwa yang akan dianalisis memiliki interaksi dengan variabel lain dengan tingkat kerumitan tertentu maka pendekatan yang diperoleh adalah dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Diperolehnya pendekatan sistem persamaan diferensial tersebut masih belum cukup untuk menjelaskan secara eksplisit bagaimana sebuah sistem di alam ini dengan batasan–batasan tertentu bekerja yang memiliki kemunginan berdampak pada suatu objek atau bahkan pada suatu sistem lainnya. Seiring dengan perkembangan pemikiran manusia yang menciptakan wawasan–wawasan baru, diterapkanlah metode–metode dengan tingkat akurasi tertentu dalam memahami suatu konsep pada sistem dengan lebih jelas dan detail.

Menariknya gagasan pendekatan tersebut tersurat dengan jelas pada Surah Al Isra ayat 12:

وَجَعَلْنَا ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ ءَايَتَيْنِ ۖ فَمَحَوْنَآ ءَايَةَ ٱلَّيْلِ وَجَعَلْنَآ ءَايَةَ ٱلنَّهَارِ مُبْصِرَةً لِّتَبْتَغُوا۟ فَضْلًا مِّن رَّبِّكُمْ
وَلِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ وَكُلَّ شَىْءٍ فَصَّلْنَٰهُ تَفْصِيلًا

Artinya:"Dan Kami jadikan malam dan siang sebagai dua tanda, lalu Kamihapuskan tanda malam dan Kami jadikan tanda siang itu terang, agar kamu mencari kurnia dari Tuhanmu, dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun-tahun dan perhitungan. Dan segala sesuatu telah Kami terangkan dengan jelas."

Ayat tersebut diawali dengan penuturan bentuk kuasa Allah pada perubahan siang dan malam. Syaikh Wahbah Zuhaili menegaskan bahwa pada ayat tersebut Allah menciptakan siang dan malamsebagai kesempurnaan kekuasaan-Nya. Pada tafsir Al–Ahzar menyatakan bahwa Allah menciptakan waktu agar setiap manusia melakukan aktifitas terbaik pada waktu–waktu tersebut. Perbedaan waktu yang ada membuat manusia memahami berbagai periode waktu, seperti 60 detik setara dengan 1 menit, kemudian 60 menit setara dengan 1 jam, kemudian 24 jam sama dengan sehari semalam, hingga 12 bulan menjadi satu tahun. Wawasan tersebut adalah yang disebut dengan ilmu hisab (perhitungan) dan falak. Kemudian pada ujung ayat diterangkan bahwa segala sesuatu telah dijelaskan Allah dengan sejelas–jelasnya, hal ini tentunya mematahkan teori yang menyatakan bahwa Allah hanya mengatur garis besar pada kehidupan saja, namun tidak mencampuri aspek detail dari kehidupan (Amrullah, 2015).

Mengacu pada penjelasan ayat tersebut, menunjukkan bahwa betapa dekatnya penggambaran kuasa Allah dengan pendekatan pemodelan matematika. Waktu memiliki dampak besar terhadap kehidupan manusia, waktu dapat mempengaruhi interaksi antar variabel di ala mini sehingga memunculkan sistem sendiri. Dengan kesengajaan Allah menciptakan waktu membuat manusia berfikir dan memahami bagaimana alam ini memiliki pola matematis yang cukup logis untuk dinalar dengan wawasan manusia yang masih belum sebanding dengan rahasia ilmu Allah yang masih banyak dan belum terkuak. Maha Suci Allah dengan segala firman-Nya.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Karya tulis penelitian ini menggunakan metode studi literatur sebagai metode penelitiannya. Pada penerapan metode studi literatur diperoleh kajian data informasi dan teori pendukung yang berkaitan dengan penelitian ini dari berbagai macam referensi literatur akademik, seperti buku, jurnal ilmiah, dan paper. Teori dan informasi pendukung yang diperlukan pada penelitian ini adalah yang berkorelasi dengan metode transformasi diferensial pada sistem persamaan diferensial biasa.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum memulai penelitian, peneliti mengumpulkan sejumlah referensi pendukung untuk memahami alur penelitian ini lebih mendalam. Peneliti mempelajari obyek yang diteliti dengan mengaplikasikan alur penelitian pada problem lain yang lebih sederhana dengan tujuan kematangan pemahaman terhadap obyek dan alur penelitiannya.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini diawali dengan menelaah lebih dalam pembahasan pada jurnal referensi utama dengan teori-teori pendukung penelitian. Kemudian dengan kasus yang diambil, peneliti menerapkan metode transformasi diferensial dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Sistem persamaan diferensial biasa ditransformasikan dengan sifat–sifat transformasi diferensial yang sesuai.
2. Nilai awal yang diberikan ditransformasikan dengan definisi transformasi diferensial.
3. Memilih k anggota bilangan bulat tak negatif kemudian disubstitusian pada hasil transformasi sistem persamaan diferensial biasa.
4. Hasil yang diperoleh disubstitusikan pada invers dari metode transformasi diferensial sehingga diperoleh deret penyelesaiannya.
5. Membentuk persamaan umum dan menkalkulasi hasil numerik dari deret yang diperoleh kemudian diplotkan dengan bantuan Maple.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Metode Transformasi Diferensial pada Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Sistem persamaan diferensial biasa yang akan diteliti pada penelitian kali ini adalah sistem persamaan diferensial biasa dari Doğan Kaya (2004) berikut

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= -k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) y_3(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= k_3 y_1(t) - k_4 y_2(t) y_3(t) - k_5 y_2^2(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} &= k_6 y_2^2(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

dimana$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ adalah parameter konstan ($k_1 = 0.04, k_2 = 0.01, k_3 = 400, k_4 = 100, k_5 = 3000, k_6 = 30$ dengan kondisi awal sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, \\ y_2(0) &= 0, \\ y_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

Tahap pertama yaitu mentransformasikan persamaan (4.1) terlebih dahulu. Pada subbab pembahasan 2.3 menunjukkan bahwa jika $u(t)$ adalah bentuk asli dari persamaannya maka hasil transformasinya adalah $U(k)$ sehingga untuk kelanjutan dari penelitian ini menyesuaikan dengan ketentuan penotasian sebelumnya.

Akan dibuktikan bahwa jika persamaan $\frac{dy_1(t)}{dt}$ merupakan bentuk persamaan awal maka transformasinya adalah $(k+1)Y_1(k+1)$.

Bukti :

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} t^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} \frac{d}{dt}t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} kt^{k-1}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} kt^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1} y_1(t)}{dt^{k+1}}\right]_{t=t_0} (k+1)t^{(k+1)-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1} y_1(t)}{dt^{k+1}}\right]_{t=t_0} (k+1)t^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\frac{\cancel{(k+1)}}{k!\,\cancel{(k+1)}}\left[\frac{d^{k+1} y_1(t)}{dt^{k+1}}\right]_{t=t_0} t^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{k!}Y_1(k+1)t^k.$$

Terbukti bahwa transformasi diferensial dari $\frac{dy_1(t)}{dt}$adalah $\frac{(k+1)!}{k!}Y_1(k+1)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa jika persamaan $-k_1 y_1(t)$ adalah bentuk persamaan awal maka bentuk transformasinya adalah $-k_1 Y_1(k)$.

Bukti :

$$-k_1 y_1(t) = -k_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} t^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} -k_1\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} -k_1 Y_1(k)t^k.$$

Terbukti bahwa jika $-k_1 y_1(t)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $-k_1 Y_1(k)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika persamaan $k_2 y_2(t) y_3(t)$ adalah bentuk persamaan awal maka bentuk transformasinya adalah $k_2 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l)$

Bukti :

$$k_2 y_2(t) y_3(t) = k_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y_2(t) y_3(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= k_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} y_2(t) y_3(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

Berdasarkan Aturan Leibniz diperoleh

$$k_2 y_2(t) y_3(t) = k_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_3(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= k_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_3(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= k_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_3(t) t^k$$

$$= k_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l) t^k$$

Terbukti bahwa jika $k_2 y_2(t) y_3(t)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $k_2 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l)$. Berdasarkan bukti–bukti transformasi diferensial sebelumnya maka dapat dituliskan ke dalam tabel bentuk transformasinya seperti berikut

Tabel 4.1 Transformasi Diferensial Persamaan Pertama

Persamaan asli	Hasil transformasi
$\frac{dy_1(t)}{dt}$	$(k+1)Y_1(k+1)$
$-k_1y_1(t)$	$-k_1Y_1(k)$
$k_2y_2(t)y_3(t)$	$k_2\sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_3(k-l).$

Sehingga dapat dituliskan kembali bentuk transformasi diferensial dari persamaan pertama pada sistem persamaan (4.1) sebagai berikut

$$(k+1)Y_1(k+1) = -k_1Y_1(k) + k_2\sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_3(k-l)$$

sehingga bentuk transformasinya adalah

$$Y_1(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(k_2\sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_3(k-l) - k_1Y_1(k)\right) \tag{4.2}$$

Kemudian pada persamaan kedua di sistem persamaan (4.1) akan dibuktikan bahwa jika persamaan $\frac{dy_2(t)}{dt}$ merupakan bentuk persamaan awal maka transformasinya adalah $(k+1)Y_1(k+1)$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_2(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} t^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_2(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} \frac{d}{dt}t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_2(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} kt^{k-1} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_2(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} kt^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1} y_2(t)}{dt^{k+1}} \right]_{t=t_0} (k+1) t^{(k+1)-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)!} \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1} y_2(t)}{dt^{k+1}} \right]_{t=t_0} (k+1) t^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)!} \frac{\cancel{(k+1)}}{k!\,\cancel{(k+1)}} \left[\frac{d^{k+1} y_2(t)}{dt^{k+1}} \right]_{t=t_0} t^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k!} Y_2(k+1) t^{k}.$$

Terbukti bahwa transformasi diferensial dari $\frac{dy_2(t)}{dt}$adalah $\frac{(k+1)!}{k!} Y_2(k+1)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa jika persamaan $k_3 y_1(t)$ adalah bentuk persamaan awal maka bentuk transformasinya adalah $k_3 Y_1(k)$.

Bukti :

$$k_3 y_1(t) = k_3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0} t^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k_3 \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y_1(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k_3 Y_1(k) t^k.$$

Terbukti bahwa jika $k_3 y_1(t)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $k_3 Y_1(k)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika persamaan $-k_4 y_2(t) y_3(t)$ adalah bentuk persamaan awal maka bentuk transformasinya adalah $-k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l)$

Bukti :

$$-k_4 y_2(t) y_3(t) = -k_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y_2(t) y_3(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= -k_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} y_2(t) y_3(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

Berdasarkan Aturan Leibniz diperoleh

$$-k_4 y_2(t) y_3(t) = -k_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_3(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= -k_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_3(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= -k_4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_3(t) t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} -k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l) t^k$$

Terbukti bahwa jika $-k_4 y_2(t) y_3(t)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $-k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l)$.

Lalu akan dibuktikan jika persamaan $-k_5 y_2^2(t)$ adalah bentuk persamaan awal maka bentuk transformasinya adalah $-k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l)$

Bukti :

$$-k_5 y_2^2(t) = -k_5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y_2(t) y_2(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= -k_5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} y_2(t) y_2(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

Berdasarkan Aturan Leibniz diperoleh

$$-k_5 y_2^2(t) = -k_5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_2(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= -k_5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_2(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= -k_5 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_2(t) t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} -k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l) t^k$$

Terbukti bahwa jika $-k_5 y_2^2(t)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $-k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l)$. Dari pembuktian transformasi diferensial pada persamaan kedua pada sistem persamaan (4.1) yang telah dijabarkan sebelumnya, maka bentuk transformasinya dapat diringkas pada tabel berikut

Tabel 4.2 Transformas Diferensial Persamaan Kedua

Persamaan asli	Hasil transformasi
$\frac{dy_2(t)}{dt}$	$(k+1) Y_2(k+1)$
$k_3 y_1(t)$	$k_3 Y_1(k)$
$-k_4 y_2(t) y_3(t)$	$-k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l).$
$-k_5 y_2^2(t)$	$-k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l).$

Sehingga dapat dituliskan kembali bentuk transformasi diferensial dari persamaan kedua pada sistem persamaan (4.1) menjadi

$$(k+1) Y_2(k+1) = k_3 Y_1(k) - k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l) - k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l).$$

sehingga bentuk transformasinya adalah

$$Y_2(k+1) = \frac{1}{(k+1)} \left(k_3 Y_1(k) - k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l) - k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l) \right) \tag{4.3}$$

Langkah berikutnya, pada persamaan ketiga di sistem persamaan (4.1) akan dibuktikan bahwa jika persamaan $\frac{dy_3(t)}{dt}$ merupakan bentuk persamaan awal maka transformasinya adalah $(k+1)Y_3(k+1)$.

Bukti :

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_3(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} t^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_3(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} \frac{d}{dt}t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_3(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} kt^{k-1}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y_3(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0} kt^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1} y_3(t)}{dt^{k+1}}\right]_{t=t_0} (k+1)t^{(k+1)-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1} y_3(t)}{dt^{k+1}}\right]_{t=t_0} (k+1)t^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\frac{\cancel{(k+1)}}{k!\cancel{(k+1)}}\left[\frac{d^{k+1} y_3(t)}{dt^{k+1}}\right]_{t=t_0} t^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{k!}Y_3(k+1)t^k.$$

Terbukti bahwa transformasi diferensial dari $\frac{dy_3(t)}{dt}$i adalah $\frac{(k+1)!}{k!}Y_3(k+1)$.

Lalu akan dibuktikan jika persamaan $k_6 y_2^2(t)$ adalah bentuk persamaan awal maka bentuk transformasinya adalah $k_6\sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_2(k-l)$

Bukti :

$$k_6 y_2^2(t) = k_6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y_2(t) y_2(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= k_6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} y_2(t) y_2(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

Berdasarkan Aturan Leibniz diperoleh

$$k_6 y_2^2(t) = k_6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_2(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= k_6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_2(t) \right]_{t=t_0} t^k$$

$$= k_6 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l} y_2(t) \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} y_2(t) t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l) t^k$$

Terbukti bahwa jika $k_6 y_2^2(t)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l)$. Berdasarkan perunutan bukti transformasi diferensial yang telah dibahas sebelumnya dapat dituliskan ke dalam tabel bentuk transformasinya sebagai berikut

Tabel 4.3 Transformasi DIferensial Persamaan Ketiga

Persamaan asli	Hasil transformasi
$\frac{dy_3(t)}{dt}$	$(k+1)Y_3(k+1)$
$k_6 y_2^2(t)$	$k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l).$

Sehingga dapat dituliskan kembali bentuk transformasi diferensial dari persamaan ketiga pada sistem persamaan (4.1) sebagai berikut

$$(k+1)Y_3(k+1) = k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_2(k-l).$$

sehingga bentuk transformasinya adalah

$$Y_3(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_2(k-l)\right) \tag{4.4}$$

Persamaan (4.2), (4.3) dan (4.4) adalah hasil transformasi persamaan pada sistem persamaan (4.1), sehingga transformasi sistem persamaan (4.1) dapat ditulis kembali seperti berikut

$$\begin{aligned}
Y_1(k+1) &= \frac{1}{(k+1)}\left(k_2 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_3(k-l) - k_1 Y_1(k)\right) \\
Y_2(k+1) &= \frac{1}{(k+1)}\left(k_3 Y_1(k) - k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_3(k-l) - k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_2(k-l)\right) \\
Y_3(k+1) &= \frac{1}{(k+1)}\left(k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_2(k-l)\right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Setelah sistem persamaan (4.1) ditransformasikan, maka tahap berikutnya adalah mentransformasikan kondisi awal pada persamaan asli yang diberikan dengan menggunakan definisi DTM pada definisi 2.2 persamaan (2.17), sehingga diperoleh nilai kondisi awal dari persamaan transformasinya, tentunya pada saat $k = 0$. Untuk kondisi awal $y_1(0) = 1$ diperoleh nilai transformasinya sebagai berikut

$$Y_1(0) = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 y_1(0)}{dt^0}\right] = y_1(0) = 1,$$

$$Y_1(0) = 1. \tag{4.6}$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh nilai $Y_2(0) = 0$dan $Y_3(0) = 0$, sehingga dapat ditulis kembali nilai kondisi awal persamaan transformasinya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} &Y_1(0) = 1, \\ &Y_2(0) = 0, \\ &Y_3(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Setelah diperoleh nilai awal persamaan transformasinya maka tahapan berikutnya adalah melakukan iterasi pada tiap persamaan transformasi pada persamaan (4.5). Pada persamaan pertama yaitu

$$Y_1(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(k_2 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l)Y_3(k-l) - k_1 Y_1(k)\right)$$

jika$k = 0$ maka

$$Y_1(1) = -k_1$$

jika$k = 1$ maka

$$Y_1(2) = \frac{1}{2}k_1^2$$

jika$k = 2$ maka

$$Y_1(3) = -\frac{1}{6}k_1^3$$

jika$k = 3$ maka

$$Y_1(4) = \frac{1}{24}k_1^4$$

jika$k = 4$ maka

$$Y_1(5) = -\frac{1}{120}k_1^5 + \frac{1}{15}k_6 k_3^3 k_2$$

jika$k = 5$ maka

$$Y_1(6) = \frac{1}{720}k_1^6 - \frac{29}{360}k_6 k_3^3 k_2 k_1$$

dan seterusnya.

Sedangkan pada persamaan kedua yaitu

$$Y_2(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(k_3 Y_1(k) - k_4 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_3(k-l) - k_5 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l)\right)$$

jika$k = 0$ maka

$$Y_2(1) = k_3$$

jika$k = 1$ maka

$$Y_2(2) = -\frac{1}{2} k_3 k_1$$

jika$k = 2$ maka

$$Y_2(3) = \frac{1}{6} k_3 k_1^2 - \frac{1}{3} k_5 k_3^2$$

jika$k = 3$ maka

$$Y_2(4) = -\frac{1}{24} k_3 k_1^3 + \frac{1}{4} k_5 k_3^2 k_1$$

jika$k = 4$ maka

$$Y_2(5) = \frac{1}{120} k_3 k_1^4 - \frac{1}{15} k_6 k_4 k_3^2 - \frac{7}{60} k_5 k_3^2 k_1^2 + \frac{2}{15} k_5^2 k_3^2$$

jika$k = 5$ maka

$$Y_2(6) = -\frac{1}{720} k_3 k_1^5 + \frac{1}{90} k_6 k_3^4 k_2 + \frac{5}{72} k_6 k_4 k_3^3 k_1 + \frac{1}{24} k_5 k_3^2 k_1^3 - \frac{5}{36} k_5^2 k_3^3 k_1$$

dan seterusnya.

Lalu pada persamaan ketiga yaitu

$$Y_3(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left(k_6 \sum_{l=0}^{k} Y_2(l) Y_2(k-l)\right).$$

jika$k = 0$ maka

$$Y_3(1) = 0$$

jika$k = 1$ maka

$$Y_3(2) = 0$$

jika$k = 2$ maka

$$Y_3(3) = \frac{1}{3}k_6k_3^2$$

jika$k = 3$ maka

$$Y_3(4) = -\frac{1}{4}k_6k_3^2k_1$$

jika$k = 4$ maka

$$Y_3(5) = \frac{7}{60}k_6k_3^2k_1^2 - \frac{2}{15}k_6k_5k_3^3$$

jika$k = 5$ maka

$$Y_3(6) = -\frac{1}{24}k_6k_3^2k_1^3 + \frac{5}{36}k_6k_5k_3^3k_1$$

dan seterusnya.

Dari hasil iterasi sebelumnya dapat ditulis kembali hasil iterasinya sebagai berikut

Tabel 4.4 Iterasi Persamaan Transformasi

k	$Y_1(k)$	$Y_2(k)$	$Y_3(k)$
0	1	0	0
1	$-k_1$	k_3	0
2	$\frac{1}{2}k_1^2$	$-\frac{1}{2}k_3k_1$	0
3	$-\frac{1}{6}k_1^3$	$\frac{1}{6}k_3k_1^2 - \frac{1}{3}k_5k_3^2$	$\frac{1}{3}k_6k_3^2$
4	$\frac{1}{24}k_1^4$	$-\frac{1}{24}k_3k_1^3 + \frac{1}{4}k_5k_3^2k_1$	$-\frac{1}{4}k_6k_3^2k_1$
5	$-\frac{1}{120}k_1^5 + \frac{1}{15}k_6k_3^3k_2$	$\frac{1}{120}k_3k_1^4 - \frac{1}{15}k_6k_4k_3^2 - \frac{7}{60}k_5k_3^2k_1^2 + \frac{2}{15}k_5^2k_3^2$	$\frac{7}{60}k_6k_3^2k_1^2 - \frac{2}{15}k_6k_5k_3^3$

6	$\frac{1}{720}k_1^6$ $-\frac{29}{360}k_6k_3^3k_2k_1$	$-\frac{1}{720}k_3k_1^5+\frac{1}{90}k_6k_3^4k_2$ $+\frac{5}{72}k_6k_4k_3^3k_1$ $+\frac{1}{24}k_5k_3^2k_1^3$ $-\frac{5}{36}k_5^2k_3^3k_1$	$-\frac{1}{24}k_6k_3^2k_1^3$ $+\frac{5}{36}k_6k_5k_3^3k_1$
dst..	dst..	dst.	dst.

Untuk memperoleh solusi pendekatan akhirnya, hasil iterasi diatas disubstitusikan ke persamaan (2.18), sehingga untuk persamaan pertama diperoleh

$$y_1(t)=Y_1(0)(t-t_0)^0+Y_1(1)(t-t_0)^1+Y_1(2)(t-t_0)^2+Y_1(3)(t-t_0)^3 \\ +Y_1(4)(t-t_0)^4+Y_1(5)(t-t_0)^5+Y_1(6)(t-t_0)^6 \ldots$$

Jika $t_0=0$

$$y_1(t)=Y_1(0)+Y_1(1)t+Y_1(2)t^2+Y_1(3)t^3+Y_1(4)t^4+Y_1(5)t^5+Y_1(6)t^6 \\ +\cdots$$

dengan mensubstitusikan hasil iterasinya diperoleh solusi aproksimasi sebagai berikut

$$y_1(t)=1+(-k_1)t+\left(\frac{1}{2}k_1^2\right)t^2+\left(-\frac{1}{6}k_1^3\right)t^3+\left(\frac{1}{24}k_1^4\right)t^4 \\ +\left(-\frac{1}{120}k_1^5+\frac{1}{15}k_6k_3^3k_2\right)t^5 \\ +\left(\frac{1}{720}k_1^6-\frac{29}{360}k_6k_3^3k_2k_1\right)t^6+\cdots \quad (4.8)$$

Kemudian, untuk persamaan kedua diperoleh

$$y_2(t) = Y_2(0)(t-t_0)^0 + Y_2(1)(t-t_0)^1 + Y_2(2)(t-t_0)^2 + Y_2(3)(t-t_0)^3 + Y_2(4)(t-t_0)^4 + Y_2(5)(t-t_0)^5 + Y_2(6)(t-t_0)^6 + \cdots$$

Jika $t_0 = 0$

$$y_2(t) = Y_2(0) + Y_2(1)t + Y_2(2)t^2 + Y_2(3)t^3 + Y_2(4)t^4 + Y_2(5)t^5 + Y_2(6)t^6 + \cdots$$

dengan mensubstitusikan hasil iterasinya diperoleh solusi aproksimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_2(t) = {} & k_3 t + \left(-\frac{1}{2}k_3k_1\right)t^2 + \left(\frac{1}{6}k_3k_1^2 - \frac{1}{3}k_5k_3^2\right)t^3 \\ & + \left(-\frac{1}{24}k_3k_1^3 + \frac{1}{4}k_5k_3^2k_1\right)t^4 \\ & + \left(\frac{1}{120}k_3k_1^4 - \frac{1}{15}k_6k_4k_3^2 - \frac{7}{60}k_5k_3^2k_1^2 + \frac{2}{15}k_5^2k_3^2\right)t^5 \\ & + \left(-\frac{1}{720}k_3k_1^5 + \frac{1}{90}k_6k_3^4k_2 + \frac{5}{72}k_6k_4k_3^3k_1 + \frac{1}{24}k_5k_3^2k_1^3 \right. \\ & \left. - \frac{5}{36}k_5^2k_3^3k_1\right)t^6 + \cdots \end{aligned} \tag{4.9}$$

Lalu, untuk persamaan ketiga diperoleh

$$y_3(t) = Y_3(0)(t-t_0)^0 + Y_3(1)(t-t_0)^1 + Y_3(2)(t-t_0)^2 + Y_3(3)(t-t_0)^3 + Y_3(4)(t-t_0)^4 + Y_3(5)(t-t_0)^5 + Y_3(6)(t-t_0)^6 + \cdots$$

Jika $t_0 = 0$

$$y_3(t) = Y_3(0) + Y_3(1)t + Y_3(2)t^2 + Y_3(3)t^3 + Y_3(4)t^4 + Y_3(5)t^5 + Y_3(6)t^6 + \cdots$$

dengan mensubstitusikan hasil iterasinya diperoleh solusi aproksimasi sebagai berikut

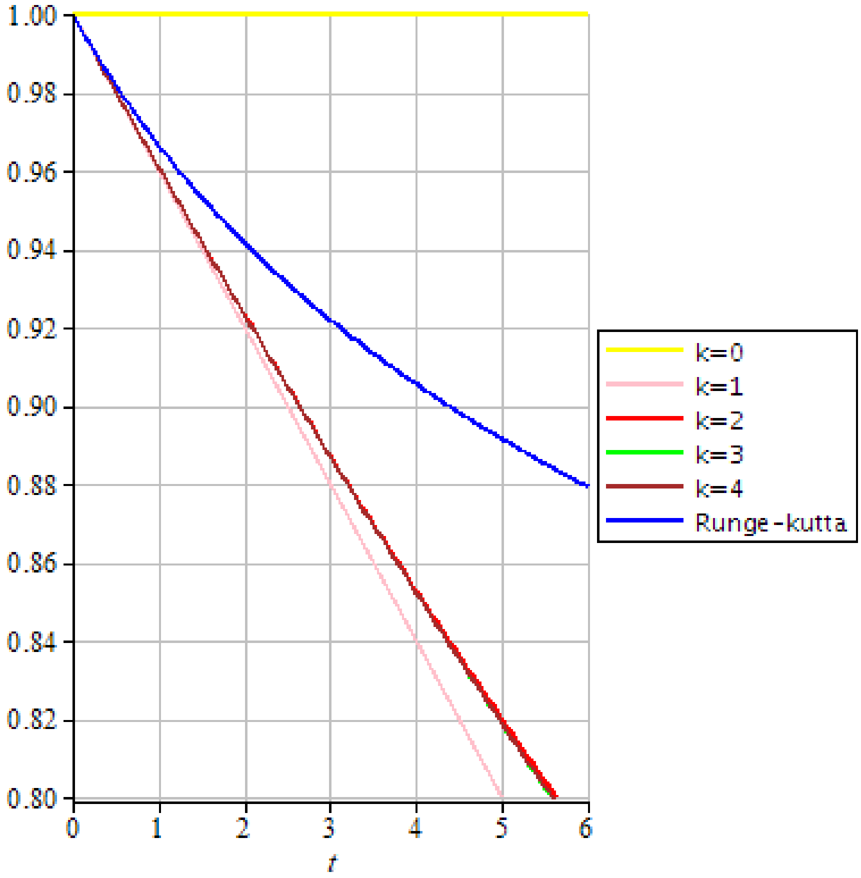
$$y_3(t) = \left(\frac{1}{3}k_6k_3^2\right)t^3 + \left(-\frac{1}{4}k_6k_3^2k_1\right)t^4 + \left(\frac{7}{60}k_6k_3^2k_1^2 - \frac{2}{15}k_6k_5k_3^3\right)t^5 + \left(-\frac{1}{24}k_6k_3^2k_1^3 + \frac{5}{36}k_6k_5k_3^3k_1\right)t^6 + \cdots \quad (4.10)$$

sehingga dapat ditulis kembali bahwa solusi sistem persamaan yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= 1 + (-k_1)t + \left(\frac{1}{2}k_1^2\right)t^2 + \left(-\frac{1}{6}k_1^3\right)t^3 + \left(\frac{1}{24}k_1^4\right)t^4 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{120}k_1^5 + \frac{1}{15}k_6k_3^3k_2\right)t^5 \\
&\quad + \left(\frac{1}{720}k_1^6 - \frac{29}{360}k_6k_3^3k_2k_1\right)t^6 + \cdots \\
y_2(t) &= k_3t + \left(-\frac{1}{2}k_3k_1\right)t^2 + \left(\frac{1}{6}k_3k_1^2 - \frac{1}{3}k_5k_3^2\right)t^3 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{24}k_3k_1^3 + \frac{1}{4}k_5k_3^2k_1\right)t^4 \\
&\quad + \left(\frac{1}{120}k_3k_1^4 - \frac{1}{15}k_6k_4k_3^2 - \frac{7}{60}k_5k_3^2k_1^2 + \frac{2}{15}k_5^2k_3^2\right)t^5 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{720}k_3k_1^5 + \frac{1}{90}k_6k_3^4k_2 + \frac{5}{72}k_6k_4k_3^3k_1 + \frac{1}{24}k_5k_3^2k_1^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{36}k_5^2k_3^3k_1\right)t^6 + \cdots \\
y_3(t) &= \left(\frac{1}{3}k_6k_3^2\right)t^3 + \left(-\frac{1}{4}k_6k_3^2k_1\right)t^4 + \left(\frac{7}{60}k_6k_3^2k_1^2 - \frac{2}{15}k_6k_5k_3^3\right)t^5 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{24}k_6k_3^2k_1^3 + \frac{5}{36}k_6k_5k_3^3k_1\right)t^6 + \cdots
\end{aligned} \quad (4.11)$$

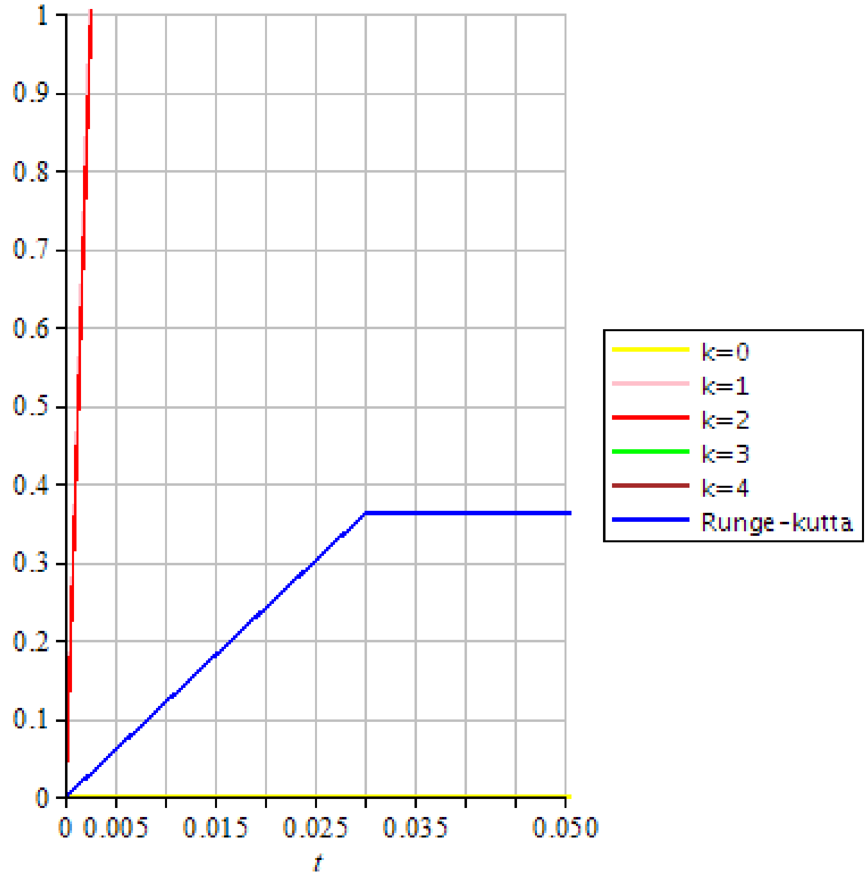
4.2 Plot Solusi Sistem PDB

Pada pemaparan sebelumnya penerapan metode transformasi diferensial menghasilkan solusi sistem persamaan diferensial hukum laju reaksi dalam bentuk deret tak hingga. Kemudian dari solusi yang diperoleh dibandingkan plotnya dengan menggunakan metode runge-kutta orde 4 dengan fungsi *built-in* rkf45 pada software Maple 18. Berikut adalah plot perbandingan solusi $y_1(t)$ antara metode runge-kutta dan metode transformasi diferensial dengan k dimulai dari 0 hingga 4 dengan t mulai dari 0 sampai 6



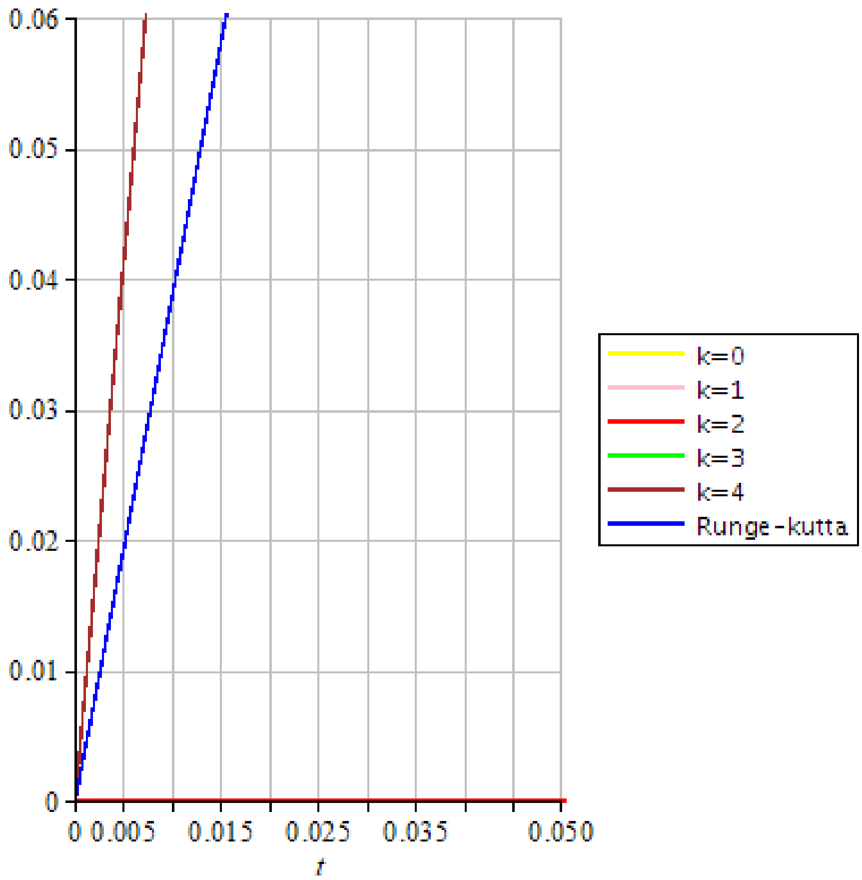
Gambar 4.1 Kurva Aproksimasi Solusi Persamaan $\boldsymbol{y_1(t)}$

kemudian untuk plot perbandingan solusi pada $y_2(t)$ adalah



Gambar 4.2 Kurva Aproksimasi Solusi $\boldsymbol{y_2(t)}$

sedangkan plot perbandingan solusi $y_3(t)$ adalah



Gambar 4.3 Kurva Aproksimasi Solusi $\boldsymbol{y_3(t)}$

Dari perbandingan plot solusi $y_1(t), y_2\ (t)$ dan $y_3(t)$ dapat diamati bahwa perbedaan hasil komputasi antara metode Runge-kutta dan transformasi diferensial tergantung dari orde k-nya, semakin tinggi k-nya maka plotnya semakin mendekati plot solusi Runge-kutta.

BAB V

PENUTUPAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah penggunaan metode transformasi diferensial telah berhasil diterapkan pada sistem persamaan diferensial biasa. Melalui proses iterasi metode transformasi diferensial pada sistem dengan kondisi awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$ dan $y_3(0) = 0$ dengan parameter konstantanta yang telah diberikan $(k_1 = 0.04, k_2 = 0.01, k_3 = 400, k_4 = 100, k_5 = 3000, k_6 = 30)$, dengan hasil kalkulasi iterasi pada metode transformasi diferensial maka diperoleh solusi sistem dalam bentuk deret tak hingga sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_1(t) = {} & 1 + (-k_1)t + \left(\frac{1}{2}k_1^2\right)t^2 + \left(-\frac{1}{6}k_1^3\right)t^3 + \left(\frac{1}{24}k_1^4\right)t^4 \\ & + \left(-\frac{1}{120}k_1^5 + \frac{1}{15}k_6k_3^3k_2\right)t^5 + \left(\frac{1}{720}k_1^6 - \frac{29}{360}k_6k_3^3k_2k_1\right)t^6 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) = {} & k_3t + \left(-\frac{1}{2}k_3k_1\right)t^2 + \left(\frac{1}{6}k_3k_1^2 - \frac{1}{3}k_5k_3^2\right)t^3 + \left(-\frac{1}{24}k_3k_1^3 + \frac{1}{4}k_5k_3^2k_1\right)t^4 \\ & + \left(\frac{1}{120}k_3k_1^4 - \frac{1}{15}k_6k_4k_3^2 - \frac{7}{60}k_5k_3^2k_1^2 + \frac{2}{15}k_5^2k_3^2\right)t^5 \\ & + \left(-\frac{1}{720}k_3k_1^5 + \frac{1}{90}k_6k_3^4k_2 + \frac{5}{72}k_6k_4k_3^3k_1 + \frac{1}{24}k_5k_3^2k_1^3 \right. \\ & \left. - \frac{5}{36}k_5^2k_3^3k_1\right)t^6 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(t) = {} & \left(\frac{1}{3}k_6k_3^2\right)t^3 + \left(-\frac{1}{4}k_6k_3^2k_1\right)t^4 + \left(\frac{7}{60}k_6k_3^2k_1^2 - \frac{2}{15}k_6k_5k_3^3\right)t^5 \\ & + \left(-\frac{1}{24}k_6k_3^2k_1^3 + \frac{5}{36}k_6k_5k_3^3k_1\right)t^6 + \cdots \end{aligned}$$

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar penelitian berikutnya menerapkan metode transformasi dierensial pada sistem persamaan diferenesial parsial dengan nilai awal $y(x, 0) = f(x)$ dengan $f(x)$ yang kontinu, karena ekspansi deret taylor pada metode transformasi diferensial dapat digunakan pada persamaan yang kontinu

.

DAFTAR PUSTAKA

Abazari, Reza dan A. Borhanifar. 2010. Numerical Study of The Solution of The Burgers and Coupled Burgers Equations by a Differential Transformation Method. *Computers and Mathematics with Application*. No. 59 Hal. 2711-2722.

Al-Quran Terjemah. (2015). *Depratemen Agama RI*. Bandung: CV. Darus Sunnah.

Amrullah, Abdul Malik Karim. 2015. *Tafsir Al–Azhar : Diperkaya dengan Pendekatan Sejarah, Sosiologi, Tasawuf, Ilmu Kalam, Sastra dan Psikologi*. Depok: Gema Insani.

Ayaz, Fatma. 2004. Application of Differential Transform Method to Differential-Algebraic Equations. *Applied Mathematics and Computations.* Hal. 649-657.

Borhanifar, A. dan Reza Abazari. 2011. Exact Solution For Non-Linear Schodinger Equation By Differential Transformation Method. *J Appl Math Comput.* Hal. 37-51.

Butcher, J. C. 2003. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.

Chen, C.dan S. Ho. 1996. Application of Differential Transformaion to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computations*. Hal. 173-188.

Chen. M. Jang, C. dan Y. Liy. 2000. On Solving TheInitial-Value Problems Using The Differential Transformaion Method. *Applied Mathematics and Computations*. Hal. 145-160

Idrees, Muhammad, dkk. 2013. Exact Solution for a Class of Stiff Systems by Differential Transform Method. *Applied Mathematics*. url: http://www.scirp.org/journal/am

Kangalgil, Figen. 2013. The Differential Transform Method for Solving One-Dimensional Burger's Equation and K(m,p,1) Equation. *Fen Bilimleri Dergisi*. No. 3.

Kaya, D. 2004. A reliable Method for The Numerical Solution of The Kinetics Problem. *Applied Mathematics and Computation*. No. 156 Hal. 261-270.

Khatib, Alaa, 2016. *Differential Transform Method for Differential Equation.* Tesis. Department of Mathematics Palestine Polytechnic University: Hebron.

Komaruddin. 1994. *Ensiklopedia Manajemen,* Edisi Ke-2. Jakarta: Bina Aksara.

Kreyszig, Erwin dkk. 2011. *Advanced Engineering Mathematics*. United State of America: Laurie Rosatone.

Sa'adah, Helliyatus. 2020. *Penyelesaian Persamaan KDV (Korteweig De Vries) Menggunaka Metode Transformasi Differensial*. Skripsi. Fakultas Sains dan Teknologi UIN: Malang.

Shaikh, Mdi B Jeelani. 2019. Some Application of Differential Transform Methods to Stiff Differential Equations. *International Journal of Applied Engineering Research*. Vol. 14. No. 4. Hal. 877-880

Shihab, M Quraish, 2017. *Tafsir Al Mishbah : Pesan, Kesan, dan Keserasian Al Qur'an*. Tangerang : Lentera Hati.

Robertson, H, H. 1966. *The Solution of The Set of Reaction Equations,* di: J. Walsh (Ed.), *Numerical Analysis, An Introduction*. London: Academic Press.

Wilkins, Ralph, G. 2002. *Kinetics and Mechanism of Reactions of Transition Metal Cpmplexes*. New York: VCH Publishers.

Zhou, J. K. 1986. *Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits*. Wuhan: Huarjung University Press

RIWAYAT HIDUP

Siti Maftuhah lahir di kota Malang, Provinsi Jawa Timur pada tanggal 09 Mei 1999. Penulis lahir dari pasangan Bapak Muhammad Ya'ud dan Ibu Luailik Faizah dan merupakan anak kedua dari enam bersaudara

Pada tahun 2005 penulis masuk Sekolah Dasar tepatnya di MI Almaarif 01 Singosari dan lulus pada tahun 2011. Kemudian melanjutkan sekolah tingkat pertama pada tahun yang sama di Mts. Almaarif 01 Singosari dan lulus tiga tahun kemudian pada tahun 2014. Selanjutnya masuk pada sekolah menengah akhir di MA Almaarif 01 Singosari sekaligus menempuh pendidikan pesantren di Pondok Pesantren Qur'an Nurul Huda Singosari dan lulus pada tahun 2017.

Pada tahun yang sama penulis diterima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi melalui jalur masuk undangan SNMPTN di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama menjalani program kuliah penulis tinggal di Ds. Biru Rt 04 Rw 01 Desa Gunungrejo Kec. Singosari Kab. Malang. Selama menjadi mahasiswa penulis juga aktif dalam organisasi intra kampus yakni Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ).

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Maftuhah
NIM : 17610035
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Hukum Laju Reaksi Dengan Metode Transformasi Diferensial
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	4 November 2021	Bimbingan Bab I, II, dan III	1	
2	9 November 2021	Revisi Bab I, II, dan III		2
3	9 November 2021	Bimbingan Kajian Agama Bab I dan II	3	
4	12 November 2021	Revisi Kajian Agama Bab 1 dan II		4
5	15 November 2021	ACC Pendaftaran Seminar Proposal	5	
6	22 Maret 2022	Bimbingan Setelah Seminar Proposal		6
7	25 Maret 2022	Revisi Bab IV	7	
8	25 April 2022	ACC Pendaftaran Seminar Hasil		10
9	23 Mei 2022	Bimbingan Setelah Seminar Hasil	11	
10	17 Juni 2022	ACC Semua Bab Untuk Disidangkan		12

Malang, 22 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.19741129 200012 2 005