IMPLEMENTASI METODE LAX FRIEDRICHS PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS

SKRIPSI

OLEH:
M. IFAN ALI RIDLO
NIM. 17610119

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

IMPLEMENTASI METODE LAX FRIEDRICHS PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
M. IFAN ALI RIDLO
NIM. 17610119

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

IMPLEMENTASI METODE LAX FRIEDRICHS PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS

SKRIPSI

Oleh
M. Ifan Ali Ridlo
NIM. 17610119

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 20 Juni 2022

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Heni Widayani, M.Si	Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

IMPLEMENTASI METODE LAX FRIEDRICHS PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS

SKRIPSI

Oleh
M. Ifan Ali Ridlo
NIM. 17610119

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 22 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji 1	: Juhari, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: M. Ifan Ali Ridlo
NIM	: 17610119
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Implementasi Metode Lax Friedrichs Pada Penyelesaian Persamaan Burgers

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau fikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau fikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2022

Yang membuat pernyataan

M. Ifan Ali Ridlo

NIM.17610119

MOTO DAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Alm. Maftukhan dan Ibu Siti Sa'adah, yang senantiasa mencurahkan kasih dan sayang tanpa mengharapkan balas budi dan selalu menjadi tempat pulang penulis serta sebagai alasan untuk berjuang dalam menggapai mimpi-mimpi dan kesuksesan penulis. Serta seluruh keluarga dan teman yang selalu mendukung penulis dan memberikan doa serta semangat kepada penulis.

Moto:
"Mindset is do'a,
perjuangan adalah seni "

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul "Implementasi Metode Lax Friedrichs Pada Penyelesaian Persamaan Burgers". Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang yakni agama Islam. Semoga penulis dan pembaca tergolong sebagai orang-orang yang mendapat syafaat kelak di hari kiamat, aamiin.

Dalam selesainya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah mendukung dan membantu secara langsung maupun tidak langsung, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang ditujukan:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasehat, pembelajaran, saran dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasehat dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, sebagai dosen penguji Seminar Proposal dan Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan masukan, arahan dan nasehat kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingan selama ini.

8. Kedua orang tua dan keluarga yang selalu memberikan doa dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga rahmat dan karunia Allah selalu dilimpahkan kepada kita semua. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca maupun bagi penulis.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 22 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$u(x,t)$	: Perubahan gelombang yang dipengaruhi oleh ruang (x) dan waktu (t)
$\frac{\partial u}{\partial x}$	: Turunan pertama terhadap x
$\frac{\partial u}{\partial t}$	: Turunan pertama terhadap t
u_j^n	: Perubahan gelombang yang dipengaruhi oleh ruang j dan waktu n
j	: Indeks untuk menyatakan waktu di x
n	: Indeks untuk menyatakan waktu di t
Δt	: Perubahan waktu
Δx	: Perubahan Ruang

ABSTRAK

Ridlo, M. Ifan Ali. 2022. **Implementasi Metode Lax Friedrichs Pada Penyelesaian Persamaan Burgers**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim, Malang. Pembimbing (1) Dr. Heni Widayani, M.Si. (2) Ari Kusumastuti, M.Pd. M.Si.

Kata Kunci: Persamaan Burgers, Metode Lax Friedrichs, solusi numerik, MATLAB.

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan differensial parsial nonlinier yaitu persamaan Burgers. Penyelesaian persamaan tersebut dilakukan dengan menggunakan metode lax friedrichs yang merupakan metode numerik perkembangan dari metode *Forward Time Centered Space* (FTCS) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial linier dan nonlinier. Pada penelitian ini digunakan nilai awal linier dan dua syarat batas yaitu batas kiri dan batas kanan pada persamaan Burgers yang diberikan. Solusi numerik dihitung menggunakan tiga variasi Δx dan Δt yang berbeda dan diperoleh galat perhitungan solusi numerik dan solusi eksak yang paling minimum sebesar $\varepsilon = 0{,}065$ ketika $\Delta x = 0{,}2$ dan $\Delta t = 0{,}2$. Kemudian disimulasikan menggunakan software MATLAB. Disimpulkan bahwa metode lax friedrichs dapat digunakan untuk menghitung solusi numerik untuk persamaan Burgers.

ABSTRACT

Ridlo, M. Ifan Ali. 2022. **The Implementation of the Lax Friedrichs Method in Solving the Burgers Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang. Supervisor (1) Dr. Heni Widayani, M.Si. (2) Ari Kusumastuti, M.Pd, M,Si.

Keywords: Burgers equation, Lax Friedrichs method, numerical solution, MATLAB.

This study discusses the solution to the nonlinear partial differential equation, namely the Burgers equation. Solving these equations is done using the Lax Friedrichs method which is a numerical method developed from the Forward Time Centered Space (FTCS) method which can be used to solve linear and nonlinear partial differential equations. In this study, a linear initial value and two boundary conditions were used, namely the left and right limits of the given Burgers equation. The numerical solution was calculated using three different variations of Δx and Δt and the error in calculating the numerical solution and the minimum exact solution was obtained at $\varepsilon = 0{,}065$ when $\Delta x = 0{,}2$ and $\Delta t = 0{,}2$. Then simulated using MATLAB software. It is concluded that the lax friedrichs method can be used to calculate the numerical solution to the Burgers equation.

مستخلص البحث

ريضا,محمد عيفان علي. 2022. **تطبيق طريقة Lax Friedrichs في حل معادلة Burgers**. البحث العلمى. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، بمالانج. المشرفة (1) الدكتور هيني ويدايانى, الماجستير. (2) آري كوسوماستوتي, الماجستير

الكلمات المفتاحية: معادلة Burgers ، طريقة Lax Friedrichs ، الحل العددي ، MATLAB

تناقش هذه الدراسة حل المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية وهي معادلة برجر (Burgers). يتم حل هذه المعادلات باستخدام طريقة Lax Friedrichs وهي طريقة عددية تم تطويرها من طريقة FTCS والتي يمكن استخدامها لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية. في هذه الدراسة ، تم استخدام قيمة أولية خطية وشرطين حدوديين ، وهما الحدين الأيمن والأيسر لمعادلة برجر (Burgers) المحددة. تم حساب الحل العددي باستخدام ثلاثة متغيرات مختلفة من Δx و Δt والخطأ في حساب الحل العددي وتم الحصول على الحل الدقيق الأدنى عند $\varepsilon =$ 0.065عندما $\Delta x = 0.2$ و $\Delta t = 0.2$. م تمت محاكاته باستخدام برنامج MATLAB نستنتج أنه يمكن استخدام طريقة Lax Friedrichs لحساب الحل العددي لمعادلة برجر (Burgers).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Persamaan Burgers merupakan suatu model matematika yang didapatkan dari permasalahan diberbagai bidang matematika terapan seperti dinamika gas, mekanika fluida, dan arus lalu lintas. Permasalahan tersebut banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari seperti dinamika gas yang digunakan pada alat-alat penyemprotan, misalnya penyemprotan parfum dan lain-lain. Mekanika fluida yang digunakan pada dongkrak hidrolik. Sedangkan arus lalu lintas yang berkaitan erat dengan kemacetan yang sangat mengganggu dan bisa menghambat aktivitas. Oleh karena itu perlu dicari penyelesaian dari persamaan ini.

Persamaan Burgers telah diselesaikan beberapa peneliti menggunakan metode analitik maupun numerik. Diantaranya oleh Evi (2019) telah menyelesaikan persamaan Burgers secara analitik menggunakan salah satu pendekatan analitik yang terbaru dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial nonlinier yaitu Metode Fungsi Eksponensial (MFE). Pada penelitian tersebut diperoleh tiga solusi umum yang valid untuk persamaan burgers satu dimensi yang berbeda. Sedangkan Ahmad Ripai dkk (2019) yang menganalisis solusi persamaan Burgers dengan menggunakan transformasi Hopf-Cole yang berlandaskan pada transformasi Fourier dan deret Fourier. Berdasarkan analisis solusi soliton pada persamaan burgers, hanya mekanisme penyelesaian yang berlandaskan transformasi fourier yang berhasil menemukan solusi soliton walaupun hanya stabil dalam selang waktu 0,1 s. Mekanisme penyelesaian yang berlandaskan deret fourier menghasilkan solusi periodik berupa gelombang meluruh terhadap waktu.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur’an Surat Al-an’am ayat 96 yang artinya:

“Dia menyingsingkan pagi dan menjadikan malam untuk beristirahat, dan menjadikan matahari dan bulan untuk perhitungan. Itulah ketentuan Allah yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui”.

Allah yang menciptakan malam dan menjadikannya sebagai waktu yang tenang, kemudian mengeluarkan cahaya pagi dari gelapnya malam. Siapa yang merasa lelah pada waktu siang dapat beristirahat di waktu malam. Dia menjadikan matahari dan bulan beredar pada porosnya dengan perhitungan yang sangat rapi, tidak kacau, dan tidak berubah-ubah. Matahari dan bulan memiliki orbit yang dilintasinya pada musim panas dan musim dingin, sehingga dari perjalanan tersebut menyebabkan terjadinya pergantian serta pengaruh terhadap panjang pendeknya siang dan malam. Keduanya berjalan dengan beraturan, tidak berubah, terukur, dan menurut perhitungan yang sempurna. Itulah perhitungan Allah yang Maha Perkasa dengan kekuasaan-Nya yang kokoh, Maha Mengetahui kemaslahatan hamba-Nya dan mengatur urusan-urusan mereka.

Pada penelitian ini metode yang akan digunakan yakni metode Lax Friedrichs. Pada penelitian sebelumnya metode ini telah digunakan, diantaranya oleh Moh. Halik (2014) yang membahas tentang metode Lax Friedrichs dalam menyelesaikan persamaan gelombang tali yang bertipe hiperbolik. Dalam penelitian tersebut proses penyelesaiannya mengimplementasikan beda maju pada waktu dan beda tengah pada ruang, dan mensubstitusikan kondisi rata-rata ruang terhadap suku u_j^n yang diakibatkan oleh turunan pada waktu (t) sehingga diperoleh bentuk solusi skema Lax Friedrichs.

Dalam matematika, mencari penyelesaian analitik cukup sulit dilakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini penyelesaian persamaan ini dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode Lax Friedrichs yang merupakan salah satu metode numerik dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial dan merupakan perkembangan dari metode *Forward Time Centered Space (FTCS)*. Oleh karena itu, pastinya metode ini bisa digunakan dalam menyelesaikan persamaan Burgers. Berdasarkan latar belakang tersebut, pada penelitian ini penulis mengangkat judul "Implementasi Metode Lax Friedrichs Pada Penyelesaian Persamaan Burgers".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana diskritisasi persamaan Burgers menggunakan metode Lax Friedrichs?
2. Bagaimana solusi numerik persamaan Burgers menggunakan metode Lax Friedrichs?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penulisan pada penelitian ini adalah:

1. Menganalisis bentuk diskrit persamaan Burgers menggunakan metode Lax Friedrichs.
2. Menganalisis solusi numerik persamaan Burgers menggunakan metode Lax Friedrichs.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat pada penelitian ini diantaranya sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan dan wawasan mengenai bentuk diskrit persamaan Burgers dalam penyelesaian menggunakan metode Lax Friedrichs
2. Mendapatkan ilustrasi seperti apa bentuk solusi numerik penyelesaian persamaan Burgers dengan menggunakan metode Lax Friedrichs.

1.5 Batasan Masalah

Persamaan Burgers yang akan digunakan dalam penelitian ini yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ 0 \le x \le 1$$

dengan syarat awal

$$u(x, 0) = 2x + 1$$

dan syarat batas

$$u(0, t) = \frac{1}{2t + 1}$$

$$u(1, t) = \frac{3}{2t + 1}$$

dengan t adalah variabel waktu, x adalah variabel ruang, dan u adalah variabel terikat yang bergantung pada x dan t.

1.6 Definisi Istilah

Definisi istilah yang digunakan dalam penelitian ini yakni sebagai berikut:

Burgers Viscid : Persamaan Burgers yang koefisien viskositasnya $v \neq 0$

Burgres Inviscid : Persamaan Burgers yang koefisien viskositasnya $v = 0$

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Persamaan Differensial Parsial

Persamaan differensial parsial adalah suatu persamaan differensial dengan turunan parsial dari satu variabel terikat atau lebih dengan lebih dari satu variabel bebas. Turunan dari orde paling tinggi yang ada didalam persamaan merupakan orde dari sebuah persamaan differensial parsial. Persamaan differensial parsial dikelompokkan menjadi persamaan differensial parsial linier dan persamaan differensial nonlinier. Menurut Wazwaz (2009) persamaan differensial parsial dikatakan linier jika memenuhi syarat:

1. Jika variabel terikat dan setiap turunan parsial dalam suatu persamaan berpangkat satu.
2. Jika variabel terikat dan setiap turunan parsial mempunyai koefisien konstan atau variabel bebas.

Jika salah satu syarat diatas tidak terpenuhi, maka persamaan tersebut termasuk persamaan differensial nonlinier.

2.2 Persamaan Burgers

Persaman Burgers merupakan salah satu persamaan differensial parsial non linier. Bentuk standar persamaan Burgers adalah sebagai berikut:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

Dengan v adalah koefisien viskositas yang bernilai konstan. Jika koefisien viskositasnya $v = 0$, maka disebut persamaan burgers *inviscid*. Bentuk persamaan burger *inviscid* adalah sebagai berikut:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) pertama kali dikenalkan oleh Bateman dalam sebuah karyanya yang berjudul *"Some Recent Research On The Motion Of Fluids".* Ini merupakan kasus khusus dari beberapa model matematika turbulensi yang diperkenalkan sekitar tiga puluh tahun yang lalu oleh J.M. Burgers (Benton Platzman,1972).

Sedangkan persamaan Burgers yang koefisien viskositasnya tidak nol disebut persamaan Burgers *viscid*. Persamaan (2.1) adalah salah satu model dasar persamaan burgers dalam mekanika fluida. Persamaan Burgers menunjukkan hubungan antara efek disipasi u_{xx} dan proses konveksi uu_x. Berbeda dengan persamaan KdV yang menggabungkan efek uu_x nonlinier dan dispersi u_{xxx} , persamaan Burgers menggabungkan efek uu_x nonlinier dan disipasi u_{xx} . Burgers memperkenalkan persamaan ini untuk menangkap beberapa fitur turbulen fluida dalam saluran yang disebabkan oleh interaksi efek yang berlawanan dari konveksi dan difusi. Hal ini juga digunakan untuk menggambarkan struktur gelombang kejut, arus lalu lintas, dan transmisi akustik. Persamaan Burgers benar-benar terintegrasi. Solusi gelombang persamaan Burgers adalah solusi tunggal dan ganda.

2.3 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar dalam penyelesaian masalah dengan metode numerik terutama dalam penyelesaian persamaan differensial. Deret Taylor untuk fungsi multivariabel adalah sebagai berikut:

Misalnya diberikan fungsi u dengan variabel bebas x dan t kemudian diekspansi dengan deret taylor disekitar x sebagai berikut:

$$u(x_{i+1}, t_{i+1}) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial u}{\partial t}(t_{i+1} - t_i) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i+1} - x_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{i+1} - t_i)^2\right) + \cdots \quad (2.3)$$

(Chapra dan Canale, 2010)

Sehingga untuk fungsi $u(x + \Delta x, t), u(x - \Delta x, t), u(x + 2\Delta x, t), u(x, t - \Delta t), u(x, t + \Delta t)$ dan $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$ diekspansi ke dalam deret Taylor di sekitar (x, t) menjadi seperti berikut:

$$u(x + \Delta x, t) = u(x,t) + u_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)\Delta x^2 +$$

$$\frac{1}{6}u_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots \quad (2.4)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x,t) - u_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)\Delta x^2 -$$

$$\frac{1}{6}u_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots \quad (2.5)$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x,t) + u_t(x,t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)\Delta t^2 +$$

$$\frac{1}{6}u_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots \quad (2.6)$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x,t) - u_t(x,t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)\Delta t^2 -$$

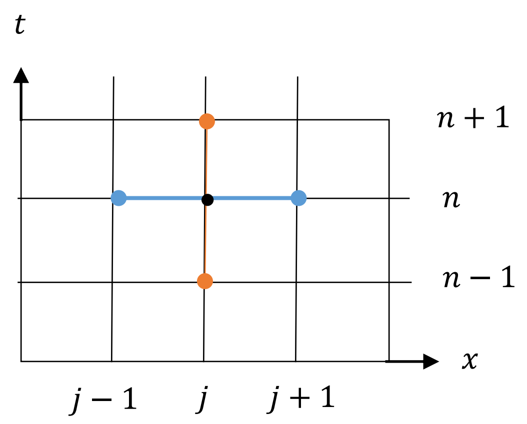
$$\frac{1}{6}u_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots \quad (2.7)$$

2.4 Metode Numerik

2.4.1 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode yang sangat popular dalam penyelesaian persamaan differensial biasa ataupun persamaan differensial parsial, yang mempunyai dasar pada ekspansi deret taylor (Strauss, 2007). Metode beda hingga dapat diterapkan untuk mendekati nilai suatu titik sebagai turunan dari titik lain dengan menggunakan deret taylor. Pendekatan menggunakan deret taylor ini dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan pusat yang biasa disebut dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Sasongko, 2010).

Perhatikan gambar berikut untuk lebih memahami beda maju, beda mundur, dan beda pusat.

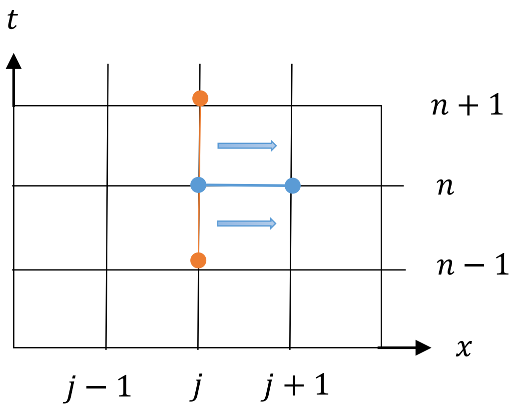


Gambar 2.1 *Stensil* Pada sumbu x dan t

1. Metode beda maju

   Berdasarkan pada gambar 2.1, bentuk metode beda maju digambarkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

   a) Metode beda maju pada ruang (x)



Gambar 2.2 Metode Beda Maju Pada Ruang (x)

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

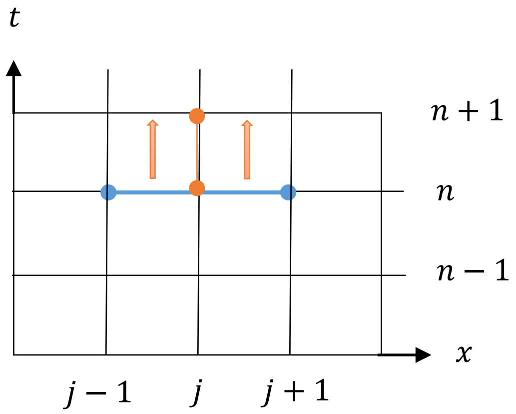
i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j}^{n} = \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}}{\Delta x} \tag{2.8}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{j}^{n} = \frac{u_{j+2}^{n} - 2u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}}{(\Delta x)^2} \tag{2.9}$$

b) Metode beda maju pada waktu (t)



Gambar 2.3 Metode Beda Maju Pada Waktu (t)

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{2.10}$$

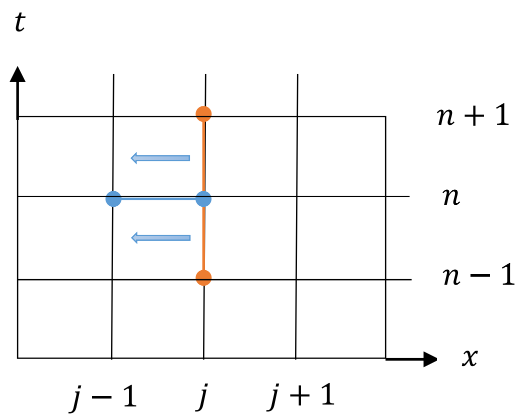
ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} - u_j^n}{(\Delta t)^2} \tag{2.11}$$

2. Metode beda mundur

Berdasarkan pada gambar 2.1, bentuk metode beda mundur digambarkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

a) Metode beda mundur pada ruang (x)



Gambar 2.4 Metode Beda Mundur Pada Ruang (x)

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan pertama dan kedua sebagai berikut:

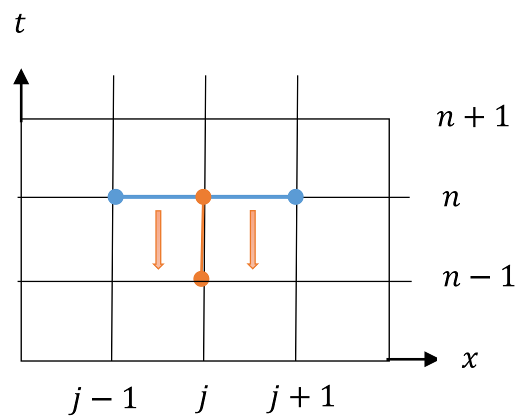
i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \tag{2.12}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.13}$$

b) Metode beda mundur pada waktu (t)



Gambar 2.5 Metode Beda Mundur Pada Waktu (t)

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \tag{2.14}$$

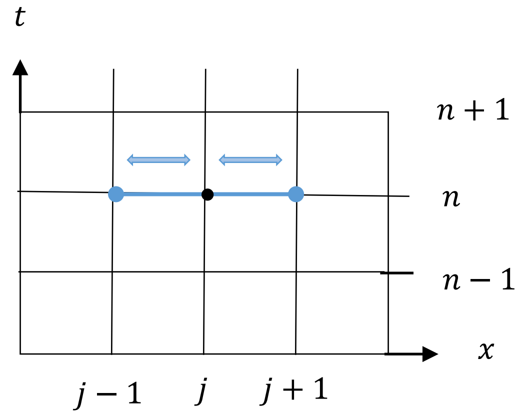
ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} - u_j^{n-2}}{(\Delta t)^2} \tag{2.15}$$

3. Metode beda pusat

Berdasarkan pada gambar 2.1, bentuk metode beda pusat ini digambarkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

a) Metode beda pusat pada ruang (x)



Gambar 2.6 Metode Beda Pusat Pada Ruang (x)

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

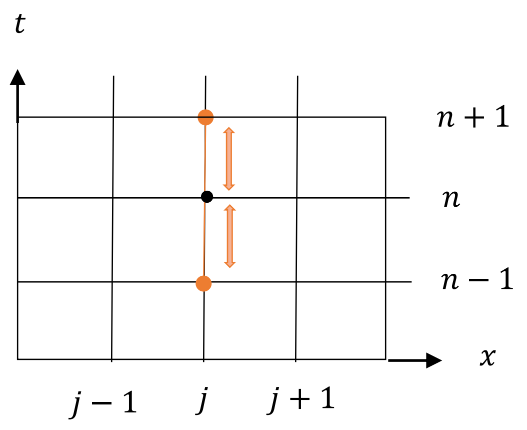
i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j}^{n} = \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} \tag{2.16}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{j}^{n} = \frac{u_{j-1}^{n} - 2u_{j}^{n} - u_{j+1}^{n}}{(\Delta x)^2} \tag{2.17}$$

b) Metode beda pusat pada waktu (t)



Gambar 2.7 Metode Beda Pusat Pada Waktu (t)

Berdasarkan gambar didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2.18}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{j}^{n} = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n} - u_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} \tag{2.19}$$

2.4.2 Metode Lax Friedrich

Metode Lax Friedrichs merupakan salah satu metode numerik yang termasuk dalam metode beda hingga (Halik, 2015). Dalam penyelesaian suatu persamaan gelombang, metode Lax Friedrichs dapat digunakan karena metode ini merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan menerapkan metode beda hingga. Metode Lax Friedrichs mempunyai dasar yang sangat sederhana yaitu mengganti nilai u_j^n dengan nilai rata-rata dari u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n atau dapat ditulis:

$$u_j^n = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$$

Tahapan yang digunakan metode Lax Friedrichs dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial adalah dengan menerapkan metode beda maju dan metode beda pusat. Hal ini dikarenakan metode Lax Friedrichs merupakan suatu metode perkembangan dari metode FTCS. Metode beda maju yang diterapkan yakni untuk turunan waktunya dan metode beda pusat yang diterapkan yakni untuk turunan ruang.

2.4.3 Analisis Kestabilan Von Neumann

Hasil yang didapatkan dari metode beda hingga tidak berupa sebuah fungsi $(\hat{u}x)$ sebagai aproksimasi dari fungsi $u(x)$. Akan tetapi, hasil yang didapatkan dari metode beda hingga yakni berupa deretan nilai-nilai u_j untuk setiap titik x_j. Deretan nilai ini yang membentuk solusi aproksimasi dari fungsi $u(x)$ dan grafik inilah yang selanjutnya disebut dengan solusi numerik. Analisis stabilitas Von Neumann atau disebut juga analisis stabilitas fourier, dalam analisis numerik merupakan sebuah tahapan untuk memeriksa kestabilan skema beda hingga yang diimplementasikan pada persamaan differensial parsial. Stabilitas numerik sangat berkaitan dengan eror numerik. Jika eror yang terjadi pada satu langkah perhitungan waktu tidak menyebabkan peningkatan eror pada perhitungan selanjutnya maka sebuah skema beda hingga dikatakan stabil. Sebaliknya, skema beda hingga dikatakan tidak stabil atau menyimpang jika erornya bertambah seiring waktu.

Dengan menggunakan analisis kestabilan Von Neumann pada metode Lax Friedrichs bertujuan bahwa jika solusi numerik yang didapatkan kurang dekat dengan nilai eksaknya, maka kestabilan dari persamaan beda dapat dicari dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ pada persamaan beda tersebut, dengan superskrip i yang artinya menunjukkan posisi, n merupakan waktu, j merupakan vektor dan untuk semua a dalam interval $[0,2\pi]$. Syarat kestabilan Von Neumann yaitu:

$$|\rho| \leq 1$$

2.4.4 Orde Galat

Penyebab galat dalam perhitungan numerik biasanya terjadi karena dua hal yakni karena galat pembulatan *(round-off error)* dan karena galat pemotongan (*truncation error)* (Munir, 2008). Acuan galat pemotongan yaitu pada galat yang disebabkan karena hampiran digunakan sebagai pengganti formula eksak. Karena bergantung terhadap metode perhitungan yang digunakan untuk aproksimasi, maka tipe galat pemotongan dapat disebut galat metode. Dikarenakan banyak metode numerik yang didapatkan dengan aproksimasi fungsi menggunakan deret taylor maka istilah pemotongan pun muncul. Untuk aproksimasi, deret taylor dipotong sampai suku orde tertentu saja karena deret taylor merupakan deret tak hingga.

Kriteria konsistensi akan terpenuhi jika $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$, berarti apabila selisih dari persamaan tersebut dengan suku-suku galat pemotongan menuju nol, maka skema dapat disebut konsisten dengan persamaan differensial parsialnya. Kriteria konsistensi ini ditentukan dengan menggunakan deret Taylor. Jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan, deret taylor dapat memberikan estimasi suatu fungsi dengan benar. Kebanyakan yang terjadi hanya beberapa suku pertama saja yang digunakan untuk perhitungan, sehingga hasil estimasi tidak setepat solusi analitik. Terdapat kesalahan sebab tidak memperhitungkan suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan inilah yang disebut galat pemotongan. Dalam penyederhanaan permasalahan kebanyakan hanya ditujukan pada beberapa suku dari deret Taylor, sedangkan biasanya mengabaikan suku yang lainnya (Triatmodjo, 2002). Dengan analisis galat dapat diketahui seberapa dekat hasil dari solusi numerik dengan hasil dari solusi eksaknya.

2.5 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran dan Hadis

Didalam kehidupan, manusia merupakan makhluk ciptaan Allah yang memiliki beberapa keterbatasan. Namun, manusia diberikan akal sehat untuk memikirkan tanda-tanda yang diberikan Allah SWT di alam semesta berdasarkan Al-Qur'an surat Al-An'am ayat 96, penentuan awal Ramadhan sebagai contohnya, dasar perhitungannya menggunakan matahari dan bulan yang telah Allah ciptakan. Dalam sebuah hadis yang diriwayatkan Imam Bukhari dari Ibnu Umar, Nabi Muhammad SAW bersabda:

"...janganlah kalian berpuasa hingga kamu melihatnya, dan jangan kamu berbuka hingga melihat hilal. Jika kamu tidak dapat melihatnya (karena tertutup awan) maka sempurnakanlah hitungan".

Rasulullah bersabda dalam sebuah hadis lain yang diriwayatkan Imam Bukhari dari Abu Hurairah:

"…bahwasanya Nabi Muhammad SAW. Bersabda: Berpuasalah kamu karena melihat bulan dan berbukalah kamu karena melihatnya. Jika bulan tersebut tertutup awan maka sempurnakanlah hitungan bulan Sya'ban 30 hari".

Dari kedua hadis di atas dapat diketahui bahwa Rasulullah SAW menganjurkan kita untuk melakukan estimasi dalam menentukan jatuhnya bulan puasa atau awal Ramadhan.

Di Indonesia, penentuan jatuhnya bulan puasa atau bulan Ramadhan dan Idul Fitri dilakukan oleh pemerintah dengan merujuk dan mempertimbangkan hasil hisab dan rukyatul hilal diberbagai titik atau lokasi pengamatan. Sehingga dengan metode-metode tersebut didapatkan estimasi dalam menentukan jatuhnya awal bulan Ramadhan dan Idul Fitri. Dalam praktiknya, tentunya penggunaan metode tersebut sedikit banyak dipengaruhi karena adanya perubahan siang dan malam yang disebabkan oleh perputaran bumi, matahari, dan bulan. Sehingga diketahui waktu, hari, minggu, bulan, dan tahun.

Berdasarkan dari hadis dan pemaparan di atas dijelaskan bahwa kita sebagai manusia tentunya tidak selalu dapat mengetahui hal yang pasti. Salah satunya dalam hal penentuan awal puasa atau bulan Ramadhan dan Idul Fitri. Tetapi dari ayat dan hadis diatas kita sebagai manusia yang berakal hendaknya melakukan prediksi atau estimasi dengan cara atau metode tertentu yang tentunya sesuai dengan syariat sehingga didapatkan hasil yang bisa diterima dan disepakati bersama.

Tata cara rukyatul hilal berdasarkan syariat islam ditinjau dari segi perukyat atau orang yang melakukan rukyat mempunyai beberapa persyaratan yakni syarat formal dan meteriel yang harus dipenuhi, syarat formal diantaranya aqil baligh atau sudah dewasa, beragaman islam, laki-laki atau perempuan, sehat akalnya, mampu melakukan rukyat, jujur, adil, dan dapat dipercaya, jumlah perukyat lebih dari satu orang, mengucapkan sumpah kesaksian rukyat hilal, sumpah kesaksian rukyat hilal di depan sidang Pengadilan Agama atau Mahkamah Syari’ah yang dihadiri dua orang saksi. Sedangkan syarat materielnya yaitu perukyat menerangkan sendiri dan melihat sendiri dengan mata maupun menggunakan alat bahwa ia melihat hilal, perukyat mengetahui pasti bagaimana proses melihat hilal yakni kapan waktunya, dimana tempatnya, berapa lama melihatnya, dimana letak arah posisi dan keadaan hilal yang dilihat, serta bagaimana kecerahan cuaca langit saat hilal dapat dilihat, serta keterangan hasil rukyat yang dilaporkan oleh perukyat tidak bertentangan dengan akal sehat, perhitungan ilmu hisab, kaidah ilmu pengetahuan dan kaidah syariat.

2.6 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Persamaan (2.2) merupakan persamaan differensial parsial kuasi linier. Salah satu bentuk sederhana dari persamaan (2.2) adalah persamaan differensial parsial linier yang sering disebut persamaan transport.

Bentuk persamaan transport adalah sebagai berikut:

$$u_t + u_x = 0 \tag{2.20}$$

Dengan konstanta a, b bilangan real sebarang, persamaan (2.20) menjadi:

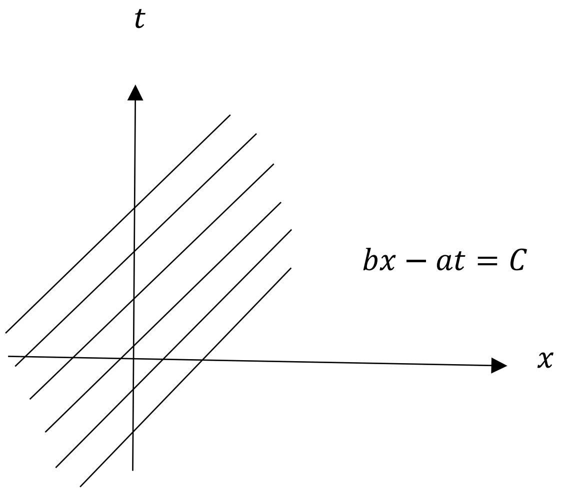
$$au_x + bu_t = 0 \tag{2.21}$$

Persamaan (2.21) dapat dituliskan sebagai turunan berarah menjadi:

$D_V u = v.\nabla u = 0$

Dengan vektor arah $v = \binom{a}{b}$

$u(x,t)$ merupakan solusi (2.20) jika dan hanya jika turunan terarah dari $u(x,t)$ pada arah $v = (a\ b)^T$ sama dengan nol. Perhatikan garis-garis yang sejajar dengan vektor v pada gambar berikut:



Gambar 2.8 Garis Karakteristik

Persamaan garis-garis sejajar di atas adalah $t = \frac{b}{a}x - C \equiv bx - at = C$. Garis-garis ini disebut sebagai garis karakteristik. Nilai fungsi $u(x,t)$ konstan selama x, t terletak pada satu garis karakteristik $bx - at = C$. Jadi $u(x,t)$ hanya bergantung pada nilai C pada persamaan garis karakteristik tersebut, atau $u(x,t)$ hanya bergantung pada $bx - at$, sehingga solusi persamaan transport $au_x + bu_t = 0$ adalah $u(x,t) = f(bx - at)$, dengan f suatu fungsi sebarang.

Selanjutnya menggunakan metode beda hingga, akan digunakan persamaan transport sebagai berikut:

$$u_t + u_x = 0, \text{ untuk } (x,t) \in [0, L] \times [0, T] \tag{2.22}$$

Dengan syarat awal

$$u(x, 0) = 2x + 1, \text{ untuk } 0 \leq x \leq L$$

Perhatikan selang $[0, L]$ yang dipartisi dengan ukuran Δx dengan titik-titik partisi $x_j = (j-1)\Delta x$, untuk $j = 1,2, \cdots, Nx$. Selang $[0, T]$ dipartisi dengan ukuran Δt dengan titik-titik partisi $t_n = (n-1)\Delta t$, untuk $n = 1,2, \cdots, Nt$. Akan dicari $u(x_j, t_n)$ untuk $j = 1,2, \cdots, Nx$, dan $n = 1,2, \cdots, Nt$. Akan digunakan notasi $u_j^n = u(x_j, t_n)$.sehingga persamaan beda hingga untuk persamaan (2.22) sebagai berikut:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{2.23}$$

Dengan menggunakan metode Lax Friedrichs, nilai dari u_j^n diganti menjadi rata-rata dari u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n, sehingga persamaan (2.23) menjadi:

$$\Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_j^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + u_j^n$$

$$\Leftrightarrow\ u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$\Leftrightarrow\ u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\ (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \qquad (2.24)$$

Untuk menganalisis kestabilan disubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke persamaan (2.23), sehingga didapatkan:

$$\rho^{n+1} e^{iaj} = \frac{1}{2}\left(\rho^n e^{ia(j+1)} + \rho^n e^{ia(j-1)}\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho^n e^{ia(j+1)} - \rho^n e^{ia(j-1)}\right)$$

Kemudian dibagi dengan $\rho^n e^{iaj}$ sehingga diperoleh:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) - \frac{1}{2}C\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$$

Dengan $C = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, sehingga diperoleh:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\cos a + i\sin a + (\cos a - i\sin a)\right) - \frac{1}{2}C\left(\cos a + i\sin a - (\cos a - i\sin a)\right) \qquad (2.23)$$

Persamaan (2.23) dapat ditulis menjadi bentuk yang lebih sederhana menjadi:

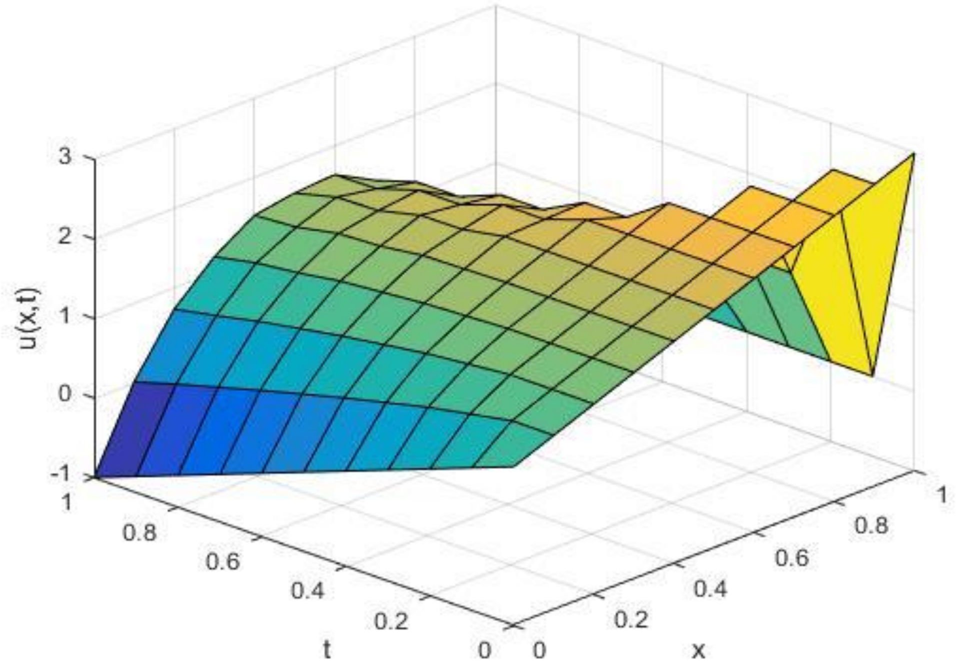
$$\rho = \cos a - iC\sin a$$

Jika $\rho = a + ib$ maka $|\rho|^2 = a^2 + b^2$, sehingga diperoleh:

$$|\rho| = \sqrt{\cos^2(a) + C^2\sin^2(a)}$$

Jika $C = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ maka $|\rho| \leq 1$ untuk setiap a, jadi skema stabil.

Simulasi dengan menggunakan MATLAB adalah sebagai berikut:



Gambar 2.9 Simulasi Numerik Persamaan Transport untuk $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ Dengan $\Delta x = 0{,}1 \; dan \; \Delta t = 0{,}1$

Dari gambar 2.9 di atas diketahui syarat awalnya adalah $u(x, 0) = 2x + 1$ yang ada di bidang sebelah kiri. Dapat dilihat ketika $x = 0$ nilai $u(x, t) = 1$ dan ketika $x = 1$ nilai $u(x, t) = 3$. Ketika t berjalan ternyata nilai awalnya semakin bergeser karena nilainya semakin turun. Ketika $x = 0$ nilai u adalah 1, ketika $x = 0$ tapi t nya di 0,2 nilainya berubah dan semakin turun. Sampai Ketika $t = 1$ nilai u di $x = 0$ nilainya adalah 0.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode penelitian yang menjadi acuan dalam penelitian ini merupakan metode kualitatif. Metode penelitian kualitatif digambarkan sebagai metode yang digunakan untuk meneliti suatu objek dengan memanfaatkan metode tertentu yang mana peneliti menjadi instrumen kunci dalam penelitian tersebut. Metode penenlitian ini akan digunakan untuk memperoleh penyelesaian persamaan Burgers mengguanakan salah satu metode numerik yakni metode Lax Friedrichs.

3.2 Tahapan penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang digunakan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Melakukan diskritisasi persamaan Burgers dengan menggunakan metode Lax Friedrichs.
   a. Mensubstitusikan metode beda maju terhadap waktu dan metode beda pusat terhadap ruang ke persamaan Burgers.
   b. Mengganti nilai u_j^n pada skema FTCS dengan dengan rata-rata u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n atau dapat ditulis $u_j^n = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$.
2. Tahapan penyelesaian solusi numerik
   a. Menghitung solusi analitik dan numerik menggunakan syarat awal dengan variasi tiga Δx dan Δt yang berbeda.
   b. Membuat tabel galat solusi analitik dan numerik.

c. Melakukan perhitungan batas kanan dan batas kiri dengan variasi tiga Δx dan Δt yang berbeda.

d. Menghitung grid stensil dengan variasi tiga Δx dan Δt yang berbeda.

e. Melakukan simulasi dengan menggunakan MATLAB.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Diskritisasi Persamaan Burgers

Pada penelitian ini persamaan Burgers yang digunakan adalah persamaan Burgers *inviscid* yang akan diselesaikan secara numerik. Penyelesaian secara numerik berarti suatu penyelesaian dengan menggunakan metode pendekatan, sehingga dibutuhkan bentuk solusi analitik sebagai bahan perbandingan untuk mengetahui kesignifikan dari hasil solusi secara numerik. Berdasarkan literatur Subrahmanyan Candrashekar 1943 bentuk solusi analitik dari persamaan Burgers *inviscid* dengan kondisi awal linier $u(x,0) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, dengan a dan b adalah konstanta, diperoleh solusi eksplisitnya adalah $u(x,t) = \frac{ax+b}{at+1}$. Pada penelitian ini akan digunakan kondisi awal yang sama, dengan nilai $a = 2$ dan $b = 1$. Sehingga diperoleh solusi eksplisitnya adalah

$$u(x,t) = \frac{2x+1}{2t+1} \tag{4.1}$$

Hal ini bisa dibuktikan dengan menghitung nilai $u_t + uu_x$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x+1}{2t+1}$$

$$u_t = (2x+1)(2t+1)^{-1}$$

$$= (2x+1)(2t+1)^{-2}(-2)$$

$$= (-4x-2)(2t+1)^{-2}$$

$$= \frac{-4x-2}{(2t+1)^2}$$

$$u_x = (2x+1)(2t+1)^{-1}$$

$$= 2(2t+1)^{-1}$$

$$= \frac{2}{2t+1}$$

$$u_t + u.u_x = \frac{-4x-2}{(2t+1)^2} + \left(\frac{2x+1}{2t+1}.\frac{2}{2t+1}\right)$$

$$= \frac{-4x-2}{(2t+1)^2} + \frac{4x+2}{(2t+1)^2}$$

$$= 0$$

Bentuk persamaan Burgers *inviscid* yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ 0 \le x \le 1 \quad (4.2)$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = 2x+1$$

dan syarat batas

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1}$$

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1}$$

Dengan t merupakan variabel waktu, x merupakan variabel ruang, dan u merupakan variabel terikat yang bergantung pada x dan t.

Dalam penyelesaian numerik persamaan Burgers, selain membutuhkan syarat awal dan syarat batas dibutuhkan juga pendekatan pada turunan dari persamaan Burgers baik turunan pada waktu (t) dan turunan pada ruang (x) yang dilakukan dengan pendekatan beda hingga yakni metode beda pusat dan beda maju. Metode beda maju terhadap turunan waktu (t) dan metode beda pusat terhadap turunan ruang (x). Dengan Δt menunjukkan perubahan waktu dan Δx menunjukkan perubahan ruang. Bentuk persamaan turunan pertama untuk metode beda maju terhadap turunan waktu (t) dan metode beda pusat terhadap turunan ruang (x) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{4.4}$$

Setelah diketahui bentuk turunan pertama baik turunan terhadap waktu (t) dan turunan terhadap ruang (x), maka penyelesaian persamaan (4.2) dengan metode Lax Friedrichs yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (4.3) dan (4.4) ke persamaan (4.2) sehingga didapatkan bentuk diskrit skema *Forward Time Centered Space (FTCS)* untuk persamaan (4.2) sebagai berikut:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -u_j^n \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

$$\Leftrightarrow u_j^{n+1} = -u_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right) + u_j^n$$

$$\Leftrightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - u_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right) \tag{4.5}$$

Berikutnya dengan metode Lax Friedrichs untuk skema *Forward Time Centered Space (FTCS)* adalah dengan mengganti u_j^n dengan rata-rata u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n . Atau dapat ditulis $u_j^n = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n \right)$. Maka diperoleh skema Lax Friedrichs sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n \right) - \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n \right) \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right) \tag{4.6}$$

4.2 Penyelesaian Solusi Numerik Persamaan Burgers

Ketika dilakukan perhitungan diskritisasi dari bentuk persamaan Lax Friedrichs di atas, kita dapat mengetahui nilai-nilai pada u_j^n dengan $n = 1,2$ ... dan $= 1,2$ ... . Ketika menggunakan $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = 0,2$ dan syarat awal dan kondisi batas di atas maka diperoleh bentuk diskritisasi sebagai berikut:

Untuk mencari nilai pada u_j^1 dengan $j = 1,2,3,4,5$ maka berdasarkan $u(x, 0) = f(x) = 2x + 1$ sehingga diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

$u_0^1 = 2x_1 + 1 = 2(0) + 1 = 1$

$u_1^1 = 2x_2 + 1 = 2(0,2) + 1 = 1,4$

$u_2^1 = 2x_3 + 1 = 2(0,4) + 1 = 1,8$

$u_3^1 = 2x_4 + 1 = 2(0,6) + 1 = 2,2$

$u_4^1 = 2x_5 + 1 = 2(0,8) + 1 = 2,6$

$u_5^1 = 2x_6\ + 1 = 2(1) + 1 = 3$

Sedangkan untuk mencari nilai-nilai pada u_j^2 dengan $j = 1,2,3,4,,5$, maka digunakan persamaan skema Lax Friedrichs (4.6) ketika $n = 1$.

Untuk $n = 1$ dan $j = 1$ maka diperoleh nilai u_1^2 sebagai berikut:

$$u_1^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{1+1}^1 - u_{1-1}^1)$$

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) - \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^1 - u_0^1)$$

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(1,8 + 1) - \frac{1}{2}(1,8 + 1)\frac{0,2}{2(0,2)}(1,8 - 1)$$

$$u_1^2 = 1,4 - 0,56$$

$$u_1^2 = 0,84$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 2$ maka diperoleh nilai u_2^2 sebagai berikut:

$$u_2^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{2+1}^1 - u_{2-1}^1)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) - \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_3^1 - u_1^1)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}4) - \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}4)\frac{0{,}2}{2(0{,}2)}(2{,}2 - 1{,}4)$$

$$u_2^2 = 1{,}8 - 0{,}72$$

$$u_2^2 = 1{,}08$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 3$ maka diperoleh nilai u_3^2 sebagai berikut:

$$u_3^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{3+1}^1 - u_{3-1}^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) - \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_4^1 - u_2^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(2{,}6 + 1{,}8) - \frac{1}{2}(2{,}6 + 1{,}8)\frac{0{,}2}{2(0{,}2)}(2{,}6 - 1{,}8)$$

$$u_3^2 = 2{,}2 - 0{,}88$$

$$u_3^2 = 1{,}32$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 4$ maka diperoleh nilai u_4^2 sebagai berikut:

$$u_4^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{4+1}^1 - u_{4-1}^1)$$

$$u_4^2 = \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) - \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_5^1 - u_3^1)$$

$$u_4^2 = \frac{1}{2}(3 + 2{,}2) - \frac{1}{2}(3 + 2{,}2)\frac{0{,}2}{2(0{,}2)}(3 - 2{,}2)$$

$$u_4^2 = 2{,}6 - 1{,}04$$

$$u_4^2 = 1{,}56$$

Lalu untuk perhitungan persamaan (4.1) dimana $x_1 = 0, x_2 = 0{,}2, x_3 = 0{,}4, x_4 = 0{,}6, x_5 = 0{,}8$ adalah sebagai berikut:

Untuk $x_1 = 0$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_1 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}71$$

Untuk $x_2 = 0{,}2$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_2 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}2) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = 1$$

Untuk $x_3 = 0{,}2$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_3 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}4) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{0{,}8 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{1{,}8}{1{,}4} = 1{,}28$$

Untuk $x_4 = 0{,}6$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

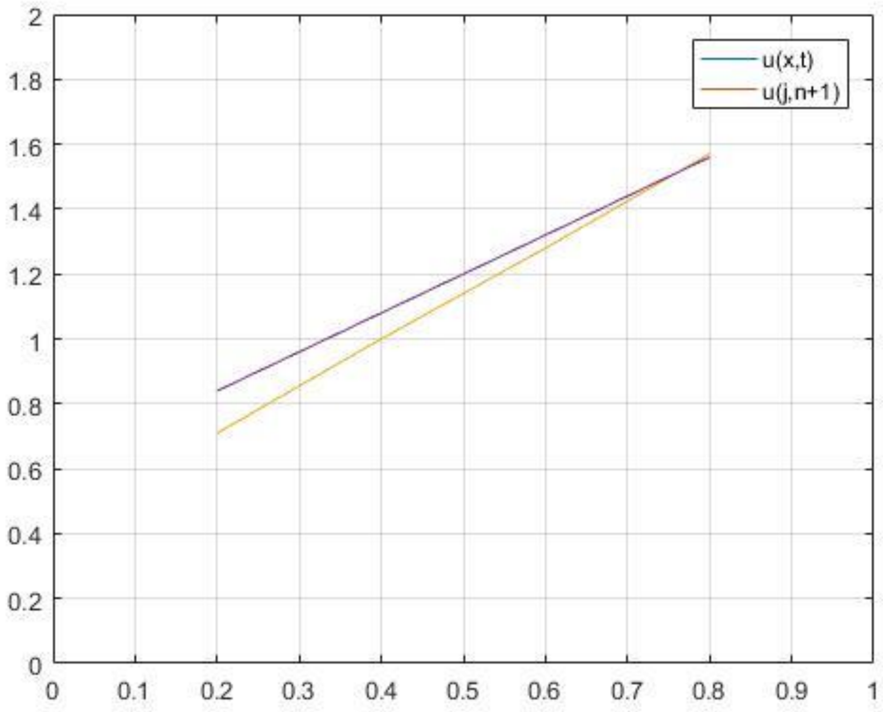
$$u(x,t) = \frac{2x_4 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}6) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1{,}2 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{2{,}2}{1{,}4} = 1{,}57$$

Jika dibuat tabel perhitungan diskritisasi solusi analitik dan numerik di atas adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Galat Penyelesaian Numerik Persamaan Burgers menggunakan Metode Lax Friedrichs untuk $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}2$

x_j / t_n	Solusi Analitik $u(x,t) = \frac{2x+1}{2t+1}$	Solusi Numerik $u(j,n+1)$	Galat $u(x,t) - u(j,n+1)$
	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}2$
$x_1 = 0$	0,71	0,84	0,13
$x_2 = 0{,}2$	1	1,08	0,08
$x_3 = 0{,}4$	1,28	1,32	0,04
$x_4 = 0{,}6$	1,57	1,56	0,01
			$\sum_{i=1}^{4} \lvert\varepsilon_i\rvert = 0{,}065$

Jika dibuat gambar menggunakan MATLAB solusi numerik dan solusi eksak akan menjadi seperti berikut:



Gambar 4.1 Solusi Numerik dan Solusi Eksak Untuk $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}2$

Perhitungan $u(x, 0) = 2x + 1$ untuk $x = 0, 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $x = 0$ diperoleh $u(x, 0)$ sebagai berikut:

$u(x, 0) = 2x + 1 = 2.(0) + 1 = 1$

Untuk $x = 0{,}2$ diperoleh $u(x, 0)$ sebagai berikut:

$u(x, 0) = 2x + 1 = 2.(0{,}2) + 1 = 1{,}4$

Untuk $x = 0{,}4$ diperoleh $u(x, 0)$ sebagai berikut:

$u(x, 0) = 2x + 1 = 2.(0{,}4) + 1 = 1{,}8$

Untuk $x = 0{,}6$ diperoleh $u(x, 0)$ sebagai berikut:

$u(x, 0) = 2x + 1 = 2.(0{,}6) + 1 = 2{,}2$

Untuk $x = 0{,}8$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}8) + 1 = 2{,}6$

Untuk $x = 1$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(1) + 1 = 3$

Perhitungan $u(0,t) = \frac{1}{2t+1}$ untuk $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $t = 0{,}2$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}2)+1} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}71$$

Untuk $t = 0{,}4$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}4)+1} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}56$$

Untuk $t = 0{,}6$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}6)+1} = \frac{1}{2{,}2} = 0{,}45$$

Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}8)+1} = \frac{1}{2{,}6} = 0{,}38$$

Untuk $t = 1$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Perhitungan $u(1,t) = \frac{3}{2t+1}$ untuk $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $t = 0{,}2$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}2)+1} = \frac{3}{1{,}4} = 2{,}14$$

Untuk $t = 0{,}4$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}4)+1} = \frac{3}{1{,}8} = 1{,}67$$

Untuk $t = 0{,}6$ diperoleh $u(1, t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}6)+1} = \frac{3}{2{,}2} = 1{,}36$$

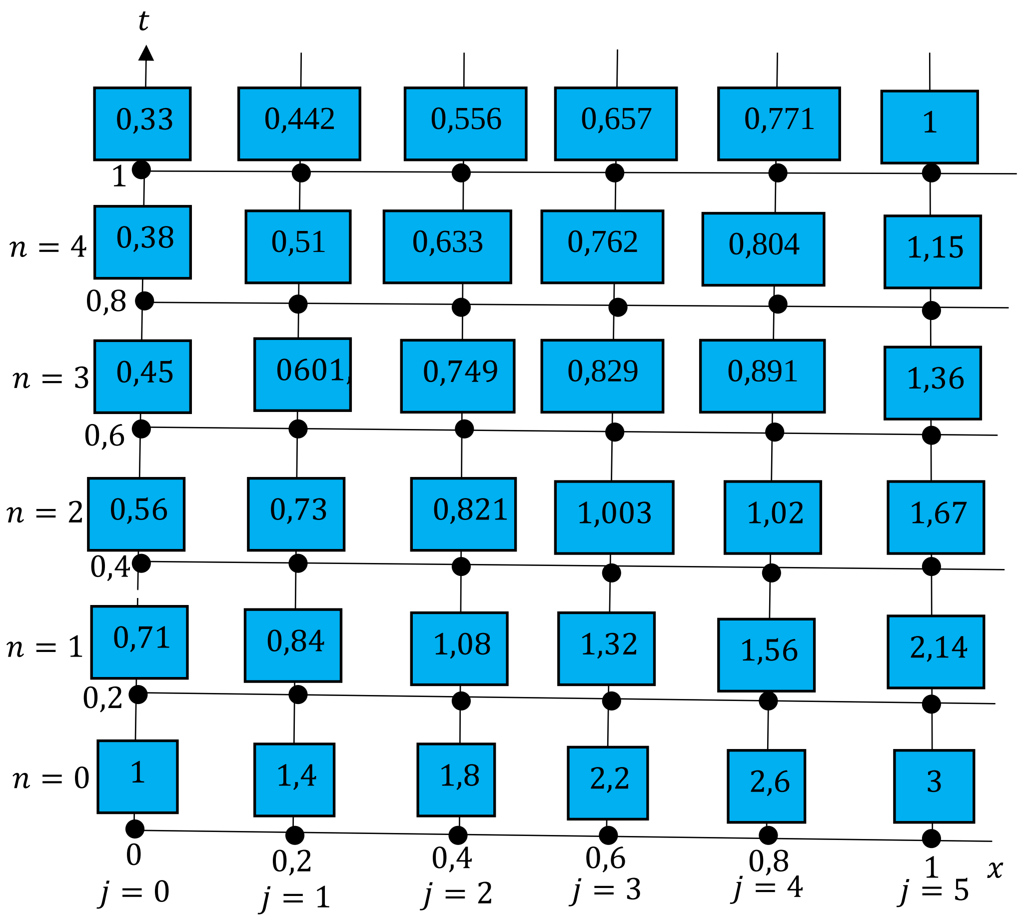
Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(1, t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}8)+1} = \frac{3}{2{,}6} = 1{,}15$$

Untuk $t = 1$ diperoleh $u(1, t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(1)+1} = \frac{3}{3} = 1$$

Jika digambarkan akan menjadi:



Gambar 4.2 Grid Stensil Untuk $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}2$

Setelah didapatkan batas kiri dan batas kanan kita dapat menghitung:

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^1 - u_0^1)\frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1)$$

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(1,8 + 1) - \frac{0,2}{2(0,2)}(1,8 - 1)\frac{1}{2}(1,8 + 1)$$

$$u_1^1 = 1,4 - 0,56$$

$$u_1^1 = 0,84$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_3^1 - u_1^1)\frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1)$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(2,2 + 1,4) - \frac{0,2}{2(0,2)}(2,2 - 1,4)\frac{1}{2}(2,2 + 1,4)$$

$$u_2^1 = 1,8 - 0,72$$

$$u_2^1 = 1,08$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_4^1 - u_2^1)\frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1)$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}(2,6 + 1,8) - \frac{0,2}{2(0,2)}(2,6 - 1,8)\frac{1}{2}(2,6 + 1,8)$$

$$u_3^1 = 2,2 - 0,88$$

$$u_3^1 = 1,32$$

$$u_4^1 = \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_5^1 - u_3^1)\frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1)$$

$$u_4^1 = \frac{1}{2}(3 + 2,2) - \frac{0,2}{2(0,2)}(3 - 2,2)\frac{1}{2}(3 + 2,2)$$

$$u_4^1 = 2,6 - 1,04$$

$$u_4^1 = 1,56$$

Begitupun seterusnya menggunakan cara yang sama sehingga didapatkan nilai setiap grid seperti pada gambar 4.1.

Ketika menggunakan $\Delta t = 0{,}1$ dan $\Delta x = 0{,}2$ dan syarat awal dan kondisi batas di atas maka diperoleh bentuk diskritisasi sebagai berikut:

Untuk mencari nilai pada u_j^1 dengan $j = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10$ maka berdasarkan $u(x,0) = f(x) = 2x + 1$ sehingga diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

$u_0^1 = 2x_0 + 1 = 2(0) + 1 = 1$

$u_1^1 = 2x_1 + 1 = 2(0{,}1) + 1 = 1{,}2$

$u_2^1 = 2x_2 + 1 = 2(0{,}2) + 1 = 1{,}4$

$u_3^1 = 2x_3 + 1 = 2(0{,}3) + 1 = 1{,}6$

$u_4^1 = 2x_4 + 1 = 2(0{,}4) + 1 = 1{,}8$

$u_5^1 = 2x_5 + 1 = 2(0{,}5) + 1 = 2$

$u_6^1 = 2x_6 + 1 = 2(0{,}6) + 1 = 2{,}2$

$u_7^1 = 2x_7 + 1 = 2(0{,}7) + 1 = 2{,}4$

$u_8^1 = 2x_8 + 1 = 2(0{,}8) + 1 = 2{,}6$

$u_9^1 = 2x_9 + 1 = 2(0{,}9) + 1 = 2{,}8$

$u_{10}^1 = 2x_{10} + 1 = 2(1) + 1 = 3$

Sedangkan untuk mencari nilai-nilai pada u_j^2 dengan $j = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10$, maka digunakan persamaan skema Lax Friedrichs (4.6) ketika $n = 1$.

Untuk $n = 1$ dan $j = 1$ maka diperoleh nilai u_1^2 sebagai berikut:

$$u_1^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{1+1}^1 - u_{1-1}^1)$$

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) - \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^1 - u_0^1)$$

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(1{,}4 + 1) - \frac{1}{2}(1{,}4 + 1)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(1{,}4 - 1)$$

$$u_1^2 = 1{,}2 - 0{,}12$$

$u_1^2 = 1{,}08$

Untuk $n = 1$ dan $j = 2$ maka diperoleh nilai u_2^2 sebagai berikut:

$$u_2^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{2+1}^1 - u_{2-1}^1)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) - \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_3^1 - u_1^1)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}2) - \frac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}2)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(1{,}6 - 1{,}2)$$

$$u_2^2 = 1{,}4 - 0{,}14$$

$$u_2^2 = 1{,}36$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 3$ maka diperoleh nilai u_3^2 sebagai berikut:

$$u_3^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{3+1}^1 - u_{3-1}^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) - \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_4^1 - u_2^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(1{,}8 + 1{,}4) - \frac{1}{2}(1{,}8 + 1{,}4)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(1{,}8 - 1{,}4)$$

$$u_3^2 = 1{,}6 - 0{,}16$$

$$u_3^2 = 1{,}54$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 4$ maka diperoleh nilai u_4^2 sebagai berikut:

$$u_4^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{4+1}^1 - u_{4-1}^1)$$

$$u_4^2 = \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) - \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_5^1 - u_3^1)$$

$$u_4^2 = \frac{1}{2}(2 + 1{,}6) - \frac{1}{2}(2 + 1{,}6)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2 - 1{,}6)$$

$$u_4^2 = 1{,}8 - 0{,}18$$

$$u_4^2 = 1{,}72$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 5$ maka diperoleh nilai u_5^2 sebagai berikut:

$$u_5^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{5+1}^1 + u_{5-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{5+1}^1 + u_{5-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{5+1}^1 - u_{5-1}^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(u_6^1 + u_4^1) - \frac{1}{2}(u_6^1 + u_4^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_6^1 - u_4^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}8) - \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}8)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}2 - 1{,}8)$$

$$u_5^2 = 2 - 0{,}2$$

$$u_5^2 = 1{,}8$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 6$ maka diperoleh nilai u_5^2 sebagai berikut:

$$u_6^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{6+1}^1 + u_{6-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{6+1}^1 + u_{6-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{6+1}^1 - u_{6-1}^1)$$

$$u_6^2 = \frac{1}{2}(u_7^1 + u_5^1) - \frac{1}{2}(u_7^1 + u_5^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_7^1 - u_5^1)$$

$$u_6^2 = \frac{1}{2}(2{,}4 + 2) - \frac{1}{2}(2{,}4 + 2)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}4 - 2)$$

$$u_6^2 = 2{,}2 - 0{,}22$$

$$u_6^2 = 1{,}98$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 7$ maka diperoleh nilai u_5^2 sebagai berikut:

$$u_7^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{7+1}^1 + u_{7-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{7+1}^1 + u_{7-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{7+1}^1 - u_{7-1}^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(u_8^1 + u_6^1) - \frac{1}{2}(u_8^1 + u_6^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_8^1 - u_6^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(2{,}6 + 2{,}2) - \frac{1}{2}(2{,}6 + 2{,}2)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}6 - 2{,}2)$$

$$u_5^2 = 2{,}4 - 0{,}24$$

$$u_5^2 = 2{,}16$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 8$ maka diperoleh nilai u_5^2 sebagai berikut:

$$u_8^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{8+1}^1 + u_{8-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{8+1}^1 + u_{8-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{8+1}^1 - u_{8-1}^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(u_9^1 + u_7^1) - \frac{1}{2}(u_9^1 + u_7^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_9^1 - u_7^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(2{,}8 + 2{,}4) - \frac{1}{2}(2{,}8 + 2{,}4)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}8 - 2{,}4)$$

$$u_5^2 = 2{,}6 - 0{,}26$$

$$u_5^2 = 2{,}34$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 9$ maka diperoleh nilai u_5^2 sebagai berikut:

$$u_5^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{9+1}^1 + u_{9-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{9+1}^1 + u_{9-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{9+1}^1 - u_{9-1}^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(u_{10}^1 + u_8^1) - \frac{1}{2}(u_{10}^1 + u_8^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{10}^1 - u_8^1)$$

$$u_5^2 = \frac{1}{2}(3 + 2{,}6) - \frac{1}{2}(3 + 2{,}6)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(3 - 2{,}6)$$

$$u_5^2 = 2{,}8 - 0{,}28$$

$$u_5^2 = 2{,}52$$

Lalu untuk perhitungan persamaan (4.1) dimana $x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}1,\ x_3 = 0{,}2,\ x_4 = 0{,}3,\ x_5 = 0{,}4, x_6 = 0{,}5, x_7 = 0{,}6, x_8 = 0{,}7, x_9 = 0{,}8, x_{10} = 0{,}9$ adalah sebagai berikut:

Untuk $x_1 = 0{,}1$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_1 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}1) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1{,}2}{1{,}4} = 0{,}86$$

Untuk $x_2 = 0{,}2$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_2 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}2) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = 1$$

Untuk $x_3 = 0{,}3$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_3 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}3) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{0{,}6 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{1{,}6}{1{,}4} = 1{,}14$$

Untuk $x_4 = 0{,}4$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_4 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}4) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{0{,}8 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{1{,}8}{1{,}4} = 1{,}29$$

Untuk $x_5 = 0{,}5$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_5 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}5) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{2}{1{,}4} = 1{,}43$$

Untuk $x_6 = 0{,}6$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_6 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}6) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1{,}2 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{2{,}2}{1{,}4} = 1{,}57$$

Untuk $x_7 = 0{,}7$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_7 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}7) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1{,}4 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{2{,}4}{1{,}4} = 1{,}71$$

Untuk $x_8 = 0{,}8$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_8 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}8) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{1{,}6 + 1}{0{,}4 + 1} = \frac{2{,}6}{1{,}4} = 1{,}86$$

Untuk $x_9 = 0{,}9$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_9 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}9) + 1)}{2(0{,}2) + 1} = \frac{2{,}8}{1{,}4} = 2$$

Jika dibuat tabel perhitungan diskritisasi solusi analitik dan numerik di atas adalah sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel Galat Penyelesaian Numerik Persamaan Burgers Menggunakan Metode Lax Friedrichs Untuk $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}1$

x_j $/t_n$	Solusi Analitik $u(x,t) = \frac{2x+1}{2t+1}$	Solusi Numerik $u(j,n+1)$	Galat $u(x,t) - u(j,n+1)$
$x_1 = 0{,}1$	0,86	1,08	0,22
$x_2 = 0{,}2$	1	1,36	0,36
$x_3 = 0{,}3$	1,14	1,54	0,4
$x_4 = 0{,}4$	1,29	1,72	0,43
$x_5 = 0{,}5$	1,43	1,8	0,37
$x_6 = 0{,}6$	1,57	1,98	0,41
$x_7 = 0{,}7$	1,71	2,16	0,45
$x_8 = 0{,}8$	1,86	2,34	0,48
$x_9 = 0{,}9$	2	2,52	0,52
			$\sum_{i=1}^{9} \lvert\varepsilon_i\rvert = 0{,}404$

Perhitungan $u(x,0) = 2x + 1$ untuk $x = 0, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5, 0{,}6, 0{,}7,$ $0{,}8, 0{,}9$ sebagai berikut:

Untuk $x = 0$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0) + 1 = 1$

Untuk $x = 0{,}1$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}1) + 1 = 1{,}2$

Untuk $x = 0{,}2$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}2) + 1 = 1{,}4$

Untuk $x = 0{,}3$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}3) + 1 = 1{,}6$

Untuk $x = 0{,}4$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}4) + 1 = 1{,}8$

Untuk $x = 0{,}5$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}5) + 1 = 2$

Untuk $x = 0{,}6$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}6) + 1 = 2{,}2$

Untuk $x = 0{,}7$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}7) + 1 = 2{,}4$

Untuk $x = 0{,}8$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}8) + 1 = 2{,}6$

Untuk $x = 0{,}9$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}9) + 1 = 2{,}8$

Untuk $x = 1$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(1) + 1 = 3$

Perhitungan $u(0,t) = \frac{1}{2t+1}$ untuk $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $t = 0{,}2$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}2)+1} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}71$$

Untuk $t = 0{,}4$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}4)+1} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}56$$

Untuk $t = 0{,}6$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}6)+1} = \frac{1}{2{,}2} = 0{,}45$$

Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}8)+1} = \frac{1}{2{,}6} = 0{,}38$$

Untuk $t = 1$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Perhitungan $u(1,t) = \frac{3}{2t+1}$ untuk $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $t = 0{,}2$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}2)+1} = \frac{3}{1{,}4} = 2{,}14$$

Untuk $t = 0{,}4$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}4)+1} = \frac{3}{1{,}8} = 1{,}67$$

Untuk $t = 0{,}6$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}6)+1} = \frac{3}{2{,}2} = 1{,}36$$

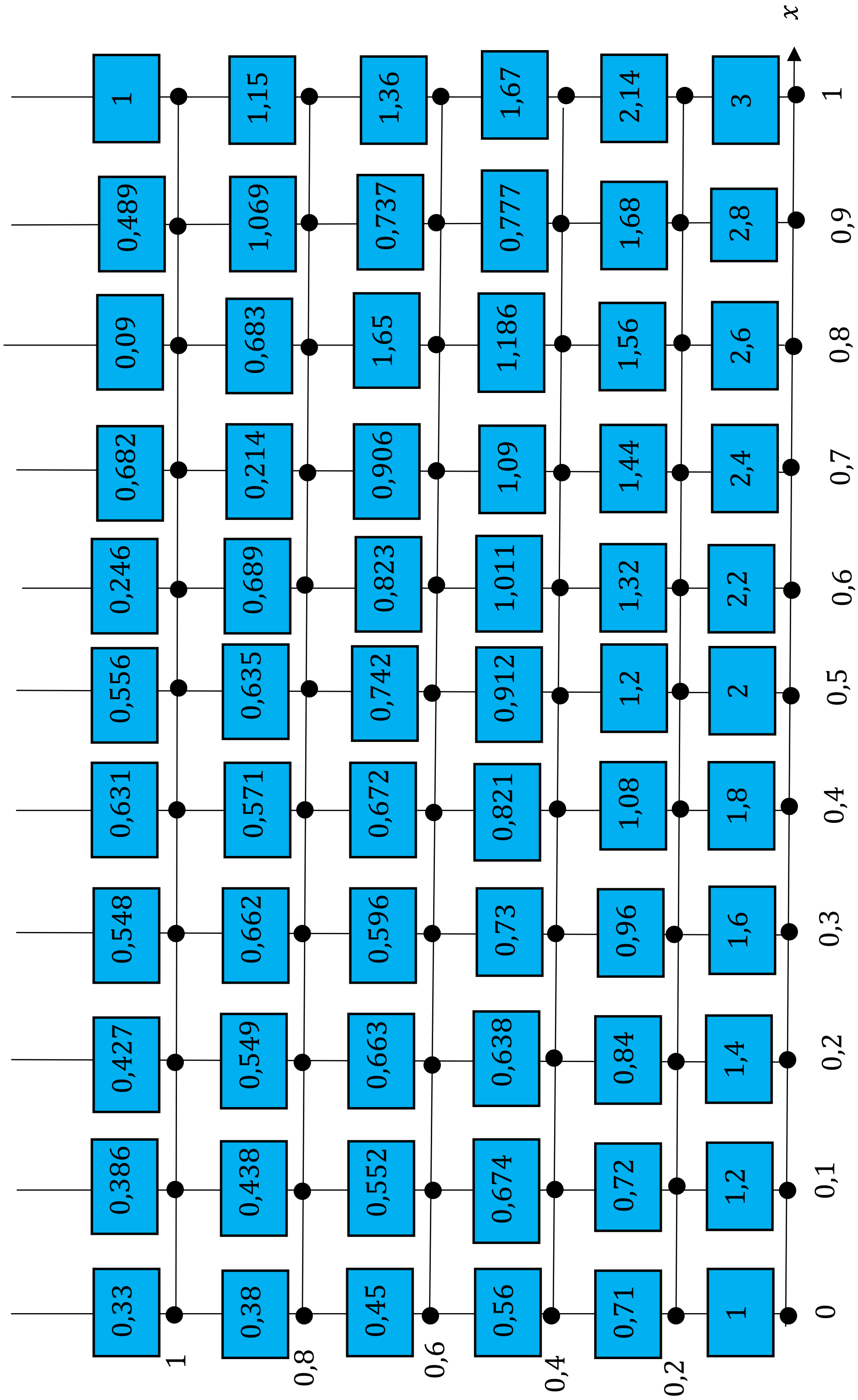
Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}8)+1} = \frac{3}{2{,}6} = 1{,}15$$

Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(1)+1} = \frac{3}{3} = 1$$

Jika digambarkan akan menjadi:



Gambar 4.3 Grid Stensil untuk $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}1$

Setelah didapatkan batas kiri dan batas kanan kita dapat menghitung:

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^1 - u_0^1)\frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1)$$

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(1{,}4 + 1) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(1{,}4 - 1)\frac{1}{2}(1{,}4 + 1)$$

$$u_1^1 = 1{,}2 - 0{,}48$$

$$u_1^1 = 0{,}72$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_3^1 - u_1^1)\frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1)$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}2) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(1{,}6 - 1{,}2)\frac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}2)$$

$$u_2^1 = 1{,}4 - 0{,}56$$

$$u_2^1 = 0{,}84$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_4^1 - u_2^1)\frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1)$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}(1{,}8 + 1{,}4) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(1{,}8 - 1{,}4)\frac{1}{2}(1{,}8 + 1{,}4)$$

$$u_3^1 = 1{,}6 - 0{,}64$$

$$u_3^1 = 0{,}96$$

$$u_4^1 = \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_5^1 - u_3^1)\frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1)$$

$$u_4^1 = \frac{1}{2}(2 + 1{,}6) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(2 - 1{,}6)\frac{1}{2}(2 + 1{,}6)$$

$$u_4^1 = 1{,}8 - 0{,}72$$

$$u_4^1 = 1{,}08$$

$$u_5^1 = \frac{1}{2}(u_6^1 + u_4^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_6^1 - u_4^1)\frac{1}{2}(u_6^1 + u_4^1)$$

$$u_5^1 = \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}8) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(2{,}2 - 1{,}8)\frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}8)$$

$u_5^1 = 2 - 0{,}8$

$u_5^1 = 1{,}2$

$$u_6^1 = \frac{1}{2}(u_7^1 + u_5^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_7^1 - u_6^1)\frac{1}{2}(u_7^1 + u_5^1)$$

$$u_6^1 = \frac{1}{2}(2{,}4 + 2) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(2{,}4 - 2)\frac{1}{2}(2{,}4 + 2)$$

$u_6^1 = 2{,}2 - 0{,}88$

$u_6^1 = 1{,}32$

$$u_7^1 = \frac{1}{2}(u_8^1 + u_6^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_8^1 - u_6^1)\frac{1}{2}(u_8^1 + u_6^1)$$

$$u_7^1 = \frac{1}{2}(2{,}6 + 2{,}2) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(2{,}6 - 2.2)\frac{1}{2}(2{,}6 + 2{,}2)$$

$u_7^1 = 2{,}4 - 0{,}96$

$u_7^1 = 1{,}44$

$$u_8^1 = \frac{1}{2}(u_9^1 + u_7^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_9^1 - u_7^1)\frac{1}{2}(u_9^1 + u_7^1)$$

$$u_8^1 = \frac{1}{2}(2{,}8 + 2{,}4) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(2{,}8 - 2{,}4)\frac{1}{2}(2{,}8 + 2{,}4)$$

$u_8^1 = 2{,}6 - 1{,}04$

$u_8^1 = 1{,}56$

$$u_9^1 = \frac{1}{2}(u_{10}^1 + u_8^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{10}^1 - u_8^1)\frac{1}{2}(u_{10}^1 + u_8^1)$$

$$u_9^1 = \frac{1}{2}(3 + 2{,}6) - \frac{0{,}2}{2(0{,}1)}(3 - 2{,}6)\frac{1}{2}(3 + 2{,}6)$$

$u_9^1 = 2{,}8 - 1{,}12$

$u_9^1 = 1{,}68$

Begitupun seterusnya menggunakan cara yang sama sehingga didapatkan nilai setiap grid seperti pada gambar 4.2.

Ketika dilakukan perhitungan diskritisasi dari bentuk persamaan Lax Friedrichs di atas, kita dapat mengetahui nilai-nilai pada u_j^n dengan $n = 1{,}2 \ldots$ dan $= 1{,}2 \ldots$. Ketika menggunakan $\Delta t = 0{,}1$ dan $\Delta x = 0{,}2$ dan syarat awal dan kondisi batas di atas maka diperoleh bentuk diskritisasi sebagai berikut:

Untuk mencari nilai pada u_j^1 dengan $j = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$ maka berdasarkan $u(x, 0) = f(x) = 2x + 1$ sehingga diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

$u_0^1 = 2x_1 + 1 = 2(0) + 1 = 1$

$u_1^1 = 2x_2 + 1 = 2(0{,}2) + 1 = 1{,}4$

$u_2^1 = 2x_3 + 1 = 2(0{,}4) + 1 = 1{,}8$

$u_3^1 = 2x_4 + 1 = 2(0{,}6) + 1 = 2{,}2$

$u_4^1 = 2x_5 + 1 = 2(0{,}8) + 1 = 2{,}6$

$u_5^1 = 2x_6 + 1 = 2(1) + 1 = 3$

Sedangkan untuk mencari nilai-nilai pada u_j^2 dengan $j = 1{,}2{,}3{,}4{,},5$, maka digunakan persamaan skema Lax Friedrichs (4.6) ketika $n = 1$.

Untuk $n = 1$ dan $j = 1$ maka diperoleh nilai u_1^2 sebagai berikut:

$$u_2^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{1+1}^1 + u_{1-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{1+1}^1 - u_{1-1}^1)$$

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) - \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^1 - u_0^1)$$

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(1{,}8 + 1) - \frac{1}{2}(1{,}8 + 1)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(1{,}8 - 1)$$

$u_1^2 = 1{,}4 - 0{,}28$

$u_1^2 = 1{,}12$

Untuk $n = 1$ dan $j = 2$ maka diperoleh nilai u_2^2 sebagai berikut:

$$u_2^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{2+1}^1 + u_{2-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{2+1}^1 - u_{2-1}^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) - \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_3^1 - u_1^1)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}4) - \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}4)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}2 - 1{,}4)$$

$$u_2^2 = 1{,}8 - 0{,}36$$

$$u_2^2 = 1{,}44$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 3$ maka diperoleh nilai u_3^2 sebagai berikut:

$$u_3^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{3+1}^1 + u_{3-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{3+1}^1 - u_{3-1}^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) - \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_4^1 - u_2^1)$$

$$u_3^2 = \frac{1}{2}(2{,}6 + 1{,}8) - \frac{1}{2}(2{,}6 + 1{,}8)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}6 - 1{,}8)$$

$$u_3^2 = 2{,}2 - 0{,}44$$

$$u_3^2 = 1{,}76$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 4$ maka diperoleh nilai u_4^2 sebagai berikut:

$$u_4^{1+1} = \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1) - \frac{1}{2}(u_{4+1}^1 + u_{4-1}^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{4+1}^1 - u_{4-1}^1)$$

$$u_4^2 = \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) - \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1)\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_5^1 - u_3^1)$$

$$u_4^2 = \frac{1}{2}(3 + 2{,}2) - \frac{1}{2}(3 + 2{,}2)\frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(3 - 2{,}2)$$

$$u_4^2 = 2{,}6 - 0{,}52$$

$$u_4^2 = 2{,}08$$

Lalu untuk perhitungan persamaan (4.1) dimana $x_1 = 0, x_2 = 0{,}2, x_3 = 0{,}4, x_4 = 0{,}6, x_5 = 0{,}8$ adalah sebagai berikut:

Untuk $x_1 = 0$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x, t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_1 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0) + 1)}{2(0{,}1) + 1} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83$$

Untuk $x_2 = 0{,}2$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_2 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}2) + 1)}{2(0{,}1) + 1} = 1{,}17$$

Untuk $x_3 = 0{,}2$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_3 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}4) + 1)}{2(0{,}1) + 1} = \frac{0{,}8 + 1}{0{,}2 + 1} = \frac{1{,}8}{1{,}2} = 1{,}5$$

Untuk $x_4 = 0{,}6$ dan $t = 0{,}2$ diperoleh nilai $u(x,t)$ sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{2x_4 + 1}{2t + 1} = \frac{(2(0{,}6) + 1)}{2(0{,}1) + 1} = \frac{1{,}2 + 1}{0{,}2 + 1} = \frac{2{,}2}{1{,}2} = 1{,}83$$

Jika dibuat tabel perhitungan diskritisasi solusi analitik dan numerik di atas adalah sebagai berikut:

Tabel 4.3 Tabel Galat Penyelesaian Numerik Persamaan Burgers Menggunakan Metode Lax Friedrichs Untuk $\Delta t = 0{,}1$ dan $\Delta x = 0{,}2$

x_j / t_n	Solusi Analitik $u(x,t) = \frac{2x+1}{2t+1}$	Solusi Numerik $u(j,n+1)$	Galat $u(x,t) - u(j,n+1)$
	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}2$
$x_1 = 0$	0,83	0,84	0,01
$x_2 = 0{,}2$	1,17	1,08	0,09
$x_3 = 0{,}4$	1,5	1,32	0,18
$x_4 = 0{,}6$	1,83	1,56	0,27
			$\sum_{i=1}^{9} \lvert\varepsilon_i\rvert = 0{,}138$

Perhitungan $u(x,0) = 2x + 1$ untuk $x = 0, 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $x = 0$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0) + 1 = 1$

Untuk $x = 0{,}2$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}2) + 1 = 1{,}4$

Untuk $x = 0{,}4$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}4) + 1 = 1{,}8$

Untuk $x = 0{,}6$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}6) + 1 = 2{,}2$

Untuk $x = 0{,}8$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(0{,}8) + 1 = 2{,}6$

Untuk $x = 1$ diperoleh $u(x,0)$ sebagai berikut:

$u(x,0) = 2x + 1 = 2.(1) + 1 = 3$

Perhitungan $u(0,t) = \frac{1}{2t+1}$ untuk $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $t = 0{,}1$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}1)+1} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83$$

Untuk $t = 0{,}2$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}2)+1} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}71$$

Untuk $t = 0{,}3$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}3)+1} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}63$$

Untuk $t = 0{,}4$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}4)+1} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}56$$

Untuk $t = 0{,}5$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}5)+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Untuk $t = 0{,}6$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}6)+1} = \frac{1}{2{,}2} = 0{,}45$$

Untuk $t = 0{,}7$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}7)+1} = \frac{1}{2{,}4} = 0{,}42$$

Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}8)+1} = \frac{1}{2{,}6} = 0{,}38$$

Untuk $t = 0{,}9$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(0{,}9)+1} = \frac{1}{2{,}8} = 0{,}36$$

Untuk $t = 1$ diperoleh $u(0,t)$ sebagai berikut:

$$u(0,t) = \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Perhitungan $u(1,t) = \frac{3}{2t+1}$ untuk $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ sebagai berikut:

Untuk $t = 0{,}1$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}1)+1} = \frac{3}{1{,}2} = 2{,}5$$

Untuk $t = 0{,}2$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}2)+1} = \frac{3}{1{,}4} = 2{,}14$$

Untuk $t = 0{,}3$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}3)+1} = \frac{3}{1{,}6} = 1{,}88$$

Untuk $t = 0{,}4$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}4)+1} = \frac{3}{1{,}8} = 1{,}67$$

Untuk $t = 0{,}5$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}5)+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Untuk $t = 0{,}6$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}6)+1} = \frac{3}{2{,}2} = 1{,}36$$

Untuk $t = 0{,}7$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}7)+1} = \frac{3}{2{,}4} = 1{,}25$$

Untuk $t = 0{,}8$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}8)+1} = \frac{3}{2{,}6} = 1{,}15$$

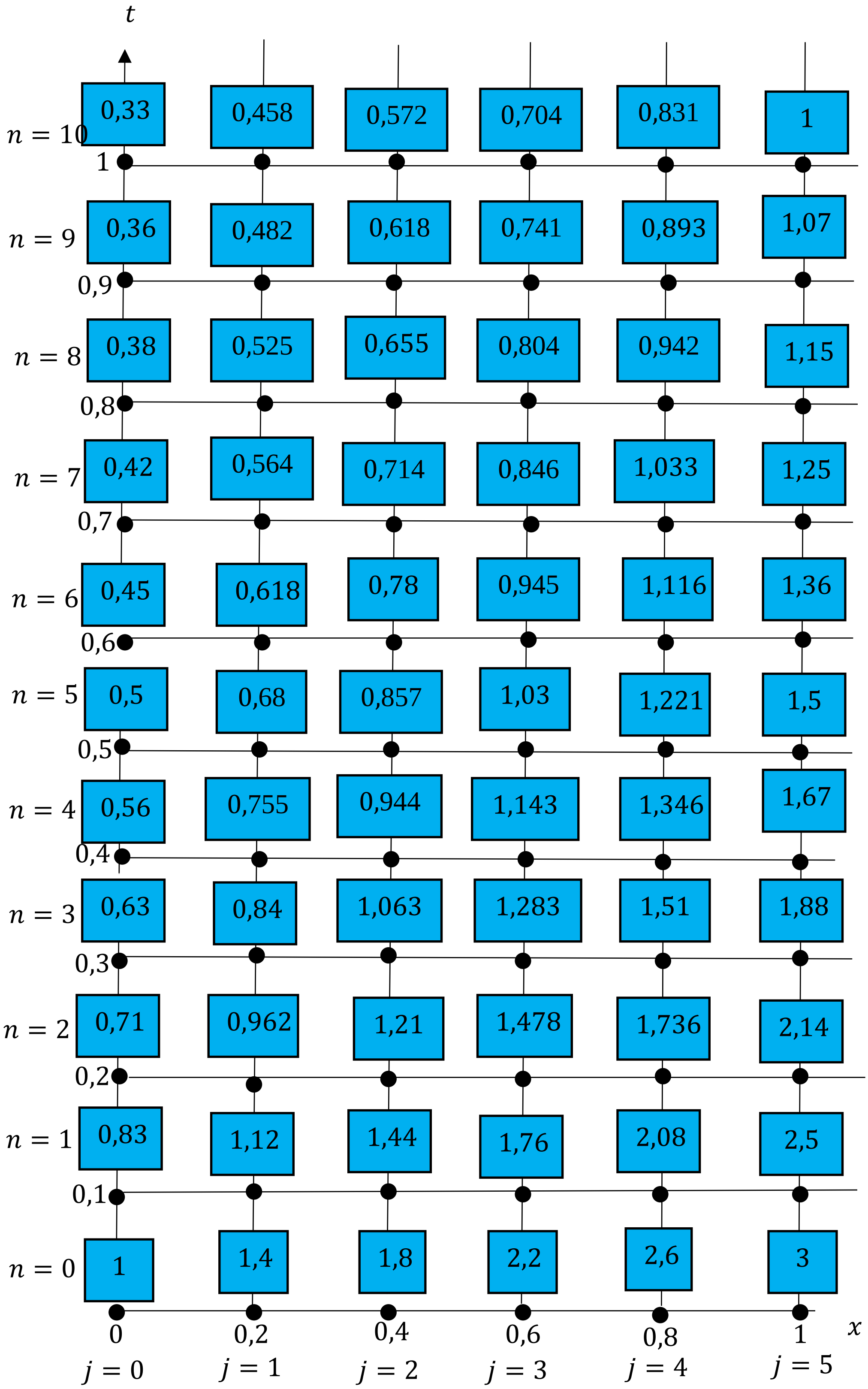
Untuk $t = 0{,}9$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(0{,}9)+1} = \frac{3}{2{,}8} = 1{,}07$$

Untuk $t = 1$ diperoleh $u(1,t)$ sebagai berikut:

$$u(1,t) = \frac{3}{2t+1} = \frac{3}{2(1)+1} = \frac{3}{3} = 1$$

Jika digambarkan akan menjadi:



Gambar 4.4 Grid Stensil untuk $\Delta t = 0{,}1$ dan $\Delta x = 0{,}2$

Setelah didapatkan batas kiri dan batas kanan kita dapat menghitung:

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_2^1 - u_0^1)\frac{1}{2}(u_2^1 + u_0^1)$$

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(1{,}8 + 1) - \frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(1{,}8 - 1)\frac{1}{2}(1{,}8 + 1)$$

$$u_1^1 = 1{,}4 - 0{,}28$$

$$u_1^1 = 1{,}12$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_3^1 - u_1^1)\frac{1}{2}(u_3^1 + u_1^1)$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}4) - \frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}2 - 1{,}4)\frac{1}{2}(2{,}2 + 1{,}4)$$

$$u_2^1 = 1{,}8 - 0{,}36$$

$$u_2^1 = 1{,}44$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_4^1 - u_2^1)\frac{1}{2}(u_4^1 + u_2^1)$$

$$u_3^1 = \frac{1}{2}(2{,}6 + 1{,}8) - \frac{0{,}1}{2(0{,}2)}(2{,}6 - 1{,}8)\frac{1}{2}(2{,}6 + 1{,}8)$$

$$u_3^1 = 2{,}2 - 0{,}44$$

$$u_3^1 = 1{,}76$$

$$u_4^1 = \frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_5^1 - u_3^1)\frac{1}{2}(u_5^1 + u_3^1)$$

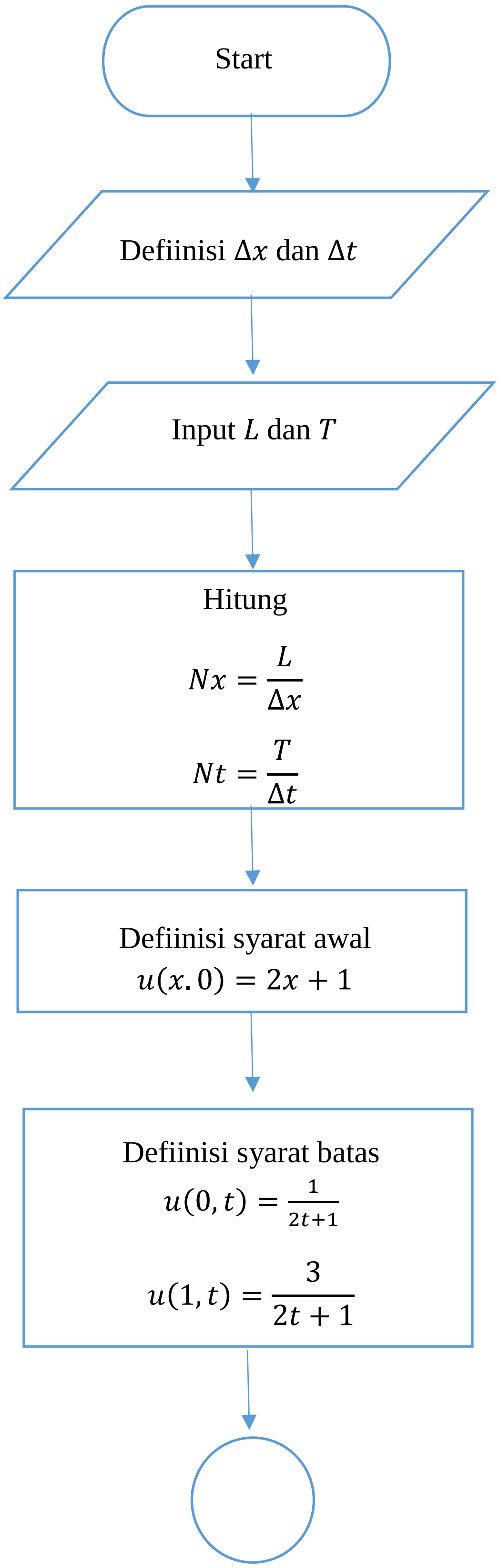
$$u_4^1 = \frac{1}{2}(3 + 2{,}2) - \frac{0{,}2}{2(0{,}2)}(3 - 2{,}2)\frac{1}{2}(3 + 2{,}2)$$

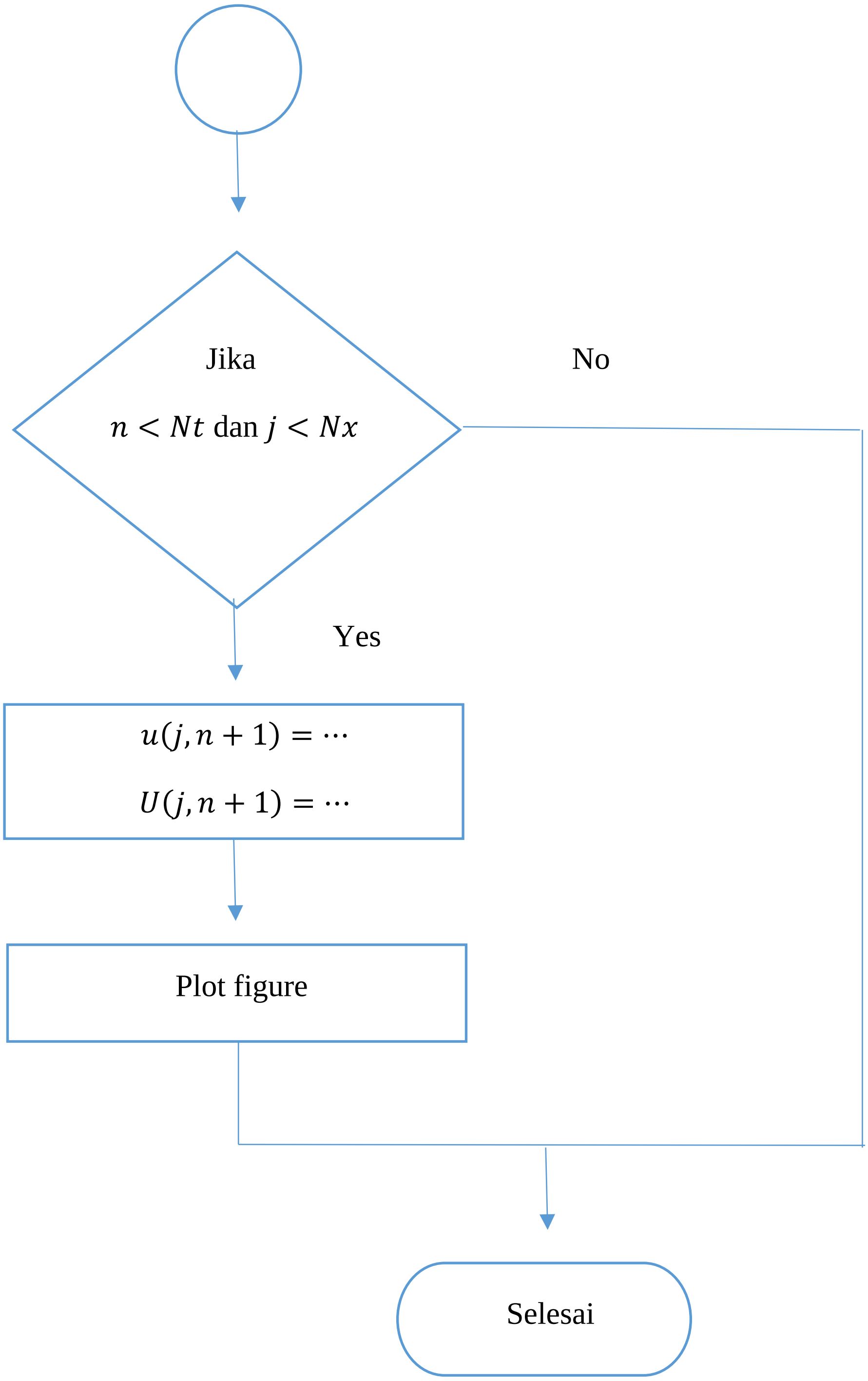
$$u_4^1 = 2{,}6 - 0{,}52$$

$$u_4^1 = 2{,}08$$

Begitupun seterusnya menggunakan cara yang sama sehingga didapatkan nilai setiap grid seperti pada gambar 4.3.

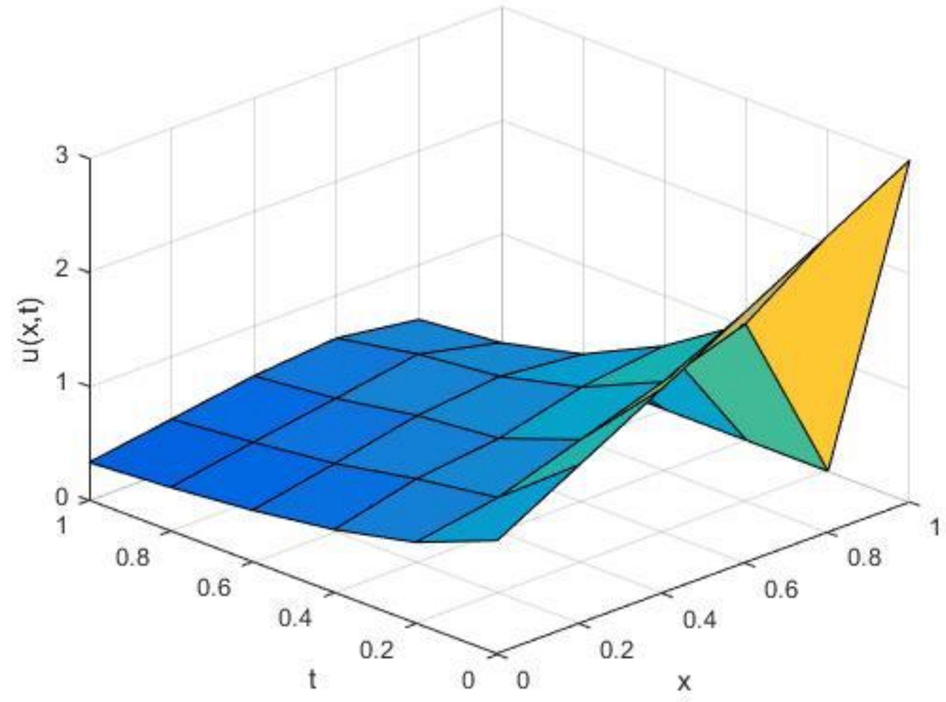
Jika dibuat flowchart, secara garis besar penyelesaian persamaan burgers akan menjadi seperti berikut:




Jika
$n < Nt$ dan $j < Nx$
No
Yes
$u(j, n+1) = \cdots$
$U(j, n+1) = \cdots$
Plot figure
Selesai

Selanjutnya, digunakan program MATLAB untuk melakukan simulasi. Persamaan yang diaplikasikan dalam program tersebut yakni persamaan (4.6) yang merupakan bentuk diskrit dari persamaan Burgers.

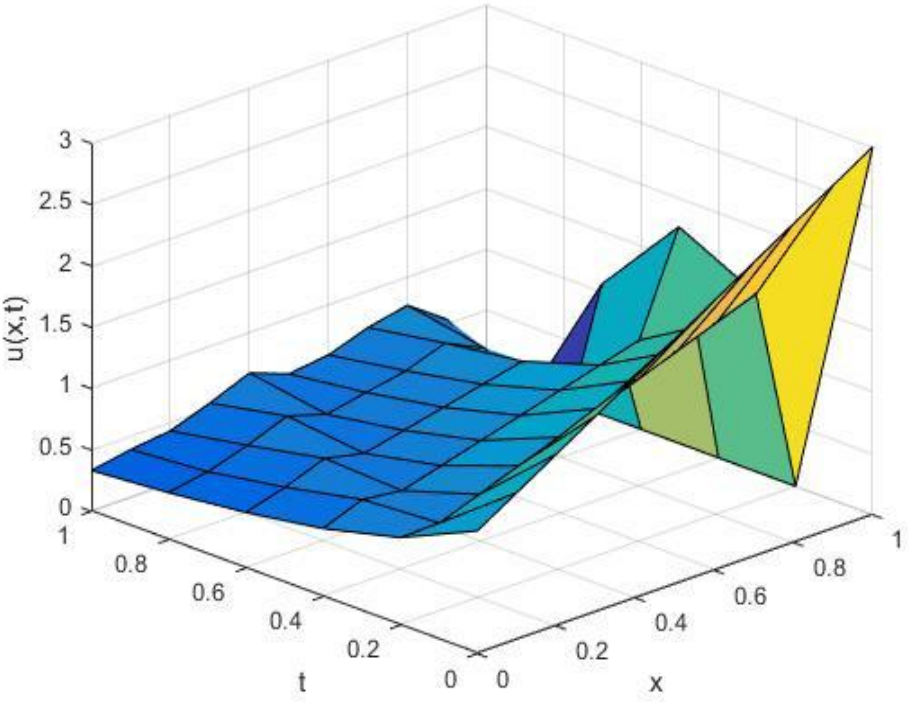
1. Simulasi pertama dipilih nilai $\Delta x = 0{,}2$ dan $\Delta t = 0{,}2$ dapat kita lihat pada gambar 4.4 berikut.



Gambar 4.5 Simulasi Numerik dengan $\Delta x = 0{,}2$ dan $\Delta t = 0{,}2$

Dari gambar 4.4 diketahui syarat awalnya adalah $u(x, 0) = 2x + 1$ dan syarat batas $u(0, t) = \frac{1}{2t+1}$ dan $u(1, t) = \frac{3}{2t+1}$. Dapat dilihat ketika $x = 0$ nilai $u(x, t) = 1$ dan ketika $x = 1$ nilai $u(x, t) = 3$. Ketika t berjalan ternyata nilai awalnya semakin bergeser karena nilainya semakin turun. Ketika $x = 0$ nilai u adalah 1, ketika $x = 0$ tapi t nya di 0,2 nilainya berubah dan semakin turun. Sampai Ketika $t = 1$ nilai u di $x = 0$ nilainya semakin mendekati nol.

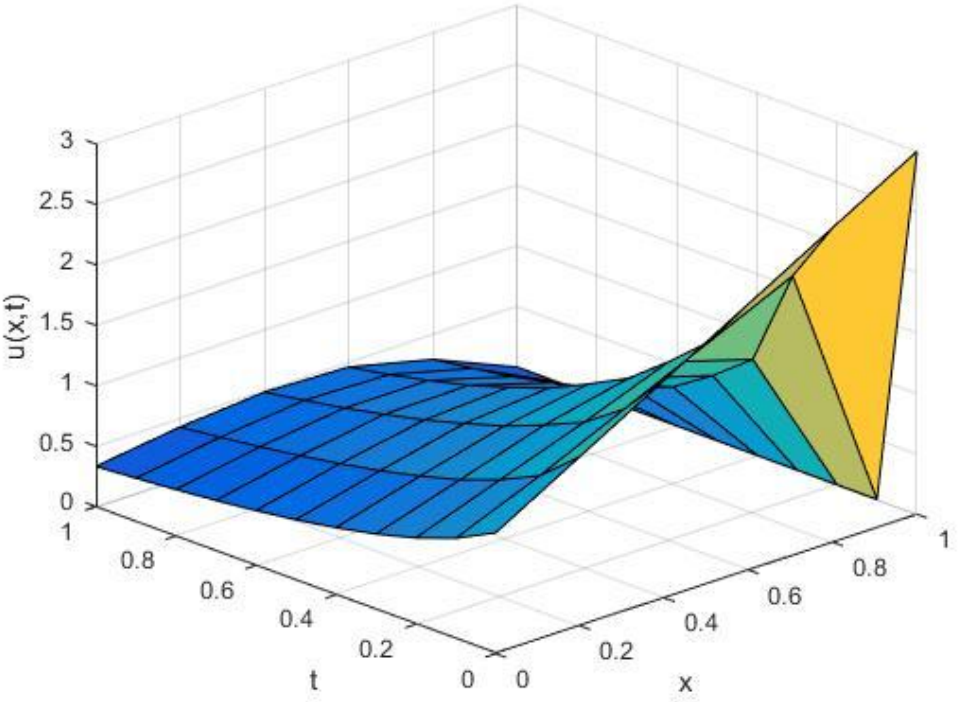
2. Simulasi kedua dipilih nilai $\Delta x = 0{,}1$ dan $\Delta t = 0{,}2$ dapat kita lihat pada gambar 4.5 berikut.



Gambar 4.6 Simulasi Numerik dengan $\Delta x = 0{,}1$ dan $\Delta t = 0{,}2$

Dari gambar 4.5 di atas diketahui syarat awalnya adalah $u(x,0) = 2x + 1$ dan syarat batas $u(0,t) = \frac{1}{2t+1}$ dan $u(1,t) = \frac{3}{2t+1}$. Dapat dilihat ketika $x = 0$ nilai $u(x,t) = 1$ dan ketika $x = 1$ nilai $u(x,t) = 3$. Ketika t berjalan ternyata nilai awalnya semakin bergeser tidak teratur. Ketika $x = 0$ nilai u adalah 1, ketika $x = 0$ tapi t nya di 0,2 nilainya berubah dan semakin turun. Sampai Ketika $t = 1$ nilai u di $x = 0$ nilainya semakin mendekati nol.

3. Simulasi ketiga dipilih nilai $\Delta x = 0{,}2$ dan $\Delta t = 0{,}1$ dapat kita lihat pada gambar 4.6 berikut.



Gambar 4.7 Simulasi Numerik dengan $\Delta x = 0{,}2$ dan $\Delta t = 0{,}1$

Dari gambar 4.6 di atas diketahui syarat awalnya adalah $u(x, 0) = 2x + 1$ dan syarat batas $u(0, t) = \frac{1}{2t+1}$ dan $u(1, t) = \frac{3}{2t+1}$. Gambar terlihat sekilas lebih halus karena menggunakan Δt yang lebih kecil yaitu $\Delta t = 0{,}1$. Dapat dilihat ketika $x = 0$ nilai $u(x, t) = 1$ dan ketika $x = 1$ nilai $u(x, t) = 3$. Ketika t berjalan ternyata nilai awalnya semakin bergeser karena nilainya semakin turun. Ketika $x = 0$ nilai u adalah 1, ketika $x = 0$ tapi t nya di 0,2 nilainya berubah dan semakin turun. Sampai Ketika $t = 1$ nilai u di $x = 0$ nilainya semakin mendekati nol.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

1. Diskritisasi dari persamaan Burgers dengan menggunakan metode Lax Friedrichs yang menerapkan metode beda maju pada turunan waktunya dan metode beda pusat yang diterapkan pada turunan ruangnya adalah $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$.
2. Dari hasil perhitungan simulai numerik dengan tiga variasi Δt dan Δx yaitu $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta t = 0{,}1$ dan $\Delta x = 0{,}2$, diperoleh galat solusi numerik yang paling minimum ketika $\Delta t = 0{,}2$ dan $\Delta x = 0{,}2$.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya bisa dilakukan analisis kestabilan metode numerik dari skema Lax Friedrichs yang sudah dilakukan.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Quran Terjemahan. 2015. *Departemen Agama RI. Bandung*: CV Darus Sunnah.

Boyce, W. E., and DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Benton Edward R dan Platzman George W.1972. *A Table Of Solution Of The One-Dimensional Burgers Equation.* Quarterly Of Applied Mathematics.

Chandrsekhar, S. 1943. *On the Decay of Plane Shock Wave (Report).* Ballistic Research Laboratories. Report no. 423.

Halik, M. 2015. *Penyelesaian Numerik Gelombang Tali Menggunakan Metode Lax-Friedrichs.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Hadis yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dari Abu Hurairah

Laili, Evi Nor. 2019. *Penerapan Metode Fungsi Eksponensial (MFE) Pada Penyelesaian Persamaan Burgers Satu Dimensi.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Mansoor, B., Amir, K,Azwan, S., Izzudin, Z., Akmal, N. (2017). *Numerical Solution of Burger's equation based on Lax-Friedrichs and Lax-Wendroff schemes*. AIP Conference Proceedings, 1831, 020025:1-7.

Morton, K,W dan Mayers, D. 2005. *Numerical solution of Partial Differential Equation*. New York: Cambridge University.

Munir, R. 2008. *Metode Numerik.* Bandung: Informatika Bandung.

Ripai, A., Abdullah, Z., & Syafwan, M. (2019). Analisis Solusi Persamaan Burger Sebagai Solusi Soliton Menggunakan Transformasi Hopf-Cole. *Jurnal Fisika Unand*, *8*(2), 171-177.

Rezolla, L. 2011. *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations*. Trieste: International Schoolfor Advanced Studies.

Sasongko, B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V. Andi Offset.

Strauss, A.W. 2007. *Partial Differential Equations and Introduction Second Edition.* New York: John willey & Sons, Ltd.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*.Berlin:Springer

LAMPIRAN

1. Script code Matlab Persamaan Transport

```
clear all

dx = 0.2;
dt = 0.2;

x=0:dx:1;
t=0:dt:1;

Mx=length(x);
Nt=length(t);
u=zeros(Mx,Nt);
u(1,:)=1-(2*t);
u(Mx,Nt)=0;
u(:,1)=2*x+1;

v=VideoWriter('newfile.avi');
open(v)

plot(x,u(:,1))
pause(0.01)

for n=1:Nt
    for j=2:Mx
        y(j,n)=2*(x(j)-t(n))+1;
    end
    for n=1:Nt-1
        for j=2:Mx-1
            u(j,n+1)=(1/2*(u(j+1,n)+u(j-
1,n)))(dt/2*dx)*(u(j+1,n)-u(j-1,n));
      end
       figure(1)
       plot(x,u(:,n),'r-.');
       hold on;
       axis([0 1 -1 3])
       pause(0.01)
       drawnow;
       hold off;

       [X,T]=meshgrid(x,t);
       surf(X,T,u)

       frame=getframe(gcf)
       writeVideo(v,frame)
       grid on
       ylabel('t')
       xlabel('x')
       zlabel('u(x,t)')
    end
end

close(v)
```

2. Script code Matlab Persamaan Burgers

```
clc,clear all;

dx = 0.2;
dt = 0.2;

x=0:dx:1;
t=0:dt:1;
Mx=length(x);
Nt=length(t);
u=zeros(Mx,Nt);

v=VideoWriter('Burgers.avi');
open(v)

for i=1:Nt
    u(1,i)=(2*t(i)+1)^-1;
end
%u(1,:)=1/(2*t+1);
u(Mx,Nt)=0;
u(:,1)=2*x+1;
U(:,1)=2*x+1; %solusi eksak untuk syarat awal
U(Mx,Nt)=3;
plot(x,u(:,1))
hold on
plot(x,U(:,1))
pause(0.000001)

for n=1:Nt-1
    U(1,n+1)=1/(2*t(n)+1);
    for j=2:Mx-1
        u(j,n+1)=(1/2*(u(j+1,n)+u(j-1,n)))-
(1/2*(u(j+1,n)+u(j-1,n)))*(dt/(2*dx)*(u(j+1,n)-u(j-1,n)));
        U(j,n+1)=(2*x(j)+1)/(2*t(n+1)+1);
    end
    U(Mx,n+1)=3/(2*t(n)+1);
    figure(1)
    plot(x,u(:,n),'-b');
    hold on;
    plot(x,U(:,n),'-r*');

    drawnow;
    hold off;

    [X,T]=meshgrid(x,t);
    surf(X,T,u')

    frame=getframe(gcf)
    writeVideo(v,frame)
    grid on
    ylabel('t')
    xlabel('x')
    zlabel('u(x,t)')
end

close(v)
```

RIWAYAT HIDUP

M. Ifan Ali Ridlo, lahir di Rembang pada tanggal 31 Agustus 1999. Ia merupakan anak bungsu dari 3 bersaudara dari pasangan Bapak Maftukhan (Alm) dan Ibu Siti Sa'adah. Laki-laki yang akrab disapa Ifan ini telah menempuh Pendidikan formal mulai dari TK Edi Peni, setelah itu menempuh pendidikan dasar di SD N Punjulharjo dan lulus pada tahun 2011. Kemudian melanjutkan ke MTs N 1 Rembang dan lulus pada tahun 2014, lalu melanjutkan ke jenjang berikutnya di SMA N 1 Lasem serta mengenyam pendidikan di Pondok Pesantren An-Nur dan lulus pada tahun 2017. Selanjutnya pada tahun yang sama menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada program studi matematika. Setelah satu tahun dari ma'had kemudian tinggal di Pondok Pesantren Anwarul Huda sampai tahun 2021.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya dengan menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika serta berperan aktif dalam kepanitiaan.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : M. Ifan Ali Ridlo
NIM : 17610119
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Implementasi Metode Lax Friedrichs Pada Penyelesaian Persamaan Burgers
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	23 September 2021	Bimbingan Proposal Skripsi	1
2	28 September 2021	Bimbingan Proposal Skripsi	2
3	18 Oktober 2021	Bimbingan Bab I, II, III	3
4	22 November 2021	Bimbingan Kajian Agama	4
5	30 November 2021	Acc Pendaftaran Seminar Proposal	5
6	21 April 2022	Bimbingan Revisi Seminar Proposal	6
7	27 April 2022	Bimbingan Revisi Seminar Proposal	7
8	17 Mei 2022	Acc Pendataran Seminar Hasil	8
9	18 Mei 2022	Acc Pendaftaran Seminar Hasil	9
10	7 Juni 2022	Bimbingan Revisi Seminar Hasil	10
11	9 Juni 2022	Acc Pendaftaran Ujian Skripsi	11
12	10 Juni 2022	Acc Pendaftaran Ujian Skripsi	12

Malang, 22 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.19741129 200012 2 005