

**STUDI LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD DALAM  
TEORI GRAVITASI  $f(R)$  MENGGUNAKAN METODE GANGGUAN**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**KHARISMA AULIYA**  
**NIM. 17640053**



**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

**STUDI LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD DALAM  
TEORI GRAVITASI  $f(R)$  MENGGUNAKAN METODE GANGGUAN**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada :  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh :  
Kharisma Auliya  
NIM. 17640053**

**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

HALAMAN PERSETUJUAN

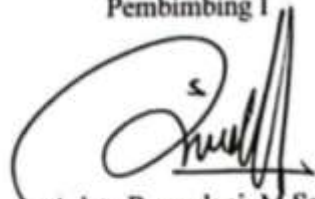
STUDI LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD DALAM TEORI GRAVITASI  
 $f(R)$  MENGGUNAKAN METODE GANGGUAN

SKRIPSI

Oleh:  
Kharisma Auliya  
NIM. 17640053

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Pada tanggal, 17 Juni 2022

Pembimbing I



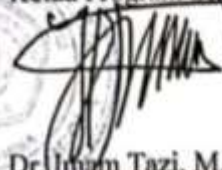
Arista Romadani, M.Sc  
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II



Drs. Abdul Basid, M.Si.  
NIP. 19650504 199003 1 003

Mengetahui  
Ketua Program Studi



Dr. Imam Tazi, M.Si  
NIP. 19740730 200312 1 002



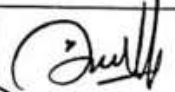

**HALAMAN PENGESAHAN**

**STUDI LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD DALAM TEORI GRAVITASI  
 $f(R)$  MENGGUNAKAN METODE GANGGUAN**

**SKRIPSI**

Oleh:  
Kharisma Auliya  
NIM. 17640053

Telah Diperiksa di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Pada tanggal 22 Juni 2022

Ketua Penguji :	<u>Dr. Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 1 009	
Anggota Penguji I :	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Anggota Penguji II :	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji III :	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	

Mengesahkan,  
Ketua Program Studi

  
Dr. Imam Tazi, M.Si  
NIP. 19740730 200312 1 002

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Kharisma Auliya

NIM : 17640053

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Studi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi  $f(R)$  Menggunakan Metode Gangguan

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2022

Yang Membuat Pernyataan



Kharisma Auliya  
NIM. 17640053

## MOTTO

*Bersabarlah menghadapi kemarahan guru, karena kegagalan belajar  
itu disebabkan meninggalkan guru*

*Barang siapa tiada pernah merasakan pahit getirnya belajar, maka ia  
akan meneguk hinanya kebodohan selama hidupnya*

*Barang siapa tidak belajar diwaktu muda, maka takbirlah empat kali,  
empat kali sebagai isyarat kematiannya*

*Demi Allah, jiwa muda itu adalah ilmu dan taqwa, jika tidak, ia tidak  
ada nilainya*

(Imam Syafi'i)

**“Jangan pernah berhenti belajar”**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Sege nap rasa syukur saya haturkan kepada Allah SWT yang telah memberi beribu-ribu nikmat yang tidak akan pernah mampu saya hitung. Karya kecil ini saya persembahkan untuk semua orang yang telah merelakan waktu dan tenaganya untuk mendidik saya, membimbing saya, memberi cinta kasih dan yang tak pernah putus do'anya untuk saya.*

*Untuk kedua orang tua saya Ibu Zulaikha dan Bapak Mahmudi yang selalu sabar dalam mengasuh dan memberi didikan yang sangat berharga bagi saya serta kasih sayang yang tak terbatas. Kedua adik saya Aisyah Nanda Audina dan Salman Al-Farizi yang selalu menghibur dikala saya lelah dan selalu mendo'akan saya.*

*Untuk Abah Syamsul Ma'arif dan Umi Maftuhah Rifa'ie yang telah mencurahkan ilmu-ilmu yang sangat berharga, kasih sayang, bimbingan, motivasi dan do'a yang mengalir tiada henti. Beliau berdua yang selalu mengorbankan waktu dan tenaga untuk memberi banyak ilmu dan tauladan yang baik bagi saya. Untuk ustadz/ustadzah, teman-teman dan adik-adik santri Langgar Nurul Falah yang telah memberi banyak pengalaman, kisah-kisah dan pelajaran berharga agar selalu semangat dalam menghadapi kehidupan.*

*Untuk seluruh dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengajarkan berbagai macam ilmu pengetahuan kepada saya. Untuk teman-teman Fisika angkatan 2017 yang telah memberi kenangan dan pengalaman indah, selalu ada saat saya senang dan saling menghilang ketika sama-sama susah.*

*Untuk Bapak-bapak Guru di Madrasah Aliyah An-Nur Bululawang yang telah mendidik dan memotivasi saya untuk tak berhenti belajar sampai kapanpun sehingga saya terdorong untuk menempuh pendidikan di perguruan tinggi. Terima kasih saya ucapkan untuk semuanya, atas segala limpahan do'a, restu, kata maaf dan dukungan yang terus mengucur tiada henti.*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan anugerah-Nya. Kepada makhluk paling berjasa di alam semesta ini, yang karenanya penulis mendapat nikmat iman dan islam, yaitu Nabi Besar Muhammad SAW semoga sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada beliau beserta seluruh keluarga dan sahabatnya serta para pengikutnya yang setia hingga hari akhir. La haula wa la quwata illa billah, tanpa Ridho dan Kuasa-Nya penulis tidak akan dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “*Studi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi  $f(R)$  Menggunakan Metode Gangguan*”, dengan baik. Sebuah anugerah luar biasa yang telah diberikan oleh Allah SWT karena memberi kesempatan kepada penulis untuk mentafakkuri ayat-ayat kauniah-Nya melalui ilmu fisika.

Penulis menyadari banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu proses penyelesaian skripsi ini. Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M,Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si selaku Ketua Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Arista Romadani, M.Sc selaku dosen pembimbing yang selalu memberikan bimbingan, pengarahan, saran dan motivasi dalam penulisan proposal ini, sekaligus mengajarkan ilmunya dengan penuh kegigihan dan kesabaran.

5. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku dosen pembimbing integrasi yang memberikan bimbingan serta motivasi dalam penulisan proposal.
6. Erika Rani, M.Si selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pengenalan dan pembelajaran fisika teori.
7. Muhammad Taufiqi, M.Si selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran fisika teori.
8. Seluruh dosen Jurusan Fisika yang telah mendidik, membimbing dan memberikan arahan selama proses pembelajaran penulis.
9. Seluruh staf admin Jurusan Fisika dan bantuan, layanan informasi, dan kerjasamanya selama ini.
10. Keluarga tercinta, Ibu, Bapak, Adik dan Almh. Nenek yang tak henti-hentinya memberi dukungan, nasehat dan doanya serta kasih sayang yang sangat berlimpah.
11. Abah Syamsul Ma'arif dan Umi Maftuhah Rifa'ie sosok guru luar biasa yang selalu memotivasi dan mendoakan penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
12. Bapak Dhokim, S.Pd selaku guru Madrasah Aliyah An-Nur Bululawang yang selalu mendorong penulis untuk tetap semangat mempelajari ilmu fisika.
13. Teman-teman Jurusan Fisika angkatan 2017 atas motivasi, dukungan dan kesediaannya menjadi pendengar segala keresahan penulis serta terima kasih atas doa yang diberikan selama ini, terkhusus Afida, Hanifa, Dina, Deshinta, Deni dan tak lupa teman-teman penghuni Lab. Fisika Teori: Mbak

Fita, Mbak Nia, Mbak Eva, Mbak Husna, Rizka, Nuril, Eko, Amin, Galih dan Fitri.

14. Seluruh pihak yang telah membantu penulis dalam penyelesaian skripsi.

Semoga karya sederhana ini dapat memberi sumbangan bagi seluruh alam semesta. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak luput dari berbagai kesalahan, untuk itulah penulis mohon maaf. Penulis juga mohon saran dan kritik untuk penyempurnaan karya ini.

Malang, 22 Juni 2022

Penulis

## DAFTAR ISI

COVER .....	i
HALAMAN JUDUL .....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .....	v
MOTTO .....	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiv
ABSTRAK .....	xv
ABSTRACT .....	xvi
المُلخَص .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah.....	6
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Teori Relativitas Umum .....	6
2.2 Aksi Einstein-Hilbert .....	7
2.3 Modifikasi Gravitasi .....	12
2.4 Lubang Hitam dalam Al-Quran .....	16
2.5 Solusi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi Einstein.....	19
2.6 Metode Gangguan dalam Teori Gravitasi $f(R)$ .....	23
2.7 Lintasan Geodesik.....	27
<b>BAB III TEORI GRAVITASI <math>f(R)</math></b>	
3.1 Teori Gravitasi $f(R)$ .....	29
3.2 Solusi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi $f(R)$ .....	32
3.3 Solusi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi $f(R)$ dengan Metode Gangguan.....	35
3.3.1 Solusi untuk Kasus $f(R) = \alpha R^2$ .....	38
3.3.2 Solusi untuk Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$ .....	43
<b>BAB IV SINGULARITAS DAN LINTASAN GEODESIK DALAM TEORI GRAVITASI <math>f(R)</math></b>	
4.1 Singularitas Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi $f(R)$ .....	51
4.2 Lintasan Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi $f(R)$ .....	58
4.2.1 Lintasan Geodesik untuk Kasus $f(R) = \alpha R^2$ .....	60
4.2.2 Lintasan Geodesik untuk Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$ .....	73

4.3 Integrasi.....	86
--------------------	----

**BAB V PENUTUP**

2.1 Kesimpulan .....	98
----------------------	----

2.2 Saran.....	90
----------------	----

**DAFTAR PUSTAKA**

**LAMPIRAN**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Jari-jari Schwarzschild .....	21
Gambar 2.2	Ilustrasi Suatu Lubang Hitam yang Melengkungkan Ruang .....	22
Gambar 2.3	Geodesik pada Ruang Datar .....	30
Gambar 2.4	Geodesik pada Ruang Lengkung.....	30
Gambar 2.5	Dua Titik yang Dihubungkan dengan Tiga Lintasan .....	30

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A Pembuktian Persamaan 2.45 .....	94
Lampiran B Solusi Schwarzschild .....	97
Lampiran C Solusi Schwarzschild dalam Teori Gravitasi $f(R)$ .....	109
Lampiran D Solusi Kasus $f(R) = \alpha R^2$ dan Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$ .....	112
Lampiran E Simbol Christoffel untuk Kasus $f(R) = \alpha R^2$ dan Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$ .....	115
Lampiran F Perhitungan Singularitas $r$ .....	123
Lampiran G Penurunan Persamaan Geodesik .....	133

## ABSTRAK

Auliya, Kharisma. 2022. **Studi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi  $f(R)$  Menggunakan Metode Gangguan**. Skripsi. Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Dr. Abdul Basid, M.Si.

---

Kata Kunci: *Lubang Hitam Schwarzschild, Teori Gravitasi  $f(R)$ , Singularitas, Geodesik*

Pada penelitian ini dilakukan modifikasi solusi persamaan medan Einstein menggunakan teori gravitasi  $f(R)$  yang diterapkan pada lubang hitam Schwarzschild. Modifikasi persamaan medan diperoleh dengan menggeneralisasikan aksi Hilbert-Einstein dengan Lagrangian gravitasi dalam bentuk fungsi  $f(R)$ . Dengan mempertimbangkan dua kasus khusus  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$  serta mengambil  $R = R_0$ , ditemukan solusi Schwarzschild yang telah dimodifikasi. Hasil solusi Schwarzschild menunjukkan adanya suku baru pada metriknya. Secara khusus, telah dilakukan kajian terhadap singularitas dan lintasan geodesik dari masing-masing solusi Schwarzschild.

## ABSTRACT

Auliya, Kharisma. 2022. **Study of Schwarzschild Black Holes in the  $f(R)$  Theory of Gravity Using the Perturbation Method.** Essay. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Supervisor: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Dr. Abdul Basid, M.Si.

---

Keywords: *Schwarzschild Black Hole,  $f(R)$  Theory of Gravity, Singularity, Geodesic.*

In this study, the solution to the Einstein field equations was modified using the  $f(R)$  theory of gravity which was applied to a Schwarzschild black hole. Modification of the field equation is obtained by generalizing the Hilbert-Einstein action with the Lagrangian gravity in the form of a function  $f(R)$ . By considering the two special cases  $f(R) = \alpha R^2$  and  $f(R) = R + \alpha R^2$  and taking  $R = R_0$ , a modified Schwarzschild solution is found. The results of the Schwarzschild solution show that there are new terms in the metric. In particular, a study of the singularity and geodesic trajectory of each of the Schwarzschild solutions has been carried out.

## نبذة مختصرة

أولياء ، كاريزما.٢٠٢٢. دراسة ثقب أسود Schwarzschild في نظرية الجاذبية باستخدام طريقة الاضطراب. فرضية. برنامج دراسة الفيزياء ، كلية العلوم والتكنولوجيا ،  $f(R)$  ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، مالانج. المشرف: (I) أريستا رمضاني،المجستير (II) عبد الباسط ، المجستير.

---

**الكلمات المفتاحية :** دراسة ثقب أسود Schwarzschild ، نظرية الجاذبية ، التفرد ، الجيوديسية  $f(R)$

في هذه الدراسة ، تم تعديل حل معادلات مجال أينشتاين باستخدام نظرية الجاذبية التي تم تطبيقها على ثقب أسود من نوع Schwarzschild. يتم الحصول على تعديل معادلة المجال من خلال تعميم عمل هيلبرت-أينشتاين مع جاذبية لاغرانج في شكل دالة . من خلال النظر في الحالتين الخاصتين  $f(R)=R^2$  و  $f(R)=R^2+R$  وأخذ  $R=R_0$  ، نجد حل  $f(R)$  Schwarzschild المعدل. تظهر نتائج حل Schwarzschild أن هناك مصطلحات جديدة في المقياس. على وجه الخصوص ، تم إجراء دراسة عن التفرد والمسار الجيوديسي لكل من حلول Schwarzschild.

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Teori relativitas umum (TRU) telah diselesaikan dan dikenalkan oleh Einstein pada tahun 1915. Teori ini adalah pencapaian yang luar biasa dan sukses, bersama dengan teori medan kuantum, teori ini sekarang secara luas dianggap sebagai salah satu dari dua pilar fisika modern. Einstein berupaya merumuskan teori gravitasi baru yang kompatibel dengan Teori Relativitas Khusus. Menurut Einstein, teori gravitasi Newton tidak bisa menjelaskan perilaku benda-benda langit. Karena hal ini akan melanggar Teori Relativitas Khusus, dimana efek gravitasi dari benda langit tersebut merambat melebihi kecepatan cahaya, sebab menurut gravitasi Newton jika sebuah benda digerakkan maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah spontan.

Karl Schwarzschild adalah orang pertama yang mendapatkan solusi persamaan medan Einstein yang menggambarkan evolusi geometri ruang-waktu. Schwarzschild mendapatkan sebuah persamaan sederhana yang menggambarkan ruang-waktu melengkung akibat medan gravitasi dari suatu benda masif berbentuk simetri bola. Tapi, solusi ini tidak mempertimbangkan rotasi ataupun distribusi muatan dari benda masif tersebut. Adanya kelengkungan ruang-waktu akibat benda masif, menyebabkan benda apapun tidak akan lolos darinya, termasuk cahaya. Sehingga disebut sebagai lubang hitam (Anugraha, 2011).

Kajian tentang lubang hitam difirmankan oleh Allah SWT dalam Surah At-Takwir ayat 15 dan 16 :

فَلَا أُفْسِمُ بِالْخُنَّسِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنَّسِ (١٦)

“*Aku bersumpah demi bintang-bintang, yang beredar dan terbenam*” (QS. At-Takwiir [81]: 15-16).

*Al-khunnas* atau *terbenam* dapat diartikan sebagai sesuatu yang tidak terlihat lagi pada suatu waktu. Kondisi ini dapat terjadi karena posisi pengamat di bumi yang relatif selalu berubah terhadap bintang atau memang akibat bintang tersebut musnah. Sehubungan dengan ayat diatas, bintang yang tersembunyi dan menyerap massa benda angkasa disekitarnya adalah *blackhole* atau lubang hitam yang tidak dapat dilihat dengan mudah meskipun dengan alat bantu (Sani, 2014).

Setelah satu abad, teori gravitasi Einstein sama sekali tidak mengalami perubahan dan menjadi teori terbaik dalam menjelaskan masalah gravitasi untuk benda-benda dengan kerangka acuan dipercepat. Meskipun sudah menjadi teori yang sangat sukses, hal ini tidak menghentikan para ilmuwan untuk mengusulkan tentang bagaimana memperluasnya dan memasukkannya ke dalam teori yang lebih besar dan lebih terpadu. Pada penelitian beberapa dekade terakhir, untuk menjelaskan pengamatan astrofisika yang berhubungan dengan kurva rotasi dari galaksi spiral memunculkan konsep materi gelap (*dark matter*). Tidak berlangsung lama, kemudian diperkenalkan juga konsep energi gelap (*dark energy*) untuk menjelaskan percepatan dari ekspansi alam semesta yang didukung oleh pengamatan pergeseran merah dari supernova. Saat ini, keberadaan materi tampak pada alam semesta diperkirakan sekitar 4% dari keseluruhan massa dan energi. Sekitar 23% disebut materi gelap dan 73% adalah energi gelap.

Seiring berjalannya waktu telah banyak upaya untuk memodifikasi persamaan Einstein dengan alasan dan motivasi yang berbeda, seperti mengesampingkan keberadaan materi gelap dan energi gelap serta keinginan untuk

mengkuantisasi relativitas umum agar dapat menyatu dengan tiga gaya fundamental lain, yaitu gaya elektromagnetik, gaya nuklir lemah dan gaya nuklir kuat (Sporea, 2014). Hal ini munculkan beberapa model dengan dua pendekatan dasar yaitu memodifikasi ruas kanan persamaan medan Einstein (disebut *dark energi*) atau memodifikasi ruas kiri persamaan medan Einstein (disebut *modified gravity*).

Teori gravitasi  $f(R)$  adalah salah satu teori umum yang digunakan untuk memodifikasi teori Einstein yaitu dengan menambahkan invarian orde tinggi ke aksi Einstein-Hilbert standar, yang mengarah ke teori gravitasi orde tinggi. Untuk mendapatkan persamaan medan maka diterapkan prinsip variasi aksi. Dengan memilih fungsi tertentu, teori gravitasi  $f(R)$  dapat meniru evolusi kosmologi (Nojiri dkk, 2011) dan khususnya yang dijelaskan oleh model  $\Lambda$ CDM (Dunsby dkk, 2010). Telah dibuktikan juga bahwa ketika perturbasi skalar kosmologi dipelajari, teori gravitasi  $f(R)$ , dapat meniru standar ekspansi kosmologis (Cruz Dombriz dkk, 2008), memberikan spektrum kekuatan materi yang berbeda dari yang diprediksi oleh model  $\Lambda$ CDM (Cruz Dombriz dkk, 2009).

Teori gravitasi  $f(R)$  diperkenalkan untuk memecahkan beberapa masalah yang tidak bisa dijelaskan oleh teori gravitasi Einstein. Dari sini persamaan medan Einstein diganti dengan suku yang secara umum lebih rumit. Biasanya, pada penyelesaian terakhir akan bermasalah dan harus dilakukan metode aproksimasi. Teori gravitasi  $f(R)$  juga diasumsikan sebagai teori gangguan pada persamaan Einstein, sehingga pada penelitian ini akan mengikuti pendekatan metode gangguan. Namun, asumsi ini tidak akan mudah untuk diselesaikan tanpa menerapkan kasus khusus. Salah satu kasus yang paling banyak digunakan adalah simetri bola.

Terkait solusi simetri bola statis atau biasa disebut solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  telah banyak dilakukan penelitian. Anne Marie N., dkk (2010) mengembangkan formalisme kovarian baru untuk menentukan ruang-waktu metrik simetri bola teori gravitasi  $f(R)$ . Kemudian L. Sebastian dan S. Zerbini (2011) telah mendapatkan solusi eksak dengan menurunkan lagrangian dari persamaan gerak untuk metrik simetri bola statis dalam teori gravitasi  $f(R)$ . Di tahun yang sama, A. Shojai dan F. Shojai melakukan penelitian lanjutan dengan menggambarkan konfigurasi kesetimbangan sebuah bintang, mereka mendapatkan beberapa solusi interior simetri bola statis. Selain itu, pada tahun 2021 A. Romadani dan M. F. Rasyid merumuskan koordinat Kruskal-Szekeres dari model gravitasi vakum dalam teori  $f(R)$  dan didapatkan solusi ruang-waktu simetri bola statis yang dikenal sebagai ruang-waktu de Sitter-Schwarzschild.

Berbeda dari solusi eksak simetri bola statis dalam teori gravitasi  $f(R)$ , untuk menyelesaikan solusi eksak dalam kasus medan non-statis sangat tidak mudah. Sehingga pada tahun 2018, Nguyen Anh Ky dkk melakukan penelitian dengan metode gangguan dan berhasil mendapatkan solusi aproksimasi dari  $f(R)$  untuk medan serta didapatkan solusi vakumnya.

Metode gangguan terdiri dari metode matematika untuk menemukan solusi aproksimasi dari suatu masalah, dimulai dari solusi eksak dari masalah yang sederhana. Bagian yang paling penting dari teori gangguan adalah dengan menguraikan  $f(R)$  menjadi dua suku utama yaitu suku  $f(R)$  tanpa gangguan dan suku pengganggunya. Suku pertama adalah solusi yang diketahui penyelesaiannya dan suku kedua berbentuk deret pada pangkat yang lebih tinggi. Solusi gangguan

biasanya hanya dengan mempertahankan dua suku pertama, yaitu suku yang sudah diketahui dan koreksi gangguan orde pertama.

Motivasi mempelajari teori gravitasi  $f(R)$  adalah adanya fakta bahwa dengan menambahkan suku ekstra pada aksi Einstein-Hilbert akan didapatkan penyelesaian dari masalah evolusi alam semesta tanpa memunculkan konsep *dark matter* dan *dark energy*. Juga, akan menarik jika digunakan untuk mempelajari sifat-sifat dari lubang hitam.

Oleh karena itu, penelitian ini akan berfokus pada studi lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  dengan metode gangguan. Selanjutnya akan ditinjau dua kasus khusus  $f(R)$ , yaitu kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dan kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  dan akan dikaji pula implikasi fisis dari solusi lubang hitam Schwarzschild tersebut, berupa singularitas dan lintasan geodesiknya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, berikut rumusan masalah untuk penelitian ini:

1. Bagaimana bentuk metrik Schwarzschild dari teori gravitasi  $f(R)$  untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dan kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$ ?
2. Bagaimana deskripsi fisis dari singularitas dan lintasan geodesik lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Memperoleh bentuk metrik Schwarzschild dari teori gravitasi  $f(R)$  untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dan kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$ .
2. Mengetahui deskripsi fisis dari singularitas dan lintasan geodesik lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$ .

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Untuk menambah pemahaman tentang relativitas umum tingkat lanjut, terutama mengenai modifikasi gravitasi untuk metrik lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$ .
2. Sebagai dasar atau rujukan bagi penelitian yang lebih lanjut dan lebih mendalam, dengan mengaplikasikan teori gravitasi  $f(R)$  ini ke metrik lubang hitam lain yang lebih kompleks, seperti lubang hitam Kerr, Reissner-Nordstrom, dll.

#### 1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini akan dibatasi pada teori gravitasi  $f(R)$  untuk mendapatkan metrik lubang hitam Schwarzschild pada kondisi vakum dalam kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dan kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  dan bagaimana implikasi fisisnya berupa singularitas dan lintasan geodesik solusi tersebut.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Teori Relativitas Umum

Sebelum Teori Relativitas Umum diperkenalkan pada tahun 1915, telah dikenalkan teori yang menjelaskan gerak benda dan gravitasi. Teori ini adalah Hukum Gravitasi Newton dan Teori Relativitas Khusus. Hukum Gravitasi Newton adalah percobaan Newton yang menghasilkan kesimpulan bahwa gaya tarik-menarik yang bekerja antara dua benda sebanding dengan massa masing-masing benda dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak kedua benda tersebut.

$$\vec{F} = -(Gm_1m_2)(\vec{r}/r^3) \quad (2.1)$$

Hukum gravitasi adalah hukum yang menjelaskan gerak benda-benda yang berinteraksi karena adanya pengaruh gravitasi antara benda dengan ketelitian tinggi. Keakuratan untuk menganalisis dinamika gerak benda langit adalah bagian dari hukum ini. Akan tetapi, hukum gravitasi Newton hanya dapat menjelaskan gerak benda pada kelajuan rendah dan hanya berlaku pada medan gravitasi lemah serta tidak konsisten dengan Teori Relativitas Khusus. Menurut Teori Relativitas Khusus, efek gravitasi dari benda langit tersebut merambat melebihi kecepatan cahaya sebab menurut gravitasi Newton jika sebuah benda digerakkan maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah spontan. Karena inilah, hukum gravitasi Newton dapat dikatakan tidak sesuai dengan Teori Relativitas Khusus. Dari sini, kemudian Einstein berupaya merumuskan teori gravitasi baru yang kompatibel dengan teori relativitas khusus (Gautama, 2018).

Relativitas umum adalah sebuah generalisasi atau perumuman dari relativitas khusus yang mencakup gravitasi dan semua kerangka gerak yang dipercepat. Menurut Einstein, gravitasi bukan disebabkan adanya interaksi antar objek melainkan manifestasi dari kelengkungan ruang-waktu. Fenomena gravitasi sangat berkaitan dengan geometri ruang-waktu. Ini dikarenakan adanya penyebaran massa dan energi di dalam ruang-waktu tersebut. Melengkungnya lintasan cahaya karena medan gravitasi juga dapat diartikan bahwa sifat ruang ditentukan oleh distribusi materi dan berlaku sebaliknya. Ada dua asas yang menjadi pondasi dari Teori Relativitas Umum yaitu, yang pertama adalah asas kesetaraan (*principle of equivalence*) yang berbunyi “*Tidak ada percobaan yang dapat dilakukan dalam daerah kecil (lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara*” dan yang kedua adalah asas kovarian umum (*general covariance*) berbunyi “*Hukum alam harus memiliki bentuk yang tetap terhadap sembarang pemilihan transformasi koordinat*”.

Penjelasan ruang-waktu pada skala makroskopis paling baik dijelaskan oleh Persamaan Medan Einstein (Clifton dkk, 2011). Persamaan ini dianggap mengatur inflasi alam semesta, perilaku lubang hitam, perambatan gelombang gravitasi, dan pembentukan semua struktur di alam semesta, dari planet ke bintang, hingga galaksi dan gugus kelompok galaksi. Namun dalam skala mikroskopis relativitas umum bukanlah teori yang cocok. Selain itu, ada beberapa permasalahan dalam teori kosmologi modern yang tidak bisa dijelaskan oleh persamaan ini. Salah satunya tentang alam semesta yang mengembang dipercepat, sehingga muncul beberapa model dengan dua pendekatan dasar yaitu memodifikasi ruas kanan persamaan

medan Einstein (disebut *dark energi*) atau memodifikasi ruas kiri persamaan medan Einstein (disebut *modified gravity*).

Persamaan medan Einstein dikenal dalam empat dimensi. Tetapi bagaimana jika dimasukkan ke dimensi yang lebih tinggi dan kemudian dapat memilih untuk menurunkan persamaan medan ini dari aksi Einstein-Hilbert di ruang-waktu berdimensi lebih tinggi, atau ke himpunan persamaan efektif dalam empat dimensi. Kedua kemungkinan definisi diatas tidak konsisten dan terlebih lagi belum diketahui apakah dalam persamaan medan Einstein yang didapatkan memiliki konstanta kosmologis atau tidak (Clifton dkk, 2011).

## 2.2 Aksi Einstein-Hilbert

Aksi Einstein-Hilbert dapat digunakan untuk memperoleh persamaan gravitasi Einstein dan juga persamaan untuk teori yang lebih umum seperti teori gravitasi  $f(R)$ . Diketahui bahwa skalar paling sederhana yang dapat dibangun dengan menggunakan tensor metrik dan turunannya yaitu skalar kelengkungan Ricci  $R$  dan aksi paling sederhana untuk relativitas umum dalam vakum adalah aksi Einstein-Hilbert (Sporea, 2014).

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2\kappa} R \quad (2.2)$$

Jika keberadaan bidang materi diperhitungkan juga, maka aksi dapat ditulis sebagai

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2\kappa} L_{EH} + L_M \right) \quad (2.3)$$

dimana  $g = |\det(g_{\mu\nu})|$ , lagrangian Einstein-Hilbert dan lagrangian materi diberikan oleh

$$L_{EH} = R \quad (2.4)$$

$$L_M = L(\psi, \partial_\mu \psi; g_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

Dalam persamaan (2.5) yang dilambangkan dengan  $\psi$  adalah bidang materi,  $\kappa = 8\pi G$ , dan  $G$  adalah konstanta gravitasi Newton (dengan kecepatan cahaya yang dimisalkan  $c = \hbar = 1$ ). Variasi orde pertama dari aksi Einstein-Hilbert diperoleh

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4 x \left( \delta(\sqrt{g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{g} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dimana skalar Ricci didefinisikan sebagai

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Untuk menghitung variasi dari determinan  $g$  metrik dibutuhkan rumus berikut

$$g = g_{\mu\nu} \text{adj}(g_{\mu\nu}) \quad (2.8)$$

$$\delta g = \text{adj}(g_{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

dengan menggunakan definisi  $\text{adj} = g g^{\mu\nu}$  maka didapatkan

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Karena disini dipilih untuk membuat variasi aksi terhadap  $\delta g^{\mu\nu}$  daripada  $\delta g_{\mu\nu}$  (walaupun dalam akhirnya persamaan yang sama diperoleh dalam kedua kasus) maka sekarang akan diturunkan hubungan antara  $\delta g^{\mu\nu}$  dan  $\delta g_{\mu\nu}$ . Untuk melakukan itu akan dimulai dari persamaan berikut

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (2.11)$$

dan menggunakan fakta bahwa tensor  $\delta_\nu^\mu$  adalah konstan yang berarti tidak berubah di bawah suatu variasi, oleh karena itu dapat ditulis

$$\delta g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} \delta g_{\sigma\nu} = 0 \quad (2.12)$$

atau setelah mengalikan dengan  $g^{\rho\nu}$  dan merangkainya kembali, didapatkan

$$\delta g_{\mu\rho} = -g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\nu} \quad (2.13)$$

$\rho \leftrightarrow \nu$  dan dikalikan lagi dengan  $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho} \\ &= -\delta_{\nu}^{\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho} \\ &= -g^{\sigma\rho} \delta g_{\sigma\rho} \\ &= -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Persamaan diatas dimasukkan ke dalam persamaan (2.11), kemudian dihitung variasi untuk  $\sqrt{g}$  sebagai

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \delta g = \frac{-1}{2\sqrt{g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Untuk mengekstrak persamaan medan dari persamaan (2.7), perlu variasi pengfaktoran  $\delta g^{\mu\nu}$ . Untuk melakukan ini, pertama-tama  $\delta R_{\mu\nu}$  dinyatakan dalam variasi metrik dan turunannya. Karena tensor Ricci diperoleh dari tensor kelengkungan Riemann penuh maka

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \quad (2.16)$$

Selanjutnya akan didapatkan variasi tensor kelengkungan Riemann. Ini bisa dilakukan dengan berbagai cara, tetapi yang paling mudah adalah menghitung terlebih dahulu variasi tensor kelengkungan. Tensor Riemann diberikan oleh (Poisson, 2004)

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \partial_{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} \quad (2.17)$$

dalam kaitannya dengan hubungan  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$  yang disebut sebagai koneksi Levi-Civita

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) \quad (2.18)$$

Dibawah ini adalah variasi sembarang dari koefisien koneksi

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (2.19)$$

dari persamaan (2.17) dapat ditulis bahwa

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} &= \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}) - \partial_{\rho}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) + \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \\ &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Kemudian dapat memilih untuk mengerjakan dalam koordinat geodesik lokal di beberapa titik sembarang  $P$ , di mana simbol Christoffel dapat dibuat nol ( $\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} = 0$ ) (Misner dkk, 1973) dan dalam hal ini juga berpendapat bahwa turunan biasa identik dengan turunan kovarian yang didefinisikan oleh

$$\nabla_{\mu}T_{\beta}^{\alpha} = \partial_{\mu}T_{\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}T_{\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}T_{\sigma}^{\alpha} \quad (2.21)$$

Dan variasi tensor Riemann pada titik  $P$  sebagai

$$\delta R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}) - \nabla_{\rho}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (2.22)$$

Faktanya bahwa  $\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}$  adalah tensor persamaan (2.22) hanya berisi besaran-besaran tensorial, yang memberi informasi bahwa relasi ini berlaku dalam sistem koordinat apa pun. Hasilnya persamaan (2.22) berlaku untuk umum dan ini dikenal sebagai persamaan Palatini. Menggunakan persamaan (2.16) dan persamaan (2.22) sekarang dapat ditulis variasi untuk tensor Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}) - \nabla_{\sigma}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (2.23)$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}) - g^{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\delta(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}) \\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

dengan merelasikan persamaan (2.15) dan (2.7) didapatkan bentuk berikut untuk variasi aksi

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} = & \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int d^4x \sqrt{g} \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dengan mensyaratkan  $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ , maka ekspresi akhir untuk variasi  $S_{EH}$  dapat dituliskan sebagai

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.26)$$

Setelah menghitung integral variasional  $\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}}$  dan mengaturnya menjadi nol, pada akhirnya diperoleh persamaan gravitasi Einstein untuk ruang kosong

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (2.27)$$

Untuk sisanya pada bagian ini akan dianalisis aksi penuh persamaan (2.3), yang juga bisa ditulis sebagai

$$S = \frac{1}{2\kappa} S_{EH} + S_M = \int d^4x \left( \frac{1}{2\kappa} \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_M \right) \quad (2.28)$$

dimana dilambangkan dengan  $\mathcal{L}_{EH}$  dan  $\mathcal{L}_M$  densitas lagrange yang diberikan oleh

$$\mathcal{L}_{EH} = \sqrt{g} L_{EH} \quad (2.29)$$

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{g} L_M \quad (2.30)$$

Variasai aksi (2.29) sehubungan dengan (invers) metrik didapatkan

$$\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (2.31)$$

Telah dilihat bahwa suku pertama dari relasi di atas memberi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Kemudian dibandingkan persamaan (2.31) dengan persamaan Einstein penuh

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

dengan  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ , sehingga persamaan (2.32) menjadi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

Persamaan medan Einstein dalam bentuk persamaan tensor campuran diberikan oleh

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = -\kappa T_{\nu}^{\mu} \quad (2.35)$$

Sekarang dapat memberikan definisi tensor momentum energi-tegangan sebagai fungsi metrik dan materi lagrangian

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.36)$$

Dapat ditunjukkan bahwa tensor momentum energi-tegangan (2.36) memiliki semua kelayakan yang diperlukan untuk suatu tensor momentum-energi. Dari persamaan medan Einstein (2.34) didapatkan

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T \quad (2.37)$$

dan persamaan (2.34) menjadi

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (2.38)$$

### 2.3 Modifikasi Gravitasi

Berbagai variasi modifikasi gravitasi yang dianggap sebagai alternatif gravitasi untuk energi gelap. Masalah energi gelap atau pertanyaan mengapa alam semesta saat ini mengembang dipercepat, dianggap sebagai masalah teoritis paling mendasar pada abad 21. Ada berbagai cara yang ditujukan untuk membangun

model energi gelap yang dapat diterima. Beberapa diantaranya adalah model skalar, fluida gelap dengan persamaan keadaan yang kompleks ( $EoS$ ), teori medan yang melibatkan fermion, medan vektor abelian atau non-abelian, teori string atau M-theory, dimensi yang lebih tinggi, dll. Meskipun upaya-upaya ini masih belum bisa memberi penjelasan yang memuaskan tentang asal mula energi gelap, hal ini dapat dimengerti mengingat bahwa nilai parameter kosmologi saat ini belum didefinisikan dengan akurasi yang tepat (S. Nojiri dan S.D. Odintsov, 2006).

Pendekatan modifikasi gravitasi memang sangat menarik dalam aplikasi untuk akselerasi lambat alam semesta dan energi gelap, ini disebabkan oleh beberapa hal (S. Nojiri dan S.D. Odintsov, 2006):

1. Modifikasi gravitasi memberikan alternatif gravitasi yang sangat alami untuk energi gelap. Percepatan kosmik dijelaskan secara sederhana oleh fakta bahwa ekspansi alam semesta di mana beberapa suku sub-dominan (seperti  $1/R$ ) mungkin menjadi esensial pada kelengkungan kecil.
2. Modifikasi gravitasi menghadirkan penyatuan yang sangat alami dari inflasi awal dan percepatan akhir berkat peran yang berbeda dari istilah gravitasi yang relevan pada kelengkungan kecil dan besar. Selain itu, beberapa model gravitasi yang dimodifikasi diprediksi oleh pertimbangan teori string atau M-theory.
3. Modifikasi gravitasi dapat berfungsi sebagai dasar untuk menjadi penjelasan yang terpadu tentang energi gelap dan materi gelap. Beberapa efek kosmologis (seperti kurva rotasi galaksi) dapat dijelaskan dalam kerangka modifikasi gravitasi.

4. Dengan asumsi bahwa alam semesta memasuki fase *phantom*, modifikasi gravitasi secara alami dapat menggambarkan transisi dari fase *non-phantom* ke fase *phantom* tanpa perlu memasukkan materi eksotis (seperti skalar dengan istilah kinetik tanda yang salah atau fluida ideal dengan parameter EoS kurang dari satu). Selain itu, seringkali fase *phantom* dalam modifikasi gravitasi bersifat sementara. Oleh karena itu, biasanya tidak ada *Big Rip* masa depan yang diharapkan di sana.
5. Modifikasi gravitasi secara alami menggambarkan transisi dari perlambatan ke percepatan dalam evolusi alam semesta.
6. Dominasi energi efektif dapat dibantu oleh modifikasi gravitasi. Oleh karena itu, masalah yang kebetulan diselesaikan di sana hanya dengan fakta ekspansi alam semesta.
7. Modifikasi gravitasi diharapkan dapat berguna dalam fisika energi tinggi (misalnya, untuk penjelasan masalah hierarki atau penyatuan GUT dengan gravitasi).
8. Terlepas dari kendala yang cukup ketat dari pengujian Tata Surya, ada versi modifikasi gravitasi yang mungkin merupakan teori yang layak bersaing dengan Relativitas Umum pada zaman sekarang. Namun demikian, pemeriksaan yang lebih serius terhadap teori semacam itu diperlukan untuk menyesuaikannya dengan berbagai data pengamatan dan pengujian Tata Surya yang tepat.

Beberapa modifikasi gravitasi yang dapat dipertimbangkan sebagai alternatif untuk relativitas umum, seperti (Sotiriou dkk, 2007):

1. Teori Skalar-Tensor

Aksi dari teori skalar-tensor diberikan oleh

$$S_{ST} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi) \right] \quad (2.39)$$

$$+ S_M(g_{\mu\nu}, \psi)$$

dan persamaan Einstein diberikan oleh

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right) \quad (2.40)$$

$$+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu}$$

dimana

$$\square \phi = -\frac{\phi}{2\omega} (R - V') - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi \left( \frac{\omega'(\phi)}{\omega(\phi)} - \frac{1}{\phi} \right) \quad (2.41)$$

## 2. Teori Gravitasi $f(R)$ Metrik

Aksi dari teori gravitasi  $f(R)$  diberikan oleh

$$S_{met} = S_G(g_{\mu\nu}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.42)$$

dimana  $S_M$  adalah aksi materi dan dilambangkan dengan  $\psi$  bidang materi.

Persamaan medan dari aksi (2.42) diperoleh

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]f'(R) = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.43)$$

Dalam kasus  $f(R)$ , untuk  $R = \text{konstan}$  dan  $T_{\mu\nu} = 0$ , persamaan diatas tereduksi menjadi

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \quad (2.44)$$

## 3. Teori Gravitasi $f(R)$ Palatini

Aksi mengambil bentuk berikut

$$S_{pal} = \int d^4x \sqrt{g} f(\mathcal{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.45)$$

Dengan menggunakan variasi  $\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}$

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \bar{\nabla}_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (2.46)$$

persamaan medan untuk gravitasi  $f(R)$  Palatini didapatkan

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.47)$$

#### 4. Teori Dimensi Ekstra

##### a. Pendekatan Metrik

Aksi yang diberikan adalah

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R + aR^2 + bR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \quad (2.48)$$

##### b. Pendekatan Palatini

Aksi yang diberikan adalah

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R + aR^2 + bR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) + S_M(g^{\mu\nu}, \psi) \quad (2.49)$$

dan persamaan medan diberikan oleh

$$\mathcal{R}_{(\mu\nu)} + 2a\mathcal{R}_\mu^\sigma\mathcal{R}_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}(\mathcal{R} + \mathcal{R}^{\sigma\lambda}\mathcal{R}_{\sigma\lambda})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.50)$$

#### 5. Teori Metrik-Affine

Aksi teori metrik-affine diberikan oleh

$$S_{MA} = \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi) \quad (2.51)$$

dan persamaan medan diberikan oleh

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ -\bar{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\sigma}) \delta_\lambda^\nu \right] \\
& + 2f'(\mathcal{R}) (g^{\mu\nu} S_{\lambda\sigma}^\sigma - g^{\mu\rho} S_{\rho\sigma}^\sigma \delta_\lambda^\nu + g^{\mu\sigma} S_{\sigma\lambda}^\nu) \\
& = \kappa \left( \Delta_\lambda^{\mu\nu} - B^{[\mu} \delta^{\nu]}_\lambda \right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

## 6. Teori Gauss-Bonnet

Aksi teori gauss-bonnet diberikan oleh

$$S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa} - \frac{\lambda}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - f(G) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \tag{2.54}$$

dimana G adalah invarian Gauss-Bonnet dan persamaan medan dari aksi di atas adalah

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\kappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} f(G) + 2f(G) R R^{\mu\nu} \\
& - 2(\nabla^\mu \nabla^\nu f'(G)) \\
& + 2g^{\mu\nu} (\nabla^2 f'(G)) R - 8f'(G) R_\rho^\mu R^{\nu\rho} + 4(\nabla_\rho \nabla^\mu f'(G)) R^{\nu\rho} \\
& + 4(\nabla_\rho \nabla^\nu f'(G)) R^{\mu\rho} - 4(\nabla^2 f'(G)) R^{\mu\nu} - 4g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \nabla_\sigma f'(G)) R^{\rho\sigma} \\
& + 2f'(G) R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\mu\rho\sigma}^\tau - 4(\nabla_\rho \nabla_\sigma f'(G)) R^{\mu\rho\nu\sigma} = T^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\kappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} f(G) + 2f(G) R R^{\mu\nu} + 4f'(G) R_\rho^\mu R^{\nu\rho} \\
& + 2f'(G) R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\mu\rho\sigma}^\tau - 4f'(G) R^{\mu\rho\nu\sigma} R_{\rho\sigma} = T^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu} + T_f^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

## 2.4 Lubang Hitam dalam Al-Quran

Bintang memulai hidupnya sebagai awan dingin dari gas yang melayang di dalam ruang antarbintang yang mengembang. Setiap butiran materi di awan mengalami gaya gravitasi yang menarik satu sama lain. Tarikan kolektif ini menyebabkan bagian luar tertarik dan menekan bagian dalam serta menyusutkan

awan. Ketika gas mampat suhunya akan meningkat. Semakin mampat awan akan semakin panas dan bila kontraksinya cukup kuat, bintang tersebut akan bersinar (Purwanto, 2015).

Bintang perlu sumber energi panas internal yang menjaga dari pengerutan lanjut. Tanpa sumber ini, bintang tidak akan bersinar kecuali melalui aliran panas dari bagian dalam. Kehilangan panas akan menyebabkan tekanan dalamnya jatuh dan tidak mampu menahan berat lapisan luar yang menghancurkan. Selanjutnya bintang akan terus mengalami keruntuhan, sebagai korban dari kecenderungannya sendiri untuk saling tarik satu sama lain (Purwanto, 2015). Peristiwa runtuhnya bintang sering disebut sebagai supernova. Bahkan disebutkan pula Allah SWT telah berfirman dalam QS. Al-Mursalaat (77) ayat 8:

فَإِذَا الدُّجُومُ طُمِسَتْ

“Maka apabila bintang-bintang telah dihapuskan”(QS. Al-Mursalaat [77]: 8)

Ketika bintang mengalami keruntuhan maka tidak akan lagi memancarkan cahaya. Karena inilah supernova dianggap sebagai bintang yang dihapus. Kondisi ini disebut juga sebagai kematian bintang.

Bintang yang telah mati akan menjadi *compact object* sebagai benda angkasa baru. Istilah *compact object* secara kolektif mengacu pada bintang katai putih, bintang neutron, dan lubang hitam. Dikatakan *compact object* karena kepadatannya yang luar biasa akibat keruntuhannya. Pusat bintang yang runtuh mengalami pemampatan sehingga elektron di pusat bintang akan terhimpit hingga makin dekat ke inti (Gautama, 2010). *Compact object* sering kali menjadi titik akhir dari evolusi bintang dan bisa disebut sebagai sisa-sisa bintang. Jenis dari *compact object* ini bergantung pada massa maksimum akhir evolusi bintang.

Menurut John Michell, medan gravitasi yang sangat kuat pasti dimiliki oleh bintang yang masif dan antap sehingga mengakibatkan cahaya tidak dapat keluar dari bintang tersebut. Sebenarnya bintang ini memancarkan cahaya dari permukaannya, akan tetapi tertarik kembali oleh gravitasinya sendiri sebelum sempat bergerak jauh. Akibatnya proses ini tidak terlihat oleh pengamat di luar, tapi masih dapat dirasakan tarikan gravitasinya. Obyek seperti ini diberi nama lubang hitam (*Black Hole*) oleh John Wheeler.

Lubang hitam merupakan singularitas ruang waktu. Singularitas terjadi akibat kuatnya gravitasi suatu benda yang sangat masif. Lubang hitam terjadi apabila suatu bintang neutron yang bermassa lebih besar dari  $3M_{\odot}$  maka tekanan degenerasi elektron dan neutron tak akan mampu menghentikan keruntuhan gravitasi bintang. Bintang kan menjadi semakin mampat dan medan gravitasinya semakin kuat. Dengan begitu kelengkungan ruang waktu di sekitar bintang pun semakin besar sehingga cahaya pun tidak dapat lolos. Radius maksimal bintang agar dapat menjadi lubang hitam adalah (Gautama, 2010):

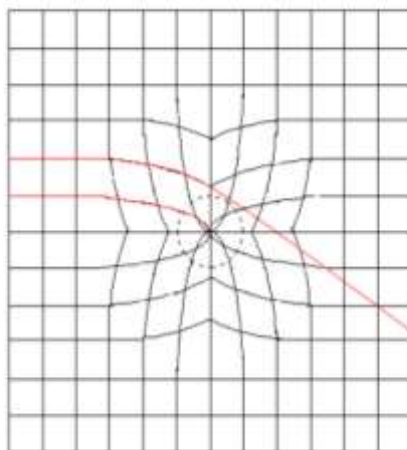
$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.57)$$

Jari-jari ini dinamakan jari-jari Schwarzschild, dan lingkarannya disebut horizon peristiwa atau *event horizon*.



Gambar 2.1 Jari-jari Schwarzschild  
(Anugraha, 2011)

Dari persamaan di atas dapat diketahui bahwa kecepatan lepas pada lubang hitam lebih besar atau sama dengan laju cahaya, sehingga cahaya tidak dapat lepas setelah memasuki *event horizon* (Gautama, 2010).



Gambar 2.2 Ilustrasi suatu lubang hitam yang melengkungkan ruang (Gautama, 2010)

Selain dalam QS. Al-Mursalaat (77): 8 yang menjelaskan tentang bintang yang dihapuskan, kajian tentang ayat-ayat kauniyah ini juga tidak melewatkan pada objek-objek astrofisika termasuk lubang hitam yang difirmankan oleh Allah SWT dalam Surah At-Takwir ayat 15 dan 16 :

فَلَا أُقْسِمُ بِالْخُنُوسِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنُوسِ (١٦)

“Aku bersumpah demi bintang-bintang, yang beredar dan terbenam” (QS. At-Takwiir [81]: 15-16).

Kata *al-khunnas* dalam *kamus al-Munawwir* terambil dari huruf *kha 'nun sin*, sehingga terbaca *khunnasun*. Makna *al-khunnas* adalah bintang-bintang, dan *al-khannās* adalah setan (Munawwir, 1997). Sedangkan dalam *Kamus Terjemah al-Qur'ān: Khusus kata-kata dalam al-Qur'ān*, kata *alkhunnas* artinya bintang-bintang yang kelihatan kembali (Hasyim, 2010).

Kata *al-khunnas* artinya bintang-bintang yang bercahaya. Pada zaman dahulu, para kafilah di padang pasir sangat mengagumi bintang dan secara umum manusia memang mengagumi bintang. Bahkan Allah berfirman dalam bentuk sumpah dengan bintang-bintang. Bintang-bintang memang tidak terlihat di siang hari, tetapi mereka akan memperlihatkan keindahannya serta menghiasi langit di malam hari. Disamping memberi penerangan perjalanan di padang pasir maupun ditengahlautan, bintang-bintang juga memberi petunjuk tentang waktu, arah yang harus dituju, maupun peredaran musim dan sebagainya (Kementrian Agama RI, 2011).

Dalam tafsir al-Maragi *al-khunnas* bentuk tunggalnya *khānis* artinya yang susut dan bersembunyi. Dalam bahasa Arab dikatakan *khanasa fulānun bainan-nās* artinya ia menyusut dan bersembunyi diantara manusia (Al-Maragi, 1993). Pendapat ini serupa dengan yang diungkapkan oleh Quraisy Shihab dalam kitab tafsir al-Misbah bahwa kata *al-khunnas* adalah bentuk jamak dari kata *alkhānisah* yang terambil dari kata *khanasa*, yakni bersembunyi di tempat persembunyiannya. Bintang tersebut sebenarnya ada dan tetap beredar, hanya saja tidak terlihat dangan mata (Shihab, 2016).

## **2.5 Solusi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi Einstein**

Solusi dari persamaan medan Einstein pertama kali dikerjakan oleh Karl Schwarzschild pada tahun yang sama sejak Teori Relativitas Umum dipublikasikan, berdasarkan penemuan Schwarzschild pada paper periheliumnya. Schwarzschild memberikan solusi statik dan simetri bola untuk persamaan medan Einstein. Solusi Schwarzschild adalah solusi persamaan medan paling sederhana (selain metrik

Minkowski) yang memberikan geometri ruang-waktu vakum di sekitar sumber masif berbentuk simetri bola. Hasil yang didapatkan yaitu lubang hitam (*blackhole*) statis.

Geometri ruang-waktu yang terdapat di sekitar objek ditentukan oleh fungsi metrik yang berkaitan dengan objek tersebut. Lubang hitam Schwarzschild adalah lubang hitam statis yang tidak memiliki muatan listrik ataupun momentum sudut. Lubang hitam ini dijabarkan dengan menggunakan metrik Schwarzschild dan tidak dapat dibedakan dengan lubang hitam lainnya kecuali berdasarkan massa. Didalam koordinat Schwarzschild dinotasikan (1, -1, -1, -1).

Dalam sajian matematis, metrik simetri bola adalah metrik yang mempertahankan bentuk (Gautama, 2018)

$$fr^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad (2.58)$$

Dengan  $f$  dapat berupa tetapan atau fungsi dari  $r$  dan  $t$  serta parameter lainnya tidak bergantung terhadap  $\theta$  dan  $\phi$ . Berdasarkan syarat diatas, maka rumusan metrik simetri bola dapat disajikan dalam bentuk metrik umum sebagai berikut (Gautama, 2018)

$$ds^2 = e^u c^2 dt^2 - e^v dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.59)$$

Nilai  $c$  sementara diisikan sama dengan 1 sehingga menjadi

$$ds^2 = e^u dt^2 - e^v dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.60)$$

Rumusan umum seperti ini disebut sebagai ansatz. Ansatz dipilih berdasarkan asumsi fisis dan syarat batas dari kasus yang dipilah. Tujuan memecahkan persamaan medan adalah untuk mengetahui parameter-parameter tak tentu dalam ansatz metrik menggunakan persamaan kendala yang diketahui. Meskipun demikian, sering pula persamaan kendala yang dimiliki tidak mencukupi sehingga

metrik akhir masih mengandung fungsi tak tentu (Gautama, 2018). Dari persamaan metrik simetri bola di atas, akan didapatkan tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  sebagai berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

dengan bentuk kontravarian dari tensor metrik di atas adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Nilai dari simbol Christoffel dari tensor metrik (2.18) di atas adalah

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})$$

yang berjumlah sebanyak 64 komponen. Beberapa komponen yang tidak bernilai nol sebagai berikut:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{u'}{2}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{u'}{2} e^{(u-v)}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{v'}{2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-v}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta$$

(2.63)

Tensor Ricci dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (2.64)$$

Karena Tensor Ricci bersifat simetri  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ , maka hanya memiliki 10 komponen bebas. Untuk komponen  $R_{i0}$  dengan  $i = 1, 2, 3$ :

$$R_{i0} = \partial_0 \Gamma_{i\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{i0}^\sigma + \Gamma_{i\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{i0}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (2.65)$$

Dengan kondisi statik menyatakan bahwa  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$  sehingga  $\partial_0 \Gamma_{i\sigma}^\sigma = 0$ . Tensor Ricci menjadi

$$R_{i0} = -\partial_j \Gamma_{i0}^j + \Gamma_{ij}^\rho \Gamma_{\rho 0}^j - \Gamma_{i0}^\rho \Gamma_{\rho j}^j \quad (2.66)$$

Dengan menggunakan nilai  $\Gamma_{j0}^i = 0$ ,  $\Gamma_{0\rho}^\rho = 0$  dan  $\Gamma_{ij}^0 = 0$ , maka didapatkan

$$R_{i0} = R_{0i} = 0 \quad (2.67)$$

Sehingga komponen tensor Ricci yang tersisa adalah komponen dalam arah diagonal ( $R_{\mu\mu}$ ). Nilai dari  $R_{\mu\mu}$  ini adalah

$$R_{\mu\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\mu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\mu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (2.68)$$

Untuk  $\mu = 0$

$$R_{00} = e^{(u-v)} \left( \frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} \right) \quad (2.69)$$

Untuk  $\mu = 1$

$$R_{11} = -\frac{u''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{u'v'}{4} - \frac{u'^2}{4} \quad (2.70)$$

Untuk  $\mu = 2$

$$R_{22} = 1 - e^{-v} \left( \frac{r(u' - v')}{2} + 1 \right) \quad (2.71)$$

Untuk  $\mu = 3$

$$R_{33} = \sin^2\theta \left( 1 - e^{-v} \left( \frac{r(u' - v')}{2} + 1 \right) \right) \quad (2.72)$$

Dengan hasil skalar kelengkungan R yaitu

$$R = 2e^{-v} \left( \frac{u''}{2} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} + \frac{(u' - v')}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} \quad (2.73)$$

Selanjutnya dengan menggunakan kondisi vakum, komponen metric  $e^{-v}$  dan  $e^{-u}$  akan didapatkan. Sehingga metriknya akan menjadi

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.74)$$

metrik pada persamaan (2.74) tersebut adalah metrik Schwarzschild.

Solusi Schwarzschild adalah solusi dari persamaan medan Einstein di ruang vakum. Hal ini berarti bahwa solusi tersebut hanya berlaku di luar sumber gravitasi yang artinya untuk sumber gravitasi berbentuk bola dengan radius  $R$  maka solusinya hanya berlaku untuk  $r > R$ . Dan untuk menggambarkan medan gravitasi baik di dalam maupun di luar sumber gravitasi, solusi Schwarzschild harus disesuaikan dengan beberapa solusi interior  $r = R$ .

## 2.6 Metode Gangguan dalam Teori Gravitasi $f(R)$

Metode gangguan dalam teori gravitasi  $f(R)$  adalah dengan menguraikan  $f(R)$  menjadi dua suku utama yaitu suku  $f(R)$  tanpa gangguan dan suku pengganggunya. Suku pertama adalah solusi yang diketahui penyelesaiannya dan suku kedua berbentuk deret dari suku pertama yang dicirikan dengan suatu parameter yang bernilai kecil. Solusi gangguan biasanya hanya dengan mempertahankan dua suku pertama, yaitu suku yang sudah diketahui dan koreksi dari suku sebelumnya. Karena koreksi ini lebih kecil dibandingkan dengan ukuran

besaran itu sendiri maka dapat dihitung dengan menggunakan metode aproksimasi (perkiraan). Oleh karena itu untuk sistem rumit yang belum terpecahkan dapat diselesaikan dengan sistem yang lebih sederhana. Sehingga  $f(R)$  dapat ditulis dalam bentuk (Anh Ky dkk, 2018)

$$f(R) = R + \alpha h(R) \quad (2.75)$$

di mana  $h(R)$  adalah fungsi skalar dari  $R$  dan  $\alpha$  adalah konstanta, sehingga  $\alpha h(R)$  dan turunannya dibandingkan dengan  $R$  adalah sangat kecil. Persamaan (2.75) disubstitusikan ke persamaan (2.43)

$$\begin{aligned} [1 + \alpha h'(R)]R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + \alpha h(R))g_{\mu\nu} + [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] \alpha h'(R) \\ = -\kappa T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.76)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk tensor campuran

$$\begin{aligned} R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R + \alpha h'(R) R_\nu^\mu - \frac{\lambda}{2} \delta_\nu^\mu h'(R) - \alpha \delta_\nu^\mu \square h'(R) + \alpha \nabla^\mu \nabla_\nu h'(R) \\ = -\kappa T_\nu^\mu \end{aligned} \quad (2.77)$$

Persamaan ini dipecahkan menggunakan metode gangguan, berdasarkan fakta bahwa persamaan ini berbeda dari persamaan Einstein dengan suku gangguan kecil (empat suku terakhir di sisi kiri persamaan). Kemudian dari persamaan (2.37) dan (2.38) didapatkan

$$R = \kappa T \text{ dan } R_\nu^\mu = -\kappa \left( T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T \right) \quad (2.78)$$

dan disubstitusikan ke persamaan (2.77)

$$\begin{aligned} R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R - \alpha \kappa h'(\kappa T) \left( T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T \right) - \frac{\alpha}{2} \delta_\nu^\mu h'(\kappa T) \\ - \alpha \delta_\nu^\mu \square^E h'(\kappa T) + \alpha \nabla^\mu \nabla_\nu^E h'(\kappa T) = -\kappa T_\nu^\mu \end{aligned} \quad (2.79)$$

Persamaan ini dipecahkan dalam bentuk turunan orde pertama, dimana  $h'(\kappa T) = \frac{\partial h(\kappa T)}{\partial(\kappa T)}$  dan superskrip E di turunan kovarian berarti bahwa tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  diambil dari Persamaan Einstein.

Jika persamaan di atas diselesaikan dalam kondisi vakum ( $T_\nu^\mu = 0, T = 0$ ), maka  $h(\kappa T)$  dan  $h'(\kappa T)$  adalah konstanta dan karena konstanta hasil turunannya sama dengan nol, sehingga persamaan (2.79) menjadi

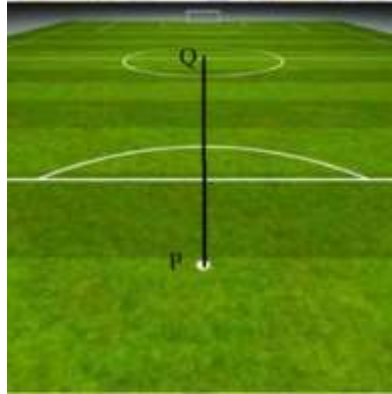
$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R = \frac{\alpha}{2} \delta_\nu^\mu h(\kappa T) = \frac{\alpha}{2} \delta_\nu^\mu h(0) \quad (2.80)$$

Jika  $h(0)$  persamaan gangguan ini mirip dengan persamaan Einstein untuk kondisi vakum, tetapi disini ada perbedaan mendasar. Dalam persamaan Einstein pada pusat medan, solusi untuk kondisi vakum selalu stationer dan waktu konstan, bahkan ketika pusat medannya tidak stationer. Sedangkan dalam teori  $f(R)$  solusi simetri bola umumnya tidak stationer. Selanjutnya, konstanta integrasi dalam solusi persamaan Einstein bisa didapatkan dengan mengambil batas potensial gravitasi klasik  $\varphi = -\frac{GM}{r}$  (Anh Ky dkk, 2018).

## 2.7 Lintasan Geodesik

Geodesik adalah lintasan terpendek antara dua titik. Jika pada koordinat kartesian, geodesiknya berbentuk suatu garis lurus dan jika pada koordinat bola geodesiknya adalah panjang busur terpendek yang menghubungkan dua titik tersebut pada lingkaran bola dengan jari-jari terbesar (Irawan, 2016). Karena geodesik didefinisikan sebagai lintasan terpendek antara dua titik yang dapat ditempuh dari suatu kurva pada manifold, artinya sama saja dengan mensyaratkan

bahwa geodesik harus sebuah kurva dengan kelengkungan seminimal mungkin sehingga kurva tersebut memiliki gradien yang sejajar terhadap kurva itu sendiri.

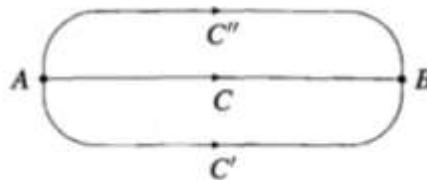


Gambar 2.3 Geodesik pada Ruang Datar  
(Irawan, 2016)



Gambar 2.4 Geodesik pada Ruang Lengkung  
(Irawan, 2016)

Dari Gambar 2.3 terlihat bahwa jarak terdekat antara titik P dan Q berupa garis lurus. Sedangkan pada Gambar 2.4 terlihat bahwa jarak terdekat antara dua titik pada ruang lengkung adalah kurva lengkung PQ.



Gambar 2.5 Dua Titik yang Dihubungkan dengan Tiga Lintasan  
(Irawan, 2016)

Misal terdapat dua titik A dan B yang dihubungkan oleh tiga lintasan seperti Gambar 2.5 dibawah ini, maka lintasan geodesiknya adalah lintasan C karena lintasan C adalah jarak terpendek antara titik A dan B.

**BAB III**  
**TEORI GRAVITASI  $f(R)$**

**3.1 Teori Gravitasi  $f(R)$**

Teori gravitasi  $f(R)$  adalah perpanjangan dari relativitas umum Einstein yang diturunkan dari relaksasi hipotesis aksi Einstein-Hilbert untuk medan gravitasi linier dalam skalar kelengkungan Ricci  $R$ . Teori gravitasi  $f(R)$  pertama kali diusulkan oleh Hans Adolp Buchdahl pada tahun 1970. Teori gravitasi  $f(R)$  akan ditinjau menggunakan pendekatan metrik. Aksi dari teori gravitasi  $f(R)$  diberikan oleh persamaan (2.42)

$$S_{met} = S_G(g_{\mu\nu}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi)$$

dimana  $S_M$  adalah aksi materi dan dilambangkan dengan  $\psi$  bidang materi. Jadi dapat ditulis aksi total untuk  $f(R)$  gravitasi sebagai

$$S_{met} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.1)$$

Dilakukan prinsip variasi terhadap metrik  $g^{\mu\nu}$  untuk aksi, didapatkan

$$\begin{aligned} \delta S_{met} &= \int d^4x \left( (\delta \sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right) + \kappa T_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \delta g^{\mu\nu} + f'(R) \delta R \right) + \kappa T_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \delta g^{\mu\nu} + f'(R) [R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \right) \\ &\quad + \kappa T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pertama-tama dihitung terlebih dahulu suku  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ , dengan memanfaatkan identitas relativitas umum

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \quad (3.3)$$

dan

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} [g_{\lambda\mu}\nabla_\nu(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu}\nabla_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})] \quad (3.4)$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\lambda[g_{\sigma\nu}\nabla_\mu(\delta g^{\sigma\lambda}) + g_{\sigma\mu}\nabla_\nu(\delta g^{\sigma\lambda}) \\ &\quad - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})] \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\nu[g_{\sigma\lambda}\nabla_\mu(\delta g^{\sigma\lambda}) + g_{\sigma\mu}\nabla_\lambda(\delta g^{\sigma\lambda}) \\ &\quad - g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})] \\ &= \frac{1}{2}[\nabla_\lambda\nabla_\sigma(\delta g^{\sigma\lambda}) + \nabla_\lambda\nabla_\sigma(\delta g^{\sigma\lambda}) - g_{\alpha\beta}\nabla_\lambda\nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})] \\ &\quad - \frac{1}{2}[g_{\sigma\lambda}\nabla_\mu\nabla^\mu(\delta g^{\sigma\lambda}) + \nabla_\sigma\nabla_\lambda(\delta g^{\sigma\lambda}) \\ &\quad - \nabla_\alpha\nabla_\beta(\delta g^{\alpha\beta})] \\ &= -g_{\alpha\beta}\square(\delta g^{\alpha\beta}) + \nabla_\alpha\nabla_\beta(\delta g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Disubstitusikan ke (3.2) dan didapatkan

$$\begin{aligned} \delta S_{met} &= \int d^4x\sqrt{g}\left\{f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - g_{\alpha\beta}\square(\delta g^{\alpha\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \nabla_\alpha\nabla_\beta(\delta g^{\alpha\beta}) + \kappa T_{\mu\nu}\right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dengan menggunakan integral parsial untuk suku ketiga dan keempat, serta mengabaikan syarat batas, maka didapatkan

$$\delta S_{met} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \kappa T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

dan dengan mensyaratkan  $\delta S / \delta g^{\mu\nu} = 0$  diperoleh

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \kappa T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.8)$$

Dimana  $' = \frac{d}{dR}$ ,  $\nabla_\mu$  adalah turunan kovarian standar (diperoleh melalui koneksi Levi-Civita), dan  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$  adalah operator Laplace dalam empat dimensi.

Dari sini, dapat langsung mendapat persamaan medan baru (2.42)

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = -\kappa T_{\mu\nu}$$

Dalam kasus khusus ketika  $f'(R)$  adalah sebuah konstanta, akan terlihat bahwa suku berorde keempat (dua suku terakhir di kiri) akan lenyap. Jika  $f'(R)$  adalah konstanta maka jelas  $f(R)$  adalah fungsi linier dari  $R$  dan teori tersebut tereduksi menjadi persamaan medan Einstein standar. Kemudian jika persamaan (2.50) dikalikan  $g^{\mu\nu}$  akan menghasilkan

$$g^{\mu\nu} f'(R) R_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} = -\kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

Dimana  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  dan  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$ , sehingga dapat ditulis

$$f'(R) R - 4 \frac{1}{2} f(R) = -\kappa T$$

$$f'(R) R - 2f(R) = -\kappa T \quad (3.9)$$

Ini adalah hubungan diferensial antara  $R$  dan  $T$ , berlawanan dengan hubungan aljabar dari relativitas umum, di mana  $R + T = 0$ . Persamaan (2.42) memberi informasi bahwa teori  $f(R)$  dapat memiliki lebih banyak solusi daripada teori klasik Einstein.

Persamaan (2.42) dengan  $T = 0$  tidak selalu berarti bahwa  $R = 0$ , atau bahwa  $R$  konstan. Dari relativitas umum diketahui bahwa skalar Ricci yang konstan membawa kita ke solusi simetris yang maksimal. Dalam kasus  $f(R)$ , untuk  $R = \text{konstan}$  dan  $T_{\mu\nu} = 0$ , persamaan (2.42) tereduksi menjadi persamaan (2.43)

$$f'(R)R - 2f(R) = 0$$

Selanjutnya untuk pemilihan fungsi  $f(R)$ , sebenarnya dapat dipilih secara sembarang fungsi dari skalar Ricci dan dapat diambil dari rangkaian ekspansinya. Tujuan diperkenalkan teori gravitasi  $f(R)$  memang untuk menyelesaikan beberapa masalah kosmologi yang tidak bisa dijelaskan oleh teori gravitasi Einstein. Banyak sekali variasi fungsi  $f(R)$ , yang masing-masing dapat menjelaskan beberapa fenomena kosmologi tapi tidak ada yang sempurna (Anh Ky, 2018). Seperti  $f(R) = R - 2\Lambda$  yang disulkan untuk memecahkan masalah energi gelap dengan menambah konstanta kosmologi pada lagrangiannya dan  $f(R) = R - \frac{\alpha}{R^n}$  yang juga diusulkan untuk energ gelap dalam formalisme metrik. Sedangkan pada kajian ini mengambil fungsi  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Fungsi  $f(R) = R + \alpha R^2$  pertama kali diusulkan oleh Starobinsky (1980) sebagai model inflasi alam semesta yang terkait anomali konformal dalam kuantum gravitasi. Sedangkan fungsi  $f(R) = \alpha R^2$  terinspirasi dari model Starobinsky, fungsi ini tidak termasuk model Starobinsky tapi termasuk model konstanta kosmologi (Anh Ky, 2019).

Suku gangguan  $\alpha$  pada fungsi  $f(R)$  biasanya bernilai sangat kecil tapi tidak selalu seperti itu. Pemilihan suku,  $h(R)$ , sangat penting untuk memenuhi kondisi tertentu. Misalnya pada kajian penelitian ini menggunakan  $R^2$  dengan orde-2

yang nilainya lebih besar dari nol. Jika seumpama orde yang dipilih lebih kecil dari 2 maka akan diperoleh hasil yang semakin kecil pula. tertentu.

### 3.2 Solusi Lubang Hitam Schwarzschild pada Teori Gravitasi $f(R)$

Solusi lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  merupakan perluasan dari solusi lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein. Schwarzschild memperoleh solusi untuk benda berbentuk simetri bola dan tidak bermuatan yang memiliki singularitas. Solusi untuk benda tak bermuatan biasanya juga disebut sebagai solusi vakum dari teori gravitasi Einstein dengan nilai tensor energi momentum  $T_{\mu\nu} = 0$ . Dalam kajian ini solusi yang dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan  $R_0$ . Persamaan medan Einstein menjadi

$$R_{\mu\nu}f'(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) = 0$$

atau

$$R_{\mu\nu}f'(R_0) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R_0) \quad (3.10)$$

sehingga  $R_{\mu\nu}$  dapat ditulis

$$R_{\mu\nu} = \frac{f(R_0)}{f'(R_0)}g_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

Persamaan medan (3.10) diatas dikalikan dengan  $g^{\mu\nu}$  akan menghasilkan

$$R_0f'(R_0) - 2f(R_0) = 0 \quad (3.12)$$

Kemudian akan didapatkan definisi dari  $R_0$  sebagai berikut

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R_0)}$$

sehingga  $R_{\mu\nu}$  menjadi

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0}{4} g_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

Dengan mempertimbangkan dalam kondisi vakumpersamaan 2.32 dengan  $\mu = \nu = 0$  dan  $\mu = \nu = 1$  akan didapatkan persamaan 3.14

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = R_1^1 - \frac{1}{2}R \quad (3.14)$$

dimana

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = -e^{-v} \left( \frac{v'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (3.15)$$

dan

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = e^{-v} \left( \frac{u'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (3.16)$$

Dari persamaan 3.14, 3.15 dan 3.16 didapatkan  $u' = -v'$  dan  $R_{22}$  memberikan

$$\begin{aligned} e^u(ru' + 1) - 1 &= \frac{R_0}{4}(-r^2) \\ e^u(ru' + 1) - 1 &= -\frac{R_0}{4}r^2 \\ e^uru' + e^u &= 1 - \frac{R_0}{4}r^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Kondisi diatas membuat persamaan (3.17) menjadi

$$\frac{d}{dr}(re^u) = 1 - \frac{R_0}{4}r^2 \quad (3.18)$$

dengan mengintegalkannya

$$\begin{aligned} \int dr (re^u) &= \int dr - \int \frac{R_0}{4}r^2 dr \\ re^u &= r - \frac{R_0}{12}r^3 + C \end{aligned} \quad (3.19)$$

dimana konstanta integrasinya adalah  $-2m$

$$\begin{aligned}
re^u &= r - \frac{R_0}{12}r^3 - 2m \\
e^u &= 1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Maka metrik Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  akan diberikan oleh

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 \\
&\quad - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

atau dapat disederhanakan menjadi persamaan 3.22

$$ds^2 = \frac{\Delta_r}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.22}$$

dengan

$$\Delta_r = r^2 \left(1 - \frac{R_0}{12}r^2\right) - 2mr \tag{3.23}$$

Persamaan ini dapat disebut sebagai solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$ , dimana kasus  $f(R)$  disini tanpa suku gangguan.

### 3.3 Solusi Lubang Hitam Schwarzschild pada Teori Gravitasi $f(R)$ dengan Metode Gangguan

Solusi Schwarzschild pada teori gravitasi  $f(R)$  dengan menggunakan metode gangguan merupakan solusi yang didapatkan dengan mensubstitusikan fungsi  $f(R)$  dengan suku gangguannya ke dalam persamaan medan yang telah dimodifikasi.

Dimana persamaan medannya menjadi (2.76)

$$[1 + \alpha h'(R)]R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + \alpha h(R))g_{\mu\nu} + [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] \alpha h'(R) = -\kappa T_{\mu\nu}$$

Jika ditulis dalam tensor campuran menjadi (2.79)

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R - \alpha \kappa h'(\kappa T) \left( T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T \right) - \frac{\alpha}{2} \delta_\nu^\mu h'(\kappa T) - \alpha \delta_\nu^\mu \square^E h'(\kappa T) \\ + \alpha \nabla^\mu \nabla_\nu^E h'(\kappa T) = -\kappa T_\nu^\mu$$

atau

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R = -\kappa T_\nu^\mu + \alpha \kappa h'(\kappa T) \left( T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T \right) + \frac{\alpha}{2} \delta_\nu^\mu h'(\kappa T) + \alpha \delta_\nu^\mu \square^E h'(\kappa T) \\ - \alpha \nabla^\mu \nabla_\nu^E h'(\kappa T)$$

Untuk mendapatkan solusi ini, maka harus dimulai dari metrik simetri bola (2.60).

Tensor Ricci  $R_{00}$  (2.69) diubah dalam bentuk tensor campuran

$$R_0^0 = g^{00} R_{00} = e^{-v} \left( \frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} \right) \quad (3.24)$$

Jika nilai  $\mu = \nu = 0$  serta dengan mengingat kembali hasil skalar kelengkungan  $R$  (2.73), maka persamaan (2.80) dapat ditulis ulang sebagai

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \left[ e^{-v} \left( \frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \left[ 2e^{-v} \left( \frac{u''}{2} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} + \frac{(u' - v')}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} \right] \\ = e^{-v} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{v'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (3.25)$$

dimana  $v' = \frac{\partial v}{\partial r}$ . Kemudian persamaan (3.25) dibandingkan dengan persamaan

(2.79), dengan nilai  $\mu = \nu = 0$

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = -\kappa T_0^0 + \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) + \alpha \square^E h'(\kappa T) - \alpha \nabla^0 \nabla_0^E h'(\kappa T) \\ + \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T) \quad (3.26)$$

dimana  $\nabla^i \nabla_i^E = \square^E - \nabla^0 \nabla_0^E$ . Kemudian persamaan (3.25) disubstitusikan, sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
e^{-v} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{v'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} &= -\kappa T_0^0 + \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) + \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) \\
&+ \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
e^{-v} \frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-v}) &= \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) \\
&- \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Jika  $v = -\ln \left[ 1 + \frac{C}{r} \right]$  maka akan didapatkan

$$-\frac{C'}{r^2} = \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) - \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T) \tag{3.29}$$

Persamaan diatas diintegrasikan maka didapatkan

$$\begin{aligned}
C &= - \int_0^r \left[ \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) \right. \\
&\quad \left. - \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T) \right] r'^2 dr'
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Kemudian  $C$  substitusi

$$\begin{aligned}
v &= - \ln \left\{ 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \left[ \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T) \right] r'^2 dr' \right\}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Sekarang dengan mempertimbangkan solusi dalam kondisi vakum untuk benda masif dengan radius  $R_0$ . Karena mempertimbangkan solusi dalam kondisi vakum, maka dapat mengabaikan tekanan. Ini berarti bahwa tensor  $T$  memiliki  $T_0^0$  sebagai satu-satunya komponen bukan nol, dan Persamaan (3.31) menjadi

$$\begin{aligned}
v &= -\ln \left\{ 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \left[ \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T_0^0) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha \kappa \left( T_0^0 - \frac{1}{2} T_0^0 \right) h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \\
v &= -\ln \left\{ 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \left[ \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T_0^0) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Integral pertama persamaan (3.32) dengan  $T_0^0$  dalam kondisi vakum dan dengan batas 0 sampai  $R_0$  akan menghasilkan

$$\int_0^{R_0} \kappa T_0^0 r'^2 dr' = \frac{\kappa M c^2}{4\pi} \tag{3.33}$$

Dan dengan mensubstitusikan definisi  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  pada ruas kanan maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^{R_0} \kappa T_0^0 r'^2 dr' &= \frac{8\pi G M c^2}{c^4 4\pi} \\
\int_0^{R_0} \kappa T_0^0 r'^2 dr' &= \frac{2GM}{c^2} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.32) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
v &= -\ln \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.33)  $T_0^0$  akan didefinisikan sebagai berikut

$$\int_0^{R_0} \kappa T_0^0 r'^2 dr' = \frac{\kappa M c^2}{4\pi}$$

$$\kappa T_0^0 \frac{R_0^3}{3} = \frac{\kappa M c^2}{4\pi}$$

Konstanta  $\kappa$  pada kedua ruas dapat saling menghilangkan sehingga definisi  $T_0^0$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} T_0^0 \frac{R_0^3}{3} &= \frac{M c^2}{4\pi} \\ T_0^0 &= \frac{M c^2}{\frac{4\pi}{3} R_0^3} \end{aligned} \quad (3.36)$$

dimana  $M$  adalah massa benda masif. Untuk mencari  $M$  digunakan  $\rho = \frac{M}{V}$  sehingga  $M = V \times \rho$ . Karena benda masif berbentuk simetri bola maka  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  dengan  $r = R_0$ , sehingga didapatkan

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \times \rho \quad (3.37)$$

Kemudian  $u$  dalam  $g_{00}$  dihitung. Karena  $u = -v$ , maka  $u$  dapat ditulis

$$\begin{aligned} u = \ln \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right. \right. \\ \left. \left. + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Kesimpulannya, dengan menggunakan bentuk lagrangian  $\mathcal{L}_G = f(R) = R + \alpha h(R)$  dan dengan mensubstitusikan  $u$  dan  $-v$  pada metrik simetri bola, maka  $g_{00}$ ,  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  dan  $g_{33}$  untuk solusi perturbasi (gangguan) pada kondisi vakum dapat ditulis

$$g_{00} = e^u$$

$$g_{00} = e^{\ln\left\{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \quad (3.39)$$

$$g_{11} = e^{-v}$$

$$g_{11} = e^{-\ln\left\{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}}$$

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}^{-1} \quad (3.40)$$

$$g_{22} = -r^2 \quad (3.41)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (3.42)$$

Dengan  $h'(\kappa T_0^0) = \frac{\partial h(\kappa T_0^0)}{\partial (\kappa T_0^0)}$  dan  $m = \frac{GM}{c^2}$ . Kemudian persamaan 3.39-3.42

disubstitusikan ke persamaan 2.60 maka metriknya diberikan oleh

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right) dt^2$$

$$- \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right)^{-1} dr^2$$

$$- r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.43)$$

Metrik garis pada persamaan (3.43) ini dapat disebut sebagai solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  dengan metode gangguan. Selanjutnya persamaan (3.43)

akan digunakan untuk mendapatkan solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  dalam dua kasus khusus yaitu  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$ .

### 3.3.1 Solusi untuk Kasus $f(R) = \alpha R^2$

Kasus khusus pertama yang akan dikaji yaitu  $f(R) = \alpha R^2$ . Dengan mengikuti persamaan (2.75) maka akan diketahui suku gangguan  $\alpha h(R) = R^2 - R$  dan  $h(R) = \frac{R^2 - R}{\alpha}$  sehingga jika diturunkan satu kali terhadap  $R$  akan menghasilkan

$$\alpha h'(R) = 2\alpha R - 1 \text{ dan } h'(R) = 2R - \frac{1}{\alpha}$$

Kemudian disubstitusi ke persamaan 3.39 dan persamaan 3.40

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R^2 2R + \nabla^i \nabla_i 2R \right] r^2 dr$$

dan

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}^{-1}$$

Karena solusi yang akan dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan vakum  $R = R_0$  untuk sebuah objek bermassa masif, sehingga  $\nabla^i \nabla_i \left( \frac{2R_0 - 1}{\alpha} \right)$  bernilai nol,  $g_{00}$  dapat ditulis

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} \left( R_0^2 - \frac{R_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R_0 \left( 2R_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] r^2 dr$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( R_0^2 - \frac{R_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R_0 \left( 2R_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \frac{r^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha r^2}{6} \left( R_0^2 - \frac{R_0}{\alpha} \right) + \frac{\alpha R_0 r^2}{6} \left( 2R_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \\
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} - \frac{R_0 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{3} - \frac{R_0 r^2}{6} \\
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Kemudian  $g_{11}$  diberikan oleh

$$\begin{aligned}
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} \left( R_0^2 - \frac{R_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R_0 \left( 2R_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] r^2 dr \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( R_0^2 - \frac{R_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R_0 \left( 2R_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \frac{r^3}{3} \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha r^2}{6} \left( R_0^2 - \frac{R_0}{\alpha} \right) + \frac{\alpha R_0 r^2}{6} \left( 2R_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} - \frac{R_0 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{3} - \frac{R_0 r^2}{6} \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Untuk  $g_{22}$  dan  $g_{33}$  yaitu

$$g_{22} = -r^2 \tag{3.46}$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \tag{3.47}$$

Keempat persamaan diatas disubtitusikan ke persamaan (2.60) akan memberi metrik sebagai berikut

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) dt^2 \\
& - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right)^{-1} dr^2 \\
& - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Persamaan (3.48) ini dapat disebut sebagai solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  dengan  $f(R) = \alpha R^2$ . Berbeda dari solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein, pada persamaan ini didapatkan suku tambahan yaitu,  $\frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)$ . Seperti halnya terdapat suku tambahan  $\frac{Q^2}{r^2}$  pada solusi lubang hitam Reisner-Nordstrom, dengan adanya suku  $\frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)$  ini maka akan ada konsekuensi tersendiri untuk penerapan dan pengaplikasiannya dipembahasan selanjutnya.

Dari persamaan (3.48) dapat digunakan untuk mencari yang sebanyak 64 komponen. Beberapa komponen simbol Christoffel yang tidak bernilai nol yaitu:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \\
\Gamma_{22}^1 &= -r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \\
\Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Simbol Christoffel diatas akan digunakan untuk menghitung lintasan geodesik untuk solusi kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dipembahasan selanjutnya.

### 3.3.2 Solusi untuk Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$

Kasus khusus kedua yang akan dikaji yaitu  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Dengan mengikuti persamaan (2.75) maka akan diketahui  $h(R) = R^2$  sehingga jika diturunkan satu kali terhadap R akan menghasilkan

$$h'(R) = 2R$$

Kemudian disubstitusi ke persamaan 3.39 dan persamaan 3.40

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R^2 2R + \nabla^i \nabla_i 2R \right] r^2 dr$$

dan

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}^{-1}$$

Karena solusi yang akan dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan vakum  $R = R_0$  untuk sebuah objek bermassa masif, sehingga  $\nabla^i \nabla_i 2R_0$  bernilai nol,  $g_{00}$  dapat ditulis

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} R_0^2 + \frac{1}{2} R_0^2 2R_0 \right] r^2 dr \\
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{2} R_0^2 + R_0^3 \right] \frac{r^3}{3} \\
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^3 r^2}{3} \\
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2 + 2\alpha R_0^3 r^2}{6} \\
g_{00} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Kemudian  $g_{11}$  diberikan oleh

$$\begin{aligned}
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} R_0^2 + \frac{1}{2} R_0^2 2R_0 \right] r^2 dr \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{2} R_0^2 + R_0^3 \right] \frac{r^3}{3} \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^3 r^2}{3} \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2 + 2\alpha R_0^3 r^2}{6} \right\}^{-1} \\
g_{11} &= - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right\}^{-1} \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Untuk  $g_{22}$  dan  $g_{33}$  yaitu

$$g_{22} = -r^2 \tag{3.52}$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \tag{3.53}$$

Keempat persamaan diatas disubstitusikan ke persamaan (2.60) akan memberi metrik sebagai berikut

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right) dt^2 \\
& - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right)^{-1} dr^2 \\
& - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Persamaan (3.48) ini dapat disebut sebagai solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  dengan  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Berbeda dari solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein, pada persamaan ini ada suku tambahan yaitu,  $\frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$  pada  $g_{00}$  dan  $g_{11}$ . Seperti halnya terdapat suku tambahan  $\frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)$  pada solusi kasus  $f(R) = \alpha R^2$ , dengan adanya suku  $\frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$  ini maka akan ada konsekuensi tersendiri untuk penerapan dan pengaplikasiannya.

Dari persamaan (3.59) dapat digunakan untuk mencari yang sebanyak 64 komponen. Beberapa komponen simbol Christoffel yang tidak bernilai nol yaitu:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \\
\Gamma_{22}^1 &= -r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \\
\Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \tag{3.55}$$

Beberapa hasil simbol Christoffel diatas berbeda dengan simbol Christoffel dari solusi lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein, hal ini adalah salah satu konsekuensi matematis dari hasil  $ds^2$  atau metrik yang terdapat suku tambahan berupa  $\frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$ .

Solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  dengan fungsi  $f(R)$  tanpa suku gangguan ditunjukkan oleh persamaan 3.21, sedangkan solusi Schwarzschild dengan metode gangguan untuk kasus umum diberikan oleh persamaan 3.43. Pada kasus khusus  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$ , solusinya diberikan oleh persamaan 3.48 dan persamaan 3.54. Kemudian hasil ini diterapkan untuk mendapatkan implikasi fisisnya, yang berupa singularitas dan lintasan geodesiknya.

**BAB IV**

**SINGULARITAS DAN LINTASAN GEODESIK LUBANG HITAM**

**SCHWARZSCHILD DALAM TEORI GRAVITASI  $f(R)$**

**4.1 Singularitas Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi  $f(R)$**

Lubang hitam adalah wilayah ruang-waktu dimana tidak ada apa pun, bahkan cahaya, yang dapat melarikan diri. Ciri khas lubang hitam adalah gravitasinya yang begitu kuat sehingga seseorang harus bergerak lebih cepat daripada cahaya untuk menghindari tarikannya. Lubang hitam secara umum mengandung singularitas ruang-waktu di pusatnya, dengan demikian tidak dapat sepenuhnya memahami lubang hitam tanpa juga memahami sifat singularitas.

Singularitas ruang-waktu adalah gangguan dalam ruang-waktu, baik dalam geometrinya atau dalam beberapa struktur fisik dasar lainnya. Daerah singularitas dalam ruang-waktu didefinisikan sebagai daerah dimana hukum-hukum fisika menjadi rusak dan tidak lagi berlaku. Hal ini disebabkan oleh adanya beberapa parameter fisis yang nilainya menuju ekstrim dan meledak, seperti massa, rapat massa dan kelengkungan ruang-waktu. Singularitas dalam metrik ruang-waktu Schwarzschild sangat terkait dengan munculnya cakrawala peristiwa (*event horizon*). Cakrawala peristiwa dapat disebut pula sebagai jari-jari Schwarzschild. Semua pengamatan yang terjadi didalam cakrawala peristiwa tersembunyi dari pengamat diluar area. Area ini adalah batas peristiwa yang dapat diamati atau dapat disebut permukaan *infinitered-shift*, sebab cahaya yang tersedot oleh lubang hitam akan mengalami pergeseran merah secara terus-menerus karena melawan gravitasi.

Singularitas ada dua macam, yaitu singularitas nyata dan singularitas semu. Daerah singularitas tidak dapat ditentukan dari medan tensor metriknya secara langsung, karena medan tensor metrik adalah besaran yang bergantung pada tata-koordinat atau tidak invarian. Singularitas yang didapatkan dari medan tensor bisa jadi bukan singularitas nyata, namun hanya singularitas semu saja.

Singularitas metrik Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein terkait dengan komponen  $g_{11}$  yang bernilai tak hingga saat  $r = 2m$ . Jika ada sebuah partikel jatuh secara radial menuju jari-jari Schwarzschild, partikel akan mulai jatuh saat  $r = R$  dengan  $\frac{dr}{dt} = 0$ . Dikarenakan metrik  $g_{11}$  dalam teori gravitasi  $f(R)$  memiliki bentuk yang sedikit berbeda dari metrik  $g_{11}$  dalam teori gravitasi Einstein, maka akan disamakan dengan singularitas pada solusi Reisner-Nordstrom yang mensyaratkan

$$\begin{aligned}\Delta_r &= 0 \\ r^2 + Q^2 - 2mr &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

dimana

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}\tag{4.2}$$

Untuk nilai  $r_+$  terkait dengan solusi di luar sumber massa (solusi eskterior) dan  $r_-$  terkait solusi di dalam sumber massa (solusi interior). Suku yang berisikan muatan  $Q$  disyaratkan  $Q^2 < M^2$ . Solusi Schwarzschild pada teori gravitasi  $f(R)$  kurang lebih memiliki tafsiran yang sama dengan solusi Reisner-Nordstrom dalam teori gravitasi Einstein.

Disini metrik yang digunakan hanya untuk koordinat waktu dan koordinat radial saja yaitu  $g_{00}$  dan  $g_{11}$ . Pada kasus  $f(R) = \alpha R^2$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^{-1} dr^2 \quad (4.3)$$

Karena singularitas akan terpenuhi ketika  $ds^2 = \infty$ , maka kedua komponen metrik harus bernilai tak hingga, dimana komponen metrik  $g_{00}$  pada kasus  $f(R) = \alpha R^2$  adalah

$$g_{00} = e^\mu = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)$$

$$\Delta_t = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \quad (4.4)$$

Untuk memenuhi singularitas maka  $\Delta_t$  harus sama dengan tak hingga

$$1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) = \infty \quad (4.5)$$

agar bernilai tak hingga maka nilai  $r$  harus bernilai nol

$$r = 0 \quad (4.6)$$

Kemudian untuk koordinat radialnya, komponen metrik  $g_{11}$  pada kasus  $f(R) = \alpha R^2$  adalah

$$g_{11} = e^{-\nu} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right\}^{-1}$$

Bagian yang berada didalam kurung akan disimbolkan  $\Delta_r$

$$\Delta_r = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \quad (4.7)$$

atau dengan dikalikan  $r$  maka dapat ditulis

$$\Delta_r = r - 2m + \frac{R_0 r^3}{6} (3\alpha R_0 - 2) \quad (4.8)$$

Pada bagian ini singularitas tak hingga akan terpenuhi saat  $\Delta_r = 0$  sehingga persamaan 4.8 menjadi seperti berikut

$$r - 2m + \frac{R_0 r^3}{6} (3\alpha R_0 - 2) = 0 \quad (4.9)$$

Solusi  $r$  dari persamaan diatas didapatkan

$$r_1 = - \frac{\sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{27 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}{3^{\frac{2}{3}} \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)} + \frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{27 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}} \quad (4.10)$$

$r_2$

$$= - \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{27 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}} + \frac{(1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{27 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)} \quad (4.11)$$

$r_3$

$$= - \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{27 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}} + \frac{(1 - i\sqrt{3}) \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{27 \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \left(\frac{R_0}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)} \quad (4.12)$$

Setelah didapatkan solusi  $r$  diatas, kemudian akan dibahas pula untuk kasus  $f(R)$  kedua yaitu  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Metrik yang digunakan hanya untuk koordinat waktu dan koordinat radial saja yaitu  $g_{00}$  dan  $g_{11}$ . Pada kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^{-1} dr^2 \quad (4.13)$$

Untuk memenuhi syarat singularitas dengan  $ds^2 = \infty$ , kedua komponen metrik harus bernilai tak hingga. Komponen metrik  $g_{00}$  pada kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  yaitu

$$g_{00} = e^\mu = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \\ \Delta_t = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \quad (4.14)$$

Karena  $\Delta_t = \infty$  singularitas akan terpenuhi saat

$$1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) = \infty \quad (4.15)$$

agar persamaan 4.15 bernilai tak hingga maka nilai  $r$  harus sama dengan nol

$$r = 0 \quad (4.16)$$

Kemudian untuk koordinat radialnya, dimana komponen metrik  $g_{11}$  pada kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  sebagai berikut

$$g_{11} = e^{-\nu} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right\}^{-1}$$

Bagian yang terdapat didalam kurung dapat disimbolkan sebagai  $\Delta_r$  sehingga dapat ditulis

$$\Delta_r = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \quad (4.17)$$

dan jika persamaan 4.17 dikalikan dengan  $r$ ,  $\Delta_r$  akan menjadi seperti persamaan dibawah ini

$$\Delta_r = r - 2mr + \frac{R_0 r^3}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \quad (4.18)$$

Untuk koordinat radial singularitas tak hingga terpenuhi saat  $\Delta_r = 0$

$$r - 2m + \frac{R_0 r^3}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) = 0 \quad (4.19)$$

Solusi dari persamaan diatas didapatkan tiga nilai r

$$\begin{aligned} r_1 &= -\sqrt[3]{\frac{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}{3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{(1 - i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}} \\ &+ \frac{(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} r_3 &= -\frac{(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}} \\ &+ \frac{(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Hasil untuk metrik bagian radial dari kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$  diatas memiliki tiga solusi yaitu  $r_1$ ,  $r_2$  dan  $r_3$ . Dari ketiga solusi tersebut hanya  $r_1$  yang merupakan solusi real, sedangkan  $r_2$  dan  $r_3$  adalah solusi kompleks, dimana solusi kompleks tersebut memiliki komponen imajiner sehingga tidak memenuhi kriteria untuk jari-jari suatu benda. Jadi, hanya solusi  $r_1$  yang memenuhi kriteria

jari-jari suatu benda. Pada limit  $R_0 \rightarrow 0$ ,  $r$  akan kembali menjadi jari-jari Schwarzschild biasa.

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} r_2 = 2m \quad (4.23)$$

Disini kehadiran suku  $R_0$  sama seperti kehadiran suku  $Q^2$  dalam solusi Reisner-Nordstrom yang mengkoreksi singularitas  $r = 2m$ .

Sebagaimana yang telah dijelaskan diatas, lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein memiliki dua singularitas, yaitu  $r = 0$  dan  $r = 2m$ . Singularitas  $r = 0$  diartikan sebagai daerah sebaran massa yang terpusat pada satu titik yang akhirnya menuju batas maksimal. Sedangkan singularitas  $r = 2m$ , diartikan sebagai jari-jari lubang hitam Schwarzschild, dimana itu adalah daerah yang tersembunyi dari pengamat.

Singularitas dari suatu ruang-waktu tertentu, dapat dilihat dari metrik yang digunakan, seperti halnya pada kajian ini yang menggunakan metrik Schwarzschild yang telah dimodifikasi oleh teori gravitasi  $f(R)$ . Hasil yang didapatkan pada perhitungan diatas, dengan menggunakan komponen metrik untuk koordinat waktu dan koordinal radial diketahui bahwa terdapat titik yang bernilai  $r = 0$ , yang dengan ini dapat diartikan bahwa di titik inilah diduga terjadi singularitas tempat berpusatnya massa lubang hitam. Untuk  $r_1$  pada persamaan 4.10 dan persamaan 4.20 dapat diartikan sebagai jari-jari lubang hitam Schwarzschild yang metriknya telah dimodifikasi oleh teori gravitasi  $f(R)$ . Oleh karena itu, singularitas menentukan ukuran dari sebuah lubang hitam. Singularitas juga sangat terkait dengan *event horizon*, yang berarti bahwa pada jarak  $r_1$  dari pusat lubang hitam semua yang ada di dalam lubang hitam tidak dapat terlihat oleh pengamat.

Kemudian untuk mengetahui dinamika partikel di sekitar area singularitas, dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan geodesik yang selanjutnya akan dikaji.

#### 4.2 Lintasan Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi $f(R)$

Suatu sumber masif akan menghasilkan kelengkungan ruang-waktu dan partikel disekelilingnya bergerak dengan mengikuti kelengkungan ruang tersebut. Oleh karena itu, lintasan yang ditempuh oleh partikel uji adalah lintasan terpendek yang dimungkinkan dalam ruang-waktu yang melengkung.

Ditinjau dalam suatu ruang terdapat dua titik, misal titik A dan B. Untuk mendapatkan panjang geodesik ini maka variasi  $\delta x^\mu$  harus bernilai nol.

$$\delta x^\mu(s_A) = \delta x^\mu(s_B) = 0 \quad (4.24)$$

Lagrangian didefinisikan sebagai fungsi dari koordinat dan turunan pertamanya terhadap  $s$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \quad (4.25)$$

dan integral aksinya menjadi

$$I = \int_{s_A}^{s_B} \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) ds \quad (4.26)$$

Agar panjang kurva stationer, maka variasi integral di atas harus bernilai nol

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \delta \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) ds = 0 \quad (4.27)$$

dengan

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu + \delta x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds} + \delta \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) - \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \quad (4.28)$$

Suku pertama pada persamaan (4.30) diekspansi dalam deret Taylor dengan mengambil suku ke-0 dan ke-1, kemudian disubstitusi ke persamaan (4.29)

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right] \delta x^\mu ds = 0 \quad (4.29)$$

Maka didapatkan persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.30)$$

Dari persamaan metrik akan didapatkan

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.31)$$

$$dl = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds \quad (4.32)$$

Panjang kurva stationer adalah

$$I = l(s) = \int dl = \int \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) jika dibandingkan dengan persamaan (4.32) akan didapatkan

Lagrangian yaitu

$$\mathcal{L} = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

Suku pertama persamaan (4.30) dapat diperoleh dari persamaan (4.34)

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\lambda}{ds} \right)} \right) = g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (4.35)$$

Dan suku kedua persamaan (4.32)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \quad (4.36)$$

Persamaan geodesik dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (4.37)$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan geodesik, yang merupakan persamaan gerak dalam ruang lengkung dan dapat digunakan untuk menjabarkan gerak jatuh bebas suatu partikel dalam ruang bermetrik. Pada ruang-waktu datar (Minkowski), metrik akan bernilai konstan yang menyebabkan simbol Christoffel bernilai nol, sehingga akan diperoleh garis lurus.

Selanjutnya persamaan geodesik ini digunakan untuk mendapatkan komponen-komponen persamaan gerak dari masing-masing arah koordinat  $(t, r, \theta, \phi)$ . Sehingga, akan diperoleh kecepatan dan percepatan di koordinat radial untuk geodesic *timelike* dari solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  untuk dua kasus khusus yaitu  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$ .

#### 4.2.1 Lintasan Geodesik untuk Kasus $f(R) = \alpha R^2$

Solusi lubang hitam Schwarzschild untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  telah didapatkan dipembahasan bab yang lalu, yaitu pada persamaan 3.48

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

yang dari persamaan 3.48 akan didapatkan 13 simbol Christoffel yang tidak bernilai nol di persamaan 3.49. Karena besar kecepatan partikel pada lintasan geodesik adalah konstan, sehingga  $s$  dapat diambil waktu sesungguhnya  $\tau$ . Selanjutnya akan dihitung persamaan geodesik untuk  $\rho = 0$ , dimana 0 adalah indeks untuk waktu.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0\end{aligned}\quad (4.38)$$

Karena ada dua simbol Christoffel yang tidak bernilai nol dengan  $\rho = 0$  yaitu  $\Gamma_{01}^0$  dan  $\Gamma_{10}^0$ , maka kedua simbol Christoffel ini disubstitusikan sehingga persamaan 4.38 menjadi

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0 \quad (4.39)$$

Kemudian komponen  $\Gamma_{01}^0$  dan  $\Gamma_{10}^0$  disubstitusikan ke persamaan 4.39

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \\ + \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0\end{aligned}\quad (4.40)$$

Suku kedua dan ketiga dapat dijumlahkan, dan hasil penjumlahan tersebut dipindah ke ruas kanan

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 t}{d\tau^2} &= - \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}\end{aligned}$$

Pada kedua ruas terdapat  $d\tau$  yang dapat saling menghilangkan untuk menyederhanakan bentuk persamaan diatas dan memberi persamaan dibawah ini

$$d^2 t = - \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} dt \frac{dr}{d\tau} \quad (4.41)$$

Karena  $d^2t$  dapat diganti dengan simbol  $\ddot{t}$  maka persamaannya menjadi sebagai berikut

$$\ddot{t} = - \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \dot{t} \dot{r} \quad (4.42)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan  $\dot{t}$ , persamaan 4.41 digunakan kembali

$$d^2t = - \left( \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right) dr dt$$

Kedua ruas dari persamaan 4.41 dikalikan dengan  $\frac{1}{dt}$ , kemudian diintegral

$$\int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}} \frac{1}{\dot{t}} d\dot{t} = - \int_{r_0}^r \left( \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right) dr \quad (4.43)$$

Dengan syarat batas ruas kiri  $\dot{t}_0 - \dot{t}$  dan syarat batas ruas kanan adalah  $r_0 - r$ , hasil integral dari persamaan 4.43 yaitu

$$\begin{aligned} \ln \dot{t} - \ln \dot{t}_0 &= - \ln \left( \left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right| \right) \\ &+ \ln \left( \left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right| \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Karena salah satu sifat logaritma natural yaitu  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ , maka persamaan 4.44 menjadi

$$\begin{aligned} \ln \frac{\dot{t}}{\dot{t}_0} &= \ln \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|} \right) \\ \frac{\dot{t}}{\dot{t}_0} &= \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dengan memindahkan  $\dot{t}_0$  maka persamaan 4.45 akan menjadi seperti berikut

$$\dot{t} = \dot{t}_0 \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|} \right) \quad (4.46)$$

Persamaan 4.46 ini adalah  $\dot{t}$  sebagai persamaan gerak untuk koordinat waktu, yang nantinya akan menjadi salah satu komponen penyusun persamaan gerak untuk koordinat radial. Setelah didapatkan  $\dot{t}$ , kemudian akan dihitung pula persamaan geodesik untuk  $\rho = 1$ , dimana 1 adalah indeks untuk bagian radial  $r$ .

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^1 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Karena ada empat simbol Christoffel dengan  $\rho = 1$ , maka persamaan 4.47 menjadi

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} + \Gamma_{33}^1 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} = 0 \quad (4.48)$$

pada persamaan ini ada empat simbol Christoffel tidak bernilai nol yang disubstitusikan yaitu  $\Gamma_{00}^1$ ,  $\Gamma_{11}^1$ ,  $\Gamma_{22}^1$  dan  $\Gamma_{33}^1$ , persamaan 4.48 ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \\ - \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \\ - r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \\ - r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (4.49) \end{aligned}$$

Persamaan 4.49 dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\
& - r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \\
& - r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0 \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Kemudian selain suku  $\frac{d^2r}{d\tau^2}$ , suku yang lain dipindahkan ke ruas kanan

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\tau^2} &= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \\
& + r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Jika koordinat ekuatornya digunakan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  maka  $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\tau^2} = & -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
& + \left. \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Penyebut  $d\tau$  dikedua ruas dapat saling menghilangkan

$$\begin{aligned}
d^2r = & -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] (dt)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] (dr)^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] (d\phi)^2
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Sehingga didapatkan nilai  $\ddot{r}$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} = & -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] (\dot{t})^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] (\dot{r})^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] (\dot{\phi})^2
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Selanjutnya akan dihitung persamaan geodesik untuk  $\rho = 2$ , dimana  $\theta$  adalah indeks untuk bidang ekuator  $\theta$ .

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 x^2}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (4.55)$$

Karena ada tiga simbol Christoffel dengan  $\rho = 2$  yang tidak bernilai nol maka persamaan 4.55 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^2}{d\tau^2} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} + \Gamma_{21}^2 \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Gamma_{12}^2 \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma_{21}^2 \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{33}^2 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Nilai  $\Gamma_{12}^2$ ,  $\Gamma_{21}^2$  dan  $\Gamma_{33}^2$  disubstitusikan, persamaan 4.56 menjadi

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Jika disederhanakan menjadi

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (4.57)$$

Persamaan 4.57 dapat ditulis ulang dengan memindahkan suku selain  $\frac{d^2 \theta}{d\tau^2}$  ke ruas kanan

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (4.58)$$

Suku penyebut  $d\tau$  dikedua ruas dapat saling menghilangkan

$$d^2 \theta = -\frac{2}{r} dr d\theta + \sin \theta \cos \theta (d\phi)^2 \quad (4.59)$$

Kemudian didapatkan  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} + \sin \theta \cos \theta (\dot{\phi})^2 \quad (4.60)$$

Karena solusi Schwarzschild memenuhi sifat simetri bola maka bebas untuk memilih koordinat sedemikian rupa sehingga gerak partikel pada bidang ekuator dan dengan pemilihan koordinat yang tepat akan dapat menyederhanakan

persamaan sehingga disini akan dikaji dengan menggunakan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , dan  $\ddot{\theta}$  diberikan oleh

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \sin\theta \cos\theta (\dot{\phi})^2 = 0 \quad (4.61)$$

Persamaan geodesik untuk  $\rho = 3$  juga akan dihitung, dengan 3 adalah indeks untuk  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^3}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^3 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Simbol Christoffel dengan  $\rho = 3$  yaitu  $\Gamma_{13}^3$ ,  $\Gamma_{23}^3$ ,  $\Gamma_{31}^3$ , dan  $\Gamma_{32}^3$ , persamaan 4.62 menjadi

$$\frac{d^2 x^3}{d\tau^2} + \Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma_{31}^3 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{32}^3 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} = 0 \quad (4.63)$$

Nilai  $\Gamma_{13}^3$ ,  $\Gamma_{23}^3$ ,  $\Gamma_{31}^3$ , dan  $\Gamma_{32}^3$  disubstitusikan ke persamaan 4.63

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \cot\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad (4.64)$$

Jika suku kedua dan keempat dijumlahkan maka bentuk persamaan diatas menjadi lebih sederhana seperti berikut

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (4.65)$$

Kemudian suku kedua dan ketiga dipindahkan ke ruas kanan

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4.66)$$

Suku  $d\tau$  dikedua ruas saling menghilangkan

$$d^2 \phi = -\frac{2}{r} dr d\phi - 2 \cot\theta d\theta d\phi \quad (4.67)$$

dan didapatkan  $\ddot{\phi}$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} - 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (4.68)$$

Untuk mendapatkan kecepatan dengan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dan nilai  $\cot \frac{\pi}{2} = 0$  maka persamaan

4.70 menjadi

$$d^2\phi = -\frac{2}{r} dr d\phi \quad (4.69)$$

Kedua ruas dikali  $\frac{1}{d\phi}$

$$\frac{1}{d\phi} d^2\phi = -\frac{2}{r} dr \quad (4.70)$$

dan kemudian integralkan

$$\begin{aligned} \int_{d\phi_0}^{d\phi} \frac{1}{d\phi} d^2\phi &= - \int_{r_0}^r \frac{2}{r} dr \\ \ln \frac{d\phi}{d\phi_0} &= -2 \ln \frac{r}{r_0} \\ \ln \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} &= -2 \ln \frac{r}{r_0} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Hasil eksponensial dari persamaan 4.71 yaitu

$$r^2 \dot{\phi} = r_0^2 \dot{\phi}_0 \equiv L \quad (4.72)$$

L adalah momentum sudut per satuan massa. Sehingga dapat ditulis

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (4.73)$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk mendapatkan  $\dot{r}$ . Dengan mengacu pada persamaan 3.48 yaitu metrik Schwarzschild untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  maka persamaan tersebut akan diturunkan terhadap  $\tau$ . Karena ada tiga macam penggalan atau segmen  $ds^2$  dalam ruang-waktu, yaitu segmen *timelike* ( $ds^2 < 0$ ) yang merupakan trayektori dari partikel biasa, seperti elektron, proton dan neutron, segmen *lightlike* ( $ds^2 = 0$ ) yang hanya dilewati oleh cahaya dan segmen

*spacelike* ( $ds^2 > 0$ ) yang dilewati oleh benda yang bergerak melebihi kecepatan cahaya, maka disini akan digunakan  $ds^2 = -1$ , dimana  $ds^2 = -1$  memenuhi segment *timelike* karena  $ds^2 < 0$ , dengan begitu persamaan 3.48 dapat ditulis kembali menjadi seperti persamaan dibawah

$$\begin{aligned}
-1 &= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\
&\quad - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \\
&\quad - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, karena  $\theta = \frac{\pi}{2}$  maka  $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned}
-1 &= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) (\dot{t})^2 \\
&\quad - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^{-1} (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\phi})^2
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Kemudian komponen-komponen yang didapatkan pada persamaan geodesic yaitu  $\dot{t}$ ,  $\dot{\theta}$  dan  $\dot{\phi}$  disubstitusikan ke persamaan 4.76

$$\begin{aligned}
-1 &= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) \\
&\quad \left(\dot{t}_0 \left(\frac{\left|1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right|}{\left|1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right|}\right)\right)^2 \\
&\quad - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^{-1} (\dot{r})^2 - r^2 \left(\frac{L}{r^2}\right)^2
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Dari persamaan 4.75 akan didapatkan persamaan 4.76 berikut

$$\begin{aligned}
(\dot{r})^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) \\
&\quad + \dot{t}_0^2 \left(1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 \\
&\quad - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Untuk menghilangkan kuadrat pada  $(\dot{r})^2$  maka ruas kanan harus diakarkan

$$\begin{aligned}
&\dot{r} \\
&= \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right)^2 \dot{t}_0^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right)}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Untuk lebih menyederhanakan persamaan 4.78 akan dikenalkan vektor killing. Vektor killing adalah persamaan diferensial yang mencirikan sifat simetri dengan cara invarian. Cara mudah yang sering digunakan untuk mengidentifikasi vektor killing adalah dengan mempertimbangkan metrik yang dimasukkan dalam sistem koordinat sedemikian rupa sehingga komponen metrik tidak bergantung pada koordinat tertentu.

Ada beberapa hubungan antara persamaan Killing dan medan gravitasi. Suatu medan gravitasi dikatakan stasioner jika menerima medan *timelike* vektor killing. Sebagai perpanjangan, jika berhadapan dengan medan stasioner dan jika vektor killing adalah orthogonal ke hypersurfaces maka bidang tersebut dikatakan statis. Pada bagian lubang hitam 4D, geometri Schwarzschild memiliki kedua sifat ini (Newsome, 2018).

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$K_\mu = g_{\mu\nu} K^\nu$$

$$K_\mu = \left( \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right), 0, 0, 0 \right) \quad (4.79)$$

Diketahui definisi  $E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}$

$$\begin{aligned} E &= -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) \frac{dt}{d\tau} \\ &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) \dot{t} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Hal ini memungkinkan persamaan radial,  $\dot{r}$ , untuk dinyatakan dalam energi dan momentum sudut, sertamenghasilkan tiga persamaan diferensial orde pertama dari empat persamaan diferensial orde dua aslyaitupersamaan 4.46, 4.72 dan 4.81 dibawah. Sehingga  $\dot{r}$  dapat ditulis kembali

$$\dot{r} = \sqrt{-E_0^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right)} \quad (4.81)$$

Hasiltiga persamaan diferensial orde pertama dari empat persamaan diferensial orde dua  $\dot{t}$ ,  $\dot{r}$  dan  $\dot{\phi}$  disubtitusi ke persamaan 4.54 untuk menyelesaikan persamaan radial untuk percepatan  $\ddot{r}$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \dot{t}_0 \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right|} \right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \left( \sqrt{-E_0^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right)} \right)^2 \\ &\quad + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{L}{r^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.82)$$

Agar persamaan 4.82 terlihat lebih sederhana, maka operasi matematika yang ada didalamnya dapat dihitung

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] (-E_0^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \left( -E_0^2 \right. \\
&\quad \left. - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \right) \\
&\quad + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{L}{r^2} \right)^2 \\
\ddot{r} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \left[ -2E_0^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \right] \\
&\quad + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \left( \frac{L}{r^2} \right)^2
\end{aligned}$$

Kemudian didapatkan hasil penyederhanaan dari persamaan 4.82, percepatan radial  $\ddot{r}$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= -E_0^2 \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \\
&\quad + \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \frac{L^2}{r^3} \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Persamaan 4.81 dan persamaan 4.83 adalah kecepatan dan percepatan koordinat radial persamaan geodesik *timelike* untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$ . Hasil dari persamaan 4.81 dan persamaan 4.83 bersifat invarian yang artinya tidak akan ada perubahan hukum fisika dalam sistem jika diterapkan suatu fungsi transformasi.

Berdasarkan persamaan geodesik *timelike* untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  di atas terlihat bahwa hasil yang didapatkan berupa persamaan gerak yang dinyatakan

dalam energi ( $E_0$ ) dan momentum sudut ( $L$ ), dimana energi didapatkan dari komponen metrik untuk koordinat waktu ( $t$ ) dan momentum sudut didapatkan dari komponen metrik untuk koordinat ekuator ( $\phi$ ). Sehingga jika ada partikel yang melintasi sebuah lubang hitam selain dipengaruhi oleh kelengkungan ruang-waktu akibat lubang hitam juga dipengaruhi oleh energi dan momentum sudut. Selain itu, pada persamaan gerak lintasan geodesik yang berupa kecepatan dan percepatan, terdapat suku  $\frac{R_0 r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)$ , ini diakibatkan adanya modifikasi pada metrik Schwarzschild. Sehingga persamaan diatas merepresentasikan lintasan partikel yang melintas di sekitar lubang hitam dengan metrik yang telah dimodifikasi oleh teori gravitasi  $f(R)$  dimana  $f(R) = \alpha R^2$ .

#### 4.2.2 Lintasan Geodesik untuk Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$

Solusi lubang hitam Schwarzschild untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  yaitu pada persamaan 3.54

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

yang dari persamaan 3.54 akan didapatkan 13 simbol Christoffel yang tidak bernilai nol di persamaan 3.55. Karena besar kecepatan partikel pada lintasan geodesik adalah konstan, sehingga  $s$  dapat diambil waktu sesungguhnya  $\tau$ . Selanjutnya akan dihitung persamaan geodesik untuk  $\rho = 0$ , dimana 0 adalah indeks untuk waktu.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0\end{aligned}\quad (4.83)$$

Karena ada dua simbol Christoffel dengan  $\rho = 0$  yaitu  $\Gamma_{01}^0$  dan  $\Gamma_{10}^0$ , sehingga persamaan 4.83 menjadi

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0 \quad (4.84)$$

Kemudian  $\Gamma_{01}^0$  dan  $\Gamma_{10}^0$  disubstitusikan

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \\ + \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0\end{aligned}\quad (4.85)$$

Suku kedua dari persamaan 4.85 dipindah ke ruas kanan

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = - \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.86)$$

Penyebut  $d\tau$  pada ruas kanan dan kiri dapat saling menghilangkan dan memberi persamaan dibawah ini

$$d^2 t = - \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} dt \, dr$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\ddot{t} = - \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \dot{t} \dot{r} \quad (4.87)$$

Untuk mendapatkan  $\dot{t}$ , persamaan 4.87 digunakan kembali

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = - \left( \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right) \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau}$$

$$d^2 t = - \left( \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right) dr dt$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{1}{dt}$ , kemudian diintegral

$$\int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}} \frac{1}{\dot{t}} d\dot{t} = - \int_{r_0}^r \left( \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right) dr \quad (4.88)$$

Hasil integral dari persamaan 4.88 yaitu

$$\ln \dot{t} - \ln \dot{t}_0 = - \ln \left( \left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right| \right)$$

$$+ \ln \left( \left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right| \right) \quad (4.89)$$

Karena sifat logaritma natural  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ , persamaan 4.89 menjadi

$$\ln \frac{\dot{t}}{\dot{t}_0} = \ln \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|} \right)$$

$$\frac{\dot{t}}{\dot{t}_0} = \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|} \right) \quad (4.90)$$

Dengan memindahkan  $\dot{t}_0$  maka akan didapatkan

$$\dot{t} = \dot{t}_0 \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|} \right) \quad (4.91)$$

Setelahdidapatkant $\dot{t}$ , kemudian akan dihitung pula persamaan geodesik untuk  $\rho = 1$ , dimana 1 adalah indeks untuk bagian radial r

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^1 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

Karena ada empat simbol Christoffel dengan  $\rho = 1$ , maka persamaan 4.92 menjadi

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} + \Gamma_{33}^1 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} = 0 \quad (4.93)$$

Kemudian  $\Gamma_{00}^1, \Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1$  dan  $\Gamma_{33}^1$  disubstitusikan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \\ - \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \\ - r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \\ - r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$= 0$$

Jika disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
\left. + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
- \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\
- r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \\
- r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (4.95) \\
= 0
\end{aligned}$$

Kemudian selain suku  $\frac{d^2r}{d\tau^2}$ , dipindahkan ke ruas kanan

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
\left. + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\
+ r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \\
+ r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (4.96)
\end{aligned}$$

Jika bidang ekuatornya digunakan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  maka  $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{d\tau^2} = & -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
& + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \left. \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \tag{4.97}
\end{aligned}$$

Penyebut  $d\tau$  dikedua ruas dapat saling menghilangkan

$$\begin{aligned}
d^2r = & -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
& + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \left. \right] (dt)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] (dr)^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] (d\phi)^2 \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan nilai  $\ddot{r}$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} = & -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} \right. \\
& + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \left. \right] (\dot{t})^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] (\dot{r})^2 \\
& + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] (\dot{\phi})^2 \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dihitung persamaan geodesik untuk  $\rho = 2$ , dimana  $\rho$  adalah indeks untuk bidang ekuator  $\theta$ .

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^2}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0\end{aligned}\quad (4.100)$$

Karena ada tiga simbol Christoffel dengan  $\rho = 2$  yang tidak bernilai nol maka persamaan 4.100 menjadi

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^2}{d\tau^2} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} + \Gamma_{21}^2 \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Gamma_{12}^2 \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma_{21}^2 \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{33}^2 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} &= 0\end{aligned}\quad (4.101)$$

Nilai  $\Gamma_{12}^2$ ,  $\Gamma_{21}^2$  dan  $\Gamma_{33}^2$  disubstitusikan, persamaan 4.101 menjadi

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Jika disederhanakan menjadi

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0\quad (4.102)$$

Persamaan 4.102 dapat ditulis ulang dengan memindahkan suku selain  $\frac{d^2 \theta}{d\tau^2}$  ke ruas kanan

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2\quad (4.103)$$

Suku penyebut  $d\tau$  dikedua ruas dapat saling menghilangkan

$$d^2 \theta = -\frac{2}{r} dr d\theta + \sin \theta \cos \theta (d\phi)^2\quad (4.104)$$

Kemudian didapatkan  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \sin\theta \cos\theta (\dot{\phi})^2 \quad (4.105)$$

Untuk menyederhanakan persamaan maka dapat memilih koordinat ekuator  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Karena solusi Schwarzschild memenuhi sifat simetri bola maka bebas untuk memilih koordinat sedemikian rupa sehingga gerak partikel pada bidang ekuator dan dengan pemilihan koordinat yang tepat akan dapat menyederhanakan persamaan sehingga disini akan dikaji dengan menggunakan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , dan  $\ddot{\theta}$  diberikan oleh

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \sin\theta \cos\theta (\dot{\phi})^2 = 0 \quad (4.106)$$

Persamaan geodesik untuk  $\rho = 3$  juga akan dihitung, dengan 3 adalah indeks untuk  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^3}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^3 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.107)$$

Simbol Christoffel dengan  $\rho = 3$  yaitu  $\Gamma_{13}^3$ ,  $\Gamma_{23}^3$ ,  $\Gamma_{31}^3$ , dan  $\Gamma_{32}^3$ , persamaan 4.107 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^3}{d\tau^2} + \Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma_{31}^3 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma_{32}^3 \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau} \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Nilai  $\Gamma_{13}^3$ ,  $\Gamma_{23}^3$ ,  $\Gamma_{31}^3$ , dan  $\Gamma_{32}^3$  disubstitusikan ke persamaan 4.108

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \cot\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad (4.109)$$

Jika disederhanakan menjadi

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (4.110)$$

Kemudian suku kedua dan ketiga dipindahkan ke ruas kanan

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4.111)$$

Suku  $d\tau$  dikedua ruas saling menghilangkan

$$d^2\phi = -\frac{2}{r} dr d\phi - 2 \cot \theta d\theta d\phi \quad (4.112)$$

dan didapatkan  $\ddot{\phi}$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} - 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (4.113)$$

Untuk mendapatkan kecepatan dengan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dan nilai  $\cot \frac{\pi}{2} = 0$  maka persamaan

4.113 menjadi

$$d^2\phi = -\frac{2}{r} dr d\phi \quad (4.114)$$

Kedua ruas dikali  $\frac{1}{d\phi}$

$$\frac{1}{d\phi} d^2\phi = -\frac{2}{r} dr \quad (4.115)$$

dan kemudian integralkan

$$\int_{d\phi_0}^{d\phi} \frac{1}{d\phi} d^2\phi = - \int_{r_0}^r \frac{2}{r} dr$$

$$\ln \frac{d\phi}{d\phi_0} = -2 \ln \frac{r}{r_0}$$

$$\ln \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} = -2 \ln \frac{r}{r_0} \quad (4.116)$$

Hasil eksponensial dari persamaan 4.116 diatas adalah

$$r^2 \dot{\phi} = r_0^2 \dot{\phi}_0 \equiv L \quad (4.117)$$

L adalah momentum sudut per satuan massa. Sehingga dapat ditulis

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (4.118)$$

Jika metrik Schwarzschild untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  di atas diturunkan terhadap  $\tau$  dengan nilai  $ds^2 = -1$ , dimana  $ds^2 = -1$  disebut *timelike* seperti yang telah dijelaskan keterangan di atas. Persamaan 3.54 menjadi seperti berikut

$$\begin{aligned} -1 = & \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ & - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ & - r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.119)$$

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, karena  $\theta = \frac{\pi}{2}$  maka  $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned} -1 = & \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right) (\dot{t})^2 \\ & - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right)^{-1} (\dot{r})^2 \\ & - r^2 (\dot{\phi})^2 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Kemudian komponen-komponen yang didapatkan pada persamaan geodesic yaitu

$\dot{t}$ ,  $\dot{\theta}$  dan  $\dot{\phi}$  disubstitusikan ke persamaan 4.120

$$\begin{aligned} -1 = & \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right) \\ & \left( \dot{t}_0 \left( \frac{\left| 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|}{\left| 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right|} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

$$-\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^{-1} (\dot{r})^2 - r^2 \left(\frac{L}{r^2}\right)^2 \quad (4.121)$$

Dari persamaan 4.121 akan didapatkan persamaan 4.122 berikut ini

$$\begin{aligned} (\dot{r})^2 = & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \\ & + \dot{t}_0^2 \left(1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 \\ & - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (4.122)$$

Untuk menghilangkan kuadrat pada  $(\dot{r})^2$  maka ruas kanan harus diakarkan

$$\dot{r} = \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{R_0 r_0^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 \dot{t}_0^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right)} \quad (4.123)$$

Untuk lebih menyederhanakan persamaan 4.123 akan dikenalkan vektor killing.

Sama halnya dengan keterangan yang lalu, vektor killing adalah persamaan diferensial yang mencirikan sifat simetri dengan cara invarian. Dengan adanya vektor killing ini kecepatan dan percepatan untuk persamaan geodesic *timelike* dapat dinyatakan dalam energi E dan momentum sudut L.

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$K_\mu = g_{\mu\nu} K^\nu$$

$$K_\mu = \left( \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right), 0, 0, 0 \right) \quad (4.124)$$

Diketahui definisi  $E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}$

$$\begin{aligned}
E &= -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \frac{dt}{d\tau} \\
&= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \dot{t}
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Sehingga  $\dot{r}$  dapat ditulis kembali

$$\dot{r} = \sqrt{-E_0^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right)} \tag{4.126}$$

Persamaan geodesik menghasilkan tiga persamaan diferensial orde pertama dari empat persamaan diferensial orde dua asli yaitu  $\dot{t}$ ,  $\dot{r}$  dan  $\dot{\phi}$  yang kemudian disubstitusi ke persamaan 4.99 untuk menyelesaikan persamaan radial untuk percepatan  $\ddot{r}$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right] \left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right] \\
&\quad \left(\dot{t}_0 \left(\frac{\left|1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right|}{\left|1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right|}\right)\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}\right] \\
&\quad \left(\sqrt{-E_0^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right)}\right)^2 \\
&\quad + r \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right] \left(\frac{L}{r^2}\right)^2
\end{aligned} \tag{4.127}$$

Agar persamaan 4.127 terlihat lebih sederhana, maka operasi matematika yang ada didalamnya dapat dihitung

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}\right] (-E_0^2) + \frac{1}{2} \left[\frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}\right] \\
&\quad \left(-E_0^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right)\right) \\
&\quad + r \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right] \left(\frac{L}{r^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \left[ -2E_0^2 \right. \\ \left. - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \right] \\ + r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left( \frac{L}{r^2} \right)^2$$

Kemudian didapatkan didapatkan hasil penyederhanaan dari persamaan 4.127, percepatan radial  $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = -E_0^2 \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]} \right] \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \\ + \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \frac{L^2}{r^3} \quad (4.128)$$

Persamaan gerak lintasan geodesik diatas merepresentasikan gerak semua partikel yang melintas dalam ruang-waktu melengkung akibat medan gravitasi yang berasal dari lubang hitam Schwarzschild, dengan metrik yang telah dimodifikasi oleh  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Hal ini berarti bahwa jika ada partikel yang melintasi sebuah lubang hitam Schwarzschild dengan metrik tersebut, maka partikel tersebut akan bergerak dengan kecepatan dan percepatan seperti pada persamaan diatas.

Pada kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  didapatkan hal serupa dengan kasus  $f(R) = \alpha R^2$ , yakni persamaan gerak lintasan geodesik *timelike* yang berupa kecepatan dan percepatan untuk koordinat radial. Berdasarkan persamaan 4.126 dan persamaan 4.128 diatas, terlihat secara umum memiliki bentuk yang sama dengan kasus pertama yang dinyatakan dalam energi ( $E_0$ ) dan momentum sudut ( $L$ ).

Artinya, jika ada sebuah partikel melewati lubang hitam maka tidak hanya kelengkungan ruang-waktunya yang berpengaruh tapi juga energi dan momentum sudutnya. Kedua persamaan gerak pada kasus kedua juga bersifat invarian dimana transformasi tidak akan merubah hukum fisika pada sistem tersebut.

Meskipun secara umum memiliki bentuk yang sama, persamaan gerak untuk kasus kedua memiliki hasil yang berbeda, karena adanya suku  $\frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$ , dimana suku ini muncul akibat metrik Schwarzschild yang dimodifikasi. Berbeda dengan hasil geodesik dari metrik Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein tanpa modifikasi yang tidak memiliki suku  $R_0$ , kedua hasil persamaan gerak lintasan geodesik di atas memiliki suku  $R_0$ . Sebagaimana yang telah diketahui sebelumnya, bahwa suku  $R_0$  adalah suku yang mengoreksi metrik Schwarzschild. Selanjutnya, jika  $R_0 = 0$  maka persamaan gerak kedua kasus akan kembali menjadi persamaan gerak lintasan geodesik dari solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein.

### 4.3 Integrasi

Lubang hitam masih menjadi benda angkasa yang sangat menarik untuk dikaji secara teoritis dan banyak upaya pengamatan untuk mengetahui sifat, letak dan gambar lubang hitam. Terakhir kali para astronom di tim Event Horizon Telescope merilis gambar lubang hitam bernama Sagitarius A\* yang terletak di pusat galaksi Bima Sakti pada 12 Mei 2022. Terkait dengan ini, di Al-Quran tepatnya pada QS. At-Takwir ayat 16 terdapat istilah *Al-khunnas* yang artinya bersembunyi ditempat persembunyiannya. Ada sebuah pendapat mengatakan bahwa yang dimaksud *Al-khunnas* adalah lubang hitam karena sifatnya yang tersembunyi dari penglihatan

pengamat (Sani, 2014). Lubang hitam sendiri disebut hitam karena memang terlihat hitam sangat gelap, sehingga untuk mengetahui lokasinya harus melihat pergerakan bintang-bintang disekitarnya. Bintang-bintang disekitar lubang hitam memiliki lintasannya masing-masing. Untuk mengetahui lintasan tersebut dapat diperkirakan dengan menggunakan persamaan geodesik yang dikaji lebih lanjut. Tentang setiap benda memiliki jalur lintasannya masing-masing, ini difirmankan oleh Allah dalam QS. Yasiin (36): 40 berikut:

لَا الشَّمْسُ يَنْبَغِيهَا أَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا اللَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ وَكُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ

*“Tidaklah mungkin bagi matahari mengejar bulan dan malam pun tidak dapat mendahului siang. Masing-masing beredar pada garis edarnya”* (QS. Yasiin [36]: 40)

Semua benda di alam semesta selalu beredar mengikuti pola yang teratur dengan periode tertentu, tidak hanya matahari dan bulan. Selain itu, telah ditemukan susunan benda angkasa yang mirip dengan tata surya yang juga memiliki garis edar tertentu (Sani, 2014). Seperti halnya lubang hitam Sagitarius A\*, terdapat bintang-bintang berputar di sekitar objek gelap tersebut dengan kecepatan hingga sepertiga dari kecepatan cahaya. Bintang-bintang yang berputar disekitar lubang hitam juga memiliki lintasan atau orbitnya masing-masing.

Selain tentang lintasan atau orbit benda angkasa yang dalam teori relativitas umum terkait dengan geodesik, Al-Quran juga membahas tentang ukuran segala sesuatu yang tercipta di alam semesta termasuk ukuran lubang hitam. Hal ini di firmankan Allah dalam QS. Al-Qomar (54): 49 yang berbunyi

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

*“Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukurannya”* (QS. Al-Qomar [54]: 49)

Ukuran lubang hitam ditentukan oleh cakrawala peristiwanya. Cakrawala peristiwa (*event horizon*) adalah jarak dari pusat lubang hitam dimana apapun yang melewatinya tidak ada yang dapat melarikan diri. Para ilmuwan sebelumnya dapat menghitung bahwa lubang hitam Sagitarius A\* berdiameter 16 juta mil (26 juta kilometer).

Semua yang ada di alam semesta diciptakan dengan ukuran yang ideal dan memiliki fungsi tersendiri. Begitu pula dengan struktur dan susunan setiap benda dan makhluk hidup. Ukuran yang sangat sesuai inilah yang menciptakan interaksi antar benda di alam semesta akan seimbang dan saling melengkapi. Melihat ayat di atas, maka hal ini juga berlaku pada lubang hitam dan benda-benda yang ada disekitarnya. Struktur, susunan, fungsi dan jarak antar benda pun pasti sudah sesuai dengan ukuran yang telah ditentukan. Karena keragaman ini menciptakan adanya suatu keseimbangan dan memang tidak mungkin sesuatu diciptakan Allah tanpa tujuan tertentu.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Metrik Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  adalah perluasan dari metrik Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein yang menggambarkan sebuah benda masif yang tidak berotasi dan bermuatan. Metrik untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  ditunjukkan oleh persamaan 3.48 dan untuk kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  ditunjukkan oleh persamaan 3.54.
2. Singularitas yang didapatkan dari metrik Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$  untuk kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$  yaitu berupa singularitas  $r = 0$  sebagai titik berpusatnya massa lubang hitam dan singularitas  $r_1$  sebagai jari-jari lubang hitam Schwarzschild dengan metrik yang telah dimodifikasi oleh  $f(R) = \alpha R^2$  dan  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Dimana jari-jari tersebut terkait dengan ukuran lubang hitam. Sedangkan dari persamaan geodesik didapatkan persamaan gerak yang merepresentasikan gerak partikel atau benda di sekitar lubang hitam Schwarzschild dengan metrik yang telah dimodifikasi. Hal ini menunjukkan bahwa singularitas dan lintasan geodesik memiliki keterkaitan, dimana setiap benda masif seperti lubang hitam pasti memiliki singularitas tempat berpusatnya massa lubang hitam yang mengakibatkan adanya gravitasi yang sangat kuat sehingga dapat melengkungkan ruang-waktu. Akibat kelengkungan ruang-waktu ini, lintasan

dari sebuah partikel atau benda-benda disekitar lubang hitam akan melengkung pula mengikuti bentuk ruang-waktunya.

## **5.2 Saran**

Untuk selanjutnya, penelitian ini dapat dikembangkan dengan menggunakan fungsi  $f(R)$  yang lainnya, atau diterapkan untuk mendapatkan besaran-besaran lain terkait sifat dari lubang hitam, seperti sifat termodinamikanya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maraghi, Ahmad Mustafa. 1993. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi, Vol XXX*. Semarang: Taha Putra.
- Anh Ky, Nguyen, Pham Van Ky dan Nguyen Thi Hong Van. 2018. *Perturbative Solutions of the  $f(R)$ -theory of Gravity in a Central Gravitational Field and Some Applications*. Eur. Phys. J. C (2018) 78:539.
- Anh Ky, Nguyen, Pham Van Ky dan Nguyen Thi Hong Van. 2019. *Testing The  $f(R)$ -theory of Gravity*. ArXiv:1904.04013v1 [physics.gen-ph] 12 Mar 2019.
- Anugraha, Rinto. 2011. *Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Jurusan Fisika FMIPA UGM.
- Capozziello, S. dan M. De Laurentis. 2011. *Extended theories of gravity*. arXiv:1108.6266v2.
- Clifton, T., P.G. Ferreira, A. Padilla dan C. Skordis. 2011. *Modified Gravity and Cosmology*. arXiv:1106.2476v1.
- Cruz-Dombriz, A. dela, A. Dobado dan A. L. Maroto. 2008. *Evolution of density perturbations in  $f(R)$  theories of gravity*. Physical Review D 77, 123515.
- Cruz-Dombriz, A. dela, A. Dobado dan A. L. Maroto. 2009. *Comment on "Viability of singularity-free  $f(R)$  gravity without a cosmological constant"*. arXiv:0910.1441v1 [astro-ph.CO] 8 Oct 2009.
- Dunsby, Peter K. S., Emilio Elizalde, Rituparno Goswami, Sergei Odintsov dan Diego Saez-Gomez. 2010. *On the  $\Lambda$ CDM Universe in  $f(R)$  gravity*. arXiv: 1005.2205v3[gr-qc] 7 Juli 2010.
- Gautama, S. Eka. 2010. *Astronomi dan Astrofisika*. Penerbit Online Paradoks Softbook Publisher.
- Gautama, Sunkar. E. 2018. *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi 2.1*. Penerbit Online Paradoks Softbook Publisher.
- Hasyim, Aris Gunawan. 2010. *Kamus Terjemah al-Qur'ān: Khusus Kata-kata dalam al-Qur'ān*. Sidoarjo: Pesantren Terbuka Nur Al-Qur'ān.
- Irawan, Andika. 2016. *Kajian Waktu Kerr-Newman dalam Gravitasi Einstein*. Surabaya: Jurusan Fisika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Kementrian Agama RI. 2011. *Al-Qur'ān dan Tafsīrnya*. Jakarta: Widya Cahaya, 2011.

- Lawden, 1982. *Introduction to Tensor Calculus Relativity and Cosmology*. New York: Dover Publication.
- Munawwir, Ahmad Warson. 1997. *Kamus Munawwir Arab-Indonesia*. Surabaya: Pustaka Progresif, 1997.
- Newsome, Ian M. 2018. *Geodesic Structure in Schwarzschild Geometry with Extensions in Higher Dimensional Spacetimes*. Richmod: VCU Scholars Compass Virginia Commonwealth University.
- Nojiri, S. dan S. D. Odintsov. 2006. *Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy*. ECONF C0602061:06, 2006; Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.4:115-146 2007.
- Nojiri, S., S.D. Odintsov. 2011. *Unified cosmic history in modified gravity: from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models*. Phys.Rept.505:59-144.
- Nzioki, Anne Marie., Sante Carloni, Rituparno Goswami dan Peter K.S. Dunsby. 2010. *A new frame work for studying spherically symmetric static solutions in  $f(R)$  gravity*. arXiv:0908.3333v2 [gr-qc] 10 Feb 2010.
- Poisson, E. 2004. *A Relativist's Toolkit - The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press.
- Purwanto, Agus. 2015. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan.
- Romadani, A dan M. F. Rosyid. 2021. *Kruskal-Szekeres coordinates of spherically symmetric solutions in theories of gravity*. Journal of Physics: Conference Series 1816 (2021) 012030.
- Sebastiani, L. dan S. Zerbini. 2011. *Static Spherically Symmetric Solutions in  $F(R)$  Gravity*. arXiv:1012.5230v3 [gr-qc] 16 Feb 2011.
- Sani, Ridwan Abdullah. 2014. *Sains Berbasis Al-Quran*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Shihab, M.Quraish. 2016. *Tafsir Al-Mishbāh: pesan, kesan, dan keserasian Al-Qur'an, Jilid 15*. Tangerang: PT.Lentera Hati.
- Shojai, A. dan F. Shojai. 2011. *Some static spherically symmetric interior solutions of  $f(R)$  gravity*. arXiv:1109.2190v1 [gr-qc] 10 Sep 2011.
- Sotiriou, T.P. 2007. *Modified Action of Gravity: Theory and Phenomenology*, arXiv:0710.4438v1.

# LAMPIRAN

## LAMPIRAN A

### PEMBUKTIAN PERSAMAAN 2.45

Simbol Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (\text{A.1})$$

Variasi dari simbol Christoffel

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} \delta\{g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})\} \\ &= \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Kemudian simbol Christoffel dikalikan dengan  $g_{\rho\alpha}$

$$\begin{aligned} g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\lambda} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \\ g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sehingga

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \delta g^{\lambda\rho} g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (\text{A.4})$$

Hubungan antara turunan kovarian dan turunan biasa diberikan oleh

$$\nabla_{\mu} \delta g_{\nu\rho} = \delta g_{\nu\rho,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \delta g_{\nu\lambda}$$

$$\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\rho} = \delta g_{\rho\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \delta g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \delta g_{\rho\lambda}$$

$$\nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} \delta g_{\mu\lambda}$$

$$\delta g_{\nu\rho,\mu} = \nabla_{\mu} \delta g_{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \delta g_{\nu\lambda}$$

$$\delta g_{\rho\mu,\nu} = \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \delta g_{\lambda\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \delta g_{\rho\lambda}$$

$$\delta g_{\mu\nu,\rho} = \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \delta g_{\mu\lambda}$$

$$\begin{aligned} \delta g_{\nu\rho,\mu} + \delta g_{\rho\mu,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\rho} &= \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \delta g_{\lambda\mu} \\ &+ \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Variasi simbol Christoffel sekarang bisa dituliskan

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \delta g^{\lambda\rho} g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\rho}) \\ &= \delta g^{\lambda\rho} g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) + g^{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\rho} \\ &= \delta g^{\lambda\rho} g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + g^{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\rho} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \\ &= \delta (g_{\lambda\rho} g^{\lambda\rho}) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \\ \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Untuk mendapatkan turunan kovarian dari variasi tensor metrik kovarian digunakan hubungan berikut

$$\begin{aligned} \delta g_{\nu\rho} &= -g_{\nu\alpha} g_{\rho\lambda} \delta g^{\alpha\lambda} \\ \delta g_{\mu\rho} &= -g_{\mu\alpha} g_{\rho\lambda} \delta g^{\alpha\lambda} \\ \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\beta\lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sehingga variasi simbol Christoffel dapat ditulis

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \delta (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \{ \nabla_\mu (-g_{\nu\alpha} g_{\rho\lambda} \delta g^{\alpha\lambda}) + \nabla_\nu (-g_{\mu\alpha} g_{\rho\lambda} \delta g^{\alpha\lambda}) - \nabla_\rho (-g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\beta\lambda}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\{g^{\lambda\rho}g_{\nu\alpha}g_{\rho\lambda}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\lambda} + g^{\lambda\rho}g_{\mu\alpha}g_{\rho\lambda}\nabla_{\nu}\delta g^{\alpha\lambda} - g^{\lambda\rho}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla_{\rho}\delta g^{\beta\lambda}\} \\
\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= -\frac{1}{2}\{g_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}\delta g^{\alpha\lambda} - \nabla^{\lambda}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\beta\lambda}\} \\
\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= -\frac{1}{2}\{g_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}\delta g^{\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\lambda}g^{\beta\lambda}\} \tag{A.8}
\end{aligned}$$

## LAMPIRAN B

### SOLUSI SCHWARZSCHILD

Metrik geometri ruang-waktu yang simetri bola statis (Schwarzschild) diberikan oleh:

$$ds^2 = e^{u(r,t)} dt^2 - e^{v(r,t)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{B.1})$$

Memberikan elemen tensor metrik kovarian dan kontravarian, yaitu:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Kemudian dihitung simbol Christoffel dari metrik diatas

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) \quad (\text{B.4})$$

Untuk  $\sigma = \lambda = 0$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = \frac{1}{2} e^{-u} \left( \frac{\partial}{\partial r} e^u \right) = \frac{u'}{2}$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{10}) = \frac{1}{2} e^{-u} \left( \frac{\partial}{\partial r} e^u \right) = \frac{u'}{2}$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{10} + \partial_1 g_{02} - \partial_0 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{10} + \partial_1 g_{03} - \partial_0 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{20} + \partial_2 g_{03} - \partial_0 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

Untuk  $\sigma = \lambda = 1$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = \frac{1}{2}(-e^{-v})\left(-\frac{\partial}{\partial r}e^u\right) = \frac{u'}{2}e^{(u-v)}$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-v})\left(-\frac{\partial}{\partial r}e^v - \frac{\partial}{\partial r}e^v + \frac{\partial}{\partial r}e^v\right) = \frac{e^v}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}e^v\right) = \frac{v'}{2}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = \frac{1}{2}(-e^{-v})\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\right) = -re^{-v}$$

$$\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{13} - \partial_1 g_{32}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-v})\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2 \sin^2 \theta\right) = -r \sin^2 \theta e^{-v}\end{aligned}$$

Untuk  $\sigma = \lambda = 2$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{22} + \partial_2g_{20} - \partial_2g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{32} + \partial_3g_{20} - \partial_2g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{02} + \partial_0g_{21} - \partial_2g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{12} + \partial_1g_{21} - \partial_2g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{22} + \partial_2g_{21} - \partial_2g_{12}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}r^2\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{32} + \partial_3g_{21} - \partial_2g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{02} + \partial_0g_{22} - \partial_2g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{12} + \partial_1g_{22} - \partial_2g_{21}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}r^2\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{22} + \partial_2g_{22} - \partial_2g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{32} + \partial_3g_{22} - \partial_2g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{02} + \partial_0g_{23} - \partial_2g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{12} + \partial_1g_{23} - \partial_2g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{22} + \partial_2g_{23} - \partial_2g_{32}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{32} + \partial_3g_{23} - \partial_2g_{33}) \\ &= \frac{1}{2}(-r^{-2})\left(\frac{\partial}{\partial \theta}r^2\sin^2\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Untuk  $\sigma = \lambda = 3$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{31} - \partial_3 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin^2 \theta\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial \theta} r^2 \sin^2 \theta\right) = \cot \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin^2 \theta\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

Beberapa komponen yang tidak bernilai nol sebagai berikut:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{u'}{2}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{u'}{2}e^{(u-v)}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{v'}{2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -re^{-v}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r\sin^2\theta e^{-v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot\theta$$

(B.6)

Tensor Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (\text{B.7})$$

Komponen tensor Ricci dalam arah diagonal:

$$R_{\mu\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\mu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\mu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma$$

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma$$

$$R_{00} = (\partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_1 \Gamma_{00}^1) - (\partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{10}^1)$$

$$+ \{\Gamma_{00}^0(\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{00}^1(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\}$$

$$- \{(\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0) + (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1)\}$$

$$= \partial_1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u'}{2} e^{(u-v)} \right) + \frac{u'}{2} e^{(u-v)} \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) - \frac{u'^2}{2} e^{(u-v)} \\
&= \frac{u''}{2} e^{(u-v)} + \frac{u'}{2} (u' - v') e^{(u-v)} + \frac{u'}{2} e^{(u-v)} \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) - \frac{u'^2}{2} e^{(u-v)} \\
&= e^{(u-v)} \left( \frac{u''}{2} + \frac{u'^2}{2} + \frac{v'}{r} - \frac{u'v'}{2} + \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} - \frac{u'^2}{2} \right) \\
R_{00} &= e^{(u-v)} \left( \frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\sigma - \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
R_{11} &= (\partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_0 \Gamma_{11}^0) - \partial_1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) + \{\Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{01}^0 \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} - \{(\Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0) + (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) \\
&\quad + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v'}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) + \frac{v'}{2} \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) - \left( \frac{u'^2}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{2}{r^2} \right) \\
&= \frac{v''}{2} - \frac{u''}{2} - \frac{v''}{2} + \frac{2}{r^2} + \frac{u'v'}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{v'}{r} - \frac{u'^2}{4} - \frac{v'^2}{4} - \frac{2}{r^2} \\
R_{11} &= -\frac{u''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{u'v'}{4} - \frac{u'^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\sigma - \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
R_{22} &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{32}^3 + \{\Gamma_{22}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} - \{\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 \\
&\quad + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3\} \\
R_{22} &= \frac{\partial}{\partial r} (-e^{-v}) - \frac{\partial}{\partial \theta} \cot \theta + (-re^{-v}) \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) \\
&\quad - \left( -re^{-v} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} re^{-v} + \cot^2 \theta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-v} + rv'e^{-v} + \frac{1}{\sin^2\theta} - re^{-v} \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) + 2e^{-v} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} - e^{-v} \left( 1 - rv' + \frac{ru'}{2} + 2 - 2 \right)
\end{aligned}$$

$$R_{22} = 1 - e^{-v} \left( \frac{r(u' - v')}{2} + 1 \right)$$

$$R_{33} = \partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \{ \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 \} + \{ \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 \} - \{ \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 \\
&\quad + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 \}
\end{aligned}$$

$$R_{33} = \frac{\partial}{\partial r} (-r \sin^2\theta e^{-v}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \cos\theta) - r \sin^2\theta e^{-v} \left( \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right)$$

$$+ 2 \sin^2\theta e^{-v} - \sin\theta \cos\theta \cot\theta$$

$$= -\sin^2\theta e^{-v} + rv' \sin^2\theta e^{-v} + \sin^2\theta - \sin^2\theta e^{-v} \left( \frac{u' + v'}{2} r + 2 \right)$$

$$= -\sin^2\theta e^{-v} \left( 1 - rv' + \frac{u' + v'}{2} r \right) + \sin^2\theta$$

$$= -\sin^2\theta e^{-v} \left( \frac{u' - v'}{2} r + 1 \right) + \sin^2\theta$$

$$= \sin^2\theta \left( 1 - e^{-v} \left( \frac{u' - v'}{2} r + 1 \right) \right)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22}$$

Empat tensor Ricci yang memiliki nilai tidak sama dengan nol memberikan tensor

Ricci campuran sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
R_0^0 = g^{00}R_{00} &= e^{-u}e^{(u-v)}\left(\frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{v'^2}{4}\right) \\
&= e^{-v}\left(\frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4}\right)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
R_1^1 = g^{11}R_{11} &= -e^{-v}\left(-\frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} + \frac{u'v'}{4} - \frac{v'^2}{4}\right) \\
&= e^{-v}\left(\frac{u''}{2} - \frac{v'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4}\right)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
R_2^2 = g^{22}R_{22} &= -\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-v}\left(\frac{r(u' - v')}{2} + 1\right)\right) \\
&= -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-v}}{r^2}\left(\frac{r(u' - v')}{2} + 1\right)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
R_3^3 = g^{33}R_{33} &= -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\sin^2\theta - \sin^2\theta e^{-v}\left(\frac{r(u' - v')}{2} + 1\right)\right) \\
&= -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-v}}{r^2}\left(\frac{r(u' - v')}{2} + 1\right)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Komponen  $R_\mu^\mu$  memberi skalar kelengkungan R

$$\begin{aligned}
R &= R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 \\
&= e^{-v}\left(\frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4}\right) + e^{-v}\left(\frac{u''}{2} - \frac{v'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4}\right) \\
&\quad - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-v}}{r^2}\left(\frac{r(u' - v')}{2} + 1\right) \\
&= 2e^{-v}\left(\frac{u''}{2} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} + \frac{(u' - v')}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Untuk kondisi dimana tidak ada materi dan energi (vakum)  $R_{\mu\nu} = 0$ , maka persamaan medan hanya memberi 3 persamaan independen untuk  $u$  dan  $v$

$$\begin{aligned}\frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} &= 0 \\ -\frac{u''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{u'v'}{4} - \frac{u'^2}{4} &= 0 \\ e^{-v} \left( \frac{r(u' - v')}{2} + 1 \right) &= 1\end{aligned}\tag{B.13}$$

dengan  $u' = -v'$  persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}e^u \left( \frac{r(u' - u')}{2} + 1 \right) &= 1 \\ e^u \left( \frac{2ru'}{2} + 1 \right) &= 1 \\ e^u(ru' + 1) &= 1 \\ e^u ru' + e^u &= 1 \\ \frac{d}{dr}(re^u) &= 1 \\ \int d(re^u) = \int dr re^u &= r + C\end{aligned}\tag{B.15}$$

dengan C merupakan konstanta integrasi. Konsanta ini dihitung dengan pendekatan untuk medan lemah. Lagrangian non-relativistik berbentuk:

$$\begin{aligned}L &= -mc^2 - m\phi + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= -mc \left( c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c} \right) = -mc \left( c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} v^j \right)\end{aligned}$$

Pada koodinat kartesian  $g_{ij} = -\delta_{ij}$ , sehingga menjadi

$$L = -mc \left( c + \frac{\phi}{c} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} v^j \right) \quad (\text{B.16})$$

Integral aksi adalah

$$\begin{aligned} I &= \int L dt = -mc \int \left( c + \frac{\phi}{c} + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} v^j \right) dt \\ &= -mc \int \left( \left( c + \frac{\phi}{c} \right) + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) dt \\ &= -mc \int \left( \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) c + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j \right) \\ &= -mc \int ds \end{aligned}$$

maka

$$ds = \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) c + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j$$

sehingga

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)^2 c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^i c dt + \frac{1}{4} \left( g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j \right)^2$$

dimana  $\frac{1}{4} \left( g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j \right)^2 \approx 0$

$$ds^2 \approx \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)^2 c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^i c dt$$

dengan

$$\left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)^2 = 1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{\phi^2}{c^4} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

serta

$$\left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) g_{ij} dx^i dx^j \approx g_{ij} dx^i dx^j$$

sehingga

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

dan  $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$

dibandingkan solusi Schwarzschild

$$g_{00} = 1 + \frac{C}{r}$$

maka

$$1 + \frac{C}{r} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

$$C = \phi \frac{2r}{c^2}$$

$$C = -\frac{GM}{r} \frac{2r}{c^2}$$

$$C = -\frac{2GM}{c^2}$$

$$C = -2m$$

dengan  $m = \frac{GM}{c^2}$ . Maka elemen garisnya akan menjadi

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{B.17})$$

## LAMPIRAN C

### SOLUSI SCHWARZSCHILD DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

Solusi ini dapat dikatakan sebagai solusi vakum dari teori gravitasi Einstein, sehingga energi momentum  $T_{\mu\nu} = 0$ . Elemen garis untuk simetri bola

$$ds^2 = e^{u(r,t)} dt^2 - e^{v(r,t)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Memberikan elemen tensor metrik kovarian dan kontravarian, yaitu:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

Kemudian dihitung simbol Christoffel dari metrik diatas

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})$$

Beberapa komponen yang tidak bernilai nol sebagai berikut:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{u'}{2}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{u'}{2} e^{(u-v)}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{v'}{2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-v}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2\theta e^{-v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta$$
(C.1)

Dan komponen-komponen tensor Ricci yang tidak bernilai nol sebagai berikut

$$R_{00} = e^{(u-v)} \left( \frac{u''}{2} + \frac{u'}{r} - \frac{u'v'}{4} + \frac{u'^2}{4} \right)$$

$$R_{11} = -\frac{u''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{u'v'}{4} - \frac{u'^2}{4}$$

$$R_{22} = 1 - e^{-v} \left( \frac{r(u' - v')}{2} + 1 \right)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$$
(C.2)

Solusi yang dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan  $R_0$ . Pada kasus ini, persamaan medan Einstein menjadi

$$R_{\mu\nu} f'(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = 0$$

atau

$$R_{\mu\nu} = \frac{f(R_0)}{f'(R_0)} g_{\mu\nu}$$
(C.3)

Perhitungan trace dari persamaan medan di atas menghasilkan

$$R_0 f'(R_0) - 2f(R_0) = 0$$

atau

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R_0)}$$

sehingga  $R_{\mu\nu}$  menjadi

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0}{4} g_{\mu\nu}$$
(C.4)

Menggunakan  $R_{22}$  dan  $u' = -v'$  maka

$$e^u(ru' + 1) - 1 = \frac{R_0}{4}(-r^2)$$

$$e^u(ru' + 1) - 1 = -\frac{R_0}{4}r^2$$

$$e^u ru' + e^u = 1 - \frac{R_0}{4}r^2$$

$$\frac{d}{dr}(re^u) = 1 - \frac{R_0}{4}r^2$$

$$\int dr (re^u) = \int dr - \int \frac{R_0}{4}r^2 dr$$

$$re^u = r - \frac{R_0}{12}r^3 + C$$

$$re^u = r - \frac{R_0}{12}r^3 - 2m$$

$$e^u = 1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r} \quad (\text{C.5})$$

Maka elemen garisnya menjadi

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{C.6})$$

Persamaan ini dapat disebut sebagai solusi Schwarzschild dalam teori gravitasi  $f(R)$ .

## LAMPIRAN D

### SOLUSI KASUS $f(R) = \alpha R^2$ DAN KASUS $f(R) = R + \alpha R^2$

1.  $f(R) = \alpha R^2$

Diketahui fungsi umum  $f(R)$  dengan suku gangguan adalah

$$f(R) = R + \alpha h(R)$$

Jika fungsi yang dipilih adalah

$$f(R) = \alpha R^2$$

Maka kedua persamaan diatas dapat menjadi

$$\alpha h(R) = R^2 - R \text{ dan } h(R) = \frac{R^2 - R}{\alpha}$$

$$\alpha h'(R) = 2R - 1 \text{ dan } h'(R) = \frac{2R - 1}{\alpha} \quad (\text{D.1})$$

Persamaan ini kemudian disubstitusikan pada persamaan  $g_{00}$  untuk teori gravitasi

$f(R)$  dengan gangguan, sehingga menjadi

$$\begin{aligned} g_{00} = e^\mu = 1 - \frac{2m}{r} \\ + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 - R}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R \left( \frac{2R - 1}{\alpha} \right) \right. \\ \left. + \nabla^i \nabla_i \left( \frac{2R - 1}{\alpha} \right) \right] r^2 dr \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Dimana  $R = R_0$  sehingga  $\nabla^i \nabla_i \left( \frac{2R - 1}{\alpha} \right)$  bernilai nol,  $g_{00}$  dapat ditulis

$$\begin{aligned}
g_{00} = e^\mu &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R_0^2 - R_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R_0 \left( \frac{2R_0 - 1}{\alpha} \right) \right] r^2 dr \\
&= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R_0^2 - R_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} R_0 \left( \frac{2R_0 - 1}{\alpha} \right) \right] \frac{r^3}{3} \\
&= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{r^2}{6} (R_0^2 - R_0) + \frac{R_0 r^2}{6} (2R_0 - 1) \\
&= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (R_0 - 1) + \frac{R_0 r^2}{6} (2R_0 - 1) \\
&= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (R_0 - 1 + 2R_0 - 1)
\end{aligned}$$

$$g_{00} = e^\mu = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3R_0 - 2) \quad (\text{D.3})$$

Karena  $u = -v$  maka  $g_{11}$  diberikan oleh

$$g_{11} = e^{-v} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3R_0 - 2) \right\}^{-1} \quad (\text{D.4})$$

$$g_{22} = -r^2 \quad (\text{D.5})$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{D.6})$$

$$2. f(R) = R + \alpha R^2$$

Diketahui fungsi umum  $f(R)$  dengan suku gangguan adalah

$$f(R) = R + \alpha h(R)$$

Jika fungsi yang dipilih adalah

$$f(R) = \alpha R^2$$

Maka kedua persamaan diatas dapat menjadi

$$h(R) = R^2 \text{ dan } h'(R) = 2R \quad (\text{D.7})$$

Persamaan ini kemudian disubstitusikan pada persamaan  $g_{00}$  untuk teori gravitasi  $f(R)$  dengan gangguan, sehingga menjadi

$$g_{00} = e^\mu = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R^2 2R + \nabla^i \nabla_i 2R \right] r^2 dr$$

Dimana  $R = R_0$  sehingga  $\nabla^i \nabla_i 2R$  bernilai nol,  $g_{00}$  dapat ditulis

$$\begin{aligned} g_{00} = e^\mu &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[ \frac{1}{2} R_0^2 + \frac{1}{2} R_0^2 2R_0 \right] r^2 dr \\ &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r} \left[ \frac{1}{2} R_0^2 + R_0^3 \right] \frac{r^3}{3} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^3 r^2}{3} \\ &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\alpha R_0^2 r^2 + 2\alpha R_0^3 r^2}{6} \\ g_{00} = e^\mu &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Karena  $u = -v$  maka  $g_{11}$  diberikan oleh

$$g_{11} = e^{-v} = - \left\{ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right\}^{-1} \quad (\text{D.9})$$

$$g_{22} = -r^2 \quad (\text{D.10})$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{D.11})$$

## LAMPIRAN E

### SIMBOL CHRISTOFFEL UNTUK KASUS $f(R) = \alpha R^2$ DAN KASUS

$$f(R) = R + \alpha R^2$$

1.  $f(R) = \alpha R^2$

Dari persamaan garis di atas, maka didapatkan tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  sebagai berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\{1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right\}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

dengan bentuk kontravarian dari tensor metrik di atas adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left\{1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right\}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}$$

Nilai dari simbol Christoffel dari tensor metrik (2.17) di atas adalah

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})$$

yang berjumlah sebanyak 64 komponen.

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right]^{-1} \left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2)\right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (3\alpha R_0 - 2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2)\right]} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{20} + \partial_2g_{00} - \partial_0g_{02}) = 0$$

$$z\Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{30} + \partial_3g_{00} - \partial_0g_{03}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{00} + \partial_0g_{10} - \partial_0g_{10}) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right]^{-1}\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0r}{3}(3\alpha R_0 - 2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0r}{3}(3\alpha R_0 - 2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right]}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{01} + \partial_1g_{10} - \partial_0g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{02} + \partial_2g_{10} - \partial_0g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{03} + \partial_3g_{10} - \partial_0g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{00} + \partial_0g_{20} - \partial_0g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{01} + \partial_1g_{20} - \partial_0g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{02} + \partial_2g_{20} - \partial_0g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{03} + \partial_3g_{20} - \partial_0g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{00} + \partial_0g_{30} - \partial_0g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{01} + \partial_1g_{30} - \partial_0g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{02} + \partial_2g_{30} - \partial_0g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{03} + \partial_3g_{30} - \partial_0g_{33}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{10} + \partial_0g_{01} - \partial_1g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right]\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0r}{3}(3\alpha R_0 - 2)\right] \\
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{11} + \partial_1g_{01} - \partial_1g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{02}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{12} + \partial_2g_{01} - \partial_1g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{03}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{13} + \partial_3g_{01} - \partial_1g_{03}) = 0 \\
\Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{10} + \partial_0g_{11} - \partial_1g_{10}) = 0 \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{11} + \partial_1g_{11} - \partial_1g_{11}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right] \cdot \frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0r}{3}(3\alpha R_0 - 2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right]^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0r}{3}(3\alpha R_0 - 2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right]} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{12} + \partial_2g_{11} - \partial_1g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{13} + \partial_3g_{11} - \partial_1g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{20}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{10} + \partial_0g_{21} - \partial_1g_{20}) = 0 \\
\Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{11} + \partial_1g_{21} - \partial_1g_{21}) = 0 \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{12} + \partial_2g_{21} - \partial_1g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right] \cdot 2r
\end{aligned}$$

$$= -r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right]$$

$$\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{13} + \partial_3 g_{21} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_1 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{12} + \partial_2 g_{31} - \partial_1 g_{32}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \cdot [2r \sin^2 \theta] \\ &= -r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (3\alpha R_0 - 2) \right] \end{aligned}$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{21} + \partial_1 g_{02} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02} - \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{23} + \partial_3 g_{02} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = -\frac{1}{2r^2} (-2r) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{23} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = -\frac{1}{2r^2}(-2r) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{23} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{20} + \partial_0 g_{32} - \partial_2 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{21} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{32} - \partial_2 g_{32}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2r^2}(2r^2 \cos \theta \sin \theta) = -\cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{31} + \partial_1 g_{03} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{32} + \partial_2 g_{03} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{03} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{32} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13}) = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{30} + \partial_0 g_{23} - \partial_3 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{31} + \partial_1 g_{23} - \partial_3 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \\ &= -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r^2 \cos \theta \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) \\ &= -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r^2 \cos \theta \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$2. f(R) = R + \alpha R^2$$

Dari persamaan garis di atas, maka didapatkan tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  sebagai berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\{1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right\}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

dengan bentuk kontravarian dari tensor metrik di atas adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left\{1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right\}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}$$

Nilai dari simbol Christoffel dari tensor metrik (2.17) di atas adalah

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})$$

yang berjumlah sebanyak 64 komponen.

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01})$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]^{-1} \left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}{\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]}$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{10}) \\
&= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]^{-1} \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{02} + \partial_2 g_{10} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{03} + \partial_3 g_{10} - \partial_0 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{20} - \partial_0 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_2 g_{01} + \partial_1 g_{20} - \partial_0 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_2 g_{02} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_2 g_{03} + \partial_3 g_{20} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{30} - \partial_0 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_3 g_{01} + \partial_1 g_{30} - \partial_0 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_3 g_{02} + \partial_2 g_{30} - \partial_0 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00})$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{01} - \partial_1 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{12} + \partial_2 g_{01} - \partial_1 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{13} + \partial_3 g_{01} - \partial_1 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]$$

$$\cdot \left[ \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{2m}{r^2} + \frac{R_0 r}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}{\left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{13} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{10} + \partial_0 g_{21} - \partial_1 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22})$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \cdot 2r$$

$$= -r \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right]$$

$$\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{13} + \partial_3 g_{21} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_1 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{12} + \partial_2 g_{31} - \partial_1 g_{32}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \cdot [2r \sin^2 \theta] \\ &= -r \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \right] \end{aligned}$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{21} + \partial_1 g_{02} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02} - \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{23} + \partial_3 g_{02} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = -\frac{1}{2r^2} (-2r) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{23} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = -\frac{1}{2r^2}(-2r) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{23} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{20} + \partial_0 g_{32} - \partial_2 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{21} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{32} - \partial_2 g_{32}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2r^2}(2r^2 \cos \theta \sin \theta) = -\cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{31} + \partial_1 g_{03} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{32} + \partial_2 g_{03} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{03} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{32} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13}) = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{30} + \partial_0 g_{23} - \partial_3 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{31} + \partial_1 g_{23} - \partial_3 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \\ &= -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r^2 \cos \theta \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) \\ &= -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}(-2r^2 \cos \theta \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

## LAMPIRAN F

### PERHITUNGAN SINGULARITAS $r$

Cubic Equations

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$P = \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \quad (\text{F.2})$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(P + 2b^3 - 9abc + 27a^2d)} \quad (\text{F.3})$$

Dimana solusi dari persamaan diatas adalah

$$x_1 = -\frac{b}{3a} - \frac{Q}{3a} - \frac{b^2 - 3ac}{3aQ} \quad (\text{F.4})$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{Q(1 + i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aQ} \quad (\text{F.5})$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{Q(1 - i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aQ} \quad (\text{F.6})$$

Solusi ini akan diterapkan pada persamaan

$$1 - \frac{2m}{r} + \frac{R_0 r^2}{6}(3\alpha R_0 - 2) = 0$$

$$1 - \frac{2m}{r} + r^2 \frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2) = 0$$

Dimisalkan  $a = \frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)$  maka

$$1 - \frac{2m}{r} + ar^2 = 0$$

Persamaan diatas dikalikan dengan  $r$

$$ar^3 + r - 2m = 0 \quad (\text{F.7})$$

Kemudian dicari  $p$  dan  $q$ , dimana  $b = 0$

$$P = \sqrt{(27a^2(-2m))^2 - 4(-3a \cdot 1)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{729 \cdot 4 a^4 m^2 + 4 \cdot 27 a^3} \\
&= \sqrt{4(729 a^4 m^2 + 27 a^3)} \\
&= 2\sqrt{(729 a^4 m^2 + 27 a^3)}
\end{aligned} \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 2\sqrt{(729 a^4 m^2 + 27 a^3)} + 27 a^2 (2m) \right)} \\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 2\sqrt{(729 a^4 m^2 + 27 a^3)} + 54 a^2 m \right)} \\
&= \sqrt[3]{\sqrt{(729 a^4 m^2 + 27 a^3)} + 27 a^2 m} \\
&= \sqrt[3]{27 a^2 m + \sqrt{(27 \cdot 27 a^4 m^2 + 27 a^3)}} \\
&= \sqrt[3]{27 a^2 m + \sqrt{27} \sqrt{(27 a^4 m^2 + a^3)}} \\
&= \sqrt[3]{3 \cdot 9 a^2 m + \sqrt{9 \cdot 3} \sqrt{(27 a^4 m^2 + a^3)}} \\
&= \sqrt[3]{3 \cdot 9 a^2 m + 3\sqrt{3} \sqrt{(27 a^4 m^2 + a^3)}} \\
&= \sqrt[3]{3^3 \sqrt{9 a^2 m + \sqrt{3} \sqrt{(27 a^4 m^2 + a^3)}}}
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Setelah itu solusi r dihitung

$$r_1 = - \frac{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{9 a^2 m + \sqrt{3} \sqrt{(27 a^4 m^2 + a^3)}}}}{3a} - \frac{-3a \cdot 1}{3a \sqrt[3]{3^3 \sqrt{9 a^2 m + \sqrt{3} \sqrt{(27 a^4 m^2 + a^3)}}}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{3 \cdot 3^{\left(\frac{1}{3}\right)}a} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt[3]{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&= -\frac{\sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{3^{\frac{2}{3}}a} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt[3]{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}
\end{aligned} \tag{F.10}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{(1 + i\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{6a} \\
&\quad + \frac{(1 - i\sqrt{3})(-3a \cdot 1)}{6a^3 \sqrt[3]{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&= \frac{(1 + i\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{2 \cdot 3 \cdot 3^{\left(\frac{1}{3}\right)}a} \\
&\quad - \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2\sqrt{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&= -\frac{(1 - i\sqrt{3})}{2\sqrt{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&\quad + \frac{(1 + i\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{2 \cdot 3^{\left(\frac{2}{3}\right)}a}
\end{aligned} \tag{F.11}$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= \frac{(1 - i\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{6a} \\
&\quad + \frac{(1 + i\sqrt{3})(-3a \cdot 1)}{6a^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&= \frac{(1 - i\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{2 \cdot 3 \cdot 3^{\left(\frac{-1}{3}\right)}a} \\
&\quad - \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&= - \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt{3}^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}} \\
&\quad + \frac{(1 - i\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{9a^2m + \sqrt{3}\sqrt{(27a^4m^2 + a^3)}}}{2 \cdot 3^{\left(\frac{2}{3}\right)}a} \tag{F.12}
\end{aligned}$$

Jika ketiga persamaan diatas diterapkan pada kasus  $f(R) = \alpha R^2$  dengan nilai  $a =$

$\left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)$  maka menjadi seperti berikut

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{27\left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}}{3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{27\left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^3}}} \tag{F.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= - \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{\left(27 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^3\right)}} \\
&+ \frac{(1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{\left(27 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^3\right)}}{2 \cdot 3^{\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)} \quad (F.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= - \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{\left(27 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^3\right)}} \\
&+ \frac{(1 - i\sqrt{3}) \sqrt[3]{9 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^2 m + \sqrt{3} \sqrt{\left(27 \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)^3\right)}}{2 \cdot 3^{\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{R_0}{6}(3\alpha R_0 - 2)\right)} \quad (F.15)
\end{aligned}$$

Ketika  $a = 0$  maka

$$ar^3 + r - 2m = 0$$

$$r - 2m = 0$$

$$r = 2m$$

Harga  $r$  akan sama seperti singularitas lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi Einstein.

Jika ketiga persamaan diatas diterapkan pada kasus  $f(R) = R + \alpha R^2$  dengan nilai  $a = \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)$  maka menjadi seperti berikut

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}{3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)} \\
&+ \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}}
\end{aligned} \tag{F.16}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= -\frac{(1 - i\sqrt{3})}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}} \\
&+ \frac{(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)}
\end{aligned} \tag{F.17}$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= -\frac{(1 + i\sqrt{3})}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}} \\
&+ \frac{(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{9\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^2 m + \sqrt{3}\sqrt{\left(27\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^4 m^2 + \left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^3\right)}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R_0}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)}
\end{aligned} \tag{F.18}$$

## LAMPIRAN G

### PENURUNAN PERSAMAAN GEODESIK

Lagrangian didefinisikan sebagai fungsi dari koordinat dan turunan pertamanya:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \quad (\text{G.2})$$

Sehingga integral aksi adalah

$$I = \int_{s_A}^{s_B} \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) ds \quad (\text{G.2})$$

Variasi integral aksi

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \delta \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) ds = 0 \quad (\text{G.3})$$

dengan

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu + \delta x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds} + \delta \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) - \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \quad (\text{G.4})$$

Suku pertama pada persamaan (G.4) diekspansi dalam deret Taylor dengan mengambil suku ke-0 dan ke-1

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \delta \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) - \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s\right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \frac{d}{ds} \delta x^\mu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta x^\mu \right] - \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \right] \delta x^\mu \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Persamaan G.5 disubstitusikan ke persamaan G.3

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \right) \right] \delta x^\mu ds + \int_{s_A}^{s_B} d \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta x^\mu \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \delta x^\mu \right]_{s_A}^{s_B} \\
&= \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds
\end{aligned} \tag{G.6}$$

Suku ke-3 persamaan G.6 lenyap karena

$$\delta x^\mu(s_A) = \delta x^\mu(s_B) = 0 \tag{G.7}$$

karena

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds = 0 \tag{G.8}$$

Maka didapatkan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) = 0 \tag{G.9}$$

Persamaan G.9 disebut persamaan Euler-Lagrange.

Dari persamaan metrik

$$\begin{aligned}
dl^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
dl &= \left( g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{dl}{ds} &= \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \\
dl &= \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds
\end{aligned} \tag{G.10}$$

Panjang kurva stationer adalah

$$I = l(s) = \int dl = \int \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds \tag{G.11}$$

Persamaan G.11 jika dibandingkan dengan persamaan G.2 akan didapatkan Lagrangian yaitu

$$\mathcal{L} = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{G.12})$$

Dari bentuk Lagrangian persamaan G.12 ini disubstitusikan ke dalam persamaan G.9. Suku ke-2 persamaan G.9 adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)} \frac{\partial \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)}{\partial x^\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( g_{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right\} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

$$\left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Dan suku pertama adalah:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial x^\lambda}{ds} \right)} = \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial x^\lambda}{ds} \right)} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}$$



$$\begin{aligned}
g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) &= 0 \\
g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\
g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\
g^{\rho\lambda} \left\{ g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right\} &= 0 \\
\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \tag{G.16}
\end{aligned}$$

Persamaan G.16 adalah persamaan geodesik.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
**PROGRAM STUDI FISIKA**  
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933  
Website : <http://fisika.uin-malang.ac.id>, e-mail : [Fi@uin-malang.ac.id](mailto:Fi@uin-malang.ac.id)

**BUKTI KONSULTASI  
SKRIPSI**

Nama : Kharisma Auliya  
NIM : 17640053  
Fakultas/Program Studi : Sains dan Teknologi / Fisika  
Judul Skripsi : Studi Lubang Hitam Schwarzschild dalam Teori Gravitasi  
f(R) Menggunakan Metode Gangguan  
Pembimbing 1 : Arista Romadani, M.Sc  
Pembimbing 2 : Drs. Abdul Basid, M.Si

• **Konsultasi Fisika**

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	2 Agustus 2021	Konsultasi BAB I, II, dan III	
2	14 Februari 2022	Konsultasi BAB III, IV	
3	12 April 2022	Konsultasi BAB IV	
4	9 April 2022	Konsultasi BAB IV	
5	12 Juni 2022	Konsultasi BAB IV	
6	17 Juni 2022	Konsultasi BAB IV dan V	

• **Konsultasi Integrasi**

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	5 Juni 2022	Konsultasi Intergrasi BAB I dan II	
2	8 Juni 2022	Konsultasi Integrasi BAB IV	
3	17 Juni 2022	Konsultasi Integrasi BAB IV	

Malang, 24 Juni 2022  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi,  
  
Dr. Imam Tazi, M.Si  
NIP. 19740730 200312 1 002