

**ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI MIKROBAKTERIUM
TUBERKULOSIS DENGAN DUA LOKASI PENGOBATAN**

SKRIPSI

**OLEH
UMMUL AULIA KT
NIM. 17610108**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI MIKROBAKTERIUM
TUBERKULOSIS DENGAN DUA LOKASI PENGOBATAN**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH
UMMUL AULIA KT
NIM. 17610108**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI MIKROBAKTERIUM
TUBERKULOSIS DENGAN DUA LOKASI PENGobatan**

SKRIPSI

**Oleh
Ummul Aulia KT
NIM. 17610108**

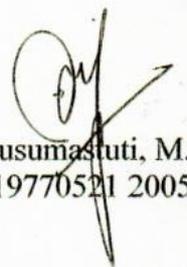
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 20 Juni 2022

Dosen Pembimbing I,



Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Dosen Pembimbing II,



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI MIKROBAKTERIUM TUBERKULOSIS DENGAN DUA LOKASI PENGOBATAN

SKRIPSI

Oleh
Ummul Aulia KT
NIM. 17610108

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 22 Juni 2022

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Anggota Penguji I : Juhari, M.Si
Anggota Penguji II : Dr. Heni Widayani, M.Si
Anggota Penguji III : Ari Kusumastuti, M.Pd.,M.Si

.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ummul Aulia KT

NIM : 17610108

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Infeksi Mikrobakterium Tuberkulosis
Dengan Dua Lokasi Pengobatan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2022
Yang membuat pernyataan



Ummul Aulia KT
NIM.17610108

MOTO

“ It always seems impossible until it's done ”

(Nelson Mandela)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Kamarudin Tamolung dan Ibu Siti Nuraini Biat, serta kakak Abdi dan adik

Najib yang menjadi motivasi utama penulis dalam menyelesaikan skripsi ini,
senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat serta cinta dan

kasih sayang yang tak terhingga.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari zaman kegelapan menuju ke zaman yang terang benderang, yaitu ad-Din al-Islam.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan serta bimbingan dari banyak pihak. Oleh sebab itu, iringan do'a serta ucapan terima kasih sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan serta motivasi yang berharga kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi atas segala saran dan kritik serta nasehat yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
7. Juhari, M.Si, selaku Anggota Penguji I dalam Ujian Skripsi yang telah memberikan saran serta kritikan positif kepada penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

9. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan doa, motivasi, serta nasihat kepada penulis.

10. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika Angkatan 2017.

Dengan mengharapkan Ridho dari Allah SWT penulis panjatkan doa dan harapan semoga segala amal baik semua pihak diterima oleh Allah dan mendapatkan balasan yang lebih besar dari-Nya. Penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Aamiin Ya Rabbal Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Malang, 22 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث.....	xviii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Definisi Istilah	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Persamaan Diferensial Biasa	7
2.2 Sistem Dinamik	8
2.2.1 Sistem Autonomus.....	8
2.2.2 Sistem Autonomus Linear	10
2.2.3 Sistem Autonomus Nonlinear	10
2.3 Kriteria Routh-Hurwitz.....	13
2.4 Angka Reproduksi Dasar.....	14
2.5 Matriks Generasi Selanjutnya.....	15
2.6 Metode Kestabilan Lyapunov.....	17
2.7 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri	18
2.8 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	19
2.9 Model Epidemi SEIR.....	20
2.10 Tuberkulosis	20
2.11 Pencegahan Penyakit dalam Islam	22
BAB III METODE PENELITIAN	26
3.1 Jenis Penelitian	26
3.2 Tahapan Penelitian	26
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	29
4.1 Konstruksi Model	29
4.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Rentan	30
4.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Laten	31

4.1.3	Laju Perubahan Subpopulasi Terinfeksi yang Melakukan Pengobatan di Rumah	32
4.1.4	Laju Perubahan Subpopulasi Terinfeksi yang Melakukan Pengobatan di Rumah Sakit.....	33
4.1.5	Laju Perubahan Subpopulasi Sembuh	34
4.2	Titik Keseimbangan dan Angka Reproduksi Dasar	37
4.2.1	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	38
4.2.2	Angka Reproduksi Dasar	39
4.2.3	Titik Keseimbangan Endemik	44
4.3	Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan	47
4.3.1	Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	48
4.3.2	Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik.....	52
4.4	Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan	57
4.4.1	Kestabilan Global Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	57
4.4.2	Kestabilan Global Titik Keseimbangan Endemik	59
4.5	Simulasi Numerik	68
4.5.1	Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	68
4.5.2	Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0$	70
4.5.3	Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega_2 \neq 0$	72
4.6	Model Infeksi Tuberkulosis dalam Pandangan Islam.....	74
BAB V PENUTUP.....		76
5.1	Kesimpulan.....	76
5.2	Saran	76
DAFTAR PUSTAKA		78
LAMPIRAN.....		80
RIWAYAT HIDUP		82

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Satuan Parameter Model SEIR	29
Tabel 4.2	Nilai Parameter Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	68
Tabel 4.3	Nilai Parameter Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega^2 = 0$	70
Tabel 4.4	Nilai Parameter Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega^2 \neq 0$	72

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Infeksi TB	29
Gambar 4.2	Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 0,8436 < 1$	69
Gambar 4.3	Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 2.9892 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0$	71
Gambar 4.4	Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 3.2482 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0.069$	73

DAFTAR SIMBOL

S	: Subpopulasi rentan
E	: Subpopulasi laten
I_1	: Subpopulasi terinfeksi tuberkulosis yang melakukan pengobatan di rumah
I_2	: Subpopulasi terinfeksi tuberkulosis yang melakukan pengobatan di rumah sakit.
R	: Subpopulasi yang sembuh
δ	: Laju kelahiran alami
β_1	: Koefisien transmisi dari individu rentan ke individu laten karena adanya interaksi dengan subpopulasi I_1
β_2	: Koefisien transmisi dari individu rentan ke individu laten karena adanya interaksi dengan subpopulasi I_1
μ	: Laju kematian alami
b	: Koefisien transmisi dari individu laten ke individu terinfeksi I_1 dan I_2
$1 - \theta$: Proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_1
θ	: Proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_2
ω_1	: Laju perubahan individu subpopulasi I_2 dari subpopulasi I_1
ω_2	: Laju perubahan individu subpopulasi I_1 dari subpopulasi I_2
k_1	: Laju keberhasilan pengobatan dari subpopulasi I_1 menjadi subpopulasi R
k_2	: Laju keberhasilan pengobatan dari subpopulasi I_2 menjadi subpopulasi R
d_1	: Laju kematian pada subpopulasi I_1 akibat terinfeksi penyakit
d_2	: Laju kematian pada subpopulasi I_2 akibat terinfeksi penyakit
\mathcal{R}_0	: Angka reproduksi dasar
J	: Matriks Jacobi
λ	: Nilai eigen

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	M-File Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}0 < 1$	80
Lampiran 2	M-File Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}0 > 1$	81

ABSTRAK

KT, Ummul Aulia, 2022, **Analisis Dinamik Model Infeksi Mikrobakterium Tuberkulosis Dengan Dua Lokasi Pengobatan**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Kata kunci: Model matematika tuberkulosis, pengobatan I_1 , pengobatan I_2 , angka reproduksi dasar, analisis dinamik, analisis kestabilan.

Tuberkulosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Penyakit tersebut dinilai berbahaya karena menginfeksi paru-paru dan organ tubuh lainnya hingga dapat menyebabkan kematian. Penelitian ini membahas model matematika untuk penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan sebagai upaya untuk menekan angka penularan kasus TB. Pengobatan bagi penderita TB dapat dilakukan di rumah dan rumah sakit. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi model matematika dan menganalisis perilaku kualitatif pada model penyebaran TB. Konstruksi model tersebut menggunakan model epidemi SEIR yang terbagi dalam lima subpopulasi yaitu subpopulasi rentan, subpopulasi laten, subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah, dan subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah sakit, serta subpopulasi sembuh. Analisis perilaku kualitatif pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal serta global. Berdasarkan hasil analisis diketahui bahwa model mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Eksistensi titik kesetimbangan endemik dan kestabilan lokal maupun global dari kedua titik kesetimbangan bergantung pada angka reproduksi dasar yang dinotasikan dengan \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka hanya terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global.

ABSTRACT

KT, Ummul Aulia, 2022, **The Dynamic Analysis of Mycobacterium Tuberculosis Infection Model with Two Treatment Sites**. Thesis, Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Maulana Malik Ibrahim Malang, Supervisors: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Keywords: Mathematical model of Tuberculosis, treatment I_1 , treatment I_2 , basic reproductive rate, dynamic analysis, stability analysis.

Tuberculosis is an infectious disease caused by *Mycobacterium tuberculosis*. The disease is considered dangerous because it infects the lungs and other organs of the body and can lead to death. This study discusses a mathematical model for the spread of tuberculosis with two treatment sites as an effort to reduce the transmission rate of TB cases. Treatment for TB patients can be done at home and in hospitals. The purpose of this study was to construct a mathematical model and analyze the qualitative behavior of the TB spread model. The construction of the model uses the SEIR epidemic model which is divided into five subpopulations, namely susceptible subpopulations, latent subpopulations, infected subpopulations receiving treatment at home, and infected subpopulations receiving treatment at the hospital, and cured subpopulations. The analysis of qualitative behavior in the model includes determining the local and global equilibrium and stability points. The results of the analysis shows that the model has two equilibrium points, namely a disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The existence of endemic equilibrium point and the local and global stability of the two equilibrium points depend on the basic reproduction number denoted by \mathcal{R}_0 . If $\mathcal{R}_0 < 1$, there is only disease-free equilibrium point. If $\mathcal{R}_0 > 1$, there are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Stability analysis shows that the disease-free equilibrium point is locally and globally asymptotically stable if $\mathcal{R}_0 < 1$. While, if $\mathcal{R}_0 > 1$, the endemic equilibrium point will be asymptotically stable locally and globally.

مستخلص البحث

ك ت ، ام الأولياء. ٢٠٢٢ ، التحليل الديناميكي لنموذج عدوى السل المتفطرة مع موقعين للعلاج .
البحث العلمي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم
الإسلامية الحكومية بمالانج، المشرفة: (١)الدكتورة هيني ودياني، الماجستير، (٢) آري
كوسوماستوتي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: النموذج الرياضي لمرض السل (Tuberculosis) ، العلاج I_1 ، العلاج I_2 ، معدل
الإنجاب الأساسي، التحليل الديناميكي، تحليل الاستقرار.

السل هو مرض معدي يسببه متفطرة السل (*Mycobacterium tuberculosis*).
يعتبر ذلك المرض خطيرًا لأنه يصيب الرئتين وأعضاء الجسم الأخرى ويمكن أن يؤدي إلى الوفاة.
تناقش هذه الدراسة نموذجًا رياضيًا لانتشار مرض السل مع موقعين للعلاج كجهد لتقليل معدل
انتقال حالات السل. يمكن علاج مرضى السل في المنزل والمستشفيات. كان الغرض من هذه
الدراسة هو بناء نموذج رياضي وتحليل السلوك النوعي لنموذج انتشار السل. يستخدم بناء النموذج
نموذج وباء SEIR الذي ينقسم إلى خمس مجموعات سكانية فرعية، وهي المجموعات السكانية
الفرعية المعرضة للإصابة، والفئات السكانية الفرعية الكامنة، والفئات السكانية الفرعية المصابة
التي تتلقى العلاج في المنزل، والفئات السكانية الفرعية المصابة التي تتلقى العلاج في المستشفى،
والفئات السكانية الفرعية المعالجة. يتضمن تحليل السلوك النوعي في النموذج تحديد نقاط التوازن
والاستقرار المحلية والعالمية. تظهر نتائج التحليل أن النموذج يحتوي على نقطتي توازن، وهما
نقطة توازن خالية من الأمراض ونقطة التوازن المستوطنة. ويعتمد وجود نقطة توازن متوطنة
والاستقرار المحلي والعالمي لنقطتي التوازن على عدد التكاثر الأساسي الذي يرمز إليه R_0 . إذا
 $R_0 < 1$ ، هناك فقط نقطة توازن خالية من الأمراض. في حالة $R_0 > 1$ ، هناك نقطتا توازن،
وهما نقطة التوازن الخالية من الأمراض ونقطة التوازن المتوطنة. يُظهر تحليل الاستقرار أن نقطة
التوازن الخالية من الأمراض مستقرة محليًا وعالميًا إذا $R_0 < 1$. في حين أن نقطة التوازن
المستوطنة، إذا كانت $R_0 > 1$ ، ستكون مستقرة بشكل متقارب محليًا وعالميًا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model matematika telah banyak digunakan dalam berbagai bidang, antara lain ilmu pengetahuan alam, teknik kedokteran, dan ilmu sosial seperti ekonomi dan psikologi. Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan secara matematis adalah penyakit tuberkulosis (TB). Tuberkulosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis* dan menjadi masalah kesehatan global karena termasuk dalam 10 penyebab kematian tertinggi di dunia. WHO dalam *Global Report Tuberculosis 2021* menyatakan bahwa sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi tuberkulosis bahkan 44% kasus berada di kawasan Asia Tenggara. Indonesia berada pada peringkat ke-2 setelah India dengan estimasi angka kasus sebanyak 845.000 (WHO, 2021).

Prevalensi penyakit tuberkulosis di Indonesia sangat tinggi, namun tingkat pencegahannya masih sangat rendah. Hal ini menyebabkan resiko penularan pasien TB semakin meningkat. Penularan penyakit TB umumnya dapat terjadi melalui udara ketika penderita TB aktif memercikkan lendir atau dahak saat batuk atau bersin. Daya penularan TB ditentukan dari banyaknya bakteri yang terkandung dalam dahak. Sekali batuk, penderita TB dapat mengeluarkan 3000 percikan dahak. Umumnya prevalensi usia penderita TB adalah usia produktif 20-60 tahun. Sedangkan berdasarkan jenis kelamin, laki-laki mempunyai resiko terpapar TB lebih tinggi dibandingkan dengan perempuan (Iswari, dkk. 2020).

Upaya untuk menekan angka penularan TB dapat dilakukan dengan pengobatan secara intensif. Pengobatan pada penderita TB membutuhkan waktu

yang lama untuk sembuh. Penderita dengan tingkat keparahan yang cukup tinggi harus dirawat di rumah sakit. Sedangkan penderita TB dengan tingkat keparahan yang rendah dapat melakukan perawatan di rumah dengan catatan meminum obat secara rutin. Artinya, ketika tidak rutin mengkonsumsi obat dapat menyebabkan bakteri bertumbuh semakin banyak dan menaikkan level keparahan sehingga di rawat di rumah sakit. Ketika melakukan perawatan di rumah sakit, maka tentunya biaya perawatan yang dikeluarkan akan cukup tinggi.

Model epidemi SEIR merupakan salah satu model analisis dinamik yang digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit. Model epidemi SEIR merupakan perluasan dari model SIR yang dikembangkan oleh Kermack dan McKendrick tahun 1927 untuk jenis penyakit dengan masa inkubasi yang panjang (Side, Sanusi, & Bohari, 2021). Model SEIR menunjukkan *S* adalah *susceptible* yaitu individu yang rentan terinfeksi penyakit, *E* adalah *exposed* yaitu individu yang terinfeksi namun tidak menunjukkan gejala (laten), *I* adalah *infectious* yaitu individu yang terinfeksi dan dapat menularkan ke individu lain, dan *R* adalah *recovered* yaitu individu yang telah sembuh.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an surah Yunus ayat 57 yang artinya:

“Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit yang ada dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman” (QS.Yunus: 57).

Berdasarkan ayat tersebut dapat diinterpretasikan bahwa segala sesuatu yang terjadi telah ditetapkan oleh Allah SWT pasti ada hikmah dan jalan keluarnya termasuk ketika sakit. Setiap penyakit pasti memiliki obat dan bila obatnya sesuai maka dia akan sembuh.

Pemodelan matematika terhadap penyebaran penyakit tuberkulosis telah banyak dilakukan oleh peneliti. Salah satunya diperkenalkan oleh Huo dan Zou pada tahun 2016 yang membahas tentang pengaruh pengobatan di rumah pada penyebaran tuberkulosis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pengobatan di rumah memiliki pengaruh negatif terhadap penyebaran tuberkulosis. Sehingga salah satu cara untuk menekan angka penyebaran tuberkulosis yaitu pasien yang melakukan pengobatan di rumah sakit, namun belum sembuh tidak diizinkan untuk melakukan pengobatan di rumah.

Pada tahun 2016, Faruk mengembangkan sebuah model epidemik tuberkulosis dengan penambahan tingkat pengobatan pada model SEIR. Hasilnya menunjukkan bahwa semakin besar individu terinfeksi menuntaskan pengobatannya maka jumlah penurunan individu yang terinfeksi juga akan semakin cepat. Selain itu, pada tahun 2019, Akman Yıldız & Karaoğlu juga membahas tentang kontrol optimal pada penyebaran tuberkulosis dengan dua jenis pengobatan yaitu pengobatan di rumah dan rumah sakit. Tujuannya adalah untuk menekan angka penularan pada individu laten dan terinfeksi dengan melihat pengaruh kontrol jarak pada individu rentan, upaya pencegahan kegagalan ketika melakukan pengobatan di rumah maupun rumah sakit.

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model epidemik pada penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan yakni di rumah dan rumah sakit yang merujuk pada artikel Huo dan Zou (2016). Konstruksi pada model diasumsikan bahwa individu pada subpopulasi laten saling berpengaruh pada individu subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit. Analisis dinamik yang dilakukan pada model infeksi TB yakni

meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan lokal maupun global pada titik kesetimbangan. Untuk mendukung hasil analisis, dilakukan simulasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi model penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan?
2. Bagaimana perilaku kualitatif dari model penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui konstruksi model penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan.
2. Untuk mengetahui perilaku kualitatif dari model penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan?

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi tambahan wawasan dan informasi tentang model matematika SEIR pada infeksi *mycobacterium tuberculosis* dengan dua lokasi pengobatan sehingga dapat menjadikan salah satu acuan pengambilan kebijakan kedepannya.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan-batasan tersebut sebagai berikut:

1. Total populasi yang dikaji bernilai konstan sebesar N , dimana

$$N = S + E + I_1 + I_2 + R$$
2. Ada kelahiran dan kematian dalam suatu populasi.
3. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan.
4. Individu rentan yang terinfeksi dengan *mycobacterium tuberculosis* akan berpindah ke kelas laten. Pada kelas laten individu belum bisa menginfeksi individu lain.
5. Level banyaknya bakteri dalam paru-paru individu terinfeksi sedemikian hingga dapat menularkan ke individu lain.
6. Setiap individu yang terinfeksi dapat melakukan perawatan di rumah dan rumah sakit.
7. Individu yang telah menyelesaikan pengobatan secara tuntas sehingga tidak ada lagi bakteri di dalam paru-parunya maka tubuhnya memiliki kekebalan terhadap bakteri tuberkulosis (Huo & Zou, 2016).
8. Dalam skripsi ini menggunakan nilai-nilai parameter berdasarkan penelitian dari Huo & Zou (2016).

1.6 Definisi Istilah

Dalam penelitian ini terdapat beberapa istilah yang digunakan, yaitu:

1. Analisis dinamik
 Analisis dinamik merupakan suatu metode analisis yang menggambarkan perubahan perilaku atau sifat dari satu atau lebih kejadian seiring berjalannya waktu.

2. Model matematika

Model matematika merupakan upaya dalam menyelesaikan suatu permasalahan sehari-hari dengan merepresentasikan ke dalam bentuk matematika. Bentuk dari model matematika ini biasanya berupa suatu persamaan diferensial.

3. Tuberkulosis

Tuberkulosis (TB) merupakan suatu penyakit menular kronik yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Umumnya bakteri ini menyerang paru-paru. Penularan TB terjadi melalui dahak yang dikeluarkan saat seorang penderita TB aktif bersin atau batuk.

4. Pengobatan

Pengobatan merupakan suatu proses penyembuhan dari suatu penyakit dengan menggunakan terapi maupun obat-obatan, baik dilakukan dengan perlengkapan medis modern atau tradisional.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat turunan dari satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa berorde n secara umum dapat ditulis sebagai berikut

$$F(t, \dot{x}(t), \dot{x}'(t), \dot{x}''(t), \dots, (\dot{x})^n(t)) = 0$$

dengan t merupakan variabel bebas, \dot{x} variabel tak bebas, dan $\dot{x}^{(n)}$ adalah turunan ke n dari variabel \dot{x} terhadap t .

Persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Suatu persamaan diferensial biasa dinyatakan linear berorde n jika persamaan dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(t)\dot{x}^n(t) + a_1(t)\dot{x}^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)\dot{x}(t) = f(t)$$

dengan $a_0(t) \neq 0$ dan $f(t)$ adalah bagian tak homogen. Sedangkan persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear jika variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Finizio dan Ladas, 1982).

Sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa linear dengan n variabel yang tidak diketahui dimana $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear orde satu berdimensi n dengan koefisien konstanta sebagai berikut

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t), \quad (2.1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

Sistem persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{P}\vec{x} + \vec{f}(t)$ dengan

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dan } \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau pada masa lalu (Nagle dkk, 2012). Sistem dinamik dibagi menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dan kontinu. Bentuk umum sistem dinamik diskret sebagai berikut:

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t) \text{ dengan } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.1 Sistem Autonomus

Sistem autonomus merupakan suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan fungsi f_i adalah fungsi kontinu dan tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t untuk $i = 1, 2, \dots, n$ (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.2.1 Titik Kesetimbangan

Suatu sistem autonomus (2.2) jika titik \vec{x}^* memenuhi $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ maka disebut titik kritis sistem autonomus (2.2). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem persamaan (2.2) yang bernilai konstan, sebab $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang sehingga titik kritis disebut juga sebagai titik kesetimbangan (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Boyce dan DiPrima (2009) mendefinisikan titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem autonomus (2.2) dikatakan

1. Stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$ maka berlaku $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0$,
2. Stabil asimtotik, jika stabil dan $\exists \delta_0 > 0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga sebuah solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$ maka berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$.

Kestabilan asimtotik berarti titik kesetimbangan stabil dan trayektori solusi-solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju titik kesetimbangan pada saat titik t menuju tak hingga, dan

3. Tidak stabil, jika titik tersebut tidak memenuhi kriteria stabil.

2.2.2 Sistem Autonomus Linear

Perhatikan bentuk umum sistem autonomus berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2.3}$$

juga dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

untuk menentukan tipe kestabilan titik kesetimbangan pada sistem autonomus linear (2.3) bergantung pada nilai eigen matriks A .

Teorema 2.1

Finizio dan Ladas (1982) mendefinisikan jika dimisalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem (2.3) dengan $\det(A) \neq 0$ maka titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ bersifat

1. Stabil asimtotik, jika semua $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ memiliki bagian riil negatif,
2. Stabil, jika semua nilai eigen memiliki bagian riil tak positif,
3. Tidak stabil, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif.

2.2.3 Sistem Autonomus Nonlinear

Perhatikan sistem autonomus nonlinear berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\vec{x}), \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(\vec{x}), \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(\vec{x})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dimana f_1, f_2, \dots, f_n merupakan fungsi nonlinear yang memiliki turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan \vec{x}^* . Boyce dan DiPrima (2009) menyatakan sistem (2.4) dapat didekati oleh sistem autonomus linear dengan melakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* , sehingga fungsi f_1, f_2, \dots, f_n dapat dinyatakan sebagai

$$f_i(\vec{x}) = \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*) + \eta_i(\vec{x})$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Suku sisa pada hampiran orde $f_i(\vec{x}^*)$ satu terhadap f_1, f_2, \dots, f_n memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{p}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.5}$$

dengan $\vec{p} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)$.

Selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor fungsi f_1, f_2, \dots, f_n di sekitar \vec{x}^*

serta mengingat $\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt}, \frac{dx_2}{dt} = \frac{d(x_2 - x_2^*)}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{d(x_n - x_n^*)}{dt}$, maka sistem

persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Karena $f_1(\vec{x}^*) = f_2(\vec{x}^*) = \dots = f_n(\vec{x}^*) = 0$ maka persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \mathbf{J}\vec{p} + \vec{\eta}$$

dengan

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi. Berdasarkan persamaan (2.5) jika $\vec{p} \rightarrow 0$, maka $\vec{\eta} \rightarrow 0$.

Sehingga nilai $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan disekitar titik \vec{x}^* sistem persamaan autonomus nonlinear (2.4) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \mathbf{J}\vec{p} \quad (2.7)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$ maka diperoleh $\vec{p}^* = \vec{0}$ sehingga sistem linear (2.7) memiliki titik kesetimbangan $\vec{p}^* = \vec{0}$.

Teorema 2.2

Finizio dan Ladas (1982) mengemukakan bahwa suatu titik kesetimbangan sistem autonomus nonlinear bersifat

1. Stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik,
2. Tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil.

2.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Perhatikan sebuah matriks Jacobi pada sistem autonomus berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Sistem persamaan (2.8) memiliki nilai eigen yang didapat dengan menyelesaikan $\det(J - \lambda I) = 0$, sehingga dihasilkan persamaan karakteristik

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \quad (2.9)$$

Titik kesetimbangan pada sistem (2.8) akan bersifat stabil apabila semua akar-akar persamaan karakteristik pada persamaan (2.9) bernilai negatif. Akan tetapi persamaan (2.9) umumnya sulit untuk diselesaikan, sehingga tidak mudah untuk menentukan tanda nilai eigennya. Salah satu cara untuk mengetahui tanda nilai eigen matriks (2.8) adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz seperti teorema berikut.

Teorema 2.3

Akar-akar persamaan karakteristik (2.9) mempunyai bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}
 D_1 &= a_k > 0, \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \\
 &\vdots \\
 D_k &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0,
 \end{aligned}$$

dengan $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Misalkan untuk $n = 3$, maka persamaan (2.9) menjadi

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (2.10)$$

Akar-akar persamaan (2.10) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ (Murray, 2002).

2.4 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemi, prevalensi penyebaran penyakit bergantung pada kemampuan suatu penyakit dalam menularkan terhadap suatu populasi. Dalam hal ini angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) merupakan angka yang menyatakan rata-rata banyaknya individu yang baru terinfeksi dari salah satu individu terinfeksi sebelumnya selama proses penularan penyakit pada suatu populasi rentan (Heffernan, dkk., 2005). Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) ini digunakan untuk menentukan apakah terjadi penyebaran penyakit atau tidak dalam suatu populasi.

Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, artinya tidak terjadi penyebaran penyakit karena rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi kurang dari satu individu yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$, artinya terjadi penyebaran penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi mampu menginfeksi lebih dari satu individu (Driessche dan Watmough, 2002).

2.5 Matriks Generasi Selanjutnya

Misalkan $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dimana $x_i \geq 0$ adalah jumlah individu dalam kompartemen ke- i . Asumsikan bahwa subpopulasi pertama m adalah subpopulasi yang berkorespondensi dengan individu terinfeksi, dimana $m \leq n$ sehingga

$$X_S = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

dimana X_S adalah kumpulan dari semua subpopulasi bebas penyakit.

Misalkan $\mathcal{F}_i(\vec{x})$ didefinisikan sebagai tingkat munculnya infeksi baru di subpopulasi i , $\mathcal{V}_i^+(\vec{x})$ adalah tingkat perpindahan individu masuk ke subpopulasi i dan $\mathcal{V}_i^-(\vec{x})$ merupakan tingkat perpindahan individu yang keluar dari subpopulasi i . Asumsikan bahwa setiap fungsi minimal mempunyai turunan kedua yang kontinu terhadap setiap variabel. Sehingga di dapatkan model penyebaran penyakit dengan kondisi awal tak negatif sebagai berikut

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}) = \mathcal{F}_i(\vec{x}) - \mathcal{V}_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dimana $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^-(\vec{x}) - \mathcal{V}_i^+(\vec{x})$, $\mathcal{F}_i(\vec{x})$ dan $f_i(\vec{x})$ memenuhi beberapa asumsi berikut:

1. Jika $\vec{x} \geq 0$ maka $\mathcal{F}_i(\vec{x})$, \mathcal{V}_i^- dan $\mathcal{V}_i^+ \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$,

2. Jika $x_i = 0$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$. Terutama jika $\vec{x} \in X_s$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$,
3. $\mathcal{F}_i = 0$ jika $i > m$,
4. Jika $\vec{x} \in X_s$, maka $\mathcal{F}_i(\vec{x}) = 0$ dan $\mathcal{V}_i^+(\vec{x}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$,
5. Jika $\mathcal{F}(\vec{x})$ merupakan suatu himpunan yang anggotanya diset nol maka semua nilai eigen matriks Jacobi $\mathcal{F}_i(\vec{x}) - \mathcal{V}_i(\vec{x})$ di titik kesetimbangan bebas penyakit mempunyai nilai eigen yang seluruh bagian riilnya negatif.

Lemma 2.1

Jika x_0 merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit dan $f_i(x)$ memenuhi asumsi 1-5 maka $D\mathcal{F}(x_0)$ dan $D\mathcal{V}(x_0)$ yaitu

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

dengan F dan V adalah matriks $m \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], \quad V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], \text{ dengan } i \geq 1, j \leq m.$$

Jika matriks F tak negatif dan V tidak singular, kemudian V^{-1} tidak negatif dan semua nilai eigen J_4 bernilai positif dengan

$$J_4 = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ untuk } i, j > m,$$

dan

$$J_3 = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ untuk } i > m, j \leq m,$$

maka didefinisikan $K = FV^{-1}$ sebagai matriks generasi selanjutnya adalah dan $\mathcal{R}_0 = \eta(FV^{-1})$ dimana $\eta(K)$ merupakan radius spektral matriks K (Drieschee dan Watmough, 2002).

Definisi 2.5.1 Radius Spektral

Diberikan A adalah suatu matriks $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A , maka radius spektral dari matriks A didefinisikan sebagai

$$\eta(A) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\gamma_i|\}$$

(Rahayu, 2005).

2.6 Metode Kestabilan Lyapunov

Metode Lyapunov merupakan suatu metode yang digunakan untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan pada suatu sistem dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov menggunakan beberapa teorema sehingga dapat menentukan kestabilan titik kesetimbangan dari sistem yang dianalisa.

Definisi 2.6.1 Fungsi Lyapunov Lemah

Alligood, dkk (2000) mendefinisikan fungsi Lyapunov lemah dengan memisalkan

\vec{x}^* adalah titik kesetimbangan dari sistem persamaan $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$. Fungsi $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow$

\mathbb{R} dikatakan fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi berikut

1. $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0$, untuk setiap $\vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $\mathcal{L}'(\vec{x}) \leq 0$ untuk setiap $\vec{x} \in W$.

Definisi 2.6.2 Fungsi Lyapunov Kuat

Alligood, dkk (2000) mendefinisikan fungsi \mathcal{L} adalah fungsi Lyapunov kuat untuk

\vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi

1. $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0$, untuk setiap $\vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $\mathcal{L}'(\vec{x}) < 0$ untuk setiap $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ dengan $\vec{x} \in W$.

Teorema 2.4 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov

Alligood, dkk (2000) mendefinisikan kestabilan global fungsi lyapunov dengan memisalkan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan suatu persamaan $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$, sedemikian titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat

1. Stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* ,
2. Stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* .

Contoh:

Diberikan suatu fungsi persamaan diferensial dengan solusi $x \in \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\dot{x} = -x$$

Karena x^2 selalu positif di sekitar domainnya, maka diperoleh fungsi Lyapunov dari persamaan x adalah $\mathcal{L}(x) = x^2$ di \mathbb{R} , dengan turunan pertamanya adalah

$$\dot{\mathcal{L}}(x) = V'(x)\dot{x} = 2x(-x) = -2x^2$$

Dimana $\mathcal{L}(x)$ adalah fungsi Lyapunov, karena fungsi tersebut positif dan turunan pertamanya negatif sehingga memenuhi syarat fungsi Lyapunov (Sundari & Apriliani, 2017).

2.7 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri

Peter (2014) mendefinisikan aritmatika dengan memisalkan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ maka rata-rata aritmatika yang diberikan yaitu

$$AM(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

Sedangkan untuk geometri dengan memisalkan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ sehingga rata-rata geometri yang diberikan yaitu

$$GM(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Teorema 2.5

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ dimana $n \geq 2$ maka

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (2.11)$$

Pada pertidaksamaan (2.11) akan menjadi sebuah persamaan jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2.8 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika diketahui A adalah suatu matriks berorde $n \times n$. Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dan $x \neq 0$ disebut dengan vektor Eigen dari A jika Ax adalah perkalian skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.12)$$

dimana λ yang memenuhi persyaratan tersebut disebut nilai Eigen dari A dan x disebut vektor Eigen dari A yang bergantung pada λ . Sehingga untuk memperoleh nilai matriks berorde $n \times n$ maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.13)$$

dengan I adalah matriks identitas sedemikian hingga diperoleh solusi tak nol jika dan hanya jika,

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

Persamaan (2.12) menghasilkan persamaan polynomial terhadap variabel λ yang disebut persamaan karakteristik dari matriks A . Sedangkan skalar (λ) yang

memenuhi persamaan karakteristik disebut nilai Eigen dari matriks A (Anton dan Rorres, 2004).

2.9 Model Epidem SEIR

Model epidemi SEIR adalah pengembangan dari model epidemi SIR yang dilakukan oleh Kermack dan McKendrick. Model epidemi SEIR ditujukan untuk memodelkan penyakit yang masa inkubasinya lama dikarenakan individu yang terinfeksi belum dapat menularkan kepada individu rentan (Hurint, Ndi, & Lobo, 2017). Model epidemi SEIR terbagi dalam empat subpopulasi yaitu *Susceptible* (S) yaitu kelas individu yang rentan terinfeksi penyakit, *Exposed* (E) yaitu kelas individu yang telah terinfeksi namun tidak menunjukkan gejala atau disebut laten, *Infected* (I) yaitu kelas individu yang terinfeksi dan dapat menularkan ke individu lain, dan *Recovered* (R) yaitu kelas individu yang telah sembuh.

2.10 Tuberkulosis

Tuberkulosis (TB) merupakan penyakit menular kronik yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Penyakit ini pada umumnya menyerang paru-paru namun dapat juga menyerang organ tubuh lainnya seperti sistem saraf, sistem limfatik, tulang sendi dan peritoneum. Tuberkulosis juga dideskripsikan sebagai penyakit yang lambat karena periode latennya panjang namun periode infeksiya sangat cepat.

Penularan TB umumnya melalui droplet di udara ketika seseorang yang terinfeksi TB aktif batuk, bersin atau ketika berbicara sehingga kemudian terhirup oleh individu lain dan masuk ke paru-paru melalui sistem pernafasan. Bakteri yang masuk ke dalam tubuh tanpa disadari dapat menetap dan berkembang biak,

kemudian akan menyebar dari paru-paru ke bagian tubuh lainnya, melalui saluran peredaran darah, sistem pernafasan, jaringan limfe atau langsung ke organ tubuh lainnya. Daya penularan dari seorang penderita TB ditentukan dari banyaknya bakteri yang dikeluarkan melalui dahak. Makin tinggi derajat positif pemeriksaan dahaknya, maka penularannya pun semakin cepat.

Masa inkubasi bakteri ini sekitar 2 hingga 12 minggu sampai timbulnya gejala TB. Bakteri ini mempunyai sifat khusus yaitu tahan terhadap asam pada pewarnaan dan tidak berspora sehingga bakteri ini dapat bertahan hidup di tempat yang lembab. Masa inkubasi yang panjang menyebabkan seseorang tidak menyadari jika dirinya terinfeksi TB. Pasien TB yang telah terinfeksi namun tidak menunjukkan gejala apapun disebut sebagai pasien TB laten. Sedangkan individu TB aktif adalah individu yang telah terinfeksi positif TB sehingga perlu dilakukan penanganan serius untuk memutuskan mata rantai penyebaran. Mendiagnosis seseorang terinfeksi TB dapat dilakukan melalui anamnesa fisik, pemeriksaan laboratorium berupa pengambilan sampel darah, dahak dan cairan otak, pemeriksaan patologi anatomi, dan rontgen dada.

Gejala utama pada pasien TB biasanya mengalami batuk berdahak selama 2-3 minggu atau lebih. Selain batuk, dapat diikuti dengan gejala lainnya seperti dahak bercampur darah, sesak nafas, badan lemas, nafsu makan menurun, berat badan menurun, berkeringat di malam hari tanpa berkegiatan fisik, dan demam hingga sebulan lebih. Penyakit TB dapat terjangkit pada semua kalangan baik anak-anak sampai orang dewasa. Faktor-faktor yang menyebabkan penularan TB diantaranya adalah mengkonsumsi makanan yang kurang bergizi mengakibatkan daya tahan tubuh rendah sehingga mudah untuk terinfeksi, konstruksi rumah yang

tidak berventilasi dan cenderung lembab dapat menjadi sarang pertumbuhan bakteri, kebiasaan merokok baik pasif maupun aktif dapat memperburuk gejala TB, dan perilaku individu yang kurang disiplin dalam menjaga kebersihan dan kesehatan diri sendiri (Wikurendra, 2019).

Upaya pencegahan penularan TB dapat dilakukan secara mandiri dengan mengkarantina diri oleh pasien aktif TB selama proses pengobatan. Pengobatan TB dilakukan paling minimal yaitu 6 bulan secara teratur. Namun, jika tidak dilakukan secara teratur maka kemungkinan sembuh akan sangat lama. Bahkan dapat menjadi sangat parah ketika obat menjadi resisten terhadap pasien TB aktif. Pencegahan yang dapat dilakukan adalah dengan pemberian vaksin BCG sebelum bayi berusia dua bulan, mengenakan masker saat berada di tempat ramai, tutupi mulut saat bersin atau batuk, dan tidak membuang dahak atau meludah sembarangan.

2.11 Pencegahan Penyakit dalam Islam

Islam merupakan agama yang sempurna dan menyeluruh yang mampu mengatur segala aspek kehidupan manusia. Salah satu aspek yang penting dan memiliki kedudukan tersendiri dalam islam adalah masalah kesehatan sebab ketika sakit seseorang tidak akan maksimal dalam menjalankan aktivitasnya, terutama dalam beribadah. Islam bahkan menempatkan kesehatan sebagai kenikmatan terbesar kedua setelah iman maka hendaklah manusia untuk banyak bersyukur atas anugerah kesehatan yang diberikan oleh Allah SWT.

Akbar dan Budiyanto (2020) dalam konsep *Ad-dhoruriyyat* menyatakan bahwa kesehatan merupakan salah satu tujuan utama kehadiran agama islam yaitu memelihara jiwa (*Hifdz an-Nafs*). Hal ini menunjukkan bahwa islam sangat

menganjurkan untuk menjaga kesehatan, baik secara jasmani maupun rohani. Salah satu penerapannya adalah dengan selalu menjaga kebersihan baik kebersihan diri sendiri atau lingkungan sekitarnya, sebab seseorang yang menjaga kebersihan akan dicintai oleh Allah SWT. Sebagai contoh yaitu perintah untuk berwudhu. Berwudhu dapat mencegah masuknya penyakit ke tubuh. Keutamaan berwudhu juga dapat menggugurkan dosa, sebagaimana sabda Rasulullah Saw bahwa *“Barang siapa berwudhu dan membaguskan wudhunya, maka keluarlah dosa-dosa dari jasadnya hingga keluar dari bawah kuku-kukunya”* (H.R Muslim).

Selain itu, mengatur pola makan dan mengkonsumsi makanan yang baik juga dianjurkan dalam islam. Hendaklah seseorang mengupayakan makanan yang dikonsumsi bergizi dan menghindari makanan yang haram karena akan mengganggu kesehatan tubuh. Sebagaimana sabda Rasulullah Saw bahwa *“Setiap tubuh yang tumbuh dari (makanan) yang haram, maka api neraka lebih utama baginya”* (H.R. At-Thabrani). Membiasakan adab ketika makan dan minum seperti Rasulullah Saw lakukan sangat bermanfaat bagi kesehatan tubuh. Diantaranya dengan berdoa sebelum makan, mencuci tangan sebelum makan, menggunakan tangan kanan, tidak berlebihan, dan makan atau minum sambil duduk. Rasulullah Saw bersabda *“Janganlah kalian minum sambil berdiri. Jika kalian lupa, maka hendaknya ia muntahkan”* (H.R Muslim).

Suatu penyakit menular tertentu dapat terjadi tanpa disadari karena gejala yang ditimbulkan tidak langsung muncul. Dalam islam, wabah penyakit adalah sebuah peringatan sekaligus memberikan pelajaran kepada manusia bahwa manusia itu lemah dihadapan Allah SWT. Wabah menjadi sebuah bentuk refleksi bagi umat islam untuk semakin meningkatkan ketakwaan serta keimanan kepada

Allah SWT. Rasulullah Saw bersabda: “*Thaun (wabah penyakit menular) adalah suatu peringatan dari Allah SWT untuk menguji hamba-Nya dari kalangan manusia*” (H.R. Bukhari dan Muslim).

Sejarah islam mencatat telah terjadi wabah penyakit pada masa kekhalifahan Umar bin Khattab yang dinamakan *tha'un amwas*. Dinamakan *tha'un amwas* karena wabah ini muncul pertama kali di kota amwas sekitar tahun 639 M kemudian menyebar ke daerah Syam hingga ke Irak (Ridho, 2020). Penyebaran wabah ini sangat cepat bahkan hingga menyebabkan kematian. Penyakit ini disebabkan oleh infeksi bakteri *Pasterella Pestis* yang menyebabkan pembengkakan parah dan penderitanya merasakan panas hingga menimbulkan bercak-bercak kemerahan pada kulit.

Pada saat itu, khalifah Umar beserta rombongan yang pergi ke Syam menerima kabar bahwa daerah yang akan mereka kunjungi sedang dilanda wabah penyakit. Khalifah Umar yang berada di daerah Sar' dekat Tabuk pun berhenti dan berdiskusi kepada kaum Muhajirin dan Anshar serta para pemimpin militer diantaranya Abu Ubaidah bi Jarrah, Yazid bin Abi Sufyan dan Syurahbil bin Hasanah untuk tetap melanjutkan perjalanan atau kembali ke Madinah. Dalam diskusinya terjadi perbedaan pendapat, sehingga dengan mempertimbangkan pendapat dari para sesepuh Quraisy, akhirnya Umar bin Khattab mengambil keputusan untuk tidak melanjutkan perjalanan. Sebagaimana diriwayatkan Rasulullah Saw bahwa beliau bersabda: “*Jika kalian mendengar wabah di suatu daerah, maka jangan memasuki daerah tersebut; dan jika terjadi wabah ditempat kalian berada, maka jangan tinggalkan daerah tersebut*” (H.R. Bukhari). Hadist ini melarang memasuki daerah yang terkena wabah sehingga tidak semakin

banyak terjadi penularan. Sebaliknya jika terjadi wabah di wilayah yang ditinggali maka tidak boleh keluar dari wilayah tersebut guna memutus mata rantai penyebarannya agar tidak meluas ke wilayah lain.

Dalam menangani wabah ini, khalifah Umar memerintahkan kepada gubernur Abu Ubaidah bin Al-Jarrah untuk memindahkan rakyatnya ke daerah yang terbebas dari wabah *tha'un*. Namun, sebelum terlaksana Abu Ubaidah telah wafat duluan, hingga strategi ini baru dijalankan pada kepemimpinan Amr bin Ash. Amr bin Ash meminta kepada rakyatnya untuk berpencar dan berlindung ke bukit-bukit. Penanganan wabah yang dilakukan oleh Amr bin Ash ini sangat relevan dan efektif untuk menanggulangi wabah *tha'un*. Wabah *tha'un* telah menelan korban hingga 25.000 orang.

Wabah penyakit menjadi salah satu bentuk menyadarkan manusia untuk lebih bersyukur dan mengambil hikmah dari apa yang terjadi. Setiap penyakit dapat disembuhkan, sebagaimana yang diriwayatkan oleh Imam Bukhori dari sahabat Abu Hurairah bahwa Nabi Saw bersabda: *“Tidak ada penyakit yang Allah turunkan, kecuali Allah turunkan pula obatnya”* (HR. Bukhori). Dan Rasulullah Saw juga bersabda: *“Setiap penyakit ada obatnya. Apabila ditemukan obat yang tepat untuk suatu penyakit, akan sembuhlah penyakit itu dengan izin Allah”* (HR. Muslim). Kedua hadist tersebut menjelaskan bahwa islam menganjurkan umatnya untuk bertawakal dalam kesembuhan suatu penyakit dan salah satu cara untuk sembuh adalah dengan menemukan obat yang tepat.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan jenis penelitian kualitatif dengan menggunakan metode studi pustaka. Bentuk dari penelitian kualitatif yaitu dilakukan analisis dinamik terhadap penyebaran tuberkulosis dengan melihat pada dua lokasi pengobatan sehingga diperoleh perilaku kualitatif model secara umum. Selanjutnya dilakukan analisis numerik dengan memberikan nilai-nilai parameter dari artikel Huo dan Zou (2016) untuk menampilkan grafik solusi berupa simulasi numerik ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, $\mathcal{R}_0 > 1$ dengan $\omega_2 = 0$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$ dengan $\omega_2 \neq 0$.

3.2 Tahapan Penelitian

Berikut merupakan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian:

1. Mengkaji, mempelajari buku-buku maupun jurnal-jurnal yang berkaitan dengan masalah model matematik SEIR. Pada penulisan skripsi ini, penulis mengambil rujukan utama model SEIR dari penelitian yang ditulis oleh Huo & Zou (2016).

2. Menganalisis

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan diagram alir dari model SEIR berdasarkan asumsi dan parameter yang telah dibuat.

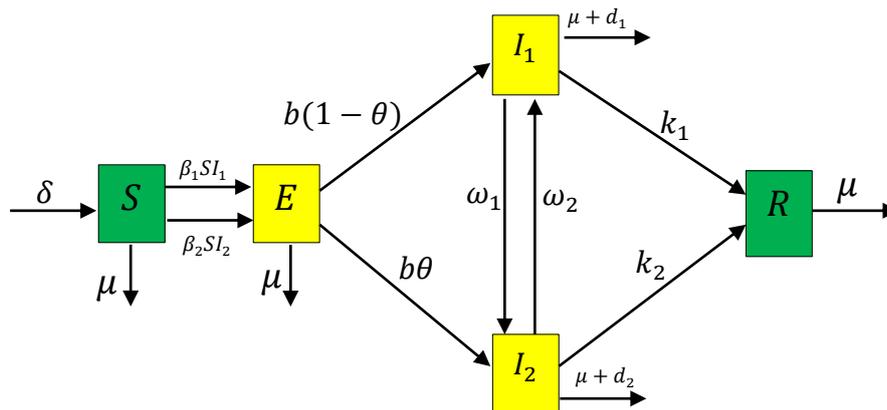
- b. Membangun model matematika berdasarkan jurnal rujukan utama dengan menambahkan parameter $b(1 - \theta)$ dan $b\theta$ sebagai proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_1 dan I_2 .
- c. Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu dengan membuat laju dari masing-masing populasi sama dengan nol. Kemudian dari model tersebut diasumsikan $I_1 = I_2 = 0$ dengan kata lain tidak ada individu yang terinfeksi.
- d. Menentukan angka reproduksi dasar dengan membentuk matriks Jacobi dari model yang hanya terdiri dari subpopulasi yang terpapar penyakit TB. Selanjutnya matriks tersebut disubstitusikan terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit. Kemudian dari matriks tersebut ditentukan matriks generasi selanjutnya untuk melihat nilai eigen terbesar sebagai angka reproduksi dasar.
- e. Selanjutnya akan ditentukan juga titik kesetimbangan endemik. Untuk menentukan titik kesetimbangan endemik diasumsikan telah terjadi penyebaran penyakit sehingga $I_1 = I_2 \neq 0$. Kemudian dengan menggunakan angka reproduksi dasar akan dianalisis untuk menentukan eksistensi dari titik kesetimbangan endemik.
- f. Pada tahap ini akan dianalisis kestabilan lokal pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dengan melakukan linearisasi pada sistem menggunakan matriks Jacobi. Kemudian untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

- g. Selanjutnya akan dianalisis kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dengan menggunakan fungsi Lyapunov.
 - h. Membuat simulasi numerik dari model SEIR dalam bentuk grafik dengan bantuan ODE45 dan *software* MATLAB dengan memasukkan nilai-nilai parameter yang telah dibuat untuk mengetahui perilaku kualitatif dari model penyebaran TB dengan dua lokasi pengobatan yaitu di rumah dan rumah sakit.
3. Membuat kesimpulan.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Konstruksi Model

Populasi dalam penelitian ini dibagi kedalam lima subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi laten (E), subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah (I_1), subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah sakit (I_2), dan subpopulasi sembuh (R). Selanjutnya, aliran populasi diantara kompartemen S, E, I_1, I_2 , dan R disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 4.1 berikut



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Infeksi TB

Adapun parameter yang digunakan dalam sistem persamaan diferensial pada model SEIR dengan dua lokasi pengobatan dinyatakan sebagai berikut

Tabel 4.1 Satuan Parameter Model SEIR

Parameter	Keterangan	Satuan
δ	Laju kelahiran alami	Per Tahun
β_1	Koefisien transmisi dari individu rentan ke individu laten karena adanya interaksi dengan subpopulasi I_1	Per Tahun
β_2	Koefisien transmisi dari individu rentan ke individu	Per Tahun

	laten karena adanya interaksi dengan subpopulasi I_1	
μ	Laju kematian alami	Per Tahun
b	Koefisien transmisi dari individu laten ke individu terinfeksi I_1 dan I_2	Per Tahun
$1 - \theta$	Proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_1	Tak berdimensi
θ	Proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_2	Tak berdimensi
ω_1	Laju perubahan individu subpopulasi I_2 dari subpopulasi I_1	Per Tahun
ω_2	Laju perubahan individu subpopulasi I_1 dari subpopulasi I_2	Per Tahun
k_1	Laju keberhasilan pengobatan dari subpopulasi I_1 menjadi subpopulasi R	Per Tahun
k_2	Laju keberhasilan pengobatan dari subpopulasi I_2 menjadi subpopulasi R	Per Tahun
d_1	Laju kematian pada subpopulasi I_1 akibat terinfeksi penyakit	Per Tahun
d_2	Laju kematian pada subpopulasi I_2 akibat terinfeksi penyakit	Per Tahun

Berdasarkan model kompartemen pada Gambar 4.1 tersebut maka laju perubahan pada subpopulasi rentan, subpopulasi laten, subpopulasi terinfeksi TB yang melakukan pengobatan di rumah, subpopulasi terinfeksi TB yang melakukan pengobatan di rumah sakit adalah sebagai berikut.

4.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Rentan

Setiap individu yang baru lahir termasuk dalam subpopulasi rentan (S), akibatnya jumlah individu pada subpopulasi rentan meningkat dengan laju

sebesar δ . Setiap individu pada subpopulasi rentan yang berinteraksi langsung dengan individu terinfeksi yang sedang melakukan pengobatan di rumah (I_1) maupun di rumah sakit (I_2) akan terinfeksi dan masuk ke dalam subpopulasi laten (E) dengan laju masing-masing sebesar β_1 dan β_2 . Hal ini mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan dengan laju sebesar $(\beta_1 I_1 S + \beta_2 I_2 S)$.

Kematian alami individu pada subpopulasi rentan juga menyebabkan berkurangnya jumlah subpopulasi rentan dengan laju sebesar μ . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi rentan (S) pada infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan terhadap waktu adalah

$$\frac{dS}{dt} = \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S. \quad (4.1)$$

4.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Laten

Individu subpopulasi rentan yang melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi yang sedang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit akan menjadi individu terinfeksi tanpa gejala dengan laju masing masing sebesar β_1 dan β_2 . Hal ini menyebabkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi laten dengan laju sebesar $(\beta_1 I_1 S + \beta_2 I_2 S)$.

Adanya perpindahan pada individu laten ke individu terinfeksi menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi laten berkurang. Berkurangnya jumlah individu subpopulasi laten dikarenakan adanya interaksi dengan individu terinfeksi yang sedang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit dengan laju perpindahan masing masing sebesar $b(1 - \theta)$ dan $b\theta$. Selain itu, jumlah

individu pada subpopulasi laten berkurang juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju sebesar μ . Maka laju perubahan sebesar $(b(1 - \theta) + b\theta + \mu)E$.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi laten pada infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan terhadap waktu adalah

$$\frac{dE}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (b(1 - \theta) + b(\theta) + \mu)E. \quad (4.2)$$

4.1.3 Laju Perubahan Subpopulasi Terinfeksi yang Melakukan Pengobatan di Rumah

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi laten akibat interaksi dengan individu subpopulasi I_1 mengakibatkan jumlah subpopulasi I_1 bertambah dengan laju sebesar $b(1 - \theta)$. Selain itu, adanya perpindahan dari individu terinfeksi I_2 menjadi individu terinfeksi I_1 mengakibatkan jumlah individu subpopulasi I_1 bertambah dengan laju sebesar ω_2 . Sehingga laju perubahan terjadi sebesar $b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2$.

Jika setiap individu terinfeksi I_1 yang tidak melakukan pengobatan dengan baik sehingga gejala yang ditimbulkan semakin parah maka individu terinfeksi I_1 berubah menjadi individu terinfeksi I_2 . Hal ini menyebabkan berkurangnya jumlah populasi individu I_1 dengan laju sebesar ω_1 . Sedangkan individu terinfeksi I_1 yang melakukan pengobatan dan berhasil akan menjadi individu sembuh sehingga jumlah subpopulasi individu I_1 berkurang dengan laju sebesar k_1 . Perubahan jumlah individu terinfeksi I_1 juga disebabkan adanya kematian alami dan kematian akibat penyakit. Hal ini menyebabkan berkurangnya jumlah

individu subpopulasi I_1 dengan laju masing-masing sebesar μ dan d_1 . Sehingga diperoleh laju perubahan sebesar $(\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1$.

Dengan demikian laju perubahan subpopulasi I_1 pada infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan terhadap waktu adalah

$$\frac{dI_1}{dt} = b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - (\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1. \quad (4.3)$$

4.1.4 Laju Perubahan Subpopulasi Terinfeksi yang Melakukan Pengobatan di Rumah Sakit

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi laten akibat interaksi dengan individu terinfeksi I_2 mengakibatkan jumlah individu subpopulasi I_2 bertambah dengan laju sebesar $b\theta$. Selain itu perpindahan individu terinfeksi I_1 menjadi individu terinfeksi I_2 juga menyebabkan jumlah individu subpopulasi I_2 bertambah dengan laju sebesar ω_1 . Sehingga diperoleh laju perubahan sebesar $b\theta E + \omega_1 I_1$.

Berkurangnya jumlah individu terinfeksi I_2 menjadi individu terinfeksi I_1 dengan laju sebesar ω_2 karena gejala yang ditimbulkan lebih ringan sehingga dapat dilakukan pengobatan di rumah. Selain itu, berkurangnya subpopulasi I_2 disebabkan oleh perubahan individu terinfeksi I_2 menjadi individu sembuh (R) dengan laju sebesar k_2 . Sehingga diperoleh laju perubahan sebesar $(\omega_2 - k_2)I_2$.

Perubahan jumlah individu terinfeksi I_2 juga disebabkan adanya kematian alami dan kematian akibat penyakit. Hal ini menyebabkan berkurangnya jumlah individu subpopulasi I_2 dengan laju masing-masing sebesar μ dan d_2 . Laju berkurangnya subpopulasi I_2 sebesar $(\mu - d_2)I_2$.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi I_2 pada infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan terhadap waktu adalah

$$\frac{dI_2}{dt} = b\theta E + \omega_1 I_1 - (\omega_2 + k_2 + \mu + d_2) I_2. \quad (4.4)$$

4.1.5 Laju Perubahan Subpopulasi Sembuh

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi menjadi individu sembuh (R) menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi sembuh bertambah dengan laju sebesar k_1 karena individu terinfeksi I_1 berubah menjadi individu sembuh (R) dan laju sebesar k_2 karena individu terinfeksi I_2 berubah menjadi individu sembuh (R). Perubahan jumlah individu pada subpopulasi sembuh juga disebabkan oleh kematian alami. Hal ini menyebabkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi sembuh dengan laju sebesar μ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi sembuh (R) pada infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan terhadap waktu adalah

$$\frac{dR}{dt} = k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R. \quad (4.5)$$

Berdasarkan persamaan (4.1) – (4.5), maka model epidemik tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan adalah sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - (b(1 - \theta) + b\theta + \mu) E$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - (\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= b\theta E + \omega_1 I_1 - (\omega_2 + k_2 + \mu + d_2)I_2 \\
\frac{dR}{dt} &= k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Misalkan $b_0 = b(1 - \theta) + b\theta + \mu$, $b_1 = \omega_1 + k_1 + \mu + d_1$ dan $b_2 = \omega_2 + k_2 + \mu + d_2$ maka persamaan (4.6) menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S \\
\frac{dE}{dt} &= (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - b_0 E \\
\frac{dI_1}{dt} &= b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - b_1 I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= b\theta E + \omega_1 I_1 - b_2 I_2 \\
\frac{dR}{dt} &= k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dengan kondisi awal $S(0) > 0, E(0) \geq 0, I_1(0) \geq 0, I_2(0) \geq 0, R(0) \geq 0$.

Dapat dilihat bahwa subpopulasi R tidak mempengaruhi laju perubahan subpopulasi lain, sehingga persamaan (4.7) dapat direduksi menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S \\
\frac{dE}{dt} &= (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - b_0 E \\
\frac{dI_1}{dt} &= b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - b_1 I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= b\theta E + \omega_1 I_1 - b_2 I_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Total populasi pada sistem (4.6) didefinisikan sebagai $N = S + E + I_1 + I_2 + R$ maka

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dR}{dt} \\
&= \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S + (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (b(1-\theta) + b\theta + \mu)E + \\
&\quad b(1-\theta)E + \omega_2 I_2 - (\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1 + b\theta E + \omega_1 I_1 - (\omega_2 + \\
&\quad k_2 + \mu + d_2)I_2 + k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R \\
&= \delta - \mu(S + E + I_1 + I_2 + R) - d_1 I_1 - d_2 I_2 \\
&= \delta - \mu N - d_1 I_1 - d_2 I_2
\end{aligned} \tag{4.9a}$$

Sehingga diperoleh jumlah populasi bervariasi terhadap waktu. Kemudian dari persamaan (4.9a), untuk setiap $t \geq 0$ populasi tidak terinfeksi penyakit maka diasumsikan sebagai

$$\frac{dN}{dt} \leq \delta - \mu N \tag{4.9b}$$

Kemudian akan dihitung integral dari persamaan (4.9b) dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{\delta - \mu N} &\leq dt \\
\int_{N_0}^{N_t} \frac{dN}{\delta - \mu N} &\leq \int_0^t dt \\
-\frac{1}{\mu} \ln(\delta - \mu N_t) + \frac{1}{\mu} \ln(\delta - \mu N_0) &\leq t \\
-\ln(\delta - \mu N_t) + \ln(\delta - \mu N_0) &\leq \mu t \\
\ln(\delta - \mu N_t) - \ln(\delta - \mu N_0) &\leq -\mu t \\
\ln \left[\frac{\delta - \mu N_t}{\delta - \mu N_0} \right] &\geq -\mu t
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\delta - \mu N_t}{\delta - \mu N_0} \right] \geq e^{-\mu t}$$

$$\delta - \mu N_t \geq (\delta - \mu N_0) e^{-\mu t}$$

$$\frac{\delta}{\mu} - N_t \geq \left(\frac{\delta}{\mu} - N_0 \right) e^{-\mu t}$$

$$\frac{\delta}{\mu} - \left(\frac{\delta}{\mu} - N_0 \right) e^{-\mu t} \geq N_t$$

$$\frac{\delta}{\mu} - \frac{\delta}{\mu} e^{-\mu t} + N_0 e^{-\mu t} \geq N_t$$

$$\frac{\delta}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + N_0 e^{-\mu t} \geq N_t$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + N_0 e^{-\mu t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} N_t$$

$$\frac{\delta}{\mu} + \lim_{t \rightarrow \infty} N_0 e^{-\mu t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} N_t$$

Jika t membesar maka diperoleh

$$\frac{\delta}{\mu} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} N_t \quad (4.9c)$$

diperoleh persamaan (4.9c) sehingga $0 \leq N_t \leq \frac{\delta}{\mu}$. Maka daerah solusi untuk sistem (4.8) sebagai berikut

$$\Omega = \left\{ (S, E, I_1, I_2, R) \in R_+^5 : N \leq \frac{\delta}{\mu} \right\}. \quad (4.9d)$$

4.2 Titik Kesetimbangan dan Angka Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan sistem persamaan (4.8) diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = 0$,

$\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI_1}{dt} = 0$, $\frac{dI_2}{dt} = 0$, sehingga diperoleh

$$\delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - \mu S = 0 \quad (4.10a)$$

$$(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - b_0 E = 0 \quad (4.10b)$$

$$b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - b_1 I_1 = 0 \quad (4.10c)$$

$$b\theta E + \omega_1 I_1 - b_2 I_2 = 0 \quad (4.10d)$$

4.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Untuk menentukan titik keseimbangan bebas penyakit dengan mengasumsikan bahwa tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sehingga nilai $I_1 = I_2 = 0$. Selanjutnya ditentukan titik keseimbangan bebas penyakit sebagai berikut

Substitusikan $I_1 = I_2 = 0$ pada persamaan (4.10a), sehingga diperoleh

$$\delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S = 0$$

$$\delta - \mu S = 0$$

$$S = \frac{\delta}{\mu} \quad (4.11)$$

Kemudian, substitusikan $I_1 = I_2 = 0$ dan persamaan (4.11) pada persamaan (4.10b), diperoleh

$$(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - b_0 E = 0$$

$$(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S = b_0 E$$

$$E = 0 \quad (4.12)$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit $P^0 = (S^0, E^0, I_1^0, I_2^0)$ atau dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P^0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0 \right). \quad (4.13)$$

4.2.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar menyatakan banyaknya individu terinfeksi baru yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi tuberkulosis selama proses penularan penyakit. Misalkan $\vec{x}_i = (E', I_1', I_2', S')^T$, sehingga sistem (4.8) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \mathcal{F}_i(\vec{x}) - \mathcal{V}_i(\vec{x}), i = 1,2,3,4$$

Dimana \mathcal{F}_i menotasikan laju munculnya individu baru terinfeksi tuberkulosis yang masuk ke dalam populasi, sehingga

$$\mathcal{F}_i(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dan \mathcal{V}_i menotasikan laju perpindahan keluar atau masuknya individu karena terinfeksi TB, sehingga terjadi perubahan tanda sebagai berikut

$$\mathcal{V}_i(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 E \\ b_1 I_1 - \omega_2 I_2 - b(1 - \theta)E \\ b_2 I_2 - \omega_1 I_1 - b\theta E \\ \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \delta \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, didefinisikan angka reproduksi dasar pada sistem (4.8) sebagai angka terinfeksi tuberkulosis yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi tuberkulosis. Sehingga komponen pembentuk matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} terdiri dari individu subpopulasi laten (E), individu terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah (I_1), dan individu terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah sakit (I_2). Sehingga matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 E \\ b_1 I_1 - \omega_2 I_2 - b(1 - \theta)E \\ b_2 I_2 - \omega_1 I_1 - b\theta E \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, dimisalkan matriks F dan V masing-masing adalah matriks Jacobi \mathcal{F} dan \mathcal{V} . Kemudian dilakukan linearisasi, sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial E} & \frac{\partial F_1}{\partial I_1} & \frac{\partial F_1}{\partial I_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial E} & \frac{\partial F_2}{\partial I_1} & \frac{\partial F_2}{\partial I_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial E} & \frac{\partial F_3}{\partial I_1} & \frac{\partial F_3}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 S & \beta_2 S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial E} & \frac{\partial V_1}{\partial I_1} & \frac{\partial V_1}{\partial I_2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial E} & \frac{\partial V_2}{\partial I_1} & \frac{\partial V_2}{\partial I_2} \\ \frac{\partial V_3}{\partial E} & \frac{\partial V_3}{\partial I_1} & \frac{\partial V_3}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ -b(1-\theta) & b_1 & -\omega_2 \\ -b\theta & -\omega_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Kemudian, matriks Jacobi F dan V akan dievaluasi di titik kesetimbangan bebas penyakit $P^0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0\right)$. Sehingga dengan substitusi P^0 ke matriks F dan V diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1 \delta}{\mu} & \frac{\beta_2 \delta}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ -b(1-\theta) & b_1 & -\omega_2 \\ -b\theta & -\omega_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya mencari invers dari V yaitu,

Pertama, tentukan nilai adjoint dengan menggunakan kofaktor sebagai berikut

$$kof(V) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & b_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -b(1-\theta) & -\omega_2 \\ -b\theta & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -b(1-\theta) & b_1 \\ -b\theta & -\omega_1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_1 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_0 & 0 \\ -b\theta & b_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_0 & 0 \\ -b\theta & -\omega_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & -\omega_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_0 & 0 \\ -b(1-\theta) & -\omega_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_0 & 0 \\ -b(1-\theta) & b_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1b_2 - \omega_1\omega_2 & b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta & \omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta \\ 0 & b_0b_2 & b_0\omega_1 \\ 0 & b_0\omega_2 & b_0b_1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh

$$Adj(V) = (kof(V))^T = \begin{pmatrix} b_1b_2 - \omega_1\omega_2 & 0 & 0 \\ b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta & b_0b_2 & b_0\omega_2 \\ \omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta & b_0\omega_1 & b_0b_1 \end{pmatrix}$$

Kedua, tentukan determinan dari matriks V dengan menggunakan metode minor-kofaktor sebagai berikut

$$MV_{11} = \begin{vmatrix} b_1 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & b_2 \end{vmatrix} = b_1b_2 - \omega_1\omega_2$$

$$MV_{12} = \begin{vmatrix} -b(1 - \theta) & -\omega_2 \\ -b\theta & b_2 \end{vmatrix} = -b_2b(1 - \theta) - \omega_2b\theta$$

$$MV_{13} = \begin{vmatrix} -b(1 - \theta) & b_1 \\ -b\theta & -\omega_1 \end{vmatrix} = \omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \det(V) &= b_0 \cdot (-1)^2 \cdot (b_1b_2 - \omega_1\omega_2) + 0 \cdot (-1)^3 \cdot (-b_2b(1 - \theta) - \omega_2b\theta) + \\ &\quad 0 \cdot (-1)^4 \cdot (\omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta) \\ &= b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2) \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh invers matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \frac{1}{\det(V)} Adj(V) \\ &= \frac{1}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} \begin{pmatrix} b_1b_2 - \omega_1\omega_2 & 0 & 0 \\ b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta & b_0b_2 & b_0\omega_2 \\ \omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta & b_0\omega_1 & b_0b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_1b_2 - \omega_1\omega_2}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} & 0 & 0 \\ \frac{b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} & \frac{b_0b_2}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} & \frac{b_0\omega_2}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} \\ \frac{\omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} & \frac{b_0\omega_1}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} & \frac{b_0b_1}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

Kemudian, bentuk matriks generasi selanjutnya $K = FV^{-1}$ adalah

$$K = FV^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1 \delta}{\mu} & \frac{\beta_2 \delta}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{21} + \beta_2 v_{31}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 v_{32}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{23} + \beta_2 v_{33}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, diperoleh nilai eigen dari matriks K adalah

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{21} + \beta_2 v_{31}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 v_{32}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{23} + \beta_2 v_{33}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{21} + \beta_2 v_{31}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 v_{32}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{23} + \beta_2 v_{33}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{21} + \beta_2 v_{31}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} - \lambda & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 v_{32}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{23} + \beta_2 v_{33}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda) \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{21} + \beta_2 v_{31}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} - \lambda & \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 v_{32}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\ 0 & -\lambda \end{matrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda) \left| \frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 v_{21} + \beta_2 v_{31}}{b_0(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} - \lambda(-\lambda) \right| = 0$$

Sehingga diperoleh nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_3 = \frac{\delta \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 \omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta}{\mu b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)}$$

Ingat bahwa $b_0 = b(1 - \theta) + b\theta + \mu$, $b_1 = \omega_1 + k_1 + \mu + d_1$ dan $b_2 = \omega_2 + k_2 + \mu + d_2$. Sehingga untuk mengetahui bahwa $\lambda_3 > 0$ adalah sebagai berikut

$$\Leftrightarrow b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)$$

$$\Leftrightarrow (b(1 - \theta) + b\theta + \mu)((\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)(\omega_2 + k_2 + \mu + d_2) - \omega_1\omega_2)$$

$$\Leftrightarrow (b(1 - \theta) + b\theta + \mu)(\omega_1\omega_2 + \omega_1k_2 + \omega_1\mu + \omega_1d_2 + \omega_2k_1 + k_1k_2 + k_1\mu + k_1d_2 + \omega_2\mu + k_2\mu + \mu^2 + d_2\mu + \omega_2d_1 + k_2d_1 + \mu d_1 + d_1d_2 - \omega_1\omega_2)$$

$$\Leftrightarrow (b(1 - \theta) + b\theta + \mu)(\omega_1k_2 + \omega_1\mu + \omega_1d_2 + \omega_2k_1 + k_1k_2 + k_1\mu + k_1d_2 + \omega_2\mu + k_2\mu + \mu^2 + d_2\mu + \omega_2d_1 + k_2d_1 + \mu d_1 + d_1d_2)$$

Berdasarkan penjabaran tersebut, dapat dilihat bahwa $\lambda_3 > 0$ dikarenakan $b_0b_1b_2 > b_0\omega_1\omega_2$.

Nilai bilangan reproduksi dasar merupakan bentuk dari radius spektral dari matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \eta(K)$$

$$= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$$

$$= \max\left\{0, 0, \frac{\delta \beta_1(b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta) + \beta_2\omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta}{b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)}\right\}$$

$$= \frac{\delta \beta_1(b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta) + \beta_2\omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta}{\mu b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)}$$

Sehingga diperoleh nilai \mathcal{R}_0 dari sistem (4.8) adalah

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta \beta_1(b_2b(1 - \theta) + \omega_2b\theta) + \beta_2(\omega_1b(1 - \theta) + b_1b\theta)}{\mu b_0(b_1b_2 - \omega_1\omega_2)} \quad (4.14)$$

4.2.3 Titik Keseimbangan Endemik

Titik keseimbangan endemik ditentukan dengan mengasumsikan telah terjadi penyebaran penyakit, sehingga nilai $I_1 \neq 0$ dan $I_2 \neq 0$.

Dari persamaan (4.10c) diperoleh

$$\begin{aligned} b(1 - \theta)E^* + \omega_2 I_2^* - b_1 I_1^* &= 0 \\ b_1 I_1^* &= b(1 - \theta)E^* + \omega_2 I_2^* \\ I_1^* &= \frac{b(1 - \theta)E^* + \omega_2 I_2^*}{b_1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dari persamaan (4.10d), diperoleh

$$\begin{aligned} b\theta E^* + \omega_1 I_1^* - b_2 I_2^* &= 0 \\ b_2 I_2^* &= b\theta E^* + \omega_1 I_1^* \\ I_2^* &= \frac{b\theta E^* + \omega_1 I_1^*}{b_2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Kemudian, substitusikan persamaan (4.15) ke persamaan (4.10d), diperoleh

$$\begin{aligned} b\theta E^* + \omega_1 I_1^* - b_2 I_2^* &= 0 \\ b\theta E^* + \omega_1 \left(\frac{b(1 - \theta)E^* + \omega_2 I_2^*}{b_1} \right) - b_2 I_2^* &= 0 \\ b\theta E^* + \frac{\omega_1 b(1 - \theta)E^* + \omega_1 \omega_2 I_2^*}{b_1} - b_2 I_2^* &= 0 \\ b\theta E^* = b_2 I_2^* - \frac{\omega_1 b(1 - \theta)E^* - \omega_1 \omega_2 I_2^*}{b_1} \\ b\theta E^* &= \frac{b_1 b_2 I_2^* - \omega_1 b(1 - \theta)E^* - \omega_1 \omega_2 I_2^*}{b_1} \\ b_1 b\theta E^* &= b_1 b_2 I_2^* - \omega_1 b(1 - \theta)E^* - \omega_1 \omega_2 I_2^* \\ b_1 b\theta E^* + \omega_1 b(1 - \theta)E^* &= b_1 b_2 I_2^* - \omega_1 \omega_2 I_2^* \\ (b_1 b\theta + \omega_1 b(1 - \theta))E^* &= (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)I_2^* \end{aligned}$$

$$I_2^* = \frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b (1 - \theta)) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)}. \quad (4.17)$$

Selanjutnya, persamaan (4.16) disubstitusikan ke persamaan (4.10c), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} b(1 - \theta)E^* + \omega_2 I_2^* - b_1 I_1^* &= 0 \\ b(1 - \theta)E^* + \omega_2 \left(\frac{b \theta E^* + \omega_1 I_1^*}{b_2} \right) - b_1 I_1^* &= 0 \\ b(1 - \theta)E^* + \frac{\omega_2 b \theta E^* + \omega_1 \omega_2 I_1^*}{b_2} - b_1 I_1^* &= 0 \\ b(1 - \theta)E^* &= b_1 I_1^* - \frac{\omega_2 b \theta E^* - \omega_1 \omega_2 I_1^*}{b_2} \\ b(1 - \theta)E^* &= \frac{b_1 b_2 I_1^* - \omega_2 b \theta E^* - \omega_1 \omega_2 I_1^*}{b_2} \\ b_2 b (1 - \theta) E^* &= b_1 b_2 I_1^* - \omega_2 b \theta E^* - \omega_1 \omega_2 I_1^* \\ b_2 b (1 - \theta) E^* + \omega_2 b \theta E^* &= b_1 b_2 I_1^* - \omega_1 \omega_2 I_1^* \\ (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) E^* &= (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2) I_1^* \\ I_1^* &= \frac{(b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Persamaan (4.10a) dan (4.10b) diubah menjadi

$$\delta - (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* - \mu S^* \Leftrightarrow \delta - \mu S^* = (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* \quad (4.19a)$$

$$(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* - b_0 E^* \Leftrightarrow (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* = b_0 E^* \quad (4.19b)$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.19a) dan (4.19b) diperoleh

$$\begin{aligned} \delta - \mu S^* &= b_0 E^* \\ \delta - b_0 E^* &= \mu S^* \\ \frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} &= S^* \end{aligned} \quad (4.20)$$

Kemudian untuk memperoleh titik kesetimbangan E^* substitusikan persamaan (4.17), (4.18) dan (4.20) ke persamaan (4.10b) diperoleh

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* - b_0 E^* = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(\beta_1 \frac{(b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} + \beta_2 \frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta)) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} \right) - b_0 E^* = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} + \frac{\beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta)) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} \right) - b_0 E^* = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) E^* \left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} \right) - b_0 E^* = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} - b_0 \right) E^* = 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh solusi persamaan di atas adalah

$$E^* = 0 \text{ dan } \left(\frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} - b_0 \right) = 0$$

Karena akan dicari $E^* \neq 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & \frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} - b_0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\delta \beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{\mu (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\
& - \frac{b_0 E^*}{\mu} \left(\frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) = b_0 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{\delta \beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{\mu (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \left(\frac{b_0}{b_0} \right) \\
& - \left(\frac{b_0 E^*}{\mu} \frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \left(\frac{b_0}{b_0} \right) = b_0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\delta \beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{\mu b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} b_0 \\
& - \left(\frac{b_0^2 E^*}{\mu} \frac{\beta_1 (b_2 b(1-\theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b(1-\theta))}{b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta} \right) = b_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\delta \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b (1 - \theta))}{\mu} \frac{b_0}{b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} b_0 \\
&\quad - \frac{\delta b_0^2 E^* \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (b_1 b \theta + \omega_1 b (1 - \theta))}{\delta \mu} \frac{b_0}{b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} = b_0 \\
&\Leftrightarrow b_0 \mathcal{R}_0 - \frac{b_0^2 E^*}{\delta} \mathcal{R}_0 = b_0 \\
&\Leftrightarrow \delta b_0 \mathcal{R}_0 - \frac{b_0^2 E^* \mathcal{R}_0}{\delta} = b_0 \\
&\Leftrightarrow \delta \mathcal{R}_0 - b_0 E^* \mathcal{R}_0 = \delta \\
&\Leftrightarrow \delta \mathcal{R}_0 - \delta = b_0 E^* \mathcal{R}_0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta \mathcal{R}_0 - \delta}{b_0} = b_0 E^* \mathcal{R}_0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta \mathcal{R}_0 - \delta}{\mathcal{R}_0} = E^* \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta \mathcal{R}_0 - \delta}{b_0 \mathcal{R}_0} = E^* \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta}{b_0} - \frac{\delta}{b_0 \mathcal{R}_0} = E^* \\
&\qquad\qquad\qquad E^* = \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{\delta}{\mathcal{R}_0} \right) \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Pada persamaan (4.21), diketahui E^* bergantung pada \mathcal{R}_0 . Sehingga jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka E^* eksis dan bernilai positif karena $b_1 b_2 > \omega_1 \omega_2$. Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan endemik $P^* = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*) =$

$$\left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu}, \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{\delta}{\mathcal{R}_0} \right), \frac{(b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)}, \frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b (1 - \theta)) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right).$$

4.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Untuk menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan model dilakukan dengan menganalisis kestabilan melalui linearisasi sistem autonomus

nonlinear (4.8) di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan proses linearisasi diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1 - \beta_2 I_2 - \mu & 0 & -\beta_1 S & -\beta_2 S \\ \beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 & -b_0 & \beta_1 S & \beta_2 S \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

4.3.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $P^0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ ke matriks Jacobi (4.22) diperoleh

$$J(P^0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1 \frac{\delta}{\mu} & -\beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & -b_0 & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobi di atas dengan menyelesaikan persamaan sebagai berikut

$$|J(P^0) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1 \frac{\delta}{\mu} & -\beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & -b_0 & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1 \frac{\delta}{\mu} & -\beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & -b_0 & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\beta_1 \frac{\delta}{\mu} & -\beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & -b_0 - \lambda & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & b(1 - \theta) & -b_1 - \lambda & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} -b_0 - \lambda & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ b(1 - \theta) & -b_1 - \lambda & \omega_2 \\ b\theta & \omega_1 & -b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.23) diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_1 = -\mu$ dan diperoleh akar karakteristik lain dari persamaan (4.23) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b_0 - \lambda & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ b(1 - \theta) & -b_1 - \lambda & \omega_2 \\ b\theta & \omega_1 & -b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (-b_0 - \lambda) \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & \omega_2 \\ \omega_1 & -b_2 - \lambda \end{vmatrix} - \frac{\delta\beta_1}{\mu} \begin{vmatrix} b(1 - \theta) & \omega_2 \\ b\theta & -b_2 - \lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + \frac{\delta\beta_2}{\mu} \begin{vmatrix} b(1 - \theta) & -b_1 - \lambda \\ b\theta & \omega_1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (-b_0 - \lambda) [(-b_1 - \lambda)(-b_2 - \lambda) - \omega_1\omega_2] \\
&\quad - \frac{\delta\beta_1}{\mu} [(b(1 - \theta))(-b_2 - \lambda) - \omega_2 b\theta] \\
&\quad + \frac{\delta\beta_2}{\mu} [\omega_1 b(1 - \theta) - (b\theta(-b_1 - \lambda))] = 0 \\
&\Leftrightarrow (-b_0 - \lambda) [b_1 b_2 + \lambda b_1 + \lambda b_2 + \lambda^2 - \omega_1 \omega_2] \\
&\quad - \frac{\delta\beta_1}{\mu} [-b_2 b(1 - \theta) - \lambda b(1 - \theta) - \omega_2 b\theta] \\
&\quad + \frac{\delta\beta_2}{\mu} [\omega_1 b(1 - \theta) + b_1 b\theta + \lambda b\theta] \\
&\Leftrightarrow -b_0 b_1 b_2 - \lambda b_0 b_1 - \lambda b_0 b_2 - \lambda^2 b_0 + b_0 \omega_1 \omega_2 - \lambda b_1 b_2 - \lambda^2 b_1 - \lambda^2 b_2 - \lambda^3 \\
&\quad + \lambda \omega_1 \omega_2 + \frac{\delta\beta_1}{\mu} b_2 b(1 - \theta) + \frac{\delta\beta_1}{\mu} \lambda b(1 - \theta) + \frac{\delta\beta_1}{\mu} \omega_2 b\theta \\
&\quad + \frac{\delta\beta_2}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) + \frac{\delta\beta_2}{\mu} b_1 b\theta + \frac{\delta\beta_2}{\mu} \lambda b\theta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 b_0 - \lambda^2 b_1 - \lambda^2 b_2 - \lambda b_0 b_1 - \lambda b_0 b_2 - \lambda b_1 b_2 - \lambda \omega_1 \omega_2 + \\
&\quad \frac{\delta \beta_1}{\mu} \lambda b(1 - \theta) + \frac{\delta \beta_2}{\mu} \lambda b \theta - b_0 b_1 b_2 + b_0 \omega_1 \omega_2 + \frac{\delta \beta_1}{\mu} b_2 b(1 - \theta) + \\
&\quad \frac{\delta \beta_1}{\mu} \omega_2 b \theta + \frac{\delta \beta_2}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) + \frac{\delta \beta_2}{\mu} b_1 b \theta = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 [b_0 + b_1 + b_2] \\
&\quad + \lambda \left[b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2 - \frac{\delta \beta_1}{\mu} b(1 - \theta) - \frac{\delta \beta_2}{\mu} b \theta \right] \\
&\quad + b_0 b_1 b_2 - b_0 \omega_1 \omega_2 - \frac{\delta \beta_1}{\mu} b_2 b(1 - \theta) - \frac{\delta \beta_1}{\mu} \omega_2 b \theta \\
&\quad - \frac{\delta \beta_2}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) - \frac{\delta \beta_2}{\mu} b_1 b \theta = 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan yang diperoleh dapat ditulis sebagai berikut

$$\lambda^3 a_0 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0, \quad (4.24)$$

dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = b_0 + b_1 + b_2$$

$$a_2 = b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2 - \frac{\delta \beta_1}{\mu} b(1 - \theta) - \frac{\beta_2 \delta}{\mu} b \theta$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & b_0 b_1 b_2 - b_0 \omega_1 \omega_2 - \frac{\delta \beta_1}{\mu} b_2 b(1 - \theta) - \frac{\delta \beta_1}{\mu} \omega_2 b \theta - \frac{\beta_2 \delta}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) \\
& - \frac{\beta_2 \delta}{\mu} b_1 b \theta
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan yang diperoleh, dapat terlihat jelas bahwa nilai dari $a_0 > 0$. Kemudian untuk nilai a_1, a_2 , dan a_3 terdapat nilai yang belum tentu positif, sehingga perlu dicari syarat agar $a_1 > 0, a_2 > 0$, dan $a_3 > 0$.

Jika diasumsikan $\mathcal{R}_0 < 1$, maka diperoleh

$$\Leftrightarrow \frac{\delta \beta_1 (b_2 b(1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b(1 - \theta) + b_1 b \theta)}{b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} < 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\delta}{\mu} (\beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)) < \\
&\quad b_0 b_1 b_2 - b_0 \omega_1 \omega_2 \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta}{\mu} (\beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)) + \\
&\quad b_0 \omega_1 \omega_2 < b_0 b_1 b_2
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Berdasarkan persamaan (4.25), maka a_1, a_2 , dan a_3 akan bernilai positif dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$ sehingga $b_0 b_1 b_2 > b_0 \omega_1 \omega_2$. Kemudian akan dibuktikan bahwa $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_0 a_3 &= (b_0 + b_1 + b_2) \left(b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b (1 - \theta) - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b \theta \right) - 1 \left(b_0 b_1 b_2 - b_0 \omega_1 \omega_2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_2 b (1 - \theta) - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} \omega_2 b \theta - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \omega_1 b (1 - \theta) - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_1 b \theta \right) \\
&= b_0^2 b_1 + b_0^2 b_2 + b_1 b_2 b_0 - b_0 \omega_1 \omega_2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_0 b (1 - \theta) - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_0 b \theta + b_0 b_1^2 + b_0 b_2 b_1 + b_1^2 b_2 - b_1 \omega_1 \omega_2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_1 b (1 - \theta) - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_1 b \theta + b_0 b_1 b_2 + b_0 b_2^2 + b_1 b_2^2 - b_2 \omega_1 \omega_2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_2 b (1 - \theta) - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_2 b \theta - b_0 b_1 b_2 + b_0 \omega_1 \omega_2 + \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_2 b (1 - \theta) + \beta_1 \frac{\delta}{\mu} \omega_2 b \theta + \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \omega_1 b (1 - \theta) + \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_1 b \theta \\
&= b_0^2 b_1 + b_0^2 b_2 + b_0 b_1^2 + b_1^2 b_2 + b_0 b_2^2 + b_1 b_2^2 - b_1 \omega_1 \omega_2 - b_2 \omega_1 \omega_2 - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_0 b \theta - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_2 b \theta + \beta_1 \frac{\delta}{\mu} \omega_2 b \theta - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_0 b (1 - \theta) - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_1 b (1 - \theta) + \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \omega_1 b (1 - \theta) \\
&= (b_1^2 b_2 - b_1 \omega_1 \omega_2) + (b_1 b_2^2 - b_2 \omega_1 \omega_2) + \left(b_0^2 b_2 - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_0 b \theta \right) + \left(b_0 b_2^2 - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_2 b \theta \right) + \left(b_0^2 b_1 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_0 b (1 - \theta) \right) + \left(b_0 b_1^2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_1 b (1 - \theta) \right) + \left(2b_0 b_1 b_2 + \beta_1 \frac{\delta}{\mu} \omega_2 b \theta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) \Big) \\
& = (b_0 b_1 b_2 - b_1 \omega_1 \omega_2) \frac{b_0}{b_0} + (b_0 b_1 b_2 - b_0 \omega_1 \omega_2) \frac{b_0}{b_2} + \left(b_0 b_1 b_2 - \right. \\
& \quad \left. \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_1 b \theta \right) \frac{b_1}{b_0} + \left(b_0 b_1 b_2 - \beta_2 \frac{\delta}{\mu} b_1 b \theta \right) \frac{b_1}{b_2} + \left(b_0 b_1 b_2 - \right. \\
& \quad \left. \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_2 b(1 - \theta) \right) \frac{b_2}{b_0} + \left(b_0 b_1 b_2 - \beta_1 \frac{\delta}{\mu} b_2 b(1 - \theta) \right) \frac{b_2}{b_1} + \\
& \quad \left(2b_0 b_1 b_2 + \beta_1 \frac{\delta}{\mu} \omega_2 b \theta + \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) \right)
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian tersebut dan syarat pada persamaan (4.25) dapat diketahui bahwa $a_1 a_2 - a_3 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Dengan demikian berdasarkan Teorema 2.3 dari kriteria kestabilan Routh-Hurwitz titik kesetimbangan bebas penyakit (P^0) bersifat stabil asimtotik lokal dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$.

4.3.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan endemik (P^*) adalah

$$J(P^*) = \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu & 0 & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 & \beta_1 S^* & \beta_2 S^* \\ 0 & b(1 - \theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix},$$

Selanjutnya, dicari persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobi di atas dengan menyelesaikan persamaan sebagai berikut

$$|J(P^*) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu & 0 & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 & \beta_1 S^* & \beta_2 S^* \\ 0 & b(1 - \theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu & 0 & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 & \beta_1 S^* & \beta_2 S^* \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= 0 \\
&\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu - \lambda & 0 & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 - \lambda & \beta_1 S^* & \beta_2 S^* \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 - \lambda & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow (-b_2 - \lambda) \left| \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu - \lambda & 0 & -\beta_1 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 - \lambda & \beta_1 S^* \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.26) diperoleh $\lambda_1 = -b_2$ dan diperoleh persamaan

karakteristik lain sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu - \lambda & 0 & -\beta_1 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 - \lambda & \beta_1 S^* \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu - \lambda) \left| \begin{pmatrix} -b_0 - \lambda & \beta_1 S^* \\ b(1-\theta) & -b_1 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&\quad - (0) \left| \begin{pmatrix} \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & \beta_1 S^* \\ 0 & -b_1 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&\quad + (-\beta_1 S^*) \left| \begin{pmatrix} \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 - \lambda \\ 0 & b(1-\theta) \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu - \lambda)[b_0 b_1 + \lambda b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 - \beta_1 S^* b(1-\theta)] - \\
&\quad (\beta_1 S^*)[\beta_1 I_1^* b(1-\theta) + \beta_2 I_2^* b(1-\theta)] = 0 \\
&\Leftrightarrow -\beta_1 I_1^* b_0 b_1 - \beta_1 I_1^* \lambda b_0 - \beta_1 I_1^* \lambda b_1 - \beta_1 I_1^* \lambda^2 + \beta_1^2 I_1^* S^* b(1-\theta) \\
&\quad - \beta_2 I_2^* b_0 b_1 - \beta_2 I_2^* \lambda b_0 - \beta_2 I_2^* \lambda b_1 - \beta_2 I_2^* \lambda^2 + \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1-\theta) \\
&\quad - \mu b_0 b_1 - \lambda \mu b_0 - \lambda \mu b_1 - \lambda^2 \mu + \beta_1 S^* \mu b(1-\theta) \\
&\quad - \lambda b_0 b_1 - \lambda^2 b_0 - \lambda^2 b_1 - \lambda^3 + \lambda \beta_1 S^* b(1-\theta) - \beta_1^2 I_1^* S^* b(1-\theta) \\
&\quad - \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1-\theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow -[\beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_1 I_1^* \lambda b_0 + \beta_1 I_1^* \lambda b_1 + \beta_1 I_1^* \lambda^2 - \beta_1^2 I_1^* S^* b(1-\theta) + \\
&\quad \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* \lambda b_0 + \beta_2 I_2^* \lambda b_1 + \beta_2 I_2^* \lambda^2 - \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1-\theta) + \\
&\quad \mu b_0 b_1 + \lambda \mu b_0 + \lambda \mu b_1 + \lambda^2 \mu - \beta_1 S^* \mu b(1-\theta) + \lambda b_0 b_1 + \lambda^2 b_0 + \lambda^2 b_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 - \lambda\beta_1 S^* b(1 - \theta) + \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) + \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \theta)] = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda^3 + \beta_1 I_1^* \lambda^2 + \beta_2 I_2^* \lambda^2 + \\
& \lambda^2 \mu + \lambda^2 b_0 + \lambda^2 b_1 + \beta_1 I_1^* \lambda b_0 + \beta_1 I_1^* \lambda b_1 + \beta_2 I_2^* \lambda b_0 + \beta_2 I_2^* \lambda b_1 + \lambda \mu b_0 + \lambda \mu b_1 - \\
& \lambda b_0 b_1 - \lambda \beta_1 S^* b(1 - \theta) + \beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0 b_1 - \\
& \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) - \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \theta) - \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) + \\
& \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) + \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \theta) = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda^3 + \lambda^2 [\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* + \mu + b_0 + b_1] + \\
& \lambda [\beta_1 I_1^* b_0 + \beta_1 I_1^* b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 + \beta_2 I_2^* b_1 + \mu b_0 + \mu b_1 + b_0 b_1 - \beta_1 S^* b(1 - \\
& \theta)] + \beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0 b_1 - \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) = 0
\end{aligned}$$

Dari penjabaran tersebut diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^3 a_0 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 \quad (4.27)$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* + \mu + b_0 + b_1,$$

$$a_2 = \beta_1 I_1^* b_0 + \beta_1 I_1^* b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 + \beta_2 I_2^* b_1 + \mu b_0 + \mu b_1 + b_0 b_1 - \beta_1 S^* b(1 - \theta),$$

$$a_3 = \beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0 b_1 - \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta).$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa akar-akar persamaan (4.27) akan bernilai positif jika memenuhi Teorema 2.3 yaitu persamaan (4.27) mempunyai akar-akar riil negatif jika $a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Bukti:

$$(i) \quad a_1 > 0$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* + \mu + b_0 + b_1 \\
&= \beta_1 \left(\frac{(b_2 b(1 - \theta) + \omega_2 b \theta)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) \\
&\quad + \beta_2 \left(\frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b(1 - \theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) + \mu + b_0 + b_1
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\beta_1(b_2b(1-\theta)+\omega_2b\theta)+\beta_2(\omega_1b(1-\theta)+b_1b\theta)}{(b_1b_2-\omega_1\omega_2)} \right) \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) + \mu + b_0 + b_1$$

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $a_1 > 0$.

(ii) $a_2 > 0$

$$\begin{aligned} a_2 &= \beta_1 I_1^* b_0 + \beta_1 I_1^* b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 + \beta_2 I_2^* b_1 + \mu b_0 + \mu b_1 + b_0 b_1 - \beta_1 S^* b(1 - \theta) \\ &= b_0 \beta_1 \left(\frac{(b_2 b(1 - \theta) + \omega_2 b \theta)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) \\ &\quad + b_1 \beta_1 \left(\frac{(b_2 b(1 - \theta) + \omega_2 b \theta)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) \\ &\quad + b_0 \beta_2 \left(\frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b(1 - \theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) \\ &\quad + b_1 \beta_2 \left(\frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b(1 - \theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) + \mu b_0 + \mu b_1 + b_0 b_1 \\ &\quad - \beta_1 \left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} \right) b(1 - \theta) \end{aligned}$$

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $a_2 > 0$.

(iii) $a_3 > 0$

$$\begin{aligned} a_3 &= \beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0 b_1 - \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) \\ &= b_0 b_1 \beta_1 \left(\frac{(b_2 b(1 - \theta) + \omega_2 b \theta)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) + \\ &\quad b_0 b_1 \beta_2 \left(\frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b(1 - \theta))}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) + \mu b_0 b_1 \\ &\quad - \beta_1 \left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu} \right) \mu b(1 - \theta) \end{aligned}$$

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $a_1 > 0$.

(iv) $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_0 a_3 &= (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* + \mu + b_0 \\
&\quad + b_1)(\beta_1 I_1^* b_0 + \beta_1 I_1^* b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 + \beta_2 I_2^* b_1 + \mu b_0 + \mu b_1 + b_0 b_1 \\
&\quad - \beta_1 S^* b(1 - \theta)) \\
&\quad - 1(\beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0 b_1 - \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta)) \\
&= \beta_1^2 I_1^{*2} b_0 + \beta_1^2 I_1^{*2} b_1 + \beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* b_0 + \beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* b_1 + \beta_1 I_1^* \mu b_0 + \beta_1 I_1^* \mu b_1 + \\
&\quad \beta_1 I_1^* b_0 b_1 - \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) + \beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* b_0 + \beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* b_1 + \\
&\quad \beta_2^2 I_2^{*2} b_0 + \beta_2^2 I_2^{*2} b_1 + \beta_2 I_2^* \mu b_0 + \beta_2 I_2^* \mu b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 - \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \\
&\quad \theta) + \beta_1 I_1^* \mu b_0 + \beta_1 I_1^* \mu b_1 + \beta_2 I_2^* \mu b_0 + \beta_2 I_2^* \mu b_1 + \mu^2 b_0 + \mu^2 b_1 + \mu b_0 b_1 - \\
&\quad \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) + \\
&\quad \beta_1 I_1^* b_0^2 + \beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0^2 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0^2 + \mu b_0 b_1 + b_0^2 b_1 - \\
&\quad \beta_1 S^* b_0 b(1 - \theta) - \beta_1 I_1^* b_0 b_1 - \beta_2 I_2^* b_0 b_1 - \mu b_0 b_1 + \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) \\
&= \beta_1^2 I_1^{*2} (b_0 + b_1) + \beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* (b_0 + b_1) + \beta_1 I_1^* \mu (b_0 + b_1) + \\
&\quad \beta_1 I_1^* b_0 b_1 - \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) + \beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* (b_0 + b_1) + \beta_2^2 I_2^{*2} (b_0 + \\
&\quad b_1) + \beta_2 I_2^* \mu (b_0 + b_1) + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 - \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \theta) + \\
&\quad \beta_1 I_1^* \mu (b_0 + b_1) + \beta_2 I_2^* \mu (b_0 + b_1) + \mu^2 (b_0 + b_1) + \mu b_0 b_1 - \\
&\quad \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) + \beta_1 I_1^* b_0 (b_0 + b_1) + \beta_2 I_2^* b_0 (b_0 + b_1) + \\
&\quad \mu b_0 (b_0 + b_1) + b_0^2 b_1 - \beta_1 S^* b_0 b(1 - \theta) - \beta_1 I_1^* b_0 b_1 - \beta_2 I_2^* b_0 b_1 - \\
&\quad \mu b_0 b_1 + \beta_1 S^* \mu b(1 - \theta) \\
&= \beta_1^2 I_1^{*2} (b_0 + b_1) + 2\beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* (b_0 + b_1) + 2\beta_1 I_1^* \mu (b_0 + b_1) - \\
&\quad \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) + \beta_2^2 I_2^{*2} (b_0 + b_1) + 2\beta_2 I_2^* \mu (b_0 + b_1) - \\
&\quad \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \theta) + \mu^2 (b_0 + b_1) + \beta_1 I_1^* b_0 (b_0 + b_1) + \beta_2 I_2^* b_0 (b_0 + \\
&\quad b_1) + \mu b_0 (b_0 + b_1) + b_0^2 b_1 - \beta_1 S^* b_0 b(1 - \theta) \\
&= \beta_1^2 I_1^{*2} (b_0 + b_1) + \beta_2^2 I_2^{*2} (b_0 + b_1) + \mu^2 (b_0 + b_1) + b_0^2 b_1 - \\
&\quad \beta_1^2 I_1^* S^* b(1 - \theta) + 2\beta_1 \beta_2 I_1^* I_2^* (b_0 + b_1) + 2\beta_1 I_1^* \mu (b_0 + b_1) + \\
&\quad 2\beta_2 I_2^* \mu (b_0 + b_1) + \beta_1 I_1^* b_0 (b_0 + b_1) + \beta_2 I_2^* b_0 (b_0 + b_1) + \\
&\quad \mu b_0 (b_0 + b_1) - \beta_1 \beta_2 I_2^* S^* b(1 - \theta) - \beta_1 S^* b_0 b(1 - \theta)
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian tersebut, jelas $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Dengan demikian, persamaan (4.27) memenuhi Teorema 2.3 dari kriteria kestabilan Routh-Hurwitz yaitu memiliki akar-akar yang bagian riilnya negatif, sehingga titik kesetimbangan endemik (P^*) bersifat stabil asimtotik lokal dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$.

4.4 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Teorema 2.4, untuk menentukan kestabilan global dari titik kesetimbangan P^0 dan P^* yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat suatu fungsi yang memenuhi syarat fungsi Lyapunov pada masing-masing titik kesetimbangan tersebut.

4.4.1 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Metode Lyapunov merupakan suatu fungsi yang digunakan untuk menentukan dan memeriksa kestabilan global dari suatu sistem nonlinear.

Didefinisikan suatu fungsi \mathcal{L} untuk P^0 sebagai berikut

$$\mathcal{L}(S, E, I_1, I_2) = \mathcal{R}_0 E + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_1 b_2 + \beta_2 \omega_1)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} I_1 + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_2 b_1 + \beta_1 \omega_2)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} I_2$$

Fungsi \mathcal{L} dapat disebut sebagai fungsi Lyapunov untuk P^0 karena memenuhi syarat fungsi Lyapunov pada Definisi 2.6.2 sebagai berikut:

- (i) Diketahui titik kesetimbangan $P^0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0\right)$, kemudian disubstitusikan terhadap fungsi \mathcal{L} , diperoleh $\mathcal{L}\left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0\right) = 0$. Sehingga fungsi tersebut memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.6.1 yaitu $\mathcal{L}(S^0, E^0, I_1^0, I_2^0) = 0$.
- (ii) Perhatikan fungsi \mathcal{L} , jelas bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka $b_1 b_2 > \omega_1 \omega_2$, sehingga terbukti $\mathcal{L}(S, E, I_1, I_2) > 0$, untuk semua $(S, E, I_1, I_2) \neq (S^0, E^0, I_1^0, I_2^0)$.

(iii) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa fungsi \mathcal{L} memenuhi kondisi 2.6.2

$$\text{yaitu } \mathcal{L}'(S, E, I_1, I_2) < 0, \forall (S, E, I_1, I_2) \neq (S^0, E^0, I_1^0, I_2^0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{R}_0 E + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_1 b_2 + \beta_2 \omega_1)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} I_1 + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_2 b_1 + \beta_1 \omega_2)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} I_2 \\ &= \mathcal{R}_0 [(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - b_0 E] + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_1 b_2 + \beta_2 \omega_1)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \\ &\quad [b(1 - \theta) E + \omega_2 I_2 - b_1 I_1] + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_2 b_1 + \beta_1 \omega_2)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} [b\theta E + \omega_1 I_1 - b_2 I_2] \\ &= \mathcal{R}_0 ((\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - b_0 E) \\ &\quad + \frac{\delta}{\mu} \left(\frac{\beta_1 E (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 E (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \left(\frac{b_0}{b_0} \right) \\ &\quad + \frac{\delta}{\mu} (-\beta_1 I_1 - \beta_2 I_2) \\ &= \mathcal{R}_0 ((\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - b_0 E) \\ &\quad + E b_0 \left(\frac{\delta}{\mu} \frac{\beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)}{b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \\ &\quad - \frac{\delta}{\mu} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \\ &= \mathcal{R}_0 (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - \mathcal{R}_0 b_0 E + E b_0 \mathcal{R}_0 - \frac{\delta}{\mu} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \\ &= \mathcal{R}_0 (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - \frac{\delta}{\mu} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \end{aligned}$$

Karena solusi batas $S^0 \leq \frac{\delta}{\mu}$, diperoleh

$$\begin{aligned} &\leq \mathcal{R}_0 (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{\delta}{\mu} - \frac{\delta}{\mu} (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \\ &= (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{\delta}{\mu} (\mathcal{R}_0 - 1) \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\mathcal{L}'(S, E, I_1, I_2) < 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Karena $\mathcal{L}'(S, E, I_1, I_2)$ memenuhi kondisi 2.6.2 sehingga terbukti $\mathcal{L}'(S, E, I_1, I_2)$ adalah fungsi

Lyapunov. Dengan demikian titik kesetimbangan bebas penyakit (P^0) bersifat stabil asimtotik global.

4.4.2 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk menentukan kestabilan global dari P^* pada sistem autonomus nonlinear (4.8) terlebih dahulu ditentukan bahwa $\omega_2 = 0$. Hal ini dapat mempermudah perhitungan sehingga diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\delta - (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^* - \mu S^* = 0 \quad (4.28a)$$

$$(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^* - b_0 E^* = 0 \quad (4.28b)$$

$$b(1 - \theta)E^* - b_1 I_1^* = 0 \quad (4.28c)$$

$$b\theta E^* + \omega I_1^* - b_2 I_2^* = 0 \quad (4.28d)$$

Didefinisikan suatu fungsi V untuk P^* sebagai berikut

$$V = \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + a_1 \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) + a_2 \left(I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) + a_3 \left(I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right)$$

dengan $a_1 = a_2 = a_3 > 0$ (Huo dan Zou, 2016).

Fungsi V dapat disebut sebagai fungsi Lyapunov untuk P^* karena memenuhi syarat fungsi Lyapunov sebagai berikut:

(i) Pembuktian $V(P^*) = 0$

$$\begin{aligned} V(P^*) &= V(S^*, E^*, I_1^*, I_2^*) \\ &= \left(S^* - S^* - S^* \ln \frac{S^*}{S^*} \right) + a_1 \left(E^* - E^* - E^* \ln \frac{E^*}{E^*} \right) \\ &\quad + a_2 \left(I_1^* - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1^*}{I_1^*} \right) + a_3 \left(I_2^* - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2^*}{I_2^*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0 - S^*(0)) + a_1(0 - E^*(0)) + a_2(0 - I_1^*(0)) \\
&\quad + a_3(0 - I_2^*(0)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti $V(P^*) = 0$.

(ii) Pembuktian $V(S, E, I_1, I_2) > 0, \forall (S, E, I_1, I_2) \neq (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$

$$\begin{aligned}
V(S, E, I_1, I_2) &= \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + a_1 \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) \\
&\quad + a_2 \left(I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) + a_3 \left(I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right)
\end{aligned}$$

Misalkan $h(S) = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}$ dan $h(S)$ terdefinisi pada domain

$S \in \mathbb{R}^+$, maka turunan pertama $h(S)$ terhadap S adalah

$$h'(S) = \left(1 - \frac{S^*}{S} \right), \text{ dengan } S \in (0, \infty).$$

Titik kritis $h(S)$ diperoleh ketika $h'(S) = 0$. Nilai S yang memenuhi $h'(S) = 0$ ialah ketika $S = S^*$ sehingga $h(S^*) = 0$. Jika $S \in (0, S^*)$ maka $h'(S) < 0$ atau jika $S \in (S^*, \infty)$ maka $h'(S) > 0$. Sedemikian hingga, $h(S)$ monoton turun pada interval $(0, S^*)$ dan monoton naik pada interval (S^*, ∞) .

Maka, jelas bahwa $(S^*, 0)$ merupakan titik minimum $h(S)$. Karena 0 merupakan nilai minimum $h(S)$ maka berlaku $h(S) > 0$ untuk $(S, E, I_1, I_2) \neq (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan juga bahwa $h(E) = a_1 \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) > 0$, $h(I_1) = a_2 \left(I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) > 0$, dan $h(I_2) = a_3 \left(I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right) > 0$. Sehingga terbukti $V(S, E, I_1, I_2) > 0, \forall (S, E, I_1, I_2) \neq (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$.

(iii) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa fungsi V memenuhi kondisi 2.6.2

yaitu $V'(S, E, I_1, I_2) < 0$, $\forall (S, E, I_1, I_2) \neq (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$ dan untuk $\omega_2 = 0$ dengan menggunakan aturan rantai, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} V'(S, E, I_1, I_2) &= \frac{dV}{dS} \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dE} \frac{dE}{dt} + \frac{dV}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{dV}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) S' + a_1 \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) E' + a_2 \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right) I_1' \\ &\quad + a_3 \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right) I_2' \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan $S', E', I_1',$ dan I_2' , diperoleh

$$\begin{aligned} V' &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) [\delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S] + a_1 \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) [(\beta_1 I_1 + \\ &\quad \beta_2 I_2)S - b_0 E] + a_2 \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right) [b(1 - \theta)E - b_1 I_1] + a_3 \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right) [b\theta E + \omega I_1 - b_2 I_2] \end{aligned}$$

dengan menggunakan persamaan (4.28a-4.28d), diperoleh

$$\delta = (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^* + \mu S^*,$$

$$b_0 = (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^* \frac{E}{E^*},$$

$$b_1 = b(1 - \theta)E^* \frac{I_1}{I_1^*},$$

$$b_2 = (b\theta E^* + \omega I_1^*) \frac{I_2}{I_2^*},$$

Sedemikian sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} V' &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) [(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^* + \mu S^* - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S] + \\ &\quad a_1 \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) [(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^* \frac{E}{E^*}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_2 \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right) \left[b(1 - \theta)E - b(1 - \theta)E^* \frac{I_1}{I_1^*} \right] + a_3 \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right) \left[b\theta E + \right. \\
& \left. \omega I_1 - (b\theta E^* + \omega I_1^*) \frac{I_2}{I_2^*} \right] \\
& = -\mu S^* \left(\frac{S}{S^*} - 1\right) \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) + \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left[\beta_1 I_1^* S^* \left(1 - \frac{I_1}{I_1^*} \frac{S}{S^*}\right) + \right. \\
& \left. \beta_2 I_2^* S^* \left(1 - \frac{I_2}{I_2^*} \frac{S}{S^*}\right) \right] + a_1 \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) \left[\beta_1 I_1^* S^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} \frac{S}{S^*} - \frac{E}{E^*}\right) + \right. \\
& \left. \beta_2 I_2^* S^* \left(\frac{I_2}{I_2^*} \frac{S}{S^*} - \frac{E}{E^*}\right) \right] + a_2 \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right) \left[b(1 - \theta)E^* \left(\frac{E}{E^*} - \frac{I_1}{I_1^*}\right) \right] + \\
& a_3 \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right) \left[b\theta E^* \left(\frac{E}{E^*} - \frac{I_2}{I_2^*}\right) + \omega I_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_2}{I_2^*}\right) \right] \tag{4.29a}
\end{aligned}$$

Misalkan $\frac{S}{S^*} = x$, $\frac{E}{E^*} = y$, $\frac{I_1}{I_1^*} = z$ dan $\frac{I_2}{I_2^*} = u$, maka persamaan (4.29a)

$$\begin{aligned}
V' & = -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left[\beta_1 I_1^* S^* (1 - xz) + \beta_2 I_2^* S^* (1 - xu) \right] + \\
& a_1 \left(1 - \frac{1}{y}\right) \left[\beta_1 I_1^* S^* (xz - y) + \beta_2 I_2^* S^* (xu - y) \right] + a_2 \left(1 - \frac{1}{z}\right) \\
& \left[b(1 - \theta)E^* (y - z) \right] + a_3 \left(1 - \frac{1}{u}\right) \left[b\theta E^* (y - u) + \right. \\
& \left. \omega I_1^* (z - u) \right] \\
& = -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \beta_1 I_1^* S^* \left(1 - xz - \frac{1}{x} + z\right) + \beta_2 I_2^* S^* \left(1 - xu - \frac{1}{x} + \right. \\
& \left. u\right) + a_1 \beta_1 I_1^* S^* \left(xz - y - \frac{xz}{y} + 1\right) + a_1 \beta_2 I_2^* S^* \left(xu - y - \frac{xu}{y} + \right. \\
& \left. 1\right) + a_2 b(1 - \theta)E^* \left(y - z - \frac{y}{z} + 1\right) + a_3 b\theta E^* \left(y - u - \frac{y}{u} + 1\right) + \\
& a_3 \omega I_1^* \left(z - u - \frac{z}{u} + 1\right) \\
& = -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + [\beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^* + a_1 \beta_1 I_1^* S^* + a_1 \beta_2 I_2^* S^* + \\
& a_2 b(1 - \theta)E^* + a_3 b\theta E^* + a_3 \omega I_1^*] + xz[-\beta_1 I_1^* S^* + a_1 \beta_1 I_1^* S^*] + \\
& xu[-\beta_2 I_2^* S^* + a_1 \beta_2 I_2^* S^*] + y[-a_1 \beta_1 I_1^* S^* - a_1 \beta_2 I_2^* S^* + \\
& a_2 b(1 - \theta)E^* + a_3 b\theta E^*] + z[\beta_1 I_1^* S^* - a_2 b(1 - \theta)E^* +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3\omega I_1^*] + u[\beta_2 I_2^* S^* - a_3 b \theta E^* - a_3 \omega I_1^*] \\
& - \frac{1}{x}(\beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^*) - \frac{xz}{y} a_1 \beta_1 I_1^* S^* - \frac{xu}{y} a_1 \beta_2 I_2^* S^* - \\
& \frac{y}{z} a_2 b(1 - \theta)E^* - \frac{y}{u} a_3 b \theta E^* - \frac{z}{u} a_3 \omega I_1^*
\end{aligned} \tag{4.29b}$$

Variabel yang muncul pada persamaan (4.29b) dengan koefisien positif adalah xz, xu, y, z , dan u . Jika jumlah pada koefisien-koefisien tersebut positif, maka ada kemungkinan V' juga bernilai positif. Selanjutnya, koefisien xz, xu, y, z , dan u dibuat sama dengan nol, diperoleh

$$-\beta_1 I_1^* S^* + a_1 \beta_1 I_1^* S^* = 0 \tag{4.30a}$$

$$-\beta_2 I_2^* S^* + a_1 \beta_2 I_2^* S^* = 0 \tag{4.30b}$$

$$-a_1 \beta_1 I_1^* S^* - a_1 \beta_2 I_2^* S^* + a_2 b(1 - \theta)E^* + a_3 b \theta E^* = 0 \tag{4.30c}$$

$$\beta_1 I_1^* S^* - a_2 b(1 - \theta)E^* + a_3 \omega I_1^* = 0 \tag{4.30d}$$

$$\beta_2 I_2^* S^* - a_3 b \theta E^* - a_3 \omega I_1^* = 0 \tag{4.30e}$$

Berdasarkan persamaan (4.30a), diperoleh

$$-\beta_1 I_1^* S^* + a_1 \beta_1 I_1^* S^* = 0$$

$$\beta_1 I_1^* S^* (-1 + a_1) = 0$$

$$a_1 = 1 \tag{4.31a}$$

Dari persamaan (4.30b), diperoleh

$$-\beta_2 I_2^* S^* + a_1 \beta_2 I_2^* S^* = 0$$

$$\beta_2 I_2^* S^* (-1 + a_1) = 0$$

$$a_1 = 1 \tag{4.31b}$$

Dari persamaan (4.28b) diubah menjadi

$$(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* - b_0 E^* = 0$$

$$(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^* = b_0 E^* \tag{4.31c}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.31a) dan (4.31c) sehingga persamaan (4.30c) menjadi

$$\begin{aligned}
-a_1\beta_1 I_1^* S^* - a_1\beta_2 I_2^* S^* + a_2 b(1-\theta)E^* + a_3 b\theta E^* &= 0 \\
-a_1(b_0 E^*) + a_2 b(1-\theta)E^* + a_3 b\theta E^* &= 0 \\
E^*[-a_1 b_0 + a_2 b(1-\theta) + a_3 b\theta] &= 0 \\
-a_1 b_0 + a_2 b(1-\theta) + a_3 b\theta &= 0 \\
-b_0 + a_2 b(1-\theta) + a_3 b\theta &= 0 \tag{4.31d}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.28c) diubah menjadi

$$\begin{aligned}
b(1-\theta)E^* - b_1 I_1^* &= 0 \\
b(1-\theta)E^* &= b_1 I_1^* \tag{4.31e}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.31e) sehingga persamaan (4.30d) menjadi

$$\begin{aligned}
\beta_1 I_1^* S^* - a_2 b_1 I_1^* + a_3 \omega I_1^* &= 0 \\
I_1^*[\beta_1 S^* - a_2 b_1 + a_3 \omega] &= 0 \\
\beta_1 S^* - a_2 b_1 + a_3 \omega &= 0 \tag{4.31f}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.28c) diubah menjadi

$$\begin{aligned}
b\theta E^* + \omega I_1^* - b_2 I_2^* &= 0 \\
b\theta E^* + \omega I_1^* &= b_2 I_2^* \tag{4.31g}
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.31g) ke persamaan (4.30e), diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta_2 I_2^* S^* - a_3 b\theta E^* - a_3 \omega I_1^* &= 0 \\
\beta_2 I_2^* S^* - a_3(b\theta E^* + \omega I_1^*) &= 0 \\
I_2^*[\beta_2 S^* - a_3 b_2] &= 0 \\
\beta_2 S^* - a_3 b_2 &= 0
\end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{\beta_2 S^*}{b_2} \quad (4.31h)$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.28c), diperoleh

$$b(1 - \theta)E^* - b_1 I_1^* = 0$$

$$b_1 I_1^* = b(1 - \theta)E^* \quad (4.31i)$$

Berdasarkan persamaan (4.30f), substitusikan persamaan (4.30h), diperoleh

$$\beta_1 S^* - a_2 b_1 + a_3 \omega = 0$$

$$a_2 b_1 = \beta_1 S^* + a_3 \omega$$

$$a_2 b_1 = \beta_1 S^* + \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2}\right) \omega$$

$$a_2 b_1 = \beta_1 S^* + \frac{\omega \beta_2 S^*}{b_2}$$

$$a_2 = \frac{\beta_1 S^* b_2 + \beta_2 S^* \omega}{b_1 b_2} \quad (4.31j)$$

Dengan demikian jika dipilih a_1 , a_2 dan a_3 , maka diperoleh

$$\begin{aligned} V' &= -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} \\ &+ [\beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^* + a_1 \beta_1 I_1^* S^* + a_1 \beta_2 I_2^* S^* \\ &+ a_2 b(1-\theta)E^* + a_3 b \theta E^* + a_3 \omega I_1^*] \\ &- \frac{1}{x} (\beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^*) - \frac{xz}{y} a_1 \beta_1 I_1^* S^* - \frac{xu}{y} a_1 \beta_2 I_2^* S^* \\ &- \frac{y}{z} a_2 b(1-\theta)E^* - \frac{y}{u} a_3 b \theta E^* - \frac{z}{u} a_3 \omega I_1^* \\ &= -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^* + \beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^* \\ &+ \frac{\beta_1 S^* b_2 + \beta_2 S^* \omega}{b_1 b_2} b(1-\theta)E^* + \frac{\beta_2 S^*}{b_2} b \theta E^* + \frac{\beta_2 S^*}{b_2} \omega I_1^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{x}(\beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 I_2^* S^*) - \frac{xz}{y}(\beta_1 I_1^* S^*) - \frac{xu}{y}(\beta_2 I_2^* S^*) - \\
& \quad \frac{y}{z} \left(\frac{\beta_1 S^* b_2 + \beta_2 S^* \omega}{b_1 b_2} b(1-\theta)E^* \right) - \frac{y}{u} \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} b\theta E^* \right) - \\
& \quad \quad \quad \frac{z}{u} \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} \omega I_1^* \right) \\
& = -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + 2\beta_1 I_1^* S^* + 2\beta_2 S^* \left(\frac{b\theta E^* + \omega I_1^*}{b_2} \right) + \frac{\beta_1 S^* b_2 + \beta_2 S^* \omega}{b_1 b_2} b_1 I_1^* + \\
& \quad \frac{\beta_2 S^*}{b_2} b\theta E^* + \frac{\beta_2 S^*}{b_2} \omega I_1^* - \frac{1}{x} \left[\beta_1 I_1^* S^* + \beta_2 S^* \left(\frac{b\theta E^* + \omega I_1^*}{b_2} \right) \right] - \\
& \quad \frac{xz}{y}(\beta_1 I_1^* S^*) - \frac{xu}{y} \left[\beta_2 S^* \left(\frac{b\theta E^* + \omega I_1^*}{b_2} \right) \right] - \frac{y}{z} \left(\frac{\beta_1 S^* b_2 + \beta_2 S^* \omega}{b_1 b_2} b_1 I_1^* \right) - \\
& \quad \quad \quad \frac{y}{u} \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} b\theta E^* \right) - \frac{z}{u} \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} \omega I_1^* \right) \\
& = -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \beta_1 I_1^* S^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{xz}{y} \right) + \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} \right) b\theta E^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{u} - \right. \\
& \quad \left. \frac{xu}{y} \right) + \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} \right) \omega I_1^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{xu}{y} \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $V'(S, E, I_1, I_2) < 0$, $\forall (S, E, I_1, I_2) \neq (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$ dengan menggunakan Teorema 2.5, diperoleh

Bukti:

$$(i) \quad \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{xz}{y} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \times \frac{y}{z} \times \frac{xz}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y}}{3} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y} \geq 3$$

Karena $\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y} \geq 3$, sedemikian sehingga $3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{xz}{y} \right) \leq 0$.

$$(ii) \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{u} - \frac{xu}{y}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{u} + \frac{xu}{y}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \times \frac{y}{u} \times \frac{xu}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{u} + \frac{xu}{y}}{3} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{y}{u} + \frac{xu}{y} \geq 3$$

Karena $\frac{1}{x} + \frac{y}{u} + \frac{xu}{y} \geq 3$, sedemikian sehingga $3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{u} + \frac{xu}{y}\right) \leq 0$.

$$(iii) \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{xu}{y}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{x} \times \frac{y}{z} \times \frac{z}{u} \times \frac{xu}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y}}{4} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y} \geq 4$$

Karena $\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y} \geq 4$, sedemikian sehingga $4 - \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y}\right) \leq 0$.

Berdasarkan penjabaran tersebut, $V'(S, E, I_1, I_2) \leq 0$, jika $x, y, z, u > 0$ dan $V' = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z = u = 1$. Telah diketahui bahwa $x = \frac{S}{S^*}, y = \frac{E}{E^*}, z = \frac{I_1}{I_1^*}$ dan $u = \frac{I_2}{I_2^*}$, sehingga diperoleh $x = 1$ jika $S = S^*$, $y = 1$ jika $E = E^*$, $z = 1$ jika $I_1 = I_1^*$, serta $u = 1$ jika $I_2 = I_2^*$. Dengan demikian, $V'(S, E, I_1, I_2)$ memenuhi Teorema 2.4, sehingga titik kesetimbangan endemik (P^*) bersifat stabil asimtotik global.

4.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan ditampilkan solusi numerik dari persamaan model infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan. Simulasi ini dilakukan untuk memberikan gambaran kestabilan pada titik-titik kesetimbangan model epidemi SEIR pada infeksi mikrobakterium TB dengan dua lokasi pengobatan. Analisis secara numerik menggunakan metode ODE45 dengan *software* MATLAB.

4.5.1 Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

Tabel 4.2 Nilai Parameter Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

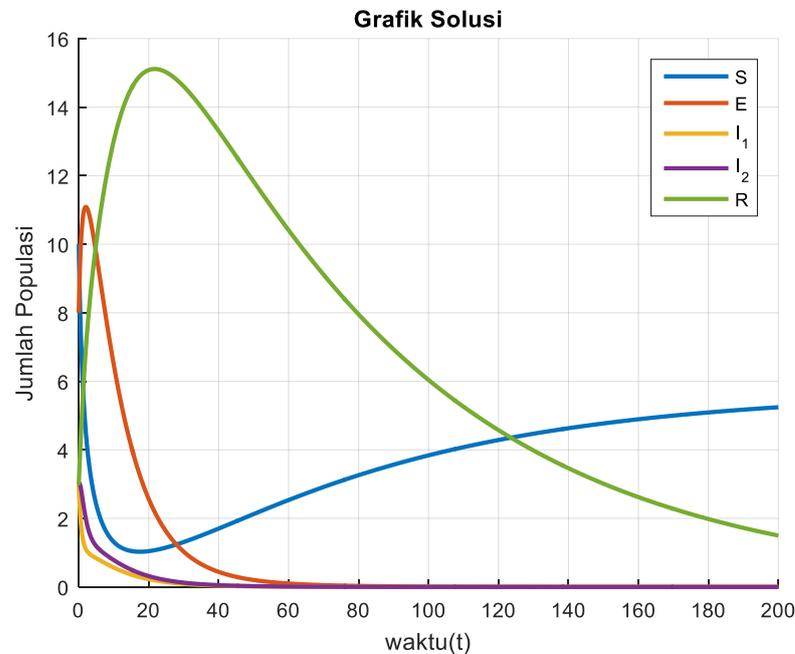
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
δ	0.08	ω_1	0.92
β_1	0.11	ω_2	0.069
β_2	0.08	k_1	0.09
μ	0.014	k_2	0.72
b	0.1	d_1	0.2
θ	0.09	d_2	0.02

Berdasarkan nilai parameter seperti pada Tabel 4.2, diperoleh angka reproduksi dasar sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)}{\mu (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} = 0,8436 < 1.$$

Karena nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ maka hanya memiliki satu titik kesetimbangan yang eksis dan stabil, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ($P^0 = 5.7143, 0, 0, 0, 0$).

Kemudian dengan menggunakan parameter tersebut dan diberikan nilai awal pada masing-masing subpopulasi = 10, $E = 8$, $I_1 = 3$, $I_2 = 3$, dan $R = 3$ diperoleh kurva solusi yang dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut



Gambar 4. 2 Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 0,8436 < 1$

Berdasarkan Gambar 4.2 menunjukkan bahwa jumlah populasi pada individu rentan TB mengalami penurunan drastis pada kondisi awal, kemudian terjadi peningkatan secara perlahan hingga individu rentan TB tidak terjadi perubahan atau konstan pada titik $S^0 = 5.7143$. Hal ini disebabkan oleh sebagian individu rentan yang terinfeksi TB menjadi individu laten TB dan terjadi kematian alami. Sedangkan jumlah populasi pada individu laten, individu terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit, serta individu sembuh cenderung mengalami peningkatan pada kondisi awal, selanjutnya terjadi penurunan drastis hingga konstan di titik 0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kurva solusi $S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)$, dan $R(t)$ akan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit tuberkulosis P^0 . Dengan kata lain, titik P^0 akan

stabil sehingga tidak terjadi penyebaran TB karena populasi dari $E(t)$, $I_1(t)$, dan $I_2(t)$ menuju nol atau habis.

4.5.2 Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0$

Tabel 4.3 Nilai Parameter Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0$

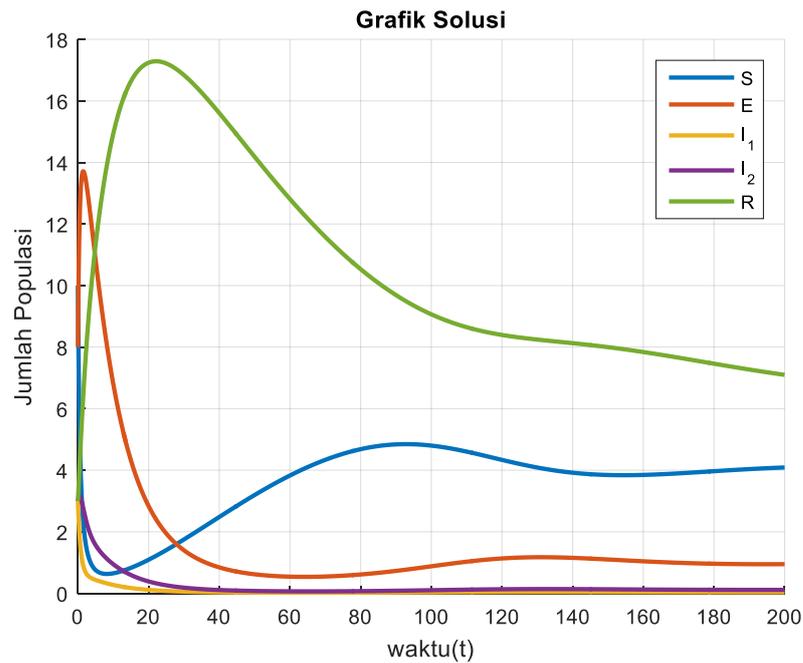
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
δ	0.17	ω_1	0.89
β_1	0.41	ω_2	0
β_2	0.11	k_1	0.09
μ	0.014	k_2	0.72
b	0.1	d_1	0.2
θ	0.56	d_2	0.02

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4.3 dengan $\omega_2 = 0$ diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)}{\mu (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} = 2.9892 > 1.$$

Karena nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ maka maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis dan stabil yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ($P^0 = 12.1429, 0, 0, 0, 0$) dan titik kesetimbangan endemik ($P^* = 4.0622, 0.9924, 0.0366, 0.1169, 6.2455$). Pada simulasi ini $\omega_2 = 0$ menyatakan bahwa tidak terjadi perpindahan individu dari subpopulasi yang melakukan pengobatan di rumah sakit ke pengobatan di rumah.

Selanjutnya dengan menggunakan parameter tersebut dan diberikan nilai awal pada masing-masing subpopulasi = 10, $E = 8$, $I_1 = 3$, $I_2 = 3$, dan $R = 3$ diperoleh kurva solusi yang dapat dilihat pada Gambar 4.3 berikut



Gambar 4.3 Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 2.9892 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0$

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa jumlah populasi pada individu rentan mengalami penurunan pada kondisi awal yang disebabkan oleh perpindahan sebagian individu rentan TB menjadi individu laten TB serta adanya kematian alami. Namun, secara perlahan terjadi kenaikan yang disebabkan oleh adanya penambahan individu pada subpopulasi rentan. Kemudian mengalami dinamika hingga konstan pada titik kesetimbangan S^* .

Sementara itu, jumlah populasi pada individu laten mengalami kenaikan pada kondisi awal yang disebabkan oleh penambahan sebagian individu rentan. Kemudian terjadi penurunan hingga konstan pada titik kesetimbangan E^* . Pada jumlah populasi terinfeksi TB yang melakukan pengobatan di rumah juga mengalami kenaikan pada kondisi awal yang disebabkan oleh penambahan sebagian individu laten. Kemudian terjadi penurunan jumlah populasi hingga konstan pada titik I_1^* yang disebabkan oleh beberapa faktor diantaranya laju penderita TB menjalani pengobatan di rumah semakin besar, penderita TB

berhasil sembuh, kematian alami dan kematian karena TB. Gambar 4.3 terlihat bahwa pada jumlah populasi sembuh terjadi kenaikan yang signifikan karena sebagian penderita TB yang menjalani pengobatan telah sembuh. Namun, juga terjadi penurunan yang disebabkan oleh kematian alami. Selanjutnya terjadi dinamika hingga konstan pada titik R^* .

Berdasarkan grafik solusi yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa kurva $(t), E(t), I_1(t), I_2(t),$ dan $R(t)$ akan menuju ke titik kesetimbangan endemik P^* . Dengan kata lain titik P^* pada kondisi nyata masih terjadi penyebaran penyakit. Sehingga subpopulasi terinfeksi yaitu $E(t), I_1(t),$ dan $I_2(t)$ masih harus menjalani pengobatan hingga sembuh.

4.5.3 Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega_2 \neq 0$

Tabel 4.4 Nilai Parameter Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ Dengan $\omega_2 \neq 0$

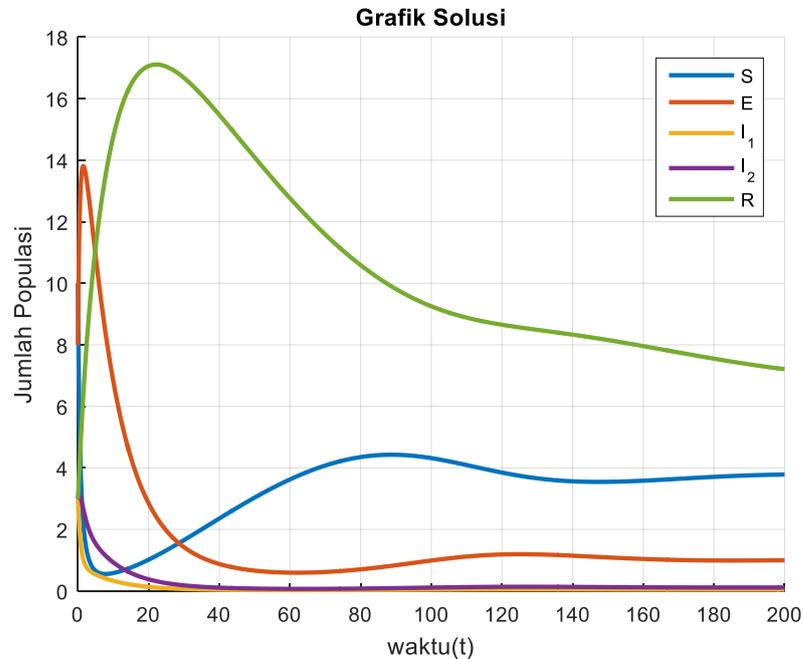
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
δ	0.08	ω_1	0.92
β_1	0.11	ω_2	0.069
β_2	0.08	k_1	0.09
μ	0.014	k_2	0.72
b	0.1	d_1	0.2
θ	0.09	d_2	0.02

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4.4, diperoleh angka reproduksi dasar

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)}{\mu (b_0 (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2))} = 3.2482 > 1.$$

Karena nilai $\mathcal{R}_0 > 1$, maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis dan stabil yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ($P^0 = 12.1429, 0, 0, 0, 0$) dan titik kesetimbangan endemik ($P^* = 3.7383, 1.0321, 0.0449, 0.1188, 6.3976$).

Selanjutnya dengan menggunakan parameter tersebut dan diberikan nilai awal pada masing-masing subpopulasi = 10, $E = 8$, $I_1 = 3$, $I_2 = 3$, dan $R = 3$ diperoleh kurva solusi yang dapat dilihat pada Gambar 4.3 berikut



Gambar 4.4 Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 3.2482 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0.069$

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa jumlah populasi pada individu rentan mengalami penurunan pada kondisi awal yang disebabkan oleh perpindahan sebagian individu rentan TB menjadi individu laten TB serta adanya kematian alami. Namun, secara perlahan terjadi kenaikan yang disebabkan oleh adanya penambahan individu pada subpopulasi rentan. Kemudian mengalami dinamika hingga konstan pada titik kesetimbangan S^* .

Sementara itu, jumlah populasi pada individu laten mengalami kenaikan pada kondisi awal yang disebabkan oleh penambahan sebagian individu rentan. Kemudian terjadi penurunan hingga konstan pada titik kesetimbangan E^* . Pada jumlah populasi terinfeksi TB yang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit juga mengalami kenaikan pada kondisi awal yang disebabkan oleh

penambahan sebagian individu laten. Kemudian terjadi penurunan jumlah populasi hingga konstan pada masing-masing titik I_1^* dan I_2^* yang disebabkan oleh beberapa faktor diantaranya laju penderita TB menjalani pengobatan semakin besar, penderita TB berhasil sembuh, kematian alami dan kematian karena TB. Jumlah populasi sembuh juga terjadi kenaikan karena sebagian penderita TB yang menjalani pengobatan telah sembuh. Namun, juga terjadi penurunan yang disebabkan oleh kematian alami. Selanjutnya terjadi dinamika hingga konstan pada titik R^* .

Berdasarkan grafik solusi yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa kurva $(t), E(t), I_1(t), I_2(t),$ dan $R(t)$ akan menuju ke titik kesetimbangan endemik P^* . Dengan kata lain titik P^* pada kondisi nyata masih terjadi penyebaran penyakit. Sehingga subpopulasi terinfeksi yaitu $E(t), I_1(t),$ dan $I_2(t)$ masih harus menjalani pengobatan hingga sembuh.

4.6 Model Infeksi Tuberkulosis dalam Pandangan Islam

Islam sebagai agama yang sempurna telah mengatur dengan sebaik-baiknya sesuai dengan kekuasaan-Nya. Salah satunya adalah masalah kesehatan. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surah Yunus ayat 57 yang berbunyi: "*Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit yang ada dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman*". Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah menurunkan suatu penyakit pasti disertai dengan obatnya. Setiap manusia yang diberi ujian sakit oleh Allah dianjurkan untuk segera berobat sehingga dapat sembuh. Sama halnya dengan kasus penularan pada tuberkulosis. Jika seseorang terkonfirmasi positif TB, maka diharuskan untuk segera melakukan pengobatan secara intensif agar cepat sembuh.

Dalam konteks penularan penyakit TB, manusia tidak boleh menganggap remeh penularan penyakit ini. Penyakit ini dapat menyebar dengan cepat melalui udara ketika penderita aktif TB mengeluarkan dahak ketika bersin atau batuk. Sebagaimana dalam islam menjelaskan bahwa suatu penyakit menular hendaknya dijadikan sebagai suatu bentuk refleksi diri untuk semakin meningkatkan ketakwaan serta keimanan kepada Allah SWT karena manusia itu lemah dihadapan-Nya. Berdasarkan penjelasan tersebut, hasil penelitian model penyebaran tuberkulosis pada populasi S, E, I_1, I_2 dan R akan menuju titik kesetimbangan endemik. Pada kondisi endemik menjelaskan bahwa penyebaran tuberkulosis masih terjadi, belum hilang seluruhnya. Sehingga diperlukan upaya pencegahan serta pengobatan yang efektif untuk menekan angka penularan terinfeksi TB. Salah satu upaya pencegahan yang dapat dilakukan yaitu dengan menjaga kebersihan. Dalam islam menjaga kebersihan dapat dilakukan dengan berwudhu atau mandi. Berwudhu dapat melindungi tubuh dari kuman penyakit seperti menjaga kebersihan hidung ketika seseorang melakukan *instinsyaq* yaitu menghirup atau memasukkan air ke dalam lubang hidung.

Selain itu, untuk menekan angka penyebaran tuberkulosis bagi mereka yang telah terinfeksi TB untuk menjalani dengan ikhlas, bersabar, serta berusaha semaksimal mungkin untuk sembuh dan tidak lupa meminta pertolongan dari Allah SWT. Penularan TB dapat terjadi kepada siapa saja, dimana saja dan kapan saja. Oleh karena itu, untuk mengatasi penyebaran penyakit TB salah satu caranya yaitu melakukan karantina diri atau *social distancing* bagi penderita TB laten maupun terinfeksi TB untuk mengurangi penyebaran TB karena hal ini dilakukan juga semata-mata untuk melindungi diri sendiri dan orang lain dari bahaya terpapar tuberkulosis.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penulisan dan hasil yang telah diperoleh, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan yang diperoleh sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (b(1 - \theta) + b\theta + \mu)E$$

$$\frac{dI_1}{dt} = b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - (\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = b\theta E + \omega_1 I_1 - (\omega_2 + k_2 + \mu + d_2)I_2$$

$$\frac{dR}{dt} = k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R$$

2. Model infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (P^0) dan titik kesetimbangan endemik (P^*). Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal dan global apabila $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal dan global apabila $\mathcal{R}_0 > 1$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini membahas mengenai model SEIR penyebaran TB pada dua lokasi pengobatan yaitu rumah dan rumah sakit. Untuk penelitian selanjutnya,

penulis menyarankan dapat dimodifikasi model infeksi dengan memberikan asumsi terjadi kekambuhan pada individu yang telah sembuh.

DAFTAR PUSTAKA

- Akbar, D. L., & Budiyanto, B. (2020). Konsep Kesehatan Dalam Al-Qur'an Dan Hadis. *Al-Bayan: Jurnal Ilmu Al-Qur'an Dan Hadist*, 3(2), 157–173.
- Akman Yıldız, T., & Karaoğlu, E. (2019). Optimal control strategies for tuberculosis dynamics with exogenous reinfections in case of treatment at home and treatment in hospital. *Nonlinear Dynamics*, 97(4), 2643–2659.
- Alligood, K.T., T.D. Sauder, & J.A. Yorke. (2000). *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Al-Qur'an dan Terjemahan. Kementerian Agama Republik Indonesia.
- Anton, H & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi*. Edisi 8 Jilid 1. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W.E. & R.C. DiPrima. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Driessche, P.V.D. & J. Watmough. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Bioscience*, Vol 180. Hal 29-48.
- Faruk, A. (2016). Model Epidemik Tuberkulosis Seir dengan Terapi pada Individu Terinfeksi. *Jurnal Penelitian Sains (JPS)*, 18(3), 99–104.
- Finizio, N. & Ladas. (1982). *An Introduction to Differential Equations with Difference Equations, Fourier series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont California.
- Hadits Riwayat At-Thabrani.
- Hadits Riwayat Bukhori.
- Hadits Riwayat Bukhori dan Muslim.
- Hadits Riwayat Muslim no 245.
- Huo, H. F., & Zou, M. X. (2016). Modelling effects of treatment at home on tuberculosis transmission dynamics. *Applied Mathematical Modelling*, 40(21–22), 9474–9484.
- Hurint, R. U., Ndi, M. Z., & Lobo, M. (2017). Analisis Sensitivitas Model

- Epidemi SEIR. *Natural Science: Journal of Science and Technology*, 6(1), 22–28.
- Heffernan, J.M, R.J Smith, dan L.M. Wahl. (2005). Perspective on the basic reproduction ratio. *The Royal Society Interface*. Vol 2. Hal 281-293.
- Iswari, A., Endarti, D., Trijayanti, C., Haris, R.N.H., & Imansari, A. N. R. (2020). Analisis Biaya Penyakit Tuberkulosis: Studi Kasus di Salah Satu Puskesmas dan Rumah Sakit di Yogyakarta. *Majalah Farmaseutik*, 16(2), 211.
- Murray, J.D., (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. Third edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
- Nagle, R.K., E.B. Staff., & A.D. Snider. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundaring Value Problems (sixt ed)* USA: Pearson Education, Inc.
- Peter, M. (2014). *More Calculus of Single Variable*. Springer-Verlag. New York.
- Rahayu, W. (2005). *Analisa Dinamik dan Proses Markov dari Model Penyebaran Ebola*. Skripsi
- Ridho, M. R. (2020). Wabah Penyakit Menular dalam Sejarah Islam dan Relevansinya dengan Covid-19. *JUSPI (Jurnal Sejarah Peradaban Islam)*, 4(1), 24–33.
- Side, S., Sanusi, W., & Bohari, A. (2021). *Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar*. 4(1), 1–12.
- Sundari, R., & Apriliani, E. (2017). Konstruksi Fungsi Lyapunov Untuk Menentukan Kestabilan. *Jurnal Sains dan Seni ITS* vol. 6, No. 1, 28-32
- WHO. (2021). *Global Tuberculosis Report 2021*. Geneva: World Health Organization.
- Wikurendra, E. A. (2019). *Literatur Review : Faktor Faktor Yang Mempengaruhi Kejadian Tuberkulosis Paru Dan Penanggulangannya*.

LAMPIRAN

Lampiran 1 M-File Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

```
function dydt=seir(t,y)
global dl bs bd m te b w1 w2 d1 d2 k1 k2

%system persamaan
dy1 = dl-(bs*y(3)+bd*y(4))*y(1)-m*y(1);
dy2 = (bs*y(3)+bd*y(4))*y(1)-(b*(1-te)+b*te+m)*y(2);
dy3 = b*(1-te)*y(2)+w2*y(4)-(w1+k1+m+d1)*y(3);
dy4 = b*te*y(2)+w1*y(3)-(w2+k2+m+d2)*y(4);
dy5 = k1*y(3)+k2*y(4)-m*y(5);

dydt=[dy1; dy2; dy3; dy4; dy5];

clc; clear all; close all;
global dl bs bd m te b w1 w2 d1 d2 k1 k2

%Parameter untuk R0<1
dl =0.08; bs =0.11; bd =0.08; m =0.014; b =0.1;
te =0.09; w1 =0.92; w2 =0.069; k1 =0.09;k2 =0.72;
d1 =0.2; d2 =0.02;
b0 = (b*(1-te)+b*te+m);
b1 = (w1+k1+m+d1);
b2 = (w2+k2+m+d2);

%Angka Reproduksi Dasar
p = dl/m %p adalah titik kesetimbangan bebas penyakit
X = bs*(b2*b*(1-te)+w2*b*te);
Y = bd*(w1*b*(1-te)+b1*b*te);
Z = b0*(b1*b2-w1*w2);
Ro = p*((X+Y)/Z)

time = [0 365];

initial_s = 10;
initial_e = 8;
initial_i1 = 3;
initial_i2 = 3;
initial_r = 3;

y0=[initial_s, initial_e, initial_i1, initial_i2, initial_r];

figure(1)
[t,y]= ode45(@(t,y) seir(t,y), time, y0);
hold on
grid on
plot(t,y,'LineWidth',2);
xlabel('waktu(t)');
ylabel('Jumlah Populasi');
title('Grafik Solusi');
legend ('S', 'E', 'I_1', 'I_2', 'R');
```

Lampiran 2 M-File Simulasi Numerik Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$

```

clc; clear all; close all;
global dl bs bd m te b w1 w2 d1 d2 k1 k2

%Parameter untuk R0>1
dl = 0.17; bs = 0.41; bd = 0.11; m = 0.014; b = 0.1;
te = 0.56; w1 = 0.89; w2 = 0;%atau w2=0.069
k1 = 0.09; k2 = 0.72; d1 =0.2; d2 = 0.02;
b0 = (b*(1-te)+b*te+m);
b1 = (w1+k1+m+d1);
b2 = (w2+k2+m+d2);

%Angka Reproduksi Dasar
p = dl/m
X = bs*(b2*b*(1-te)+w2*b*te);
Y = bd*(w1*b*(1-te)+b1*b*te);
Z = b0*(b1*b2-w1*w2);
Ro = p*(X+Y)/Z

%Titik Keseimbangan Endemik
L = b1*b2-w1*w2;
E = (dl/b0)*(1-(1/Ro))
SB = (dl-b0*E)/m
I1B = (b2*b*(1-te)+w2*b*te)*E/L
I2B = (w1*b*(1-te)+b1*b*te)*E/L
er = (k1*I1B+k2*I2B)/m %subpopulasi R

%Routh-Hurwitz
a0 = 1;
a1 = bs*I1B+bd*I2B+m+b0+b1
a2 = bs*I1B*b0+bd*I1B*b1+bd*I2B*b0+bd*I2B*b1+m*b0+m*b1+b0*b1-
bs*SB*b*(1-te)
a3 = bs*I1B*b0*b1+bd*I2B*b0*b1+m*b0*b1-bs*SB*m*b*(1-te)
H2 = a1*a2-a0*a3 %a1.a2-a3>0

time = [0 365];

initial_s = 10;
initial_e = 8;
initial_i1 = 3;
initial_i2 = 3;
initial_r = 3;

y0=[initial_s, initial_e, initial_i1, initial_i2, initial_r];

figure(1)
[t,y]= ode45(@(t,y) seir(t,y), time, y0);
hold on
grid on
plot(t,y,'LineWidth',2);
xlabel('waktu(t)');
ylabel('Jumlah Populasi');
title('Grafik Solusi');
legend ('S', 'E', 'I_1', 'I_2', 'R');

```

RIWAYAT HIDUP



Ummul Aulia KT, lahir di Kalabahi pada tanggal 18 Mei 1999, bisa dipanggil Aulia. Bertempat tinggal di Kadelang Timur, Kec. Teluk Mutiara, Kabupaten Alor, NTT. Anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Kamarudin Tamolung dan Ibu Siti Nuraini Biat. Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu Taman Kanak-kanak Islam Suharsikin 2 Kadelang (2003-2005), kemudian melanjutkan di SD Islam Cokroaminoto 2 Kalabahi (2005-2011). Setelah itu, melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah pertama di MTs. Negeri 1 Kalabahi (2011-2014). Lalu melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah atas di MAN 1 Kalabahi (2014-2017). Pada tahun 2017 melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

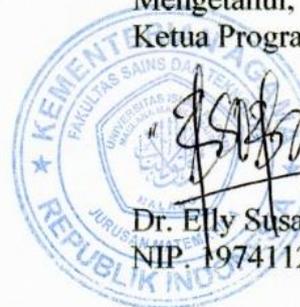
Nama : Ummul Aulia KT
NIM : 17610108
Fakultas/ Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Infeksi Mikrobakterium
Tuberkulosis Dengan Dua Lokasi Pengobatan
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	09 September 2021	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2	20 September 2021	Konsultasi Kajian Agama	2.
3	29 Oktober 2021	Revisi Bab I, II, dan III	3.
4	02 November 2021	Revisi Kajian Agama	4.
5	04 November 2021	ACC Seminar Proposal	5.
6	26 November 2021	Konsultasi Kajian Agama	6.
7	03 Desember 2021	Konsultasi Bab III	7.
8	17 Mei 2022	Revisi Bab IV	8.
9	19 Mei 2022	Revisi Kajian Agama	9.
10	21 Mei 2022	ACC Seminar hasil	10.
11	09 Juni 2022	Revisi Bab IV	11.
12	13 Juni 2022	ACC keseluruhan untuk disidangkan	12.

Malang, 22 Juni 2022

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005