

**ANALISIS DINAMIK MODEL POPULASI  
PEROKOK KONVENSIONAL DAN ELEKTRIK**

**SKRIPSI**

**OLEH  
FASYA ILYA CAHYADINA  
NIM. 17610005**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL POPULASI  
PEROKOK KONVENSIONAL DAN ELEKTRIK**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
FASYA ILYA CAHYADINA  
NIM. 17610005**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2022**

**ANALISIS DINAMIK MODEL POPULASI  
PEROKOK KONVENSIONAL DAN ELEKTRIK**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Fasya Ilya Cahyadina  
NIM. 17610005**

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 16 Juni 2022

Pembimbing I



Dr. Heni Widayani, M.Si  
NIDT. 19901006 201802012 229

Pembimbing II



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si  
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL POPULASI  
PEROKOK KONVENSIIONAL DAN ELEKTRIK**

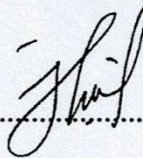
**SKRIPSI**

**Oleh  
Fasya Ilya Cahyadina  
NIM. 17610005**

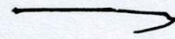
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 21 Juni 2022

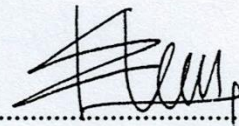
Ketua Penguji : Juhari, M.Si

  
.....

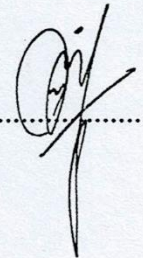
Anggota Penguji 1 : Dr. Usman Pagalay, M.Si

  
.....

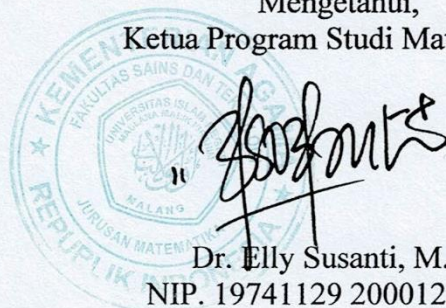
Anggota Penguji 2 : Dr. Heni Widayani, M.Si

  
.....

Anggota Penguji 3 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

  
.....

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

  
Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fasya Ilya Cahyadina

NIM : 17610005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Populasi Perokok Konvensional dan  
Elektrik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Juni 2022

Yang membuat pernyataan,



Fasya Ilya Cahyadina  
NIM. 17610005

**MOTO**

*“Though Times Never Last, But Tough People Do!”*

(Robert H. Sculler)

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Nurcahyo, dan Ibu Siti Aisyah, serta adik Deidra yang menjadi motivasi utama penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, senantiasa dengan ikhlas dan istiqomah mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur penulis haturkan kepada Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmatNya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul “Analisis Dinamik Model Populasi Perokok Konvensional dan Elektrik” dengan baik. Tidak lupa shalawat serta salam selalu tercurah kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman islamiah.

Skripsi ini dituliskan sebagai salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program Sarjana Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penulisan skripsi ini, penulis telah banyak menerima banyak dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu pada halaman ini penulis ingin memberikan ucapan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang sudah memberikan bimbingannya yang berupa ilmu, masukan, nasihat dan motivasi yang bermanfaat kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang memberikan ilmu, arahan, dan masukan positif kepada penulis.
6. Juhari, M.Si, selaku Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi yang memberikan saran serta kritikan positif kepada penulis.
7. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Anggota Penguji I dalam Ujian Skripsi yang memberikan saran serta kritikan positif kepada penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

9. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan dukungan dan do'a terbaik kepada penulis.

10. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika Angkatan 2017.

Dengan mengharapkan Ridho dari Allah SWT penulis panjatkan doa dan harapan mudah-mudahan segala amal baik semua pihak diterima di sisi Allah dan mendapatkan balasan yang lebih besar dari-Nya

*Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 21 Juni 2022

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b> .....	v
<b>MOTO</b> .....	vi
<b>PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiv
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xv
<b>ABSTRAK</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvii
مستخلص البحث .....	xviii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	4
1.5 Batasan Masalah .....	5
1.6 Definisi Istilah .....	6
<b>BAB II KAJIAN TEORI</b> .....	8
2.1 Teori Pendukung .....	8
2.1.1 Persamaan Diferensial Nonlinear .....	8
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear .....	9
2.1.3 Titik Ekuilibrium .....	10
2.1.4 Linearisasi .....	11
2.1.5 Nilai dan Vektor Eigen .....	14
2.1.6 Jenis Kestabilan Titik Kesetimbangan .....	17
2.1.7 Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz .....	18
2.1.8 Bilangan Reproduksi Dasar .....	21
2.1.9 Bifurkasi .....	23
2.1.10 Indeks Sensitivitas .....	26
2.1.11 Rokok Elektrik .....	27
2.2 Pentingnya Sikap Muraqabah Bagi Umat Muslim Dalam Bertindak .....	29
2.3 Model Populasi Perokok Konvensional dan Elektrik .....	30
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	36
3.1 Jenis Penelitian .....	36
3.2 Tahapan Penelitian .....	36
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	39
4.1 Analisis Dinamik .....	39
4.1.1 Titik Kesetimbangan Bebas Perokok .....	43

4.1.2	Bilangan Reproduksi Dasar .....	44
4.1.3	Titik Keseimbangan Endemik .....	47
4.1.4	Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Perokok.....	53
4.1.5	Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik.....	56
4.1.6	Analisis Bifurkasi .....	62
4.1.7	Simulasi Numerik.....	68
4.2	Analisis Sensitivitas .....	76
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>		<b>83</b>
5.1	Kesimpulan.....	83
5.2	Saran .....	84
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>85</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>		<b>87</b>
<b>RIWAYAT HIDUP .....</b>		<b>91</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Jenis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	18
Tabel 2.2	Nilai Parameter untuk Model (Jung, dkk, 2018) .....	35
Tabel 4.1	Nilai Parameter Ketika $R_0 < 1$ .....	68
Tabel 4.2	Nilai Parameter Ketika $R_0 > 1$ .....	71
Tabel 4.3	Nilai Estimasi Parameter.....	80
Tabel 4.4	Nilai Indeks Sensitivitas .....	81

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Kurva Bifurkasi <i>Saddle-Node</i> .....	24
Gambar 2.2	Kurva Bifurkasi Transkritikal .....	25
Gambar 2.3	Rokok Elektrik .....	27
Gambar 2.4	Diagram Alir Model (Jung, dkk, 2018).....	31
Gambar 4.1	Bifurkasi Mundur .....	66
Gambar 4.2	Bifurkasi Maju .....	67
Gambar 4.3	Simulasi Numerik Ketika $R_0 < 1$ .....	69
Gambar 4.4	Potret Fase Ketika $R_0 < 1$ .....	71
Gambar 4.5	Simulasi Numerik Ketika $R_0 > 1$ .....	73
Gambar 4.6	Potret Fase Ketika $R_0 > 1$ .....	75
Gambar 4.7	Grafik Sensitivitas Parameter terhadap $R_0$ .....	81

## DAFTAR SIMBOL

- $\hat{P}(t)$  : Populasi perokok potensial terhadap waktu  $t$ .  
 $\hat{S}(t)$  : Populasi perokok konvensional terhadap waktu  $t$ .  
 $\hat{E}(t)$  : Populasi perokok elektrik terhadap waktu  $t$ .  
 $\hat{Q}(t)$  : Populasi perokok yang berhenti terhadap waktu  $t$ .  
 $\hat{N}(t)$  : Populasi total terhadap waktu  $t$ .  
 $P(t)$  : Populasi perokok potensial terhadap waktu  $t$  yang telah ditransformasi terhadap  $\hat{N}(t)$ .  
 $S(t)$  : Populasi perokok konvensional terhadap waktu  $t$  yang telah ditransformasi.  
 $E(t)$  : Populasi perokok elektrik terhadap waktu  $t$  yang telah ditransformasi.  
 $Q(t)$  : Populasi perokok yang berhenti terhadap waktu  $t$  yang telah ditransformasi.  
 $N(t)$  : Populasi total terhadap waktu  $t$  yang telah ditransformasi.  
 $\mu$  : Laju kematian alami.  
 $\beta_1$  : Laju perokok potensial menjadi perokok konvensional.  
 $\beta_2$  : Laju perokok konvensional yang berhenti merokok.  
 $\gamma_1$  : Laju perokok yang berhenti kambuh menjadi perokok konvensional.  
 $\gamma_2$  : Laju perokok elektrik yang berhenti merokok.  
 $g$  : Laju perokok konvensional menggunakan rokok elektrik.  
 $\alpha$  : Laju perokok elektrik yang kembali menjadi perokok konvensional.  
 $R_0$  : Bilangan reproduksi dasar.  
 $e_0$  : Titik kesetimbangan bebas perokok.  
 $S_0$  : Titik kesetimbangan bebas perokok populasi  $S$ .  
 $E_0$  : Titik kesetimbangan bebas perokok populasi  $E$ .  
 $Q_0$  : Titik kesetimbangan bebas perokok populasi  $Q$ .  
 $e^*$  : Titik kesetimbangan endemik.  
 $S^*$  : Titik kesetimbangan endemik populasi  $S$ .  
 $E^*$  : Titik kesetimbangan endemik populasi  $E$ .  
 $Q^*$  : Titik kesetimbangan endemik populasi  $Q$ .  
 $I$  : Matriks Identitas.  
 $J$  : Matriks Jacobian.  
 $\lambda$  : Nilai eigen.  
 $g(S^*)$  : Persamaan titik kesetimbangan endemik populasi  $S$ .  
 $R_c$  : Nilai bifurkasi pada  $g(S^*)$ .  
 $\beta_2^*$  : Parameter penentu nilai  $R_c$ .

## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1.</b> M-File untuk Analisis Bifurkasi .....	87
<b>Lampiran 2.</b> M-File untuk Simulasi Numerik .....	88
<b>Lampiran 3.</b> M-File untuk Potret Fase .....	89
<b>Lampiran 4.</b> M-File untuk Analisis Sensitivitas .....	92

## ABSTRAK

Cahyadina, Fasya Ilya, 2022, **Analisis Dinamik Model Populasi Perokok Konvensional dan Elektrik**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

**Kata kunci:** Analisis Dinamik, Analisis Sensitivitas, Bifurkasi, Rokok Elektrik.

Jumlah pengguna rokok konvensional saat ini semakin meningkat. Dengan adanya rokok elektrik sebagai alat untuk berhenti merokok, diharapkan dapat membantu mengurangi jumlah perokok konvensional. Penelitian ini menganalisis model populasi perokok konvensional dan elektrik secara dinamik. Analisis dinamik pada model meliputi titik kesetimbangan bebas perokok dan titik kesetimbangan endemik, kestabilan titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar  $R_0$ , analisis bifurkasi, dan simulasi numerik. Selain itu dalam penelitian ini juga dilakukan analisis sensitivitas parameter terhadap nilai  $R_0$  sehingga dapat dilihat parameter mana yang efektif dalam menurunkan penyebaran kebiasaan merokok. Model yang digunakan pada penelitian ini adalah dengan membagi populasi menjadi empat populasi bagian, yaitu populasi perokok potensial ( $\hat{P}$ ), populasi perokok konvensional ( $\hat{S}$ ), populasi perokok elektrik ( $\hat{E}$ ), dan populasi perokok yang telah berhenti ( $\hat{Q}$ ).

Hasil analisis yang diperoleh menunjukkan model memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0) = (0,0,0)$  dan  $e^* = (S^*, E^*, Q^*)$ . Kestabilan dari titik kesetimbangan bebas perokok akan bersifat stabil asimtotik lokal ketika  $R_0 < 1$ , sedangkan untuk titik kesetimbangan endemik akan bersifat stabil asimtotik lokal ketika  $\gamma_1 > \beta_2 Q^*$  dan  $\beta_1 > \alpha/S^*$ . Kemudian terjadi fenomena bifurkasi ketika  $R_0 = 1$ . Bifurkasi mundur terjadi ketika  $R_c < R_0 < 1$  dimana menyebabkan adanya perubahan kestabilan pada titik kesetimbangan endemik, sedangkan bifurkasi maju terjadi ketika  $R_0 > 1$ . Parameter yang memiliki tingkat efektifitas paling tinggi dalam menurunkan bilangan reproduksi dasar  $R_0$  adalah  $\gamma_1$  (laju perokok konvensional yang berhenti merokok dengan keinginan sendiri) dengan nilai indeks sensitivitas  $-0.477$ , kemudian  $g$  (laju perokok konvensional menggunakan rokok elektrik) dengan nilai indeks sensitivitas  $-0.445$ , dan  $\gamma_2$  (laju perokok elektrik berhenti merokok) dengan nilai indeks sensitivitas  $-0.167$ .

## ABSTRACT

Cahyadina, Fasya Ilya, 2022, **The Dynamic Analysis of Conventional and Electric Smokers Population Models**. Thesis, Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang, Supervisors: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

**Keywords:** Dynamic Analysis, Sensitivity Analysis, Bifurcation, E-cigarette

The number of conventional cigarette users is currently increasing. With the existence of e-cigarettes as a tool to stop smoking, it is hoped that this study can help to reduce the number of conventional smokers. This study analyzed the conventional and electric smokers population models dynamically. The dynamic analysis in the model included smokers-free equilibrium points and endemic equilibrium points, the stability of equilibrium points, determining the basic reproduction number  $R_0$ , bifurcation analysis, and numerical simulation. In addition, this study also analyzed the parameter sensitivity to the value of  $R_0$  so that it can be seen which parameters were effective in reducing the spread of smoking habits. This study divided the population into four populations, namely the potential smokers' population ( $\hat{P}$ ), conventional smokers' population ( $\hat{S}$ ), e-smokers' population ( $\hat{E}$ ), and quitting smokers' population ( $\hat{Q}$ ).

The results of the analysis showed that the model had two equilibrium points, namely smokers-free equilibrium points  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0)$  and  $e^* = (S^*, E^*, Q^*)$ . The stability of smokers-free equilibrium points would be locally asymptotically stable when  $R_0 < 1$ , while the endemic equilibrium points would be locally asymptotically stable when  $\gamma_1 > \beta_2 Q^*$  dan  $\beta_1 > \alpha/S^*$ . Then a bifurcation phenomenon occurred when  $R_0 = 1$ . The reverse bifurcation occurred when  $R_c < R_0 < 1$ , which caused a change in stability at the endemic equilibrium points, while forward bifurcation occurred when  $R_0 > 1$ . The parameters that had the highest level of effectiveness in reducing the basic reproduction number  $R_0$  were  $\gamma_1$  (rate of conventional smokers who quit smoking voluntarily) with sensitivity index  $-0.477$ , then  $g$  (rate of conventional smokers using e-cigarettes) with sensitivity index  $-0.445$ , and  $\gamma_2$  (rate of electric smokers quitting smoking) with sensitivity index  $-0.167$ .

## مستخلص البحث

جاهيادينا، فشاء عليا، ٢٠٢٢، التحليل الديناميكي للنموذج السكاني التقليدي والإلكتروني للمدخنين. البحث الخامعي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولان مالك ابراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج، المشرفة: (١) الدكتور هيني ويديان، الماجستير، (٢) آري كوسوماستوتي، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: التحليل الديناميكي (Analisis Dinamik)، تحليل الحساسية (Analisis Sensitivitas)، التشعب (Bifurkasi)، السجائر الإلكترونية (Rokok Elektrik).

ويتزايد حاليا عدد مستخدمي السجائر التقليدية. ومع وجود السجائر الإلكترونية كأداة لوقف التدخين، فمن المأمول أن تساعد هذه الدراسة في الحد من عدد المدخنين التقليديين. وقد قامت هذه الدراسة بتحليل نماذج المدخنين التقليدية والكهربائية بشكل دينامي. وشمل التحليل الدينامي في النموذج نقاط توازن خالية من المدخنين ونقاط توازن مستوطنة، واستقرار نقاط التوازن، وتحديد عدد التكاثر الأساسي  $R_0$ ، وتحليل الكحبات، والمحاكاة العددية. وبالإضافة  $R_0$  إلى ذلك، قامت هذه الدراسة أيضا بتحليل حساسية البارامترات لقيمة بحيث يمكن رؤية البارامترات التي كانت فعالة في الحد من انتشار عادات التدخين. ولقد قسمت هذه الدراسة السكان إلى أربعة مجموعات سكانية، وبالتحديد عدد المدخنين المحتملين ( $\hat{P}$ )، وعدد المدخنين التقليديين ( $\hat{S}$ )، وعدد المدخنين على الإنترنت ( $\hat{E}$ )، ومغادرة المدخنين ( $\hat{Q}$ ).

وأظهرت نتائج التحليل أن النموذج كان له نقطتان للتوازن هما نقاط التوازن الخالية من المدخنين  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0)$  و  $e^* = (S^*, E^*, Q^*)$ . إن استقرار نقاط التوازن الخالية من المدخنين سوف يكون مستقرا على المستوى المحلي عندما  $R_0 < 1$ ، في حين أن نقاط التوازن المستوطنة سوف تكون مستقرة محليا بشكل عفوي عندما  $\gamma_1 > \beta_2 Q^*$  و  $\beta_1 > \alpha/S^*$ . ثم حدثت ظاهرة في عملية الكحوت عندما  $R_0 = 1$ . حدثت عملية الكتان العكسية عندما  $R_0 < 1 < R_c$ ، مما تسبب في تغير الاستقرار عند نقاط الاتزان المستوطنة، بينما حدثت عملية الكتان الأمامية عندما  $R_0 > 1$ . وكانت البارامترات التي لها أعلى مستوى من الفعالية في تخفيض عدد الانجاب الأساسي  $R_0$  هي  $\gamma_1$  (معدل المدخنين التقليديين الذين يتجاءون عن التدخين طوعا) بمؤشر حساسية -0.477، ثم  $g$  (معدل المدخنين التقليديين الذين يستخدمون السجائر الإلكترونية) بمؤشر حساسية -0.445، و  $\gamma_2$  (معدل المدخنين الكهربائيين الذين يهربون من التدخين). بمؤشر حساسية -0.167.

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Perilaku kebiasaan merokok di masyarakat dunia saat ini semakin marak. Bahkan setiap tahunnya efek dari tembakau aktif menyumbangkan angka penyebab kematian sebanyak lima juta orang di dunia dimana angka tersebut melebihi tuberculosis, HIV/AIDS, dan malaria. (WHO, 2012). Saat ini WHO telah mengeluarkan berbagai terapi pengganti nikotin (NRT) sebagai cara agar para perokok konvensional dapat berhenti dari kebiasaan merokoknya, salah satunya yaitu rokok elektrik. Rokok elektrik pertama di buat pada tahun 2003 dan dinyatakan masuk sebagai produk NRT oleh WHO pada tahun 2004 dengan jenis *Electronic Nicotine Delivery Sistem*.

Penelitian oleh (Siegel, dkk, 2011) melakukan survey terhadap 216 responden dengan berbagai karakteristik yang menunjukkan keberhasilan pengaruh rokok elektrik dalam mengurangi kebiasaan merokok. Data yang didapatkan kemudian dianalisis menggunakan metode statistika. Hasil yang didapatkan yaitu sebanyak 66,8% dari total responden melaporkan bahwa setelah terapi dengan rokok elektrik mereka berhasil mengurangi penggunaan rokok konvensional dan setelah beberapa waktu 48,8% diantaranya berhasil berhenti. Responden yang telah menggunakan rokok elektrik sebanyak 20 kali dalam sehari memiliki tingkat kemungkinan untuk berhasil berhenti sebesar 70%. (Siegel, dkk, 2011).

Sebagaimana telah dijelaskan di Al-Quran bahwa Allah SWT melarang bagi umatnya agar tidak melakukan hal-hal yang dapat mengganggu dan merugikan orang lain yaitu di QS Al-Ahzab:58, yang artinya

*“Dan orang-orang yang menyakiti orang-orang mukmin laki-laki dan perempuan tanpa ada kesalahan yang mereka perbuat, maka sungguh, mereka telah memikul kebohongan dan dosa yang nyata.”*

Dari potongan ayat diatas sangat bertepatan dengan bahaya dari merokok yang saat ini semakin marak. Orang yang merokok dapat merugikan diri sendiri karena menghirup bahan kimia yang berbahaya bagi tubuhnya. Selain berbahaya untuk diri sendiri, asap dari rokok juga dapat berbahaya bagi orang di sekitarnya yang menghirup asap tersebut.

Penelitian yang berkaitan dengan pencegahan merokok dengan menggunakan model matematika telah banyak dilakukan sebelum ini. Pertama yaitu (Sharma dan Misra, 2014) mengembangkan model penyebaran kebiasaan merokok dengan adanya kampanye media dalam rangka sebagai bentuk mengurangi jumlah perokok, dengan membuat empat subpopulasi yaitu populasi nonperokok, populasi perokok, populasi berhenti merokok, dan populasi yang terdampak media kampanye. Pada penelitian ini ditemukan bahwa pada bertambahnya tingkat kesadaran dan media kampanye yang fokus pada berhenti merokok, nilai bilangan reproduksi dasar bisa ditekan.

Penelitian lain dilakukan oleh (Lioyong Pang dkk, 2015) yang mengkonstruksi model matematika untuk melihat efek dari pengendalian merokok dengan membuat area khusus merokok dan menaikkan harga rokok di Cina. Hasil dari penelitian tersebut yaitu berdasarkan analisis sensitivitas, bahwa dengan menaikkan harga rokok dan mengurangi kontak antara perokok dan nonperokok

adalah metode yang efektif untuk mengendalikan jumlah perokok. Kemudian, berdasarkan ukuran kontrol, untuk mengurangi jumlah perokok sebanyak 10% maka dalam 20 tahun perlu menaikkan harga rokok hingga 30 yuan dan mendirikan 10000 area khusus merokok dan butuh 300 tahun untuk mencapai di titik stabil.

Penelitian ketiga yaitu merujuk tugas akhir dari (Lestari Putri, 2020) yang membahas model dinamika merokok yang dikontrol dengan adanya kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan, dimana masing-masing kontrol tersebut peruntukannya adalah untuk populasi yang berbeda. Sehingga dari kontrol yang diberikan tersebut dapat menghasilkan pengaruh yang efektif terhadap jumlah perokok potensial, perokok ringan, perokok berat dan nonperokok.

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu yang sudah pernah dilakukan, penulis melihat bahwa masih sedikit penelitian yang membahas rokok elektrik yang digunakan sebagai metode untuk menurunkan jumlah perokok tembakau yang dianalisis dengan menggunakan pemodelan matematika. Sebagaimana telah dinyatakan oleh WHO bahwa rokok elektrik merupakan salah satu metode NRT, maka akan dianalisis bagaimana pengaruh rokok elektrik pada suatu populasi. Penyelesaian masalah akan menggunakan analisis dinamik dan juga sensitivitas.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan uraian masalah di atas, dalam penelitian ini diangkat rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis dinamik pada model populasi perokok konvensional dan elektrik?

2. Bagaimana analisis sensitivitas parameter pada model populasi perokok konvensional dan elektrik terhadap bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ )?

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penulisan ini yaitu:

1. Melakukan analisis dinamik pada model populasi perokok konvensional dan elektrik.
2. Menganalisis tingkat sensitivitas parameter pada model populasi perokok konvensional dan elektrik terhadap bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ).

### **1.4 Manfaat Penelitian**

Sesuai dengan tujuan penelitian di atas, penulisan ini diharapkan dapat memberikan manfaat yaitu:

1. Dapat menambah pengetahuan, khususnya di bidang ilmu kesehatan masyarakat, terkait penggunaan rokok elektrik di sebuah populasi.
2. Dapat mengetahui bagaimana pengaruh dari adanya perokok elektrik terhadap populasi perokok konvensional.
3. Dapat dijadikan rujukan bagi pihak yang berwenang untuk menentukan regulasi terkait penggunaan rokok elektrik.

## 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Lingkup dari populasi yang diamati adalah daerah yang konstan atau tertutup, dimana pada daerah tersebut tidak terjadi migrasi dan keluar dari populasi, kecuali dari kelahiran atau kematian.
2. Populasi akan dikelompokkan menjadi empat populasi bagian yang masing – masing memiliki kriteria atau sifat yang berbeda, yaitu populasi *P* yaitu populasi yang terdiri dari individu yang belum menjadi perokok, kemudian populasi *S* yaitu populasi yang terdiri dari perokok konvensional aktif, populasi *Q* yaitu populasi untuk perokok yang sudah berhenti, dan populasi *E* yaitu populasi pengguna rokok elektrik.
3. Semua kelahiran akan dianggap menjadi perokok potensial sehingga akan masuk ke dalam populasi *P*.
4. Setiap kompartemen populasi memiliki kemungkinan terjadi kematian secara alami, dan kematian yang diakibatkan merokok akan diabaikan.
5. Individu dikatakan menjadi perokok konvensional aktif ketika telah merokok sebanyak lebih dari 100 batang di sepanjang hidupnya, baik dilakukan setiap hari atau kadang – kadang. (Jung, dkk, 2018)
6. Penularan atau penyebaran kebiasaan merokok konvensional yaitu terjadi ketika perokok potensial berinteraksi dengan perokok konvensional.
7. Perokok konvensional dapat beralih menjadi perokok elektrik dengan tujuan terapi untuk mengurangi penggunaan rokok konvensional.

8. Penggunaan rokok elektrik harus diawasi oleh dokter dengan memberikan dosis yang sesuai, sehingga perokok potensial diasumsikan tidak dapat menggunakan rokok elektrik.
9. Perokok elektrik dapat kambuh menjadi perokok konvensional karena adanya beberapa faktor.
10. Perokok elektrik dan perokok konvensional dapat berhenti dari kebiasaan merokok.
11. Perokok aktif, baik perokok konvensional maupun elektrik, yang telah memutuskan untuk berhenti merokok dapat kambuh dan aktif menjadi perokok konvensional kembali.
12. Perokok diasumsikan hanya dapat menggunakan satu jenis rokok (konvensional atau elektrik) per satuan waktu.
13. Perokok yang telah berhenti tidak dapat kembali menjadi perokok elektrik dikarenakan penggunaan rokok elektrik harus mengikuti resep dokter.

## **1.6 Definisi Istilah**

Dalam penelitian ini penulis akan menuliskan beberapa definisi dari istilah yang akan digunakan, yaitu

### **1. Analisis dinamik**

Analisis dinamik adalah suatu metode analisis yang dapat menampilkan sifat dari satu atau lebih kejadian sehingga bisa didapatkan informasi yang presisi karena menampilkan bagaimana perubahan perilaku atau sifat terhadap waktu yang berjalan (dari waktu ke waktu). Sebagai penunjang, hasil analisis

dinamik dapat dibantu dengan program untuk mendapatkan hasil secara visualnya.

## 2. Model matematika populasi

Model matematika merupakan salah satu upaya menyelesaikan suatu masalah sehari-hari dengan cara merepresentastikannya ke dalam bentuk matematika. Bentuk dari model matematika ini biasanya berupa suatu persamaan diferensial.

## 3. Perokok konvensional

Perokok konvensional merupakan orang yang aktif menggunakan rokok konvensional. Rokok konvensional merupakan jenis rokok berbentuk gulungan kertas yang didalamnya mengandung tembakau, nikotin, dan bahan-bahan kimia lain. Cara penggunaannya yaitu dengan cara di bakar sehingga mengeluarkan asap yang kemudian dihisap oleh penggunanya.

## 4. Perokok elektrik

Perokok elektrik merupakan orang yang aktif menggunakan rokok elektrik. Rokok elektrik merupakan jenis rokok yang berbentuk alat elektronik. Rokok elektrik membutuhkan tambahan cairan yang biasa disebut *e-liquid* yang didalamnya memiliki beberapa kandungan seperti nikotin, dll yang akan diisi ulang ke dalam rokok elektriknya. Cara kerja rokok elektrik ini yaitu dengan memanaskan *e-liquid* dengan tenaga dari baterai sehingga berubah menjadi uap yang kemudian dihirup.

## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA**

Pada bab kajian pustaka akan dibahas beberapa penjelasan beserta contoh dari teori yang dapat menunjang dalam menyelesaikan masalah ini. Beberapa teori matematis diantaranya yaitu persamaan diferensial nonlinear, sistem persamaan diferensial nonlinear, titik ekuilibrium, analisis kestabilan, nilai dan vektor eigen, linearisasi, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, bilangan reproduksi dasar, bifurkasi, indeks sensitivitas, dan rokok elektrik. Kemudian terdapat pembahasan terkait integrasi penelitian dengan ayat Al-Qur'an dan model matematika yang menjadi rujukan penelitian.

#### **2.1 Teori Pendukung**

##### **2.1.1 Persamaan Diferensial Nonlinear**

Persamaan diferensial dikatakan berbentuk nonlinear ketika tidak linear. Persamaan diferensial dapat dikatakan berbentuk linear ketika memenuhi beberapa syarat sebagai berikut:

1. Derajat dari variabel terikat dan semua turunannya yaitu adalah satu.
2. Tidak boleh terdapat perkalian antara variabel terikat dengan turunannya ataupun perkalian antara turunan dengan turunan.
3. Tidak boleh terdapat fungsi transenden dari variabel terikat.

Dalam arti lain persamaan diferensial nonlinear adalah bentuk persamaan diferensial yang tidak memenuhi ketiga persyaratan diatas. (Ross, 1984)

Contoh:

$$1. (1 + y) \frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad (2.1)$$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \quad (2.2)$$

$$3. \frac{d^2y}{dx^2} + xy \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Gabungan dari minimal dua persamaan diferensial nonlinear atau lebih dengan fungsi yang tidak diketahui sebanyak dua atau lebih yang menunjukkan beberapa fenomena disebut dengan sistem persamaan diferensial nonlinear. Bentuk sederhana dari sistem persamaan diferensial nonlinear dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

Dimana

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ dan } f(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.4) merupakan bentuk sederhana dari sistem persamaan diferensial nonlinear yang memiliki fungsi nonlinear dengan bentuk  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Contoh:

Salah satu bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy = G(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sistem persamaan (2.5) merupakan bentuk dari persamaan *Predator Prey*. Untuk menyelesaikan sistem (2.5) perlu dilakukan linearisasi.

### 2.1.3 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium biasa disebut dengan titik kesetimbangan. Jika diberikan suatu persamaan  $x' = f(x(t))$ . Maka titik  $x^* \in R^n$  disebut titik ekuilibrium dari persamaan  $x'$  jika  $x^*$  merupakan solusi konstan dari persamaan  $x$ , dengan kata lain dapat juga ditulis bahwa nilai dari  $f(x^*) = 0$ . (Perko, 2001)

Menurut Sulisti, dkk (2014) titik ekuilibrium merupakan penyelesaian dari suatu sistem dan tidak akan merubah perilaku dari sistem di waktu yang tak terhingga. Perhatikan persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\tag{2. 6}$$

dimana fungsi  $F$  dan  $G$  merupakan fungsi kontinu terhadap  $x$  dan  $y$ . Titik  $(x^*, y^*)$  merupakan titik kritis dari sistem persamaan sehingga  $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$ . Suatu titik kesetimbangan akan diperoleh ketika titik tersebut berada pada kondisi setimbang. Kondisi setimbang yaitu terjadi ketika  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

Contoh

Menggunakan persamaan *predator – prey* sebagaimana pada persamaan (2. 5)

maka buat persamaan  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \Leftrightarrow x(a - by) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ dan } (a - by) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ dan } -by &= -a \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ dan } y &= a/b\end{aligned}\tag{2. 7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy = 0 \\
&\Leftrightarrow y(-c + \gamma x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ dan } (-c + \gamma x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ dan } \gamma x = c \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ dan } x = c/\gamma
\end{aligned} \tag{2. 8}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2. 7) dan (2. 8) didapatkan titik kesetimbangan pertama yaitu  $(x_0, y_0) = (0,0)$  dan titik kesetimbangan kedua yaitu  $(x_*, y_*) = (c/\gamma, a/b)$ .

Titik ekuilibrium dapat dikelompokkan menjadi dua macam. Pertama yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*), merupakan titik ekuilibrium dimana ketika kompartemen terinfeksi adalah nol yang artinya tidak terdapat individu yang terinfeksi penyakit. Titik ekuilibrium yang kedua yaitu titik ekuilibrium endemik penyakit (*Endemik Equilibrium*), yaitu titik ekuilibrium ketika kompartemen terinfeksi tidak nol yang artinya terjadi penyebaran penyakit dalam suatu populasi.

#### 2.1.4 Linearisasi

Fungsi dari melakukan linearisasi yakni untuk mengubah sistem persamaan nonlinear menjadi sistem persamaan linear. Hasil dari melakukan linearisasi dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium. Perhatikan sistem persamaan (2. 4). Misalkan persamaan (2. 4) merupakan sistem persamaan nonlinear yang perlu dilakukan linearisasi. Kemudian misalkan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2. 4) adalah  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ . Sehingga artinya adalah

$$f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) = \dots = f_n(\bar{x})$$

Sehingga akan dilakukan pendekatan sistem linear dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor di sekitar titik  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\bar{x}) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x})}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \\ &\dots \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\bar{x}) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x})}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \\ &\dots \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(\bar{x}) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(\bar{x})}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \\ &\dots \end{aligned}$$

Dari ekspansi Deret Taylor di atas kemudian potong hingga suku linearnya sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\bar{x}) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\bar{x}) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(\bar{x}) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sistem (2.9) dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa  $(\bar{x})$  adalah titik kesetimbangan dari persamaan (2. 4) maka  $f(\bar{x}) = 0$ . Kemudian misalkan  $w_1 = x_1 - \bar{x}_1, w_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, w_n = x_n - \bar{x}_n$  Sehingga sistem (2. 9) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} w_1 + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} w_n \\ \frac{dw_2}{dt} &= \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} w_1 + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} w_n \\ &\vdots \\ \frac{dw_n}{dt} &= \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} w_1 + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} w_n\end{aligned}$$

Sehingga bentuk linearisasi dari sistem (2. 4) di sekitar titik kesetimbangan  $(\bar{x})$  dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{x}' = J_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} \mathbf{w}$$

dimana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ merupakan matriks Jacobian di sekitar titik}$$

kesetimbangan  $(\bar{x})$  dari sistem (2. 4) dan

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Contoh:

Dengan menggunakan sistem persamaan predator prey (2. 5) maka bentuk sistem persamaan linearnya adalah

$$\mathbf{x}' = J\mathbf{x}$$

Dimana

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial(ax - bxy)}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial(ax - bxy)}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial(-cy + \gamma xy)}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial(-cy + \gamma xy)}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a - by & -by \\ \gamma y & -c + \gamma y \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Kemudian substitusikan nilai titik kritis pertama yaitu  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  sehingga didapatkan

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.10)$$

### 2.1.5 Nilai dan Vektor Eigen

Bentuk dari nilai dan vektor eigen yaitu ketika diberikan matriks  $A$  yang merupakan matriks berukuran  $n \times n$  yang berisi bilangan riil. Maka  $|v\rangle$  dikatakan merupakan vektor eigen dari  $A$  jika memenuhi kondisi

$$[A]\{v\} = \lambda\{v\} \quad (2.11)$$

dimana  $\lambda$  adalah nilai eigen. (Arif, Wahyuni, 2015)

Persamaan diatas dapat juga ditulis menjadi

$$[A]\{v\} - \lambda[I]\{v\} = 0$$

atau

$$([A] - \lambda[I])\{v\} = 0$$

dimana  $[I]$  adalah matriks identitas. Sehingga matriks  $([A] - \lambda[I])$  disebut dengan matriks karakteristik dari matriks  $A$ .

Mencari nilai eigen dari matriks  $A$  dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan

$$([A] - \lambda[I])v = 0 \quad (2.12)$$

Agar penyelesaian dari persamaan diatas tidak sama dengan nol, maka nilai dari determinan harus dibuat sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\det([A] - \lambda[I])v = 0$$

Sehingga persamaan karakteristiknya dapat ditulis menjadi sebagai berikut:

$$\det([A] - \lambda[I])v = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

(Anton & Rorres, 2010)

Contoh

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial predator prey yang sudah dilinearkan seperti pada persamaan (2. 5). Pada persamaan (2. 10) di atas matriks

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$  akan dimisalkan sebagai matriks  $A$ . Sehingga dapat dicari untuk

persamaan karakteristiknya sebagai berikut

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - \lambda)(-c - \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sehingga

$$\Leftrightarrow \lambda = a \text{ dan } \lambda = -c$$

Sehingga didapatkan nilai eigen pada matriks  $A$  adalah  $a$  dan  $-c$ . Kemudian, bentuk persamaan karakteristik dapat dijabarkan dari persamaan (2.13) sehingga

$$\begin{aligned}(a - \lambda)(-c - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - a\lambda + c\lambda - ac &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + (c - a)\lambda - ac &= 0\end{aligned}$$

Substitusikan nilai  $\lambda$  yang telah ditemukan untuk mencari nilai vektor eigen.

Untuk  $\lambda = a$  maka

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a - a & 0 \\ 0 & -c - a \end{bmatrix} v &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c - a \end{bmatrix} v &= 0 \\ \Leftrightarrow (-c - a)v_2 &= 0\end{aligned}$$

Sehingga

$$\Leftrightarrow v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-c - a) \quad (2.14)$$

Untuk  $\lambda = -c$  maka

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a - (-c) & 0 \\ 0 & -c - (-c) \end{bmatrix} v &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + c)v_1 &= 0\end{aligned}$$

Sehingga

$$\Leftrightarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a + c) \quad (2.15)$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.15) vektor eigen dari matriks  $A$

adalah  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

### 2.1.6 Jenis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Uji analisis kestabilan dilakukan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Fungsi dari melakukan analisis kestabilan yaitu untuk mengetahui laju penyebaran dari suatu penyakit. Kestabilan suatu titik ekuilibrium dapat dibedakan menjadi tiga macam yakni stabil, stabil asimtotik, dan tidak stabil. Jika titik ekuilibrium bersifat stabil, artinya penyelesaiannya sangat dekat terhadap titik ekuilibrium. Jika titik ekuilibrium bersifat stabil asimtotik artinya penyelesaiannya konvergen terhadap titik ekuilibrium. Sedangkan jika titik ekuilibrium bersifat tidak stabil berarti penyelesaiannya menjauhi nilai dari titik ekuilibrium. Stabil asimtotik dibagi menjadi dua macam yaitu stabil asimtotik lokal dan global.

#### **Teorema 2.1 Jenis Kestabilan Sistem Linear**

Analisis kestabilan pada sistem persamaan diferensial linear dapat dikategorikan sebagaimana pada Teorema 2.1 berikut

- (1) Titik ekuilibrium dari suatu sistem linear dapat dikatakan stabil jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan bernilai riil negatif atau memiliki bagian riil yang tak positif.
- (2) Titik ekuilibrium dari suatu sistem linear dapat dikatakan stabil asimtotik, jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan bernilai riil dan negatif atau memiliki bagian riil yang negatif.
- (3) Titik ekuilibrium dari suatu sistem linear dapat dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan bernilai riil dan positif atau memiliki bagian riil positif.

(Finizio & Ladas, 1988)

### Teorema 2.2 Jenis Kestabilan Sistem Nonlinear

Kestabilan untuk sistem persamaan diferensial nonlinear maka dapat dilihat berdasarkan Teorema 2.2 berikut

- (1) Titik ekuilibrium dari suatu sistem nonlinear dapat dikatakan stabil asimtotik, jika titik ekuilibrium dari sistem yang telah dilinearkan adalah stabil asimtotik.
- (2) Titik ekuilibrium dari suatu sistem nonlinear dapat dikatakan tidak stabil, jika titik ekuilibrium dari sistem yang telah dilinearkan adalah tidak stabil.

Adapun jenis kestabilan dari titik ekuilibrium pada sistem persamaan diferensial nonlinear berdasarkan nilai eigennya yaitu sebagai berikut

**Tabel 2. 1** Jenis Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Nonlinear

Nilai Eigen	Jenis	Kestabilan
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$	Pelana	Tidak stabil
$\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$		
$a > 0$	Spiral	Tidak stabil
$a < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$a = 0$	Terpusat	Tidak ditentukan

(Boyce & DePrima , 1992)

#### 2.1.7 Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria Routh Hurwitz merupakan salah satu cara untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium apabila akar-akar persamaan karakteristik dari nilai

eigen sulit untuk ditentukan. Misalnya diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk sebagai berikut

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.16)$$

Dari persamaan diatas dapat dibentuk tabel Routh sebagai berikut

$\lambda^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$\lambda^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	
$\lambda^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$		
$\vdots$					
$\lambda^1$	$y_1$	$y_2$			
$\lambda^0$	$z_1$				

dimana

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

dan seterusnya. Persamaan diatas dikatakan stabil jika dan hanya jika kolom pertama dari tabel Routh tidak terjadi tanda yang berubah. (Rif'an, 2013)

Selain dengan menggunakan tabel Routh, untuk menganalisis kestabilan dapat juga dengan menggunakan determinan Hurwitz yaitu

$$\det(H) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Kondisi stabil terpenuhi jika

$$\Delta_k > 0, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, n$$

dimana

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

Untuk  $k = n$  maka  $\Delta_n = \det(H)$

### **Teorema 2.3**

Untuk  $n = 3$  dan  $n = 4$ , maka untuk syarat kestabilan kriteria Routh Hurwitz dapat diberikan dalam bentuk persamaan sebagai berikut

Untuk  $n = 3$ , maka syarat kestabilannya adalah

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \text{ dan } a_1 a_2 - a_3 > 0$$

Untuk  $n = 4$ , maka syarat kestabilannya adalah

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, \text{ dan } a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

(Edelstein Keshet, 1988)

Contoh

Misalkan sebuah sistem memiliki persamaan karakteristik

$$Q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8$$

Maka dari persamaan tersebut dapat dibuat tabel Routhnya sebagai berikut

$$\begin{array}{r}
 =s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 1 \\
 1 \\
 b_1 \\
 c_1 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2 \\
 8 \\
 \\
 \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$c_1 = -\frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Sehingga tabel Routh dari persamaan diatas yaitu

$$\begin{array}{r}
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 1 \\
 1 \\
 -6 \\
 8 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2 \\
 8 \\
 \\
 \end{array}$$

Dapat dilihat bahwa pada kolom pertama terjadi dua kali perubahan tanda yaitu dari 1 ke  $-6$  (positif berubah menjadi negatif) dan berubah lagi untuk yang kedua dari  $-6$  ke 8 (dari tanda negatif ke positif). Karena terjadi perubahan tanda maka dapat dikatakan bahwa sistem persamaan tidak stabil.

$$\Delta_1 = |a_1| = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (1)(8) = -6 < 0$$

Karena nilai pada  $\Delta_2 < 0$ , maka persamaan karakteristik di atas tidak stabil.

### 2.1.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar, yang biasa disimbolkan dengan  $R_0$  merupakan parameter yang digunakan agar besar dari tingkat penyebaran suatu penyakit dapat diketahui. Jika  $R_0 < 1$ , maka individu yang terkena infeksi penyakit akan

dimasukkan ke populasi yang rentan, dan penyakit tidak akan menyebar. Sebaliknya, jika  $R_0 > 1$ , maka jumlah individu yang terinfeksi penyakit akan bertambah banyak sehingga penyakit akan menyebar dan menjadi wabah. Perhatikan bahwa bilangan reproduksi dasar adalah parameter *threshold* untuk kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan berhubungan dengan puncak dan akhir dari suatu penyakit.

Untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar  $R_0$  dilakukan dengan cara mencari nilai eigen (persamaan karakteristik) dari matriks Jacobi yang dikerjakan pada titik ekuilibrium bebas penyakit (Van Den Driessche & Watmough, 2002). Andaikan terdapat  $n$ -kompartemen populasi, dan misalkan  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  dimana  $x_i \geq 0$  adalah jumlah/banyaknya individu pada masing-masing kompartemen  $n$ . Kemudian diberikan  $X_S$  adalah himpunan dari semua titik kesetimbangan bebas penyakit sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut

$$X_S = \{x_j \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$$

dimana  $m$  adalah kompartemen yang berisi individu yang terinfeksi, sehingga  $m \leq n$ .

Kemudian,  $\mathcal{F}_i$  merupakan notasi dari laju munculnya orang yang terinfeksi penyakit pada kompartemen  $i$ , dan  $\mathcal{V}_i$  adalah laju dari perubahan dari adanya pergerakan, kematian, atau sembuh dari kompartemen terinfeksi pada kompartemen  $i$  yang dapat dinyatakan sebagai

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$$

dimana  $\mathcal{V}_i^-$  adalah laju individu yang keluar dari kompartemen  $i$  dan  $\mathcal{V}_i^+$  adalah laju individu yang masuk ke dalam kompartemen  $i$ .

Model kompartemennya dapat dituliskan menjadi

$$x'_i = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, m$$

Tanda ' mengartikan turunan terhadap waktu.

Linearisasi persamaan untuk kompartemen penyakit,  $x$ , dapat ditulis menjadi

$$x' = (F - V)x$$

dimana  $F$  dan  $V$  merupakan matriks berukuran  $m \times m$  yang berisi

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i}(e_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i}(e_0)$$

Didefinisikan  $K = FV^{-1}$  sebagai matriks *next generation* dan

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.17)$$

Dan  $\rho(K)$  merupakan radius spektral dari matriks  $K$ . (Van Den Driessche & Watmough, 2002)

### Definisi 2.1 Radius Spektral

*Diberikan  $A$  adalah matriks  $n \times n$  dan  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$ , maka radius spektral dari matriks  $A$  dapat didefinisikan sebagai*

$$\rho(A) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\sigma_i|\}$$

(Rahayu, 2005)

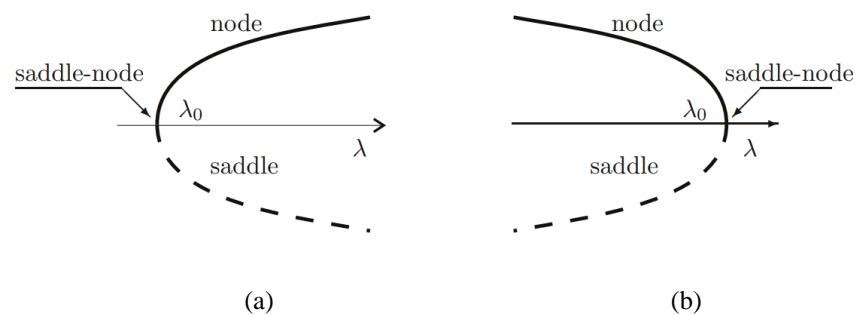
### 2.1.9 Bifurkasi

Fenomena bifurkasi biasanya ditunjukkan dengan adanya perubahan suatu keadaan dinamik, biasanya berupa berubahnya jenis kestabilan titik ekuilibrium dari sistem berparameter dan perubahan jumlah dari titik kesetimbangan. Titik parameter yang menyebabkan perubahan disebut dengan titik bifurkasi. Terdapat beberapa jenis bifurkasi, salah satunya yaitu bifurkasi *saddle-node* dan transkritikal.

### 1. Bifurkasi *Saddle-Node*

Sistem diferensial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$  akan mengalami bifurkasi *saddle-node* pada titik kesetimbangan  $x_0$  untuk nilai bifurkasi  $\lambda_0$ , jika

- (i) Ketika  $\lambda < \lambda_0$ , maka sistem diferensial titik kesetimbangannya tidak eksis
- (ii) Ketika  $\lambda = \lambda_0$ , maka titik  $x_0$  adalah titik kesetimbangan tunggal di  $U$  dan bersifat *saddle-node*.
- (iii) Ketika  $\lambda > \lambda_0$ , maka sistem diferensial memiliki dua titik kesetimbangan dimana yang satu bersifat *saddle* (pelana) dan yang lainnya bersifat *node* (simpul).



**Gambar 2.1** Kurva bifurkasi *saddle node*: (a) superkritikal; (b) subkritikal

Ketika bifurkasi terjadi di sebelah kanan dari nilai bifurkasi maka disebut bifurkasi *saddle-node* superkritikal sebagaimana pada Gambar 2.1(a). Sedangkan jika berada pada sebelah kiri dari nilai bifurkasi maka disebut bifurkasi *saddle-node* subkritikal sebagaimana pada Gambar 2.1(b). (Llibre & Teruel, 2014)

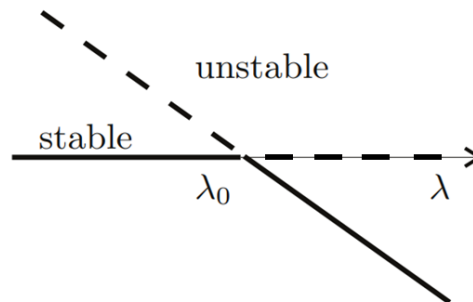
Bifurkasi *saddle-node* dapat dicontohkan dengan persamaan diferensial kuadratik  $\dot{\mathbf{x}} = \lambda - x^2$ . Eksistensi dari titik tetap persamaan tersebut akan bergantung pada nilai parameter  $\lambda$ . Jika  $\lambda < 0$  maka tidak terdapat titik tetap,

sedangkan jika  $\lambda = 0$  maka titik tetapnya adalah 0 yang merupakan titik tetap nonhiperbolik, dan jika  $\lambda > 0$  maka terdapat dua titik tetap yaitu  $-\sqrt{\lambda}$  yang bersifat *saddle* dan  $\sqrt{\lambda}$  yang bersifat *node*.

## 2. Bifurkasi Transkritikal

Sistem diferensial  $\dot{x} = f(x, \lambda)$  akan mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan  $x_0$  untuk nilai bifurkasi  $\lambda_0$ , jika

- (i) Ketika  $\lambda < \lambda_0$ , maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis (satu bersifat stabil dan yang lain bersifat tidak stabil).
- (ii) Ketika  $\lambda = \lambda_0$ , maka kedua titik kesetimbangan bersatu menjadi satu di  $x_0$ , yaitu merupakan titik kesetimbangan nonhiperbolik.
- (iii) Ketika  $\lambda > \lambda_0$ , maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis (satu bersifat stabil dan yang lain bersifat tidak stabil).



**Gambar 2. 2** Kurva Bifurkasi Transkritikal

(Llibre & Teruel, 2014)

Bifurkasi transkritikal dapat dicontohkan dengan persamaan diferensial berikut

$$\dot{x} = \lambda x - x^2$$

dimana  $\lambda$  adalah parameter. Eksistensi dari titik tetap persamaan diferensial akan bergantung pada nilai  $\lambda$ . Ketika  $\lambda < 0$  maka terdapat dua titik tetap yang eksis, yaitu 0 yang bersifat *node* dan titik tetap kedua yaitu  $\lambda$  yang bersifat

*saddle*. Ketika  $\lambda = 0$  maka terdapat satu titik tetap yang merupakan titik tetap nonhiperbolik yaitu 0. Ketika  $\lambda > 0$  maka terdapat dua titik tetap yang eksis yaitu 0 yang bersifat *saddle* dan  $\lambda$  yang bersifat *node*.

### 2.1.10 Indeks Sensitivitas

Penting untuk melakukan analisis sensitivitas khususnya ketika ingin mengetahui tingkat keefektifan parameter mana yang bekerja secara baik dan maksimal pada sebuah model matematika. Analisis sensitivitas menguji parameter terhadap bilangan reproduksi dasar  $R_0$  atau titik ekuilibrium endemik kompartemen terinfeksi. Analisis sensitivitas memiliki dua jenis yaitu ada analisis sensitivitas lokal dan global. Untuk menguji sensitivitas akan digunakan metode normalisasi indeks sensitivitas sebagai berikut:

#### Definisi 2.2

Normalisasi indeks sensitivitas didefinisikan sebagai berikut:

$$C_p^V = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V}$$

Dimana  $p$  merupakan parameter dan  $V$  merupakan variabel yang akan dinormalisasi atau dianalisis. (Hurint, dkk, 2017)

Semakin besar nilai indeks sensitivitas maka pengaruh dari parameter yang dianalisis semakin besar, atau semakin efektif, dan sebaliknya. Kemudian tanda positif dan negatif pada indeks sensitivitas untuk menjelaskan hubungan antara parameter dengan variabel yang diuji. Tanda positif pada indeks mengartikan bahwa parameter dan variabel memiliki hubungan yang positif dimana jika nilai parameter semakin bertambah maka nilai variabel naik, yang artinya jumlah individu yang terinfeksi juga akan bertambah sedangkan jika nilai parameter

dikurangi maka nilai variabel juga akan turun dan jumlah individu yang terinfeksi akan berkurang. Jika indeks sensitivitas memiliki hubungan yang negatif, artinya ketika nilai parameter bertambah maka nilai variabel akan menurun dan ketika nilai parameter berkurang maka nilai variabel akan bertambah.

### 2.1.11 Rokok Elektrik

Rokok elektrik pertama kali diciptakan secara modern oleh Hon Lik, warga kebangsaan Tiongkok. Hon Lik merupakan seorang perokok konvensional yang kemudian ingin mencoba untuk mengurangi kebiasaan tersebut. Hal itulah yang menginspirasi Hon Lik untuk membuat rokok elektrik pada tahun 2003. Rokok elektrik mulai semakin dikenal dan beredar di masyarakat pada tahun 2006.



**Gambar 2.3** Rokok Elektrik (Sumber : news.detik.com)

Rokok elektrik merupakan sebuah alat yang dapat menghasilkan asap tetapi tidak seperti rokok konvensional. Dalam kalangan masyarakat rokok elektrik lebih dikenal dengan beberapa istilah, yaitu *vape*, *vapor*, *green cig*, *electrosnake*, dll. Secara general kandungan pada rokok elektrik yaitu terdiri dari nikotin, propilen, glikol, gliserin, air, dan perisa. Maka dari itu isi dari rokok elektrik yaitu berbentuk cairan yang biasanya disebut dengan *e-liquid* atau *e-juice*.

Terdapat beberapa produk dari rokok elektrik yang mengklaim produknya memiliki kadar nikotin rendah, tetapi menurut (BPOM, 2015) terkadang beberapa rokok elektrik tidak menuliskan kadar nikotin yang sebenarnya, dalam arti lain pada label produk kadar nikotin yang tertera tidak sesuai dengan faktanya. Meskipun jenis zat kimia yang terkandung pada rokok elektrik lebih sedikit jika dibandingkan dengan rokok konvensional, tetapi rokok elektrik memiliki resiko tambahan yang berkaitan dengan voltase dari baterai yang akan berbahaya jika rokok elektrik yang digunakan memiliki voltase yang tinggi. (Indra, dkk, 2015)

Badan Pengawas Obat dan Makanan Republik Indonesia pada tahun 2015 telah menyatakan bahwa rokok elektrik memiliki beberapa manfaat dan kerugian dari rokok elektrik, yaitu sebagai berikut:

a. Manfaat

Sesuai dengan pernyataan dari WHO, rokok elektrik dapat digunakan sebagai terapi untuk menggantikan nikotin dan berhenti dari merokok tetapi dengan cara harus berada di bawah pengawasan dokter dan akan diberi kadar nikotin yang akan dikurangi secara bertahap.

b. Kerugian

1. Meskipun kadar nikotin lebih sedikit, tetapi tetap akan menimbulkan ketergantungan.
2. Terjadi penyalahgunaan rokok elektrik dengan mengisi ulang dengan jenis zat ilegal yang lain seperti heroin, mariyuana.
3. Jumlah perokok dapat bertambah karena label dari masyarakat bahwa rokok elektrik lebih aman dibandingkan dengan rokok konvensional.

Sehingga orang yang sebelumnya belum pernah merokok akan terpengaruh dan mencoba rokok elektrik.

4. Adanya resiko perokok yang menggunakan kedua jenis rokok (*dual user*) yaitu menggunakan rokok konvensional dan juga rokok elektrik.
5. Perokok konvensional yang telah berhenti secara permanen dapat kambuh lagi dan menggunakan rokok elektrik karena menganggap lebih aman

## **2.2 Pentingnya Sikap Muraqabah Bagi Umat Muslim dalam Bertindak**

Dalam islam telah diajarkan untuk berhati-hati mengambil sebuah tindakan atau keputusan. Sikap hati-hati tersebut dapat disebut dengan sikap muraqabah. Muraqabah, menurut (Munir, 2012) memiliki makna suatu keadaan diri yang sadar dan berlanjut kepada sikap mawas diri atau introspeksi diri sendiri. Dalam Al-Qur'an terdapat beberapa ayat yang menjelaskan sikap muraqabah. Salah satu bentuk dari sikap muraqabah ini yaitu selalu merasa diawasi oleh Allah SWT, sebagaimana pada Q.S Al-Imran: 29 yang artinya:

*“Katakanlah: “Jika kamu menyembunyikan apa yang ada di dalam hatimu atau kamu melahirkannya, pasti Allah mengetahui”. Allah mengetahui apa-apa yang ada di langit dan apa-apa yang ada di bumi. Dan Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu”*

Berdasarkan ayat diatas dapat dilihat bahwa Allah SWT tidak hanya mengawasi dari hal yang dapat terlihat secara fisik saja seperti gerakan, tindakan, perilaku yang dilakukan seorang muslim. Bahkan hingga yang ada di dalam hati seperti niat, perasaan, dan pemikiran di setiap keadaan, lokasi, dan waktu, Allah SWT akan selalu mengetahuinya. Usaha sebesar apapun yang dilakukan untuk bersembunyi dari pengawasannya tidak akan pernah berhasil. Tidak akan pernah terlewatkan dari pengawasan Allah SWT setiap makhluk dan kejadian sekecil

apapun yang terjadi di muka bumi dan langit. Seorang muslim yang sadar akan sikap muraqabah akan merasa selalu diawasi oleh Allah SWT sehingga akan berusaha untuk lebih berhati-hati dalam bertindak. Menurut (Syukur, 2012) muraqabah merupakan level ketaatan kepada Allah SWT yang cukup tinggi dan bisa memelihara diri seorang muslim dari dosa, merasa malu, berhati-hati dalam berkata dan bertindak.

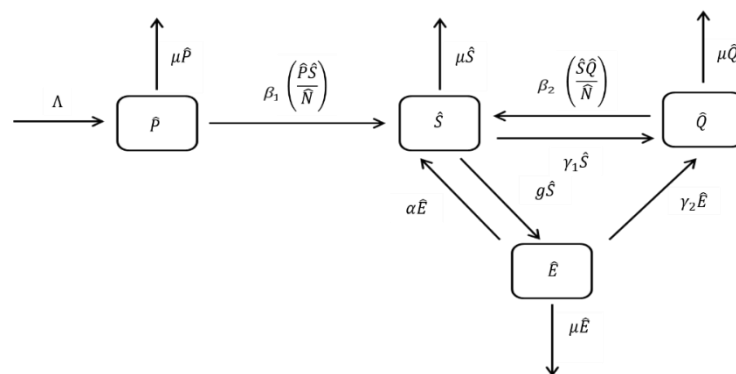
Berdasarkan uraian di atas maka dapat dilihat bahwa sikap muraqabah bagi perokok memiliki hubungan yang sangat kuat dan penting bagi seorang muslim. Ketika seorang muslim memutuskan untuk mengambil langkah menggunakan rokok elektrik sebagai alternatif untuk berhenti merokok, maka perlu diingat kembali bahwa setiap niat dan tindakan yang diambil akan selalu diawasi oleh Allah SWT. Memiliki sikap muraqabah akan membuat seorang muslim lebih berhati-hati dalam mengambil keputusan dan akan mengutamakan perintah Allah SWT.

### **2.3 Model Populasi Perokok Konvensional dan Elektrik**

Pada skripsi ini penulis akan membahas tentang model dari penelitian (Jung, dkk, 2018). Model yang dikonstruksi oleh (Jung, dkk, 2018) bertujuan untuk melihat keefektifan penggunaan rokok elektrik sebagai terapi untuk berhenti dari rokok konvensional. Model matematika yang akan diteliti pada penulisan ini yaitu memiliki beberapa asumsi yang dibuat sebagai batasan masalah dari model yang akan dikonstruksi.

Pada masalah rokok elektrik sebagai upaya pencegahan merokok ini, diasumsikan bahwa dari populasi total  $\hat{N}$  akan dibagi dan masing – masing individu akan dikelompokkan menjadi empat populasi bagian atau kompartemen. Empat

populasi bagian tersebut yaitu terdiri dari populasi perokok potensial ( $\hat{P}$ ), populasi perokok konvensional aktif ( $\hat{S}$ ), perokok elektrik ( $\hat{E}$ ), dan populasi perokok yang telah berhenti merokok ( $\hat{Q}$ ). Berikut merupakan diagram kompartemen untuk konstruksi model pengaruh rokok elektrik sebagai upaya mengurangi jumlah perokok.



**Gambar 2.4** Diagram Alir Model (Jung, dkk, 2018)

Kompartemen populasi pertama merupakan populasi yang berisikan individu yang termasuk perokok potensial ( $\hat{P}$ ), yaitu individu bukan perokok tetapi tidak menutup kemungkinan bahwasannya akan menjadi perokok.  $\Lambda$  merupakan laju pertambahan berupa kelahiran yang akan masuk ke dalam populasi  $\hat{P}$ .

Kompartemen  $\hat{P}$  selain mengalami penambahan individu dari kelahiran tentunya juga mengalami pengurangan individu yang disebabkan oleh kematian sebesar  $\mu$ . Pengurangan individu pada kompartemen  $\hat{P}$  juga terjadi diakibatkan adanya perpindahan individu perokok potensial yang menjadi perokok konvensional aktif. Perpindahan tersebut diakibatkan adanya kontak dengan perokok konvensional, misalnya adanya pengaruh dari teman atau lingkungan sekitar. Laju perpindahan perokok potensial menjadi perokok konvensional aktif akan disimbolkan dengan  $\beta_1$ . Maka dari laju perubahan populasi perokok potensial  $\hat{P}$  terhadap waktu secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \Lambda - \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} - \mu\hat{P} \quad (2.18)$$

Kompartemen populasi bagian kedua yaitu populasi perokok konvensional aktif ( $\hat{S}$ ). Kompartemen  $\hat{S}$  ini berisikan individu yang merupakan pengguna rokok konvensional secara aktif. Seorang perokok dikatakan aktif ketika sudah merokok lebih dari 100 batang rokok di sepanjang hidupnya, baik secara rutin maupun kadang – kadang. (King, Patel, Nguyen, & Dube, 2015). Pada kompartemen  $\hat{S}$  akan terjadi penambahan individu yang disebabkan oleh perpindahan individu dari kompartemen populasi yang lain ke kompartemen populasi  $\hat{S}$ .

Perpindahan pertama yaitu dari perokok potensial yang menjadi perokok konvensional aktif, sesuai dengan yang telah dijelaskan sebelumnya yaitu dengan laju  $\beta_1$ . Adapun perpindahan yang terjadi secara dua arah dari kompartemen populasi perokok elektrik ( $\hat{E}$ ). Perokok elektrik yang menjadi perokok konvensional akan menyebabkan penambahan individu pada kompartemen  $\hat{S}$  yaitu dengan laju  $\alpha$ .

Perokok konvensional yang menjadi perokok elektrik akan menyebabkan pengurangan populasi pada kompartemen  $\hat{S}$  yaitu dengan laju  $g$ . Perpindahan selanjutnya yaitu terjadi secara dua arah dengan kompartemen populasi perokok yang telah berhenti merokok ( $\hat{Q}$ ). Laju dari perokok konvensional yang akhirnya berhenti dari merokok yaitu  $\gamma_1$ , dimana hal tersebut menyebabkan pengurangan individu pada kompartemen  $\hat{S}$ .

Individu pada kompartemen  $\hat{Q}$  yang kambuh kembali menjadi perokok konvensional aktif dengan laju  $\beta_2$  akan menyebabkan penambahan individu pada kompartemen  $\hat{S}$ . Terakhir, pengurangan individu pada kompartemen  $\hat{S}$  terjadi

dikarenakan adanya kematian yaitu dengan laju  $\mu$ . Berdasarkan penjelasan asumsi diatas, laju perubahan kompartemen populasi perokok konvensional aktif  $\hat{S}$  terhadap waktu  $t$  dapat dituliskan secara matematis sebagai berikut

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} + \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} + \alpha\hat{E} - \gamma_1\hat{S} - g\hat{S} - \mu\hat{S} \quad (2. 19)$$

Kompartemen populasi selanjutnya yaitu populasi perokok elektrik ( $\hat{E}$ ). Kompartemen  $\hat{E}$  mengalami peningkatan jumlah individu dari perpindahan perokok konvensional menjadi perokok elektrik, yaitu dengan laju  $g$ . Para perokok konvensional yang memutuskan untuk berubah menjadi perokok elektrik disini diasumsikan bahwa mereka menggunakan rokok elektrik sebagai upaya atau terapi untuk mengurangi kebiasaan merokok mereka. Kemudian adapun perpindahan individu dari populasi perokok elektrik ke perokok konvensional, yaitu dengan laju  $\alpha$ . Salah satu alasan para perokok elektrik yang kembali menjadi perokok konvensional yaitu karena mereka merasa kadar nikotin pada rokok elektrik kurang, sehingga mereka mencari dan kembali ke rokok konvensional. Kemudian adapun perokok elektrik yang akhirnya berhasil untuk berhenti dari kebiasaan merokok. Laju perokok elektrik yang berhasil berhenti dari kebiasaan merokok disimbolkan dengan  $\gamma_2$ . Populasi perokok elektrik juga mengalami kematian alami yaitu dengan laju  $\mu$ . Sehingga berdasarkan penjelasan asumsi diatas laju perubahan populasi perokok elektrik  $\hat{E}$  terhadap waktu  $t$  secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = g\hat{S} - \alpha\hat{E} - \gamma_2\hat{E} - \mu\hat{E} \quad (2. 20)$$

Kompartemen terakhir yaitu  $\hat{Q}$ , adalah populasi perokok yang telah berhasil berhenti dari kebiasaan merokok. Sesuai dengan penjelasan pada kompartemen

sebelumnya bahwa populasi  $\hat{Q}$  berisi perokok yang telah berhenti, baik dari perokok konvensional ataupun perokok elektrik. Terdapat dua cara yang diasumsikan untuk para perokok yang memutuskan untuk berhenti merokok, yaitu secara langsung dan dengan terapi rokok elektrik. Cara langsung disini yaitu ditunjukkan oleh perokok konvensional yang masuk ke kompartemen  $\hat{Q}$  dan menunjukkan bahwa sudah berhenti merokok, yaitu dengan laju  $\gamma_1$ .

Cara kedua yaitu dengan menggunakan terapi rokok elektrik dan akhirnya berhenti yaitu dengan laju  $\gamma_2$ , Perokok yang telah berhenti merokok diasumsikan bahwa mereka dapat kambuh kembali dan menjadi perokok konvensional, yaitu dengan laju  $\beta_2$ . Kematian alami juga akan terjadi pada kompartemen  $\hat{Q}$  yaitu dengan laju  $\mu$ . Sehingga laju perubahan populasi perokok yang telah berhenti merokok  $Q$  terhadap waktu  $t$  secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \gamma_1 S + \gamma_2 \hat{E} - \beta_2 \frac{S\hat{Q}}{\hat{N}} - \mu \hat{Q} \quad (2.21)$$

Dari keempat persamaan untuk masing – masing kompartemen, yaitu (2.18), (2.19), (2.20) dan (2.21), maka dapat ditulis dengan bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai model matematika populasi perokok konvensional dan elektrik, yaitu seperti berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{P}}{dt} &= \mu \hat{N} - \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} - \mu \hat{P} \\ \frac{d\hat{S}}{dt} &= \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} + \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} + \alpha \hat{E} - \gamma_1 \hat{S} - g\hat{S} - \mu \hat{S} \\ \frac{d\hat{E}}{dt} &= g\hat{S} - \alpha \hat{E} - \gamma_2 \hat{E} - \mu \hat{E} \\ \frac{d\hat{Q}}{dt} &= \gamma_1 \hat{S} + \gamma_2 \hat{E} - \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} - \mu \hat{Q} \end{aligned} \quad (2.22)$$

dengan kondisi awal

$$\begin{aligned}
 \hat{P}(0) &= \hat{P}_0 \geq 0, \\
 \hat{S}(0) &= \hat{S}_0 \geq 0, \\
 \hat{E}(0) &= \hat{E}_0 \geq 0, \\
 \hat{Q}(0) &= \hat{Q}_0 \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Parameter yang dipakai dalam model ini juga menggunakan parameter dari penelitian (Jung, dkk, 2018), yaitu

**Tabel 2. 2** Nilai Parameter untuk Model (Jung, dkk, 2018)

Parameter	Deskripsi	Nilai (per tahun)
$\mu$	Laju kematian alami	1/79.8
$\beta_1$	Laju perokok potensial menjadi perokok konvensional	0.1961
$\beta_2$	Laju perokok yang telah berhenti kambuh menjadi perokok konvensional	0.0101
$\gamma_1$	Laju perokok konvensional berhenti merokok	0.0772
$\gamma_2$	Laju perokok elektrik berhenti merokok	0.1008
$\alpha$	Laju perokok elektrik kembali menjadi perokok konvensional	0.0822
$g$	Laju perokok konvensional menjadi perokok elektrik	0.1245

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Penelitian ini dapat dikatakan masuk ke dalam kategori penelitian kualitatif. Bentuk dari penelitian kualitatif yaitu ketika melakukan analisis dinamik model matematika perokok konvensional dan elektrik yang menghasilkan perilaku model secara umum. Kemudian ketika melakukan simulasi numerik akan menggunakan data yang diambil dari artikel (Jung, dkk, 2018) sehingga dapat menampilkan grafik solusi seperti simulasi bifurkasi, kestabilan titik kesetimbangan, potret fase, dan analisis sensitivitas.

#### **3.2 Tahapan Penelitian**

Berikut merupakan langkah-langkah yang akan dilakukan untuk menyelesaikan rumusan masalah, yaitu:

Sub bab 4.1 Analisis Dinamik pada Model Matematika

- a) Pada tahap ini akan ditentukan titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu dengan membuat model pada keadaan setimbang, dalam kata lain laju masing – masing populasi adalah nol. Kemudian karena akan dicari titik ekuilibrium bebas penyakit, maka dari model yang dirujuk akan diasumsikan  $S = 0$  yang artinya tidak ada individu yang terinfeksi.

- b) Merujuk pada model yang telah dikonstruksi pada artikel rujukan, akan dicari bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yaitu dengan menggunakan matriks *next generation*.
- c) Selain titik ekuilibrium bebas penyakit, juga akan ditentukan titik ekuilibrium endemik dimana pada populasi terdapat penyebaran penyakit. Dengan membuat model dalam keadaan setimbang kemudian asumsikan  $S \neq 0$  yang artinya terdapat setidaknya satu individu yang terinfeksi yang kemudian akan menularkan ke individu lain.
- d) Pada tahap ini akan dianalisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu dengan melakukan linearisasi sistem model matematika, dengan menggunakan matriks Jacobi pada titik ekuilibrium bebas penyakit, kemudian melihat nilai eigen untuk menentukan syarat kestabilannya.
- e) Cara yang sama seperti langkah sebelumnya dilakukan untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium endemik akan tetapi dengan menggunakan matriks Jacobi pada titik ekuilibrium endemik. Cara selanjutnya sama seperti langkah sebelumnya.
- f) Dari nilai bilangan reproduksi dasar akan dianalisis apakah terjadi bifurkasi pada model.
- g) Kemudian tahap simulasi numerik akan dilakukan dengan menggunakan Metode Runge Kutta orde empat yang akan menunjukkan grafik kestabilan dari model perokok konvensional dan elektrik.

#### Sub bab 4.2 Analisis Sensitivitas Model Matematika

- a) Untuk mengetahui seberapa efektif pengaruh rokok elektrik sebagai upaya pencegahan merokok dapat dilihat dari hasil analisis sensitivitas. Analisis sensitivitas dilakukan dengan melakukan normalisasi indeks sensitivitas.
- b) Adapun simulasi numerik yang akan diperlihatkan untuk melihat tingkat sensitivitas dengan grafik.

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai analisis model matematika dari populasi perokok konvensional dan elektrik. Analisis yang akan dibahas meliputi analisis dinamik dan analisis sensitivitas. Untuk menyelesaikan analisis dinamik meliputi beberapa hal yang akan dibahas yaitu mencari titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, analisis bifurkasi dan simulasi numeriknya. Kemudian untuk melakukan analisis sensitivitas akan menggunakan normalisasi indeks sensitivitas.

#### 4.1 Analisis Dinamik

Berdasarkan model yang telah dikonstruksi sebelumnya pada sistem persamaan (2.22) diketahui bahwa  $\hat{N}$  merupakan populasi total sehingga merupakan jumlah dari keempat populasi yang ada yaitu  $\hat{P}$ ,  $\hat{S}$ ,  $\hat{E}$ , dan  $\hat{Q}$ . Sehingga dapat diperoleh bahwa laju populasi total yaitu

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{N}}{dt} &= \frac{d\hat{P}}{dt} + \frac{d\hat{S}}{dt} + \frac{d\hat{E}}{dt} + \frac{d\hat{Q}}{dt} \\ &= \Lambda - \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} - \mu\hat{P} + \left( \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} + \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} + \alpha\hat{E} - \gamma_1\hat{S} - g\hat{S} - \mu\hat{S} \right) + \left( g\hat{S} - \right. \\ &\quad \left. \alpha\hat{E} - \gamma_2\hat{E} - \mu\hat{E} \right) + \left( \gamma_1\hat{S} + \gamma_2\hat{E} - \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} - \mu\hat{Q} \right) \\ &= \Lambda - \mu\hat{P} - \mu\hat{S} - \mu\hat{E} - \mu\hat{Q} \\ &= \Lambda - \mu\hat{N}\end{aligned}$$

Populasi total  $\hat{N}$  bernilai konstan jika dan hanya jika  $\frac{d\hat{N}}{dt} = 0$ . Kondisi yang

memenuhi  $\frac{d\hat{N}}{dt} = 0$  adalah ketika  $\hat{N} = \frac{\Lambda}{\mu}$ . Berdasarkan sistem model matematika

(2.22) yang memonitor perubahan jumlah populasi manusia, maka semua variabel

dan nilai parameter akan bernilai tak negatif untuk semua  $t \geq 0$ . Sehingga untuk daerah penyelesaian model (2.22) berada pada

$$\Omega = \{(\hat{P}, \hat{S}, \hat{E}, \hat{Q}) \in \mathbb{R}_+^4, \hat{P} + \hat{S} + \hat{E} + \hat{Q} = \hat{N}\}$$

yang merupakan invarian positif.

Untuk menyederhanakan bentuk populasi pada sistem (2.22) maka dapat dilakukan dengan transformasi variabel dengan penskalaan masing-masing populasi dengan total populasi untuk mempermudah proses analisis model sehingga menjadi

$$\hat{P}/\hat{N} = P, \hat{S}/\hat{N} = S, \hat{E}/\hat{N} = E, \hat{Q}/\hat{N} = Q \quad (4.1)$$

Kemudian diferensialkan persamaan (4.1) terhadap  $t$  sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\hat{P}}{\hat{N}} \right) \\ &= \frac{\frac{d\hat{P}}{dt}(\hat{N}) - \frac{d\hat{N}}{dt}(\hat{P})}{\hat{N}^2} \\ &= \frac{d\hat{P}}{dt} \left( \frac{1}{\hat{N}} \right) - \frac{d\hat{N}}{dt} \left( \frac{P}{\hat{N}} \right) \\ &= \frac{1}{\hat{N}} \left( \frac{d\hat{P}}{dt} - P \frac{d\hat{N}}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\hat{N}} \left( \mu\hat{N} - \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} - \mu\hat{P} - 0 \right) \\ &= \mu - \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}^2} - \mu \frac{\hat{P}}{\hat{N}} \\ &= \mu - \beta_1 PS - \mu P \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kemudian, untuk populasi  $\hat{S}$  bentuk transformasinya adalah

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\hat{S}}{\hat{N}} \right) \\ &= \frac{\frac{d\hat{S}}{dt}(\hat{N}) - \frac{d\hat{N}}{dt}(\hat{S})}{\hat{N}^2} \\ &= \frac{1}{\hat{N}} \left( \frac{d\hat{S}}{dt} - S \frac{d\hat{N}}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\hat{N}} \left( \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}} + \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} + \alpha\hat{E} - \gamma_1\hat{S} - g\hat{S} - \mu\hat{S} - 0 \right) \\
&= \beta_1 \frac{\hat{P}\hat{S}}{\hat{N}^2} + \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}^2} + \alpha \frac{\hat{E}}{\hat{N}} - \gamma_1 \frac{\hat{S}}{\hat{N}} - g \frac{\hat{S}}{\hat{N}} - \mu \frac{\hat{S}}{\hat{N}} \\
&= \beta_1 PS + \beta_2 SQ + \alpha E - \gamma_1 S - gS - \mu S
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Selanjutnya transformasi variabel populasi perokok elektrik,  $\hat{E}$ , yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\hat{E}}{\hat{N}} \right) \\
&= \frac{\frac{d\hat{E}}{dt}(\hat{N}) - \frac{d\hat{N}}{dt}(\hat{E})}{\hat{N}^2} \\
&= \frac{1}{\hat{N}} \left( \frac{d\hat{E}}{dt} - E \frac{d\hat{N}}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{\hat{N}} (g\hat{S} - \alpha\hat{E} - \gamma_2\hat{E} - \mu\hat{E} - 0) \\
&= g \frac{\hat{S}}{\hat{N}} - \alpha \frac{\hat{E}}{\hat{N}} - \gamma_2 \frac{\hat{E}}{\hat{N}} - \mu \frac{\hat{E}}{\hat{N}} \\
&= gS - \alpha E - \gamma_2 E - \mu E
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dan transformasi variabel populasi perokok yang telah berhenti,  $\hat{Q}$ , yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\hat{Q}}{\hat{N}} \right) \\
&= \frac{\frac{d\hat{Q}}{dt}(\hat{N}) - \frac{d\hat{N}}{dt}(\hat{Q})}{\hat{N}^2} \\
&= \frac{1}{\hat{N}} \left( \frac{d\hat{Q}}{dt} - Q \frac{d\hat{N}}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{\hat{N}} \left( \gamma_1\hat{S} + \gamma_2\hat{E} - \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}} - \mu\hat{Q} - 0 \right) \\
&= \gamma_1 \frac{\hat{S}}{\hat{N}} + \gamma_2 \frac{\hat{E}}{\hat{N}} - \beta_2 \frac{\hat{S}\hat{Q}}{\hat{N}^2} - \mu \frac{\hat{Q}}{\hat{N}} \\
&= \gamma_1 S + \gamma_2 E - \beta_2 SQ - \mu Q
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sehingga dari (4.2) hingga (4.5) dapat dibentuk sistem persamaan yang merupakan bentuk transformasi variabel dari (2.22) yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \mu - \beta_1PS - \mu P \\ \frac{dS}{dt} &= \beta_1PS + \beta_2SQ + \alpha E - \gamma_1S - gS - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= gS - \alpha E - \gamma_2E - \mu E \\ \frac{dQ}{dt} &= \gamma_1S + \gamma_2E - \beta_2SQ - \mu Q\end{aligned}\tag{4.6}$$

Berdasarkan persamaan (4.1) maka didapatkan

$$P + S + E + Q = \frac{\hat{P}}{\hat{N}} + \frac{\hat{S}}{\hat{N}} + \frac{\hat{E}}{\hat{N}} + \frac{\hat{Q}}{\hat{N}} = \frac{\hat{P} + \hat{S} + \hat{E} + \hat{Q}}{\hat{N}} = \frac{\hat{N}}{\hat{N}} = 1\tag{4.7}$$

Kemudian, karena fokus utama pada analisis ini adalah melihat perubahan dinamik pada populasi – populasi yang berhubungan dengan perokok elektrik, yaitu ada populasi perokok konvensional dan perokok yang telah berhenti, maka dari itu sistem (4.6) dapat direduksi dengan mensubstitusi nilai  $P$  yang didapatkan dari persamaan (4.7) yaitu  $P = 1 - S - E - Q$  sehingga didapatkan model yang telah direduksi adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}S' &= \beta_1S(1 - S - E - Q) + \beta_2SQ + \alpha E - \gamma_1S - gS - \mu S \\ E' &= gS - \alpha E - \gamma_2E - \mu E \\ Q' &= \gamma_1S + \gamma_2E - \beta_2SQ - \mu Q\end{aligned}\tag{4.8}$$

Titik kesetimbangan untuk sistem persamaan (4.8) dapat dikatakan dalam kondisi setimbang jika memenuhi  $S' = 0$ ,  $E' = 0$ , dan  $Q' = 0$ . Sehingga

$$\begin{aligned}S' &= \beta_1S(1 - S - E - Q) + \beta_2SQ + \alpha E - \gamma_1S - gS - \mu S = 0 \\ E' &= gS - \alpha E - \gamma_2E - \mu E = 0 \\ Q' &= \gamma_1S + \gamma_2E - \beta_2SQ - \mu Q = 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

#### 4.1.1 Titik Keseimbangan Bebas Perokok

Titik keseimbangan bebas perokok yaitu suatu keadaan ketika dalam satu populasi total tidak terdapat individu yang merokok. Maka dari itu, untuk menentukan titik keseimbangan bebas perokok akan diasumsikan bahwa pada populasi total tidak terdapat individu yang merokok pada saat waktu  $t$ , sehingga dapat ditentukan untuk nilai dari  $S(t) = 0$ . Titik keseimbangan bebas perokok dinotasikan dengan  $e_0$  yang berisi  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0)$ .

Tahapan pertama karena diasumsikan bahwa  $S = 0$ , maka dapat disubstitusikan ke dalam (4. 9) seperti berikut

$$\begin{aligned} S' &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_1 S(1 - S - E - Q) + \beta_2 SQ + \alpha E - \gamma_1 S - gS - \mu S &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha E &= 0 \\ \Leftrightarrow E = 0 \text{ atau } \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Karena parameter  $\alpha$  tidak mungkin sama dengan nol, maka pastilah  $E = 0$ . Sehingga didapatkan untuk nilai  $E_0 = 0$ .

Kemudian substitusikan nilai  $S = 0$  dan  $E = 0$  ke dalam persamaan  $Q$  pada sistem persamaan (4. 9).

$$\begin{aligned} Q' &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma_1 S + \gamma_2 E - \beta_2 SQ - \mu Q &= 0 \\ \Leftrightarrow -\mu Q &= 0 \\ \Leftrightarrow Q = 0 \text{ atau } \mu &= 0 \end{aligned}$$

Karena parameter  $\mu$  tidak mungkin sama dengan nol, maka pastilah  $Q = 0$ . Sehingga didapatkan untuk nilai  $Q_0 = 0$ .

Maka titik kesetimbangan bebas perokok yang didapatkan yaitu  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0) = (0,0,0)$ . Dari nilai titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0$  ini dapat diartikan bahwa ketika jumlah dari populasi perokok konvensional  $S$  adalah nol, maka menyebabkan populasi perokok elektrik dan populasi perokok yang telah berhenti tidak ada.

#### 4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Misalkan  $x = (S, E, Q)^T$ , sehingga sistem (4. 8) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i, i = 1,2,3$$

Dimana  $\mathcal{F}_i$  menotasikan laju dari munculnya perokok konvensional yang masuk ke dalam populasi  $i$ , yaitu

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x) \\ \mathcal{F}_2(x) \\ \mathcal{F}_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 S(1 - S - E - Q) + \beta_2 S Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dan  $\mathcal{V}_i$  menotasikan laju keluar atau masuknya individu dari satu populasi  $i$  ke populasi lainnya, yaitu

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1(x) \\ \mathcal{V}_2(x) \\ \mathcal{V}_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aE + (\gamma_1 + g + \mu)S \\ -gS + (a + \gamma_2 + \mu)E \\ -\gamma_1 S - \gamma_2 E + \beta_2 S Q + \mu Q \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobi sebagai bentuk linearisasi dari matriks  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  sebagai berikut

$$F = \begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{F}_1}{dS} & \frac{d\mathcal{F}_1}{dE} & \frac{d\mathcal{F}_1}{dQ} \\ \frac{d\mathcal{F}_2}{dS} & \frac{d\mathcal{F}_2}{dE} & \frac{d\mathcal{F}_2}{dQ} \\ \frac{d\mathcal{F}_3}{dS} & \frac{d\mathcal{F}_3}{dE} & \frac{d\mathcal{F}_3}{dQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(1 - 2S - E - Q) & \beta_1 S & \beta_1 S + \beta_2 S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{V}_1}{dS} & \frac{d\mathcal{V}_1}{dE} & \frac{d\mathcal{V}_1}{dQ} \\ \frac{d\mathcal{V}_2}{dS} & \frac{d\mathcal{V}_2}{dE} & \frac{d\mathcal{V}_2}{dQ} \\ \frac{d\mathcal{V}_3}{dS} & \frac{d\mathcal{V}_3}{dE} & \frac{d\mathcal{V}_3}{dQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + g + \mu & -\alpha & 0 \\ -g & \alpha + \gamma_2 + \mu & 0 \\ -\gamma_1 + \beta_2 Q & -\gamma_2 & \mu + \beta_2 S \end{pmatrix}$$

Kemudian matriks Jacobi  $F$  dan  $V$  akan dievaluasi di titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0) = (0,0,0)$ . Sehingga dengan substitusi  $e_0$  ke  $F$  dan  $V$  didapatkan

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \gamma_1 + g + \mu & -\alpha & 0 \\ -g & \alpha + \gamma_2 + \mu & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \mu \end{pmatrix}$$

Kemudian mencari invers dari  $V$  yaitu,

$$\text{kof}(V) = ((-1)^{i+j} M_{ij})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha + \gamma_2 + \mu & 0 \\ -\gamma_2 & \mu \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -g & 0 \\ -\gamma_1 & \mu \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -g & \alpha + \gamma_2 + \mu \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ -\gamma_2 & \mu \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_1 + g + \mu & 0 \\ -\gamma_1 & \mu \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \gamma_1 + g + \mu & -\alpha \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ \alpha + \gamma_2 + \mu & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \gamma_1 + g + \mu & 0 \\ -g & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_1 + g + \mu & -\alpha \\ -g & \alpha + \gamma_2 + \mu \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu(\alpha + \gamma_2 + \mu) & g\mu & g\gamma_2 + \gamma_1(\alpha + \gamma_2 + \mu) \\ \alpha\mu & \mu(\gamma_1 + g + \mu) & \gamma_2(\gamma_1 + g + \mu) + (\alpha\gamma_1) \\ 0 & 0 & (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Adj}(V) = \text{Kof}(V)^T =$$

$$\begin{pmatrix} \mu(\alpha + \gamma_2 + \mu) & \alpha\mu & 0 \\ g\mu & \mu(\gamma_1 + g + \mu) & 0 \\ g\gamma_2 + \gamma_1(\alpha + \gamma_2 + \mu) & \gamma_2(\gamma_1 + g + \mu) + \alpha\gamma_1 & (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g \end{pmatrix}$$

Kemudian,

$$|V| = \begin{vmatrix} \gamma_1 + g + \mu & -\alpha & 0 \\ -g & \alpha + \gamma_2 + \mu & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 + g + \mu & -\alpha \\ -g & \alpha + \gamma_2 + \mu \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \mu\alpha g \\
&= \mu((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g)
\end{aligned}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{|V|} \text{Adj}(V)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{\alpha}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & 0 \\ \frac{g}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{\gamma_1 + g + \mu}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & 0 \\ \frac{g\gamma_2 + \gamma_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{\alpha\gamma_1 + \gamma_2(\gamma_1 + g + \mu)}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \gamma_2 + \mu}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{\alpha\mu}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & 0 \\ \frac{g\mu}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{\mu(\gamma_1 + g + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & 0 \\ \frac{g\gamma_2 + \gamma_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{\gamma_2(\gamma_1 + g + \mu) + (\alpha\gamma_1)}{\mu(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Kemudian, bentuk matriks *next generation*  $K = FV^{-1}$  adalah

$$\begin{aligned}
K = FV^{-1} &= \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_1 v_{11} & \beta_1 v_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks  $FV^{-1}$  adalah

$$\begin{aligned}
&\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det \left( \begin{pmatrix} \beta_1 v_{11} & \beta_1 v_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \beta_1 v_{11} - \lambda & \beta_1 v_{12} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta_1 v_{11} - \lambda)(-\lambda)(-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta_1 v_{11} - \lambda)\lambda^2 = 0
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

dan

$$\beta_1 v_{11} - \lambda_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 \frac{\alpha + \gamma_2 + \mu}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} = \lambda_3$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 \frac{\alpha + \gamma_2 + \mu}{(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)} = \lambda_3$$

Nilai bilangan reproduksi dasar merupakan bentuk dari radius spektral dari matriks *next generation*  $K$ , yaitu

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K) \\ &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \\ &= \max\left\{0, 0, \left|\beta_1 \frac{\alpha + \gamma_2 + \mu}{(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)}\right|\right\} \\ &= \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} \end{aligned}$$

Sehingga nilai dari  $R_0$  dari sistem (4.8) adalah

$$R_0 = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)} \quad (4.10)$$

### 4.1.3 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan yang dapat menunjukkan bahwa dalam suatu populasi terjadi penyebaran penyakit pada waktu  $t$ . Dalam penelitian ini, penyakit yang dimaksud merupakan perilaku kebiasaan merokok. Asumsi awal yang dibuat untuk menunjukkan terjadi penyebaran kebiasaan merokok yaitu dari populasi perokok yang pasti tidak sama dengan nol, dalam arti lain setidaknya terdapat minimal 1 individu sebagai

perokok konvensional. Titik kesetimbangan endemik akan dinotasikan dengan  $e_* = (S^*, E^*, Q^*)$ .

Tahapan pertama yaitu mencari nilai dari  $E^*$  yang dapat dilakukan dengan menyederhanakan persamaan  $E$  pada sistem (4. 9) sebagai berikut

$$\begin{aligned} gS - \alpha E - \gamma_2 E - \mu E &= 0 \\ \Leftrightarrow gS - (\alpha + \gamma_2 + \mu)E &= 0 \\ \Leftrightarrow -(\alpha + \gamma_2 + \mu)E &= -gS \\ \Leftrightarrow E^* &= \frac{gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu} \end{aligned}$$

Kemudian, untuk mencari nilai  $Q^*$  juga dengan menyederhanakan persamaan  $Q$  pada sistem (4. 9) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \gamma_1 S + \gamma_2 E - (\beta_2 S + \mu)Q &= 0 \\ \Leftrightarrow -(\beta_2 S + \mu)Q &= -(\gamma_1 S + \gamma_2 E) \\ \Leftrightarrow Q^* &= \frac{\gamma_1 E^* + \gamma_2 E^*}{\beta_2 S^* + \mu} \\ \Leftrightarrow Q^* &= \frac{\gamma_1 S^* + \gamma_2 \frac{gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu}}{\beta_2 S^* + \mu} \\ \Leftrightarrow Q^* &= \frac{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)S^*}{(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\beta_2 S^* + \mu)} \end{aligned}$$

Dari hasil  $E^*$  dan  $Q^*$  kemudian substitusikan nilai tersebut pada sistem (4. 9) pada persamaan  $S$  sehingga didapatkan bentuk dari  $S^*$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \beta_1 S(1 - S - E - Q) + \beta_2 SQ + \alpha E - \gamma_1 S - gS - \mu S &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_1 S^*(1 - S^* - E^*) + (\beta_2 S^* - \beta_1 S^*)Q^* + \alpha E^* - (\gamma_1 + g + \mu)S^* &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_1 S^*(1 - E^*) - \beta_1 S^{*2} + (\beta_2 S^* - \beta_1 S^*)Q^* + \alpha E^* - (\gamma_1 + g + \mu)S^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta_1 S^* \left(1 - \frac{gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu}\right) - \beta_1 S^{*2} + (\beta_2 S^* - \beta_1 S^*) \frac{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)S^*}{(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\beta_2 S^* + \mu)} + \\
&\quad a \left(\frac{gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu}\right) - (\gamma_1 + g + \mu)S^* = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta_1 S^* \left(\frac{\alpha + \gamma_2 + \mu - gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu}\right) - \beta_1 S^{*2} + (\beta_2 S^* - \beta_1 S^*) \frac{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)S^*}{(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\beta_2 S^* + \mu)} + \\
&\quad a \left(\frac{gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu}\right) - (\gamma_1 + g + \mu)S^* = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta_1 S^* (\alpha + \gamma_2 + \mu - gS^*) (\beta_2 S^* + \mu) - \beta_1 S^{*2} (\alpha + \gamma_2 + \mu) (\beta_2 S^* + \mu) + \\
&\quad (\beta_2 S^{*2} - \beta_1 S^{*2}) (\gamma_1 (\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2) + \alpha (gS^*) (\beta_2 S^* + \mu) - (\gamma_1 + \\
&\quad g + \mu) S^* (\alpha + \gamma_2 + \mu) (\beta_2 S^* + \mu) = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta_1 S^* (\alpha + \gamma_2 + \mu) (\beta_2 S^* + \mu) - \beta_1 S^{*2} (\alpha + \gamma_2 + \mu + g) (\beta_2 S^* + \mu) + \\
&\quad (\beta_2 S^{*2} - \beta_1 S^{*2}) \{(\gamma_1 (\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} - (\beta_2 S^* + \mu) \{(\gamma_1 + g + \\
&\quad \mu) S^* (\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta_1 \beta_2 S^{*2} + \beta_1 \mu S^*) (\alpha + \gamma_2 + \mu) - (\beta_1 \beta_2 S^{*3} + \beta_1 \mu S^{*2}) (\alpha + \gamma_2 + \mu + \\
&\quad g) + (\beta_2 S^{*2} - \beta_1 S^{*2}) \{(\gamma_1 (\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} - (\beta_2 S^{*2} + \mu S^*) \{(\gamma_1 + \\
&\quad g + \mu) (\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\beta_1 \beta_2 (\alpha + \gamma_2 + \mu + g) (S^{*3}) - \beta_1 \mu (\alpha + \gamma_2 + \mu + g) (S^{*2}) + (\beta_2 - \\
&\quad \beta_1) \{(\gamma_1 (\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} (S^{*2}) - \beta_2 \{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1) (\alpha + \gamma_2 + \\
&\quad \mu) - \alpha g\} (S^{*2}) - \mu \{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1) (\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\} (S^*) = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta_1 \beta_2 (\alpha + \gamma_2 + \mu + g) (S^{*2}) + [\beta_1 \mu (\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2) \{(\gamma_1 (\alpha + \\
&\quad \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} + \beta_2 \{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1) (\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\}] (S^*) + \\
&\quad \mu \{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1) (\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\} = 0 \\
&\quad \quad \quad A(S^*)^2 + B(S^*) + C = 0 \tag{4.11}
\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}
A &= \beta_1\beta_2(\alpha + \gamma_2 + g + \mu) > 0 \\
B &= \beta_1\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2)\{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} + \beta_2\{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\} \\
&= \beta_1\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2)\{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} + \beta_2\{((\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)) + (-\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu))\} \\
&= \beta_1\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2)\{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} + \beta_2\{((\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)) + (-R_0(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu))\} \\
&= \beta_1\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2)\{\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2\} + \beta_2\{(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)\}(1 - R_0) \\
C &= \mu\{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g\} \\
&= \mu\{((\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)) + (-\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu))\} \\
&= \mu\{((\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)) + (-R_0(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu))\} \\
&= \mu\{(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)\}(1 - R_0)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
S_+^* &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \\
S_-^* &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Maka titik kesetimbangan endemik yang didapatkan yaitu  $e_* = (S^*, E^*, Q^*) =$

$$\left( \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{gS^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu}, \frac{(\gamma_1(\alpha + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)S^*}{(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\beta_2 S^* + \mu)} \right).$$

Dari persamaan (4.12) dapat dilihat bahwa nilai persamaan  $A$  akan selalu positif ( $A > 0$ ). Kemudian nilai dari persamaan  $B$  akan berubah tergantung pada nilai parameternya. Sedangkan nilai dari persamaan  $C$  akan berubah tergantung pada nilai  $R_0$ . Maka dari itu akan diteliti untuk beberapa kasus pada nilai  $R_0$  untuk menentukan eksistensi titik kesetimbangan endemik.

**Kasus 1.**  $R_0 > 1$

Jika  $R_0 > 1$  maka  $C < 0$ .

a. Jika  $C < 0$  dan  $B < 0$

Perhatikan bahwa  $-B = \sqrt{B^2}$  dan  $\sqrt{B^2} < \sqrt{B^2 - 4AC}$

Maka

$$S_+^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$$

$$S_-^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$$

b. Jika  $C < 0$  dan  $B = 0$

Maka

$$S_+^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$$

$$S_-^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$$

c. Jika  $C < 0$  dan  $B > 0$

Perhatikan bahwa  $\sqrt{B^2 - 4AC} > B$

Maka

$$S_+^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$$

$$S_-^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$$

Sehingga, ketika  $R_0 > 1$  dan menyebabkan  $C < 0$ , maka hanya terdapat satu solusi positif untuk sebarang nilai  $B$  yaitu  $S_+^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ .

**Kasus 2.  $R_0 < 1$**

Jika  $R_0 < 1$  maka  $C > 0$ .

a. Jika  $C > 0$  dan  $B < 0$

Perhatikan bahwa  $-B > 0$ , sehingga  $\sqrt{B^2 - 4AC} < -B$

Maka

$$S_+^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$$

$$S_-^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$$

b. Jika  $C > 0$  dan  $B > 0$

Perhatikan bahwa pasti  $4AC > B^2$  sehingga  $\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$  yang dapat disimpulkan bahwa akar-akarnya pasti tidak riil/imajiner.

c. Jika  $C > 0$  dan  $B = 0$

Perhatikan bahwa  $\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$  sehingga dapat disimpulkan bahwa akar-akarnya adalah tidak riil/imajiner.

Sehingga, ketika  $R_0 < 1$  dan menyebabkan  $C > 0$ , maka terdapat dua kasus yang berbeda. Ketika nilai  $B < 0$  maka terdapat dua solusi bernilai positif sedangkan ketika nilai  $B \geq 0$  maka titik kesetimbangan endemik tidak eksis.

**Kasus 3.  $R_0 = 1$**

Jika  $R_0 = 1$  maka  $C = 0$  sehingga persamaan (4.11) menjadi

$$A(S^*)^2 + B(S^*) = 0$$

$$S^*(AS^* + B) = 0$$

$$S^* = 0 \text{ atau } S^* = -\frac{B}{A}$$

Hasil perhitungan di atas memiliki solusi tak nol, yaitu  $S^* = -\frac{B}{A}$  jika dan hanya jika  $B < 0$  dan  $A > 0$  atau  $A < 0$  dan  $B > 0$ . Karena nilai  $A$  selalu positif, maka ketika  $R_0 = 1$ , nilai dari  $S^*$  diatas dapat memiliki penyelesaian jika dan hanya jika  $B < 0$ .

#### 4.1.4 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Perokok

Setelah diperoleh titik keseimbangan bebas perokok dan titik keseimbangan endemik, maka selanjutnya jenis kestabilan untuk titik keseimbangan dapat dianalisis. Model matematika pada sistem (4. 8) merupakan bentuk dari sistem persamaan diferensial nonlinear, sehingga perlu dilinearkan terlebih dahulu.

Untuk melakukan linearisasi maka akan digunakan penjabaran Deret Taylor pada (4. 8) sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= f_1(S, E, Q) \\ &= \beta_1 S(1 - S - E - Q) + \beta_2 SQ + \alpha E - (\gamma_1 + g + \mu)S \\ \frac{dE}{dt} &= f_2(S, E, Q) \\ &= gS - (\alpha + \gamma_2 + \mu)E \\ \frac{dQ}{dt} &= f_3(S, E, Q) \\ &= \gamma_1 S + \gamma_2 E - \beta_2 SQ - \mu Q \end{aligned} \tag{4.14}$$

dengan titik tetap  $(S_0, E_0, Q_0)$  maka

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= f_1(S_0, E_0, Q_0) = 0 \\ \frac{dE}{dt} &= f_2(S_0, E_0, Q_0) = 0 \\ \frac{dQ}{dt} &= f_3(S_0, E_0, Q_0) = 0\end{aligned}\tag{4.15}$$

Kemudian misalkan

$$\begin{aligned}S - S_0 &= x \\ E - E_0 &= y \\ Q - Q_0 &= z\end{aligned}\tag{4.16}$$

Ekspansi Deret Taylor dari sistem persamaan (4.14) disekitar titik tetap  $(S_0, E_0, Q_0)$  adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= f_1(S_0, E_0, Q_0) + (S - S_0) \frac{\partial f_1}{\partial S} + (E - E_0) \frac{\partial f_1}{\partial E} + (Q - \\ &Q_0) \frac{\partial f_1}{\partial Q} + \dots \\ \frac{dE}{dt} &= f_2(S_0, E_0, Q_0) + (S - S_0) \frac{\partial f_2}{\partial S} + (E - E_0) \frac{\partial f_2}{\partial E} + (Q - \\ &Q_0) \frac{\partial f_2}{\partial Q} + \dots \\ \frac{dQ}{dt} &= f_3(S_0, E_0, Q_0) + (S - S_0) \frac{\partial f_3}{\partial S} + (E - E_0) \frac{\partial f_3}{\partial E} + (Q - \\ &Q_0) \frac{\partial f_3}{\partial Q} + \dots\end{aligned}\tag{4.17}$$

Berdasarkan sistem di atas, linearisasi sistem persamaan (4.17) dan dengan menggunakan pemisalan (4.16) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= x \frac{\partial f_1}{\partial S} + y \frac{\partial f_1}{\partial E} + z \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \frac{dE}{dt} &= x \frac{\partial f_2}{\partial S} + y \frac{\partial f_2}{\partial E} + z \frac{\partial f_2}{\partial Q}\end{aligned}$$

$$\frac{dQ}{dt} = x \frac{\partial f_3}{\partial S} + y \frac{\partial f_3}{\partial E} + z \frac{\partial f_3}{\partial Q}$$

Sehingga kemudian dapat dibuat bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobian dari matriks diatas adalah

$$J =$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1(1 - 2S - E - Q) + \beta_2Q - (\gamma_1 + g + \mu) & -\beta_1S + \alpha & -\beta_1S + \beta_2S \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 - \beta_2Q & \gamma_2 & -\beta_2S - \mu \end{pmatrix}$$

Bentuk matriks Jacobi  $J$  pada titik kesetimbangan  $e_0$  (0,0,0) adalah sebagai berikut

$$J(e_0) = \begin{pmatrix} \beta_1 - (\gamma_1 + g + \mu) & \alpha & 0 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian di atas dengan menyelesaikan persamaan

$$|J(e_0) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \beta_1 - (\gamma_1 + g + \mu) & \alpha & 0 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \beta_1 - (\gamma_1 + g + \mu) & \alpha & 0 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} \lambda - \beta_1 + \gamma_1 + g + \mu & \alpha & 0 \\ g & \lambda + \alpha + \gamma_2 + \mu & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \lambda + \mu \end{array} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \beta_1 + \gamma_1 + g + \mu)(\lambda + \alpha + \gamma_2 + \mu)(\lambda + \mu) = 0$$

Dari persamaan di atas dapat diambil nilai eigen pertama yaitu

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = -(\alpha + \gamma_2 + \mu) < 0$$

$$\lambda_3 = \beta_1 - (\gamma_1 + g + \mu)$$

$\lambda_3$  akan bernilai negatif dengan syarat nilai  $R_0 < 1$

$$R_0 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu) < (\gamma_1 + g + \mu)(\gamma_2 + \mu) + \alpha(\gamma_1 + \mu)$$

$$\Leftrightarrow \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu) < (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

Karena  $-ag < 0$  sehingga

$$\Leftrightarrow \beta_1 < (\gamma_1 + g + \mu)$$

Sehingga titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0$  dapat dikatakan stabil asimtotik jika  $R_0 < 1$  sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka  $e_0$  tidak stabil.

#### 4.1.5 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk mempermudah perhitungan, maka dapat menyederhanakan persamaan pertama di sistem persamaan (4.9) dengan membagi dengan  $S^*$  sehingga

$$\beta_1(1 - S^* - E^* - Q^*) + \beta_2 Q^* + \alpha \frac{E^*}{S^*} - (\gamma_1 + g + \mu) = 0$$

Kemudian dapat dilanjutkan dengan melakukan linearisasi dengan menggunakan penjabaran Deret Taylor berdasarkan persamaan di atas dan sistem (4.8) sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= f_1(S, E, Q) \\
&= \beta_1(1 - S^* - E^* - Q^*) + \beta_2 Q^* + \alpha \frac{E^*}{S^*} - (\gamma_1 + g + \mu) \\
\frac{dE}{dt} &= f_2(S, E, Q) \\
&= gS^* - (\alpha + \gamma_2 + \mu)E^* \\
\frac{dQ}{dt} &= f_3(S, E, Q) \\
&= \gamma_1 S^* + \gamma_2 E^* - \beta_2 S^* Q^* - \mu Q^*
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Karena titik kesetimbangan  $(S^*, E^*, Q^*)$  maka

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= f_1(S^*, E^*, Q^*) = 0 \\
\frac{dE}{dt} &= f_2(S^*, E^*, Q^*) = 0 \\
\frac{dQ}{dt} &= f_3(S^*, E^*, Q^*) = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Kemudian misalkan

$$\begin{aligned}
S - S^* &= x \\
E - E^* &= y \\
Q - Q^* &= z
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Berdasarkan sistem (4.19) ekspansi Deret Taylor dari sistem (4.8) di sekitar titik kesetimbangan  $(S^*, E^*, Q^*)$  yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= f_1(S^*, E^*, Q^*) + (S - S^*) \frac{\partial f_1}{\partial S} + (E - E^*) \frac{\partial f_1}{\partial E} + (Q - \\
&Q^*) \frac{\partial f_1}{\partial Q} + \dots \\
\frac{dE}{dt} &= f_2(S^*, E^*, Q^*) + (S - S^*) \frac{\partial f_2}{\partial S} + (E - E^*) \frac{\partial f_2}{\partial E} + (Q - \\
&Q^*) \frac{\partial f_2}{\partial Q} + \dots
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\frac{dQ}{dt} = f_3(S^*, E^*, Q^*) + (S - S^*) \frac{\partial f_3}{\partial S} + (E - E^*) \frac{\partial f_3}{\partial E} + (Q - Q^*) \frac{\partial f_3}{\partial Q} + \dots$$

Dari sistem di atas maka linearisasi dari sistem (4.9) dan juga dengan pemisalan (4.21) maka diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{\partial f_1}{\partial S} + y \frac{\partial f_1}{\partial E} + z \frac{\partial f_1}{\partial Q}$$

$$\frac{dE}{dt} = x \frac{\partial f_2}{\partial S} + y \frac{\partial f_2}{\partial E} + z \frac{\partial f_2}{\partial Q}$$

$$\frac{dQ}{dt} = x \frac{\partial f_3}{\partial S} + y \frac{\partial f_3}{\partial E} + z \frac{\partial f_3}{\partial Q}$$

Sehingga kemudian dapat dibuat bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{dS^*}{dt} \\ \frac{dE^*}{dt} \\ \frac{dQ^*}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S^*} & \frac{\partial f_1}{\partial E^*} & \frac{\partial f_1}{\partial Q^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S^*} & \frac{\partial f_2}{\partial E^*} & \frac{\partial f_2}{\partial Q^*} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S^*} & \frac{\partial f_3}{\partial E^*} & \frac{\partial f_3}{\partial Q^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobian dari matriks diatas adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S^*} & \frac{\partial f_1}{\partial E^*} & \frac{\partial f_1}{\partial Q^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S^*} & \frac{\partial f_2}{\partial E^*} & \frac{\partial f_2}{\partial Q^*} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S^*} & \frac{\partial f_3}{\partial E^*} & \frac{\partial f_3}{\partial Q^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 S^* - \alpha \frac{E^*}{S^{*2}} & -\beta_1 + \frac{\alpha}{S^*} & -\beta_1 + \beta_2 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 - \beta_2 Q^* & \gamma_2 & -(\beta_2 S^* + \mu) \end{pmatrix}$$

Bentuk matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $e_*$  ( $S^*, E^*, Q^*$ ) adalah sebagai berikut

$$J(e_*) = \begin{pmatrix} -\left(\beta_1 S^* + \alpha \frac{E^*}{S^{*2}}\right) & -\beta_1 + \frac{\alpha}{S^*} & -\beta_1 + \beta_2 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 - \beta_2 Q^* & \gamma_2 & -(\beta_2 S^* + \mu) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian di atas dengan menyelesaikan persamaan

$$|J(e_*) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\left(\beta_1 S^* + \alpha \frac{E^*}{S^{*2}}\right) & -\beta_1 + \frac{\alpha}{S^*} & -\beta_1 + \beta_2 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 - \beta_2 Q^* & \gamma_2 & -(\beta_2 S^* + \mu) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

0

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -\left(\beta_1 S^* + \alpha \frac{E^*}{S^{*2}}\right) & -\beta_1 + \frac{\alpha}{S^*} & -\beta_1 + \beta_2 \\ g & -(\alpha + \gamma_2 + \mu) & 0 \\ \gamma_1 - \beta_2 Q^* & \gamma_2 & -(\beta_2 S^* + \mu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Misal,

$$x_{11} = -\left(\beta_1 S^* + \alpha \frac{E^*}{S^{*2}}\right), x_{12} = -\beta_1 + \frac{\alpha}{S^*}, x_{13} = \beta_2 - \beta_1, x_{21} = g, x_{22} = -(\alpha + \gamma_2 + \mu), x_{31} = \gamma_1 - \beta_2 Q^*, x_{32} = \gamma_2, x_{33} = -(\beta_2 S^* + \mu)$$

maka

$$\begin{vmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & (x_{11} - \lambda)(x_{22} - \lambda)(x_{33} - \lambda) + (x_{12})(0)(x_{31}) + (x_{13})(x_{21})(x_{32}) - \\ & (x_{13})(x_{22} - \lambda)(x_{31}) - (x_{12})(x_{21})(x_{33} - \lambda) - (x_{11} - \lambda)(0)(x_{32}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \{-\lambda^3 + (x_{11} + x_{22} + x_{33})\lambda^2 - (x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33})\lambda + \\ & (x_{11}x_{22}x_{33})\} + 0 + (x_{13})(x_{21})(x_{32}) - \{x_{13}x_{31}(x_{22} - \lambda)\} - \\ & \{x_{12}x_{21}(x_{33} - \lambda)\} - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + (x_{11} + x_{22} + x_{33})\lambda^2 - (x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{13}x_{31} - x_{12}x_{21})\lambda + x_{11}x_{22}x_{33} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{31}x_{22} - x_{12}x_{21}x_{33} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + (x_{11} + x_{22} + x_{33})\lambda^2 - (x_{11}x_{22} + x_{33}(x_{11} + x_{22}) - x_{13}x_{31} - x_{12}x_{21})\lambda - (x_{33}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - (x_{11} + x_{22} + x_{33})\lambda^2 + (x_{11}x_{22} + x_{33}(x_{11} + x_{22}) - x_{13}x_{31} - x_{12}x_{21})\lambda + (x_{33}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - \left\{ -\left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \mu + \beta_2 S^* + \mu\right) \right\} \lambda^2 + \left\{ -\left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*}\right) (-\alpha + \gamma_2 + \mu) + (-\beta_2 S^* + \mu) \left( -\left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \mu\right) - (\beta_2 - \beta_1)(\gamma_1 - \beta_2 Q^*) - \left(-\beta_1 + \frac{\alpha}{S^*}\right)g \right) \right\} \lambda + \left\{ -(\beta_2 S^* + \mu) \left( \left( -\left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*}\right) \right) (-\alpha + \gamma_2 + \mu) - \left(-\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*}\right)g \right) + (\beta_2 - \beta_1) \left( g\gamma_2 - (\gamma_1 - \beta_2 Q^*)(-\alpha + \gamma_2 + \mu) \right) \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \left\{ \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \beta_2 S^* + 2\mu \right\} \lambda^2 + \left\{ \left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*}\right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + (\beta_2 S^* + \mu) \left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \mu\right) + (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \beta_2 Q^*) + g \left(\beta_1 - \frac{\alpha}{S^*}\right) \right\} \lambda + \left\{ (\beta_2 S^* + \mu) \left(\beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*}\right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + g \left(\beta_1 - \frac{\alpha}{S^*}\right) + (\beta_1 - \beta_2)(g\gamma_2 + (\gamma_1 - \beta_2 Q^*)(\alpha + \gamma_2 + \mu)) \right\} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristik untuk Matriks Jacobian  $J(e_*)$

yaitu dapat dituliskan sebagai berikut

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0$$

dimana

$$\begin{aligned}
A_1 &= \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \beta_2 S^* + 2\mu > 0 \\
A_2 &= \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + (\beta_2 S^* + \mu) \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \right. \\
&\quad \left. \alpha + \gamma_2 + \mu \right) + (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \beta_2 Q^*) + g \left( \beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} \right) \quad (4.23) \\
A_3 &= (\beta_2 S^* + \mu) \left( \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + g \left( \beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} \right) \right) + \\
&\quad (\beta_1 - \beta_2)(g\gamma_2 + (\gamma_1 - \beta_2 Q^*)(\alpha + \gamma_2 + \mu))
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dapat terlihat jelas bahwa nilai dari  $A_1 > 0$  dikarenakan semua nilai parameter adalah bernilai positif. Kemudian untuk nilai  $A_2$  dan  $A_3$  terdapat nilai yang belum tentu positif yaitu  $(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \beta_2 Q^*)$  dan  $g \left( \beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} \right)$ , sehingga perlu dicari syarat agar  $A_2 > 0$  dan  $A_3 > 0$  sebagai berikut

$$(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \beta_2 Q^*) > 0$$

Jika diasumsikan  $\beta_1 > \beta_2$  karena laju perpindahan individu menjadi prokok tembakau adalah lebih besar dibandingkan individu yang kambuh memakai rokok tembakau kembali, maka

$$\begin{aligned}
\gamma_1 - \beta_2 Q^* &> 0 \\
\gamma_1 &> \beta_2 Q^* \quad (4.24)
\end{aligned}$$

dan karena  $g > 0$  maka pastilah

$$\begin{aligned}
\beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} &> 0 \\
\beta_1 &> \frac{\alpha}{S^*} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Sehingga  $A_2$  dan  $A_3$  akan bernilai positif yaitu dengan syarat  $\gamma_1 > \beta_2 Q^*$  dan  $\beta_1 > \alpha/S^*$ . Kemudian akan ditunjukkan bahwa  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ .

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 - A_3 &= \left\{ \beta_1 S^* + \beta_2 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + 2\mu \right\} \left\{ \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + (\beta_2 S^* + \mu) \left( \alpha + \gamma_2 + \mu + \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) + (\beta_1 - \beta_2) (\gamma_1 - \beta_2 Q^*) + g \left( \beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} \right) \right\} - \left\{ (\beta_1 - \beta_2) (g\gamma_2 + (\gamma_1 - \beta_2 Q^*) (\alpha + \gamma_2 + \mu)) + (\beta_2 S^* + \mu) \left( \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + g \left( \beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} \right) \right) \right\} \\
&= \left\{ \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \beta_2 S^* + \mu \right\} \left\{ \left( \beta_1 S^* + \beta_2 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + 2\mu \right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) (\beta_2 S^* + \mu) \right\} + g \left( \alpha + \gamma_2 + \mu + \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} \right) \left( \beta_1 - \frac{\alpha}{S^*} \right) + (\beta_1 - \beta_2) \left( (\gamma_1 - \beta_2 Q^*) \left( \beta_1 S^* + \frac{\alpha E^*}{S^*} + \beta_2 S^* + \mu \right) - g\gamma_2 \right)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.23) dan syarat pada (4.24) dan (4.25) dapat diketahui bahwa  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 > 0$  dan  $A_1 A_2 - A_3 > 0$  jika  $\gamma_1 > \beta_2 Q^*$  dan  $\beta_1 > \alpha/S^*$ . Sehingga, berdasarkan Teorema 2.3 dari kriteria kestabilan Routh – Hurwitz, titik kesetimbangan endemik  $e_*$  akan stabil asimtotik lokal jika memenuhi persyaratan.

#### 4.1.6 Analisis Bifurkasi

Analisis bifurkasi menggunakan persamaan titik kesetimbangan endemik untuk populasi  $S$  untuk mencari titik optimum pada persamaan  $R_0$ . Dalam penelitian ini hal tersebut diperlukan dengan tujuan ketika  $R_0$  yang lebih kecil dari titik optimum tidak akan terjadi peningkatan jumlah perokok konvensional yang tinggi. Misalkan persamaan titik kesetimbangan endemik untuk populasi  $S$

dimisalkan dengan  $g(S^*)$ . Eksistensi dari titik kesetimbangan endemik adalah bergantung terhadap nilai  $R_0$ . Pada pembahasan eksistensi titik kesetimbangan endemik sebelumnya ditemukan bahwa ketika  $R_0 = 1$  maka nilai  $S^*$  akan eksis jika dan hanya jika  $B < 0$ , sehingga

$$B < 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2)\{(\gamma_1(a + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)\} + \beta_2\{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\} < 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1\{(\gamma_1 + \mu)(a + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2 + \mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g)\} + \beta_2\{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\} - \beta_2\{(\gamma_1(a + \gamma_2 + \mu) + g\gamma_2)\} < 0$$

Karena  $-\beta_2\{(\gamma_1(a + \gamma_2 + \mu) + g\gamma_2)\} < 0$ , maka haruslah

$$\Leftrightarrow \beta_1\{(\gamma_1 + \mu)(a + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2 + \mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g)\} + \beta_2\{(\gamma_1 + g + \mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\} < \beta_2\{(\gamma_1(a + \gamma_2 + \mu) + g\gamma_2)\}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1\{(\gamma_1 + \mu)(a + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2 + \mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g)\} < \beta_2\{(\gamma_1(a + \gamma_2 + \mu) + g\gamma_2) - ((\gamma_1 + g + \mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag)\}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1\{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\} < \beta_2\{-(\mu - \beta_1)(\alpha + \gamma_2 + \mu) + g\mu\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_1\{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\}}{(\beta_1 - \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - g\mu} < \beta_2$$

$$\Leftrightarrow \beta_2 > \beta_2^* = \frac{\beta_1\{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\}}{(\beta_1 - \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - g\mu}$$

Selanjutnya, bifurkasi mundur terjadi pada  $R_0 = 1$  jika  $A > 0$ ,  $B < 0$ , dan  $\beta_2 > \beta_2^*$ . Ketika bifurkasi mundur terdapat dua titik kesetimbangan endemik yang eksis yaitu

$$S_1^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$S_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

dimana,  $S_1^*$  bersifat stabil dan  $S_2^*$  bersifat tidak stabil.

Sebagaimana pada analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas perokok dan endemik dapat dilihat bahwa keduanya mengalami kondisi bifurkasi, yaitu perubahan jenis kestabilan yang diakibatkan berubahnya nilai  $R_0$ . Sehingga dalam analisis bifurkasi ini akan diambil parameter  $R_0$  sebagai parameter bifurkasi. Kemudian, akan dicari persamaan bifurkasi mundur dengan cara mencari titik optimum dari persamaan  $g(S^*)$  dan disubstitusikan ke dalam persamaan  $g(S^*) = 0$ . Titik optimum dari persamaan  $g(S^*)$  ditentukan dengan cara menurunkan fungsi  $g(S^*)$  terhadap  $S^*$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(S^*)}{\partial S^*} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial(A(S^*)^2 + BS^* + C)}{\partial S^*} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2AS^* + B &= 0 \\ \Leftrightarrow S^* &= -\frac{B}{2A}\end{aligned}$$

Kemudian substitusikan nilai di atas ke persamaan  $g(S^*)$  sebagai berikut

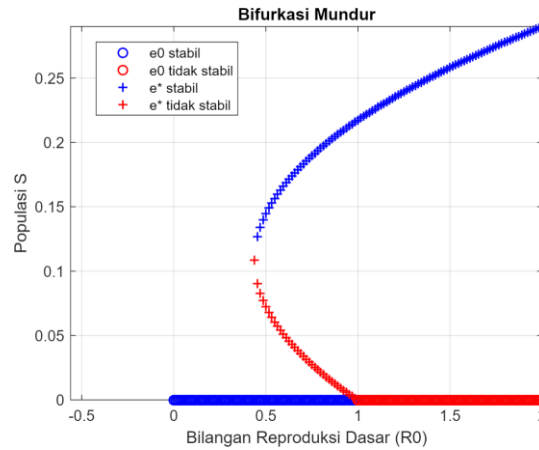
$$\begin{aligned}A(S^*)^2 + BS^* + C &= 0 \\ \Leftrightarrow A\left(-\frac{B}{2A}\right)^2 + B\left(-\frac{B}{2A}\right) + C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4A^2} - \frac{B^2}{2A} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + c &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{B^2}{4A} + c &= 0 \\ \Leftrightarrow C_1(1 - R_0) &= \frac{B^2}{4A}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow R_0 = 1 - \frac{B}{4AC_1}$$

$$R_c = R_0 = \frac{-B^2 + 4AC_1}{4AC_1}$$

Nilai  $R_0$  diatas merupakan penyelesaian dari titik optimum dari  $g(S^*)$  sehingga akan dinotasikan dengan  $R_c$  untuk membedakan, sehingga  $R_c = \frac{-B^2 + 4AC_1}{4AC_1}$ . Bifurkasi mundur terjadi ketika  $R_c$  ada dan  $R_c < R_0$  dengan batasan diskriminan dari akar persamaan  $g(S^*)$  positif. Berdasarkan hasil ini maka bifurkasi mundur akan terjadi ketika  $R_c < R_0 < 1$  dan terdapat titik kesetimbangan endemik.

Selanjutnya, akan disimulasikan untuk menghasilkan kurva bifurkasi. Pada gambar dibawah merupakan hasil bifurkasi mundur dengan nilai parameter  $\mu = \frac{1}{79.8}$ ,  $\beta_1 = 0.1961$ ,  $\gamma_1 = 0.0772$ ,  $\gamma_2 = 0.1008$ ,  $\alpha = 0.0822$ , dan  $g = 0.1245$ . Parameter penentu jenis bifurkasi dalam penelitian ini adalah  $\beta_2$ . Dengan menggunakan nilai parameter diatas, bifurkasi mundur akan terjadi jika  $\beta_2 > \beta_2^* = 0.1808$  sehingga akan diambil nilai  $\beta_2 = 0.3$ . Kemudian didapatkan juga nilai  $R_c = \frac{-B^2 + 4AC_1}{4AC_1} = 0.4394$  yang merupakan nilai bifurkasi yang bersifat *saddle-node* dan  $R_0 = 1,2113$ . Berikut merupakan kurva bifurkasi dengan parameter diatas

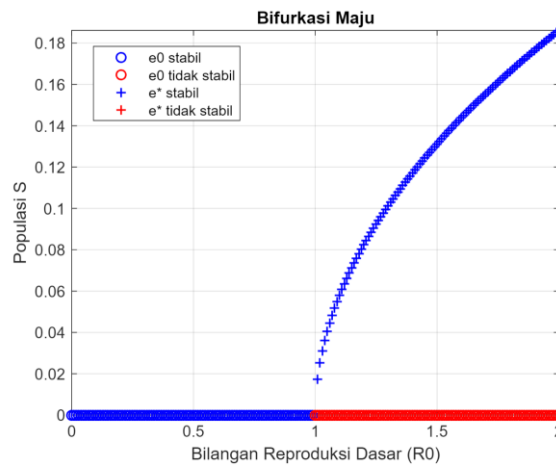


**Gambar 4.1** Bifurkasi Mundur

Berdasarkan gambar di atas menunjukkan bahwa pada saat  $R_c < R_0 < 1$  maka terjadi bifurkasi mundur. Sehingga terdapat tiga titik kesetimbangan, yaitu satu titik kesetimbangan bebas perokok stabil (tanda lingkaran biru), satu titik kesetimbangan endemik tidak stabil (tanda tambah merah), dan satu titik kesetimbangan endemik stabil (tanda tambah biru). Titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0$  pada saat  $R_0 = 1$  terjadi bifurkasi transkritikal, sedangkan titik kesetimbangan endemik  $e^*$  pada titik  $R_c$  terjadi bifurkasi *saddle node*. Ketika  $R_0 < R_c$  maka tidak terjadi penyebaran kebiasaan merokok atau dalam keadaan bebas perokok.

Sedangkan ketika  $R_0 > 1$  terlihat bahwa titik kesetimbangan endemik stabil. Stabilitasnya titik kesetimbangan endemik menunjukkan bahwa terjadi jumlah perokok konvensional yang cukup besar sehingga akan sulit untuk diatasi. Hal tersebut juga didukung dengan adanya titik kesetimbangan bebas perokok yang tidak stabil yang juga mengartikan jumlah perokok konvensional akan meningkat. Garis melengkung pada gambar diatas menunjukkan adanya perubahan kestabilan titik kesetimbangan endemik, dimana yang awalnya adalah tidak stabil kemudian berubah menjadi stabil.

Kemudian, akan ditunjukkan juga bahwa telah terjadi bifurkasi maju dengan mengubah nilai parameter  $\beta_2 \leq \beta_2^*$  sehingga akan diambil nilai  $\beta_2 = 0.18$  sehingga didapatkan nilai  $R_c = 1$  yang tidak memenuhi kondisi terjadinya bifurkasi mundur yaitu ketika  $R_c < R_0 < 1$  sehingga kurva yang dihasilkan terlihat sebagai berikut



**Gambar 4.2** Bifurkasi Maju

Dari gambar diatas terlihat bahwa telah terjadi bifurkasi maju ketika  $R_0 > 1$ . Ketika  $R_0 > 1$  maka dapat dilihat bahwa terdapat satu titik kesetimbangan endemik yang stabil (tanda tambah biru) dan satu titik kesetimbangan bebas perokok yang tidak stabil (tanda lingkaran merah). Berdasarkan gambar di atas terjadi bifurkasi transkritikal ketika  $R_0 = 1$ . Kemudian ketika  $R_0 < 1$  maka tidak terjadi terdapat perokok konvensional karena titik kesetimbangan bebas perokok adalah stabil, sedangkan ketika  $R_0 > 1$  maka terdapat perokok konvensional karena titik kesetimbangan endemiknya stabil sedangkan titik kesetimbangan perokoknya tidak stabil.

Pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 menunjukkan bahwa nilai dari parameter  $\beta_2$  mempengaruhi terjadinya bifurkasi. Untuk menghindari adanya bifurkasi

mundur, yang artinya jumlah perokok semakin sulit untuk ditangani karena meskipun  $R_0 < 1$  titik kesetimbangan endemiknya tetap stabil, maka nilai  $\beta_2$  harus ditekan hingga dibawah  $\beta_2^* = 0.1808$ . Parameter  $\beta_2$  menunjukkan laju perokok yang telah berhenti kemudian kambuh kembali menjadi perokok konvensional. Faktor dari kambuhnya penggunaan rokok konvensional dari populasi  $Q$  ini diakibatkan adanya pengaruh dari teman ataupun lingkungan sekitar. Sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa semakin besar nilai  $\beta_2$  yaitu pengaruh lingkungan sekitar untuk menggunakan rokok konvensional kembali maka jumlah perokok konvensional akan semakin sulit untuk ditangani.

#### 4.1.7 Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan untuk melihat pertumbuhan atau perubahan jumlah populasi dari model populasi perokok konvensional dan elektrik yang telah dimasukkan nilai parameter dan nilai awal dalam waktu ke waktu yang akan didefinisikan sesuai dengan kebutuhan analisis secara numeric menggunakan metode ODE45 dengan aplikasi MATLAB.

##### 1. Simulasi Numerik Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika $R_0 < 1$

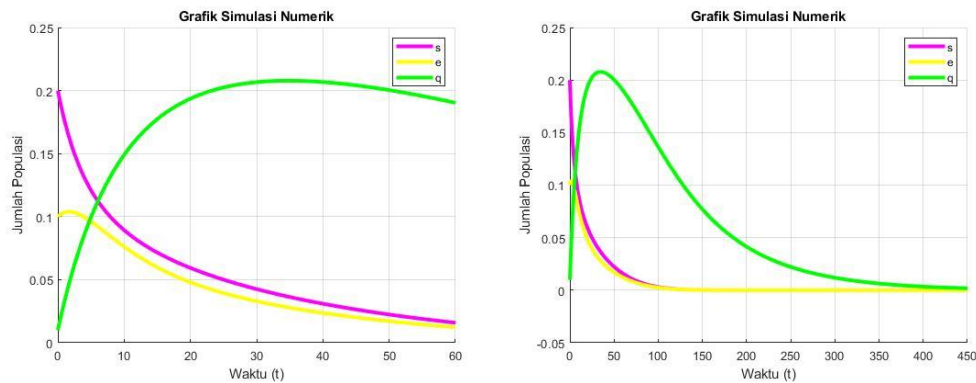
Tabel 4.1 Nilai Parameter Ketika  $R_0 < 1$

Parameter	Nilai Parameter	Populasi $t = 0$	Nilai awal
$\beta_1$	0.05	$S(0)$	0.2
$\beta_2$	0.0101	$E(0)$	0.1
$\gamma_1$	0.0772	$Q(0)$	0.01
$\gamma_2$	0.1008		
$\alpha$	0.0822		
$g$	0.1245		
$\mu$	1/79.8		

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4.1 di atas maka didapatkan nilai

$$R_0 = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag} = 0.3088 < 1$$

Kemudian simulasi dengan parameter dan nilai awal diatas diperoleh grafik sebagai berikut



**Gambar 4.3** Simulasi Numerik ketika  $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat laju populasi perokok konvensional (garis pink) dari nilai awal 0.2 perlahan turun hingga pada suatu titik dimana jumlah perokok konvensional tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Berdasarkan simulasi numerik diatas titik kesetimbangan tersebut adalah 0. Terjadinya penurunan jumlah perokok konvensional ini dapat dikarenakan adanya kematian alami yang terjadi pada populasi tersebut dan berpindahnya perokok konvensional menjadi perokok elektrik dan atau berhenti merokok sehingga semakin lama maka populasi tersebut akan habis.

Pada laju populasi perokok elektrik,  $E$ , (garis kuning) sempat mengalami kenaikan sedikit kemudian perlahan turun. Terjadinya peningkatan tersebut dikarenakan adanya perpindahan dari perokok konvensional yang beralih menggunakan rokok elektrik. Seiring bertambahnya waktu jumlah perokok elektrik akan berkurang dan akan stabil pada titik 0. Penurunan yang terjadi

disebabkan adanya kematian alami dan perpindahan perokok elektrik menjadi berhenti.

Laju populasi perokok yang telah berhenti,  $Q$ , (garis hijau) awalnya pada  $0 \leq t \leq 30$  mengalami kenaikan yang cukup signifikan dan kemudian perlahan turun dan mulai konstan di nilai 0 di  $t$  sekitar 400. Peningkatan jumlah perokok yang telah berhenti dikarenakan adanya penambahan dari perokok konvensional dan elektrik yang masuk ke dalam populasi  $Q$ . Selanjutnya ketika telah mencapai puncak, populasi tersebut perlahan berkurang dikarenakan adanya kematian alami yang terjadi.

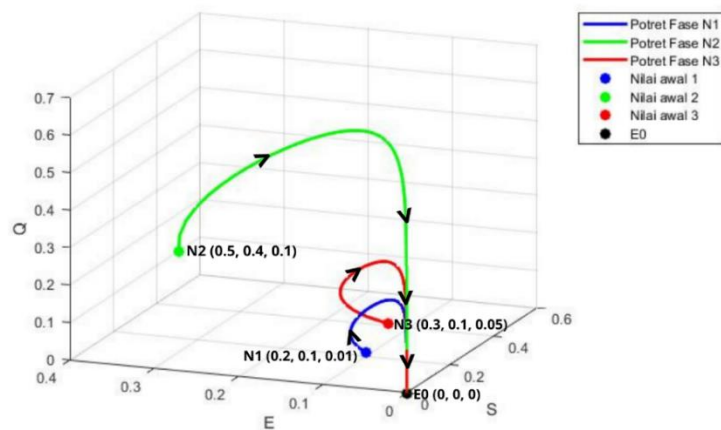
Berdasarkan Gambar 4.3 dapat disimpulkan bahwa kurva solusi akan menuju ke titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0 = (0,0,0)$  dan stabil asimtotik lokal ketika  $R_0 < 1$ . Dari serangkaian kejadian diatas dapat diartikan bahwa ketika  $R_0 < 1$  tidak terjadi penyebaran perilaku merokok sehingga seiring bertambahnya waktu maka populasi perokok konvensional, elektrik, dan yang berhenti akan semakin habis.

Kemudian diberikan tiga nilai awal yang berbeda dengan tujuan untuk mengilustrasikan potret fase dari ketiga solusi sistem pada ruang  $S, E, Q$  akan menuju pada satu titik kesetimbangan  $e_0$  ketika  $R_0 < 1$ , yaitu

$$N1 = (S1, E1, Q1) = (0.2, 0.1, 0.01)$$

$$N2 = (S2, E2, Q2) = (0.5, 0.4, 0.1)$$

$$N3 = (S3, E3, Q3) = (0.3, 0.1, 0.05)$$



**Gambar 4.4** Potret Fase ketika  $R_0 < 1$

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.4 bahwa pada saat  $R_0 < 1$  maka solusi sistem bergerak menuju titik kesetimbangan  $e_0 = (0,0,0)$ . Hal ini dapat diartikan bahwa sesuai dengan hasil analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0$  akan bersifat stabil asimtotik lokal ketika  $R_0 < 1$ .

## 2. Simulasi Numerik Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika $R_0 > 1$

**Tabel 4.2** Nilai Parameter Ketika  $R_0 > 1$

Parameter	Nilai Parameter	Populasi $t = 0$	Nilai awal
$\beta_1$	0.1961	$S(0)$	0.2
$\beta_2$	0.4	$E(0)$	0.1
$\gamma_1$	0.0772	$Q(0)$	0.01
$\gamma_2$	0.1008		
$\alpha$	0.0822		
$g$	0.1245		
$\mu$	1/79.8		

Dengan menggunakan nilai parameter diatas, maka didapatkan nilai bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag} = 1,2113 > 1$$

Dan titik kesetimbangan endemik sebagai berikut

$$A = \beta_1\beta_2(\alpha + \gamma_2 + g + \mu) = 0,0251$$

$$B = \beta_1\mu(\alpha + \gamma_2 + \mu + g) + (\beta_1 - \beta_2)\{\gamma_1(a + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2\} + \beta_2\{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\}(1 - R_0) = -0,0075$$

$$C = \mu\{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - ag\}(1 - R_0) = -0,00008318$$

Sebagaimana pada eksistensi titik kesetimbangan endemik ketika  $R_0 > 1$  maka hanya terdapat 1 titik kestabilan endemik yang stabil yaitu

$$S_+^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 0,3105$$

Sehingga didapatkan nilai titik kesetimbangan endemik untuk  $E^*$ , dan  $Q^*$  adalah

$$E^* = \frac{gS_+^*}{\alpha + \gamma_2 + \mu} = 0,1977$$

$$Q^* = \frac{(\gamma_1(a + \mu) + (g + \gamma_1)\gamma_2)S_+^*}{(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\beta_2S_+^* + \mu)} = 0,3211$$

Nilai parameter pada Tabel 4.2 diatas juga memenuhi persamaan (4.23) yang merupakan persamaan karakteristik dari Matriks Jacobi di titik kesetimbangan endemik  $e_*$  yaitu

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$$

dimana

$$A_1 = \beta_1S^* + \frac{aE^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \beta_2S^* + 2\mu = 0,4455$$

$$A_2 = \left(\beta_1S^* + \frac{aE^*}{S^*}\right)(\alpha + \gamma_2 + \mu) + (\beta_2S^* + \mu)\left(\beta_1S^* + \frac{aE^*}{S^*} + \alpha + \gamma_2 + \mu\right) + (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \beta_2Q^*) + g\left(\beta_1 - \frac{a}{S^*}\right) = 0,0454$$

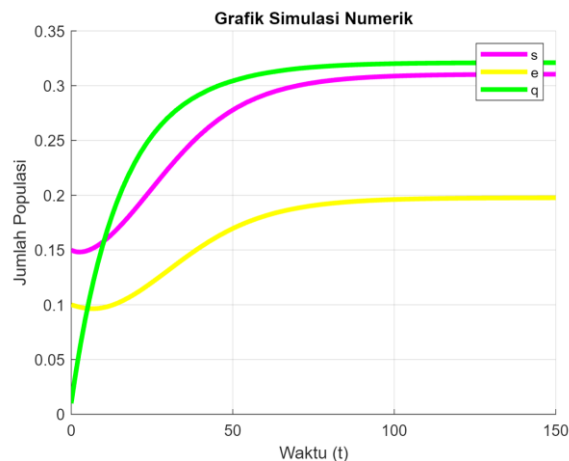
$$A_3 = (\beta_2 S^* + \mu) \left( \left( \beta_1 S^* + \frac{aE^*}{S^*} \right) (\alpha + \gamma_2 + \mu) + g \left( \beta_1 - \frac{a}{S^*} \right) \right) + (\beta_1 - \beta_2)(g\gamma_2 + (\gamma_1 - \beta_2 Q^*)(\alpha + \gamma_2 + \mu)) = 0.0080$$

Berdasarkan nilai  $A_1, A_2$  dan  $A_3$  diatas maka memenuhi syarat kestabilan Routh Hurwitz sebagaimana pada Teorema 2.3 bahwa karena  $A_1, A_2, A_3 > 0$  dan

$$A_1 A_2 - A_3 = (0.4455)(0.0454) - 0.0080 = 0.0122 > 0$$

maka titi kesetimbangan endemik  $e_*$  adalah stabil dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.2.

Kemudian simulasi dengan parameter dan nilai awal pada Tabel 4.2 diatas maka diperoleh grafik sebagai berikut



**Gambar 4.5** Simulasi Numerik ketika  $R_0 > 1$

Berdasarkan simulasi gambar di atas terlihat bahwa saat  $0 \leq t < 5$  populasi perokok konvensional (garis ungu) mengalami penurunan sedikit, kemudian setelah itu mulai bertambah dan menuju ke suatu titik kesetimbangannya yaitu  $S^* = 0.3105$ . Terjadinya penurunan jumlah pada populasi S diakibatkan adanya perpindahan individu ke populasi lain seperti ke E atau Q dan adanya kematian alami, tetapi semakin lama karena  $R_0 > 1$  yang diakibatkan  $\beta_2 > \beta_1$ ,

yaitu laju perokok yang telah berhenti kambuh menjadi perokok konvensional kembali lebih besar dibandingkan laju perokok potensial menjadi perokok konvensional, maka hal tersebut dapat menyebabkan akan semakin banyak individu yang akan masuk ke dalam populasi  $S$  sehingga jumlahnya semakin banyak.

Sedangkan pada populasi perokok elektrik (garis kuning) juga mengalami penurunan jumlah di sekitar  $0 \leq t < 10$  kemudian setelah itu bertahap mengalami kenaikan menuju titik kesetimbangan endemiknya yaitu  $E^* = 0.1977$  di sekitar  $t \geq 100$ . Terjadinya penurunan sebentar tersebut terjadi karena adanya perpindahan individu dari populasi  $E$  ke populasi lain dan juga adanya kematian alami. Setelah itu populasi  $E$  mengalami kenaikan yang diakibatkan adanya populasi dari perokok konvensional yang menggunakan rokok elektrik. Dapat dilihat pada Gambar 4.5 bahwa seiring dengan bertambahnya jumlah perokok konvensional maka jumlah perokok elektrik juga bertambah, karena kemungkinan perokok konvensional menggunakan rokok elektrik juga akan semakin besar.

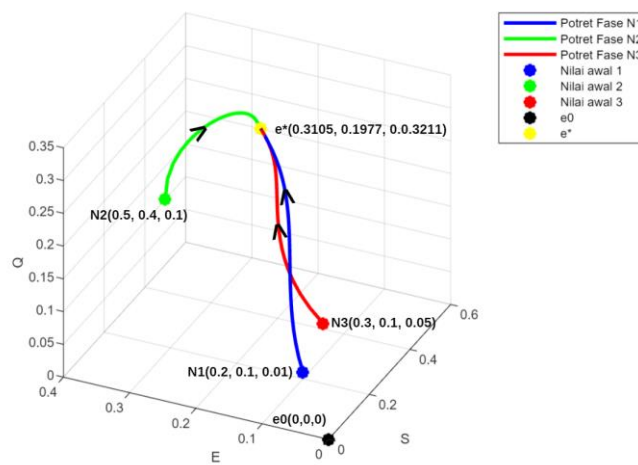
Populasi perokok yang telah berhenti pada  $0 \leq t \leq 50$  meningkat secara drastis. Pada waktu  $t$  tersebut dapat dilihat seiring dengan adanya penurunan jumlah pada populasi  $S$  dan  $E$  maka jumlah populasi  $Q$  meningkat dengan cepat karena adanya perpindahan dari populasi  $S$  dan  $E$  ke  $Q$ . Setelah populasi  $S$  dan  $E$  mulai meningkat kembali maka populasi  $Q$  mulai perlahan stabil dan mencapai titik kesetimbangannya di  $Q^* = 0.3221$  di sekitar  $t \geq 100$ .

Kemudian, diberikan tiga nilai awal yang berbeda dengan tujuan untuk mengilustrasikan potret fase dari ketiga solusi sistem pada ruang  $S, E, Q$  akan menuju pada satu titik kesetimbangan  $e_*$  ketika  $R_0 > 1$ , yaitu

$$N1 = (S1, E1, Q1) = (0.2, 0.1, 0.01)$$

$$N2 = (S2, E2, Q2) = (0.5, 0.4, 0.1)$$

$$N3 = (S3, E3, Q3) = (0.3, 0.1, 0.05)$$



**Gambar 4.6** Potret Fase  $R_0 > 1$

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.6 bahwa pada saat  $R_0 > 1$  dan memenuhi syarat kestabilannya maka solusi sistem akan bergerak menuju suatu titik kesetimbangan  $e_*$  dan menjauhi titik ekuilibrium bebas perokok  $e_0$ . Hal ini dapat diartikan bahwa sesuai dengan hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan bahwa ketika  $R_0 < 1$  maka  $e_0$  tidak stabil, dan  $e_*$  bersifat stabil asimtotik lokal.

## 4.2 Analisis Sensitivitas

Dalam penelitian ini analisis sensitivitas dilakukan dengan tujuan dapat mengetahui tingkat efektifitas dari beberapa parameter pada model dalam menurunkan angka populasi perokok konvensional aktif ( $S$ ) dengan pengaruh dari adanya populasi perokok elektrik ( $E$ ). Dalam hal ini maka akan dianalisis beberapa parameter yang memungkinkan sehingga dapat menurunkan angka bilangan reproduksi dasar  $R_0$ . Parameter dari indeks sensitivitas terhadap bilangan reproduksi dasar dihitung dengan menggunakan pendekatan dengan menggunakan Definisi 2.2.

Berdasarkan bentuk eksplisit dari persamaan  $R_0$  pada persamaan (4.10) maka akan dilakukan analisis sensitivitas beberapa parameter pada model yang berhubungan dengan populasi perokok elektrik ( $E$ ) yaitu  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ , dan  $\gamma_2$  terhadap  $R_0$ . Untuk indeks sensitivitas parameter  $\alpha$  terhadap  $R_0$  yaitu

$$\begin{aligned}\delta_\alpha &= \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{R_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} \right) \cdot \frac{\alpha}{R_0}\end{aligned}$$

Misalkan

$$u = \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \beta_1$$

$$v = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \gamma_1 + g + \mu - g = \gamma_1 + \mu$$

$$M = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\delta_{\alpha} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \times \frac{\alpha}{R_0} \\
&= \frac{\beta_1((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g) - \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\gamma_1 + \mu)}{((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g)^2} \times \frac{\alpha}{R_0} \\
&= \frac{\beta_1(g(\gamma_2 + \mu))}{M^2} \times \frac{\alpha M}{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)} \\
&= \frac{\alpha g(\gamma_2 + \mu)}{M(\alpha + \gamma_2 + \mu)} > 0 \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Kemudian Untuk indeks sensitivitas parameter  $\gamma_1$  terhadap  $R_0$  yaitu

$$\begin{aligned}
\delta_{\gamma_1} &= \frac{\partial R_0}{\partial \gamma_1} \frac{\gamma_1}{R_0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \left( \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} \right) \cdot \frac{\gamma_1}{R_0}
\end{aligned}$$

Misalkan

$$u = \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \gamma_1} = 0$$

$$v = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial \gamma_1} = \alpha + \gamma_2 + \mu$$

$$M = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\delta_{\gamma_1} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \times \frac{\gamma_1}{R_0} \\
&= \frac{-\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g)^2} \times \frac{\gamma_1}{R_0} \\
&= \frac{-\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{M^2} \times \frac{\gamma_1 M}{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\gamma_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{M} < 0 \quad (4.27)$$

Selanjutnya indeks sensitivitas  $R_0$  terhadap parameter  $\gamma_2$  yaitu

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma_2} &= \frac{\partial R_0}{\partial \gamma_2} \frac{\gamma_2}{R_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \left( \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} \right) \cdot \frac{\gamma_2}{R_0} \end{aligned}$$

Misalkan

$$u = \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \gamma_2} = \beta_1$$

$$v = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial \gamma_2} = \gamma_1 + g + \mu$$

$$M = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma_2} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \times \frac{\gamma_2}{R_0} \\ &= \frac{\beta_1((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g) - \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\gamma_1 + g + \mu)}{((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g)^2} \times \frac{\gamma_2}{R_0} \\ &= \frac{\beta_1(-\alpha g)}{M^2} \times \frac{\gamma_2 M}{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)} \\ &= -\frac{\gamma_2 \alpha g}{M(\alpha + \gamma_2 + \mu)} < 0 \quad (4.28) \end{aligned}$$

Selanjutnya indeks sensitivitas parameter  $\gamma_2$  terhadap  $R_0$  yaitu

$$\begin{aligned} \delta_g &= \frac{\partial R_0}{\partial g} \frac{g}{R_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{(\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g} \right) \cdot \frac{g}{R_0} \end{aligned}$$

Misalkan

$$u = \beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial g} = 0$$

$$v = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial g} = \alpha + \gamma_2 + \mu - \alpha = \gamma_2 + \mu$$

$$M = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \delta_g &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \times \frac{g}{R_0} \\ &= \frac{-\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\gamma_2 + \mu)}{((\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g)^2} \times \frac{g}{R_0} \\ &= \frac{-\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)(\gamma_2 + \mu)}{M^2} \times \frac{gM}{\beta_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)} \\ &= -\frac{g(\gamma_2 + \mu)}{M} < 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Berdasarkan Definisi 2.2, diketahui bahwa tanda dari setiap indeks sensitivitas menentukan perubahan terhadap nilai bilangan reproduksi dasar  $R_0$ . Berdasarkan persamaan (4.26) tanda dari indeks  $\delta_\alpha$  adalah positif, sehingga jika nilai dari parameter  $\alpha$  bertambah maka nilai  $R_0$  juga akan bertambah. Parameter  $\alpha$  merupakan laju dari kembalinya perokok elektrik menjadi perokok konvensional. Dalam aplikasinya hal ini berarti jika pemerintah menerapkan aturan untuk pelarangan penggunaan rokok elektrik, maka pengguna rokok elektrik akan kembali menggunakan rokok konvensional.

Kemudian dari persamaan (4.27), (4.28) dan (4.29) tanda indeks  $\delta_{\gamma_1}$ ,  $\delta_{\gamma_2}$ , dan  $\delta_g$  adalah negatif. Ketika nilai  $\gamma_1$  dan  $g$  bertambah maka nilai  $R_0$  akan turun tajam, dan kedua parameter tersebut memiliki tingkat sensitivitas yang hampir setara untuk menurunkan nilai  $R_0$ . Parameter  $\gamma_1$  yaitu menunjukkan laju perokok konvensional yang berhenti merokok karena keinginannya sendiri, sedangkan parameter  $g$  merupakan laju perokok konvensional yang mulai menggunakan rokok elektrik. Secara biologi hal ini dapat diartikan ketika perokok konvensional berhenti merokok, baik karena keinginan sendiri ataupun dengan beralih ke rokok elektrik, maka jumlah perokok konvensional akan menurun. Parameter  $\gamma_2$  juga merupakan faktor yang dapat mempengaruhi menurunnya nilai  $R_0$  tetapi efek dari parameter  $\gamma_2$  lebih rendah dibandingkan  $\gamma_1$  dan  $g$ .

Setelah mengetahui tanda dari masing-masing indeks sensitivitas dari parameter maka selanjutnya akan mencari nilai pasti dari indeks sensitivitas berdasarkan nilai parameter yang diambil dari jurnal rujukan (Jung, dkk, 2018), yaitu sebagai berikut

**Tabel 4.3** Nilai Estimasi Parameter

Parameter	Nilai Parameter
$\mu$	$\frac{1}{79.8}$
$\beta_1$	0.1961
$\beta_2$	0.0101
$\gamma_1$	0.0772
$\gamma_2$	0.1008
$\alpha$	0.0822
$g$	0.1245

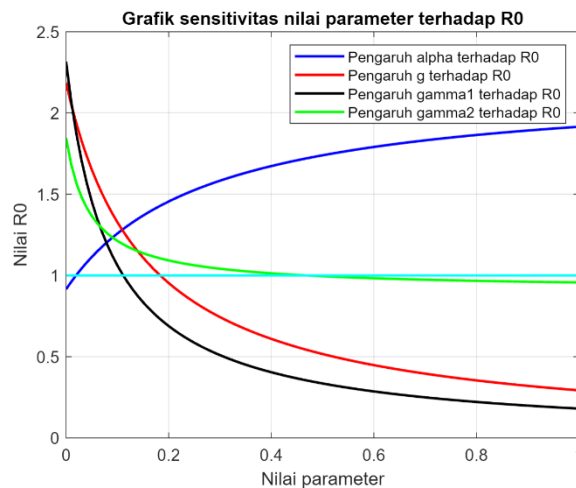
Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.3, maka indeks sensitivitas dapat dicari dengan melakukan substitusi parameter pada persamaan

(4.26) untuk parameter  $a$ , (4.27) untuk parameter  $\gamma_1$ , (4.28) untuk parameter  $\gamma_2$ , dan (4.29) untuk parameter  $g$  sebagaimana pada tabel berikut.

**Tabel 4.4** Nilai Indeks Sensitivitas

Parameter	Persamaan	Indeks sensitivitas
$\alpha$	$\frac{\alpha g(\gamma_2 + \mu)}{M(\alpha + \gamma_2 + \mu)}$	0.1873837747
$g$	$-\frac{g(\gamma_2 + \mu)}{M}$	-0.4457347730
$\gamma_1$	$-\frac{\gamma_1(\alpha + \gamma_2 + \mu)}{M}$	-0.4768599363
$\gamma_2$	$-\frac{\gamma_2 a g}{M(\alpha + \gamma_2 + \mu)}$	-0.1666642822

dimana  $M = (\gamma_1 + g + \mu)(\alpha + \gamma_2 + \mu) - \alpha g$



**Gambar 4.7** Grafik Sensitivitas Parameter terhadap  $R_0$

Sebagaimana pada Gambar 4.7 dan tabel indeks sensitivitas di atas, terlihat bahwa pengaruh parameter  $g$ ,  $\gamma_1$ , dan  $\gamma_2$  adalah parameter yang dapat menurunkan jumlah dari perokok konvensional. Seiring dengan bertambahnya nilai  $\gamma_1$  dan  $g$ , maka nilai  $R_0$  akan turun secara bertahap. Dilihat dari grafiknya, parameter  $\gamma_1$  dan  $g$  ini memiliki pengaruh dengan efek yang sama terhadap penurunan nilai  $R_0$ . Secara biologi, hal ini berarti jika jumlah perokok yang berhenti baik dengan niat

sendiri ataupun lewat penggunaan rokok elektrik, maka jumlah dari perokok konvensional akan turun secara drastic.

Pada kasus parameter  $\gamma_2$ , seiring bertambahnya nilai  $\gamma_2$  maka  $R_0$  perlahan turun, tetapi tidak dapat menurunkan nilai  $R_0$  hingga jauh di bawah 1. Efek dari parameter  $\gamma_2$  lebih lemah dibandingkan kedua parameter sebelumnya. Artinya, penggunaan rokok elektrik untuk menurunkan nilai  $R_0$  ini kurang efektif.

## BAB V

### PENUTUP

Dalam bab ini kesimpulan dibuat sebagai hasil dari analisa model yang telah diperoleh sebelumnya dan saran sebagai pertimbangan untuk penelitian selanjutnya.

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada penulisan penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

1. Model perokok konvensional dan elektrik yang telah dianalisis mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas perokok  $e_0 = (S_0, E_0, Q_0) = (0,0,0)$  yang bersifat stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ , dan titik kesetimbangan endemik  $e_*$  yang bersifat stabil asimtotik lokal jika  $\gamma_1 > \beta_2 Q^*$  dan  $\beta_1 > \alpha/S^*$  dengan bilangan reproduksi dasar  $R_0 = \frac{\beta_1(\alpha+\gamma_2+\mu)}{(\gamma_1+g+\mu)(\alpha+\gamma_2+\mu)-ag}$ . Terjadinya bifurkasi pada model perokok konvensional dan elektrik dipengaruhi oleh perubahan nilai  $R_0$ .
2. Berdasarkan analisis sensitivitas yang dilakukan, parameter model yang paling efektif dalam menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar adalah  $\gamma_1$  yaitu laju perokok konvensional berhenti merokok dengan keinginan sendiri. Parameter kedua yang efektif yaitu  $g$ , dimana merupakan laju perokok konvensional yang beralih menggunakan rokok elektrik. Kemudian parameter untuk laju perokok elektrik yang berhenti merokok, yaitu  $\gamma_2$  kurang efektif dalam menurunkan nilai  $R_0$  karena tidak cukup jauh hingga di bawah 1.

## **5.2 Saran**

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis dengan memberikan asumsi–asumsi tambahan agar hasil yang didapatkan lebih sesuai dengan kehidupan nyata seperti menambahkan asumsi perokok potensial dapat menggunakan rokok elektrik secara bersamaan atau menambahkan kriteria umur untuk individu yang dapat dikatakan perokok potensial.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemahannya*. (2010). Majelis Taklim Telkomsel.
- Anton, H., & Rorres, C. (2010). *Elementary Linear Algebra* (Ninth). John Willey and Sons, Inc. <https://doi.org/10.1109/IJCNN.2006.247060>
- Arif, Wahyuni, A. T. (2015). *Metode pangkat dan metode deflasi dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks*. *MSA*, 3(2), 64–74.
- Boyce, W. E., & DePrima, R. C. (1992). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*.
- BPOM, B. (2015). *Bahaya Rokok Elektronik*. *InfoPOM*, 16(5), 1–12.
- Edelstein Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. New York: Random House.
- Finizio, N., & Ladas, G. (1988). *Persamaan diferensial biasa dengan penerapan modern*. Erlangga.
- Hurint, R. U., Ndi, M. Z., & Lobo, M. (2017). Analisis Sensitivitas Model Epidemi SEIR. *Online Journal of Natural Science*, 6(1), 22–28. <https://doi.org/10.22487/25411969.2017.v6.i1.8076>
- Indra, M. F., Hasneli, Y., & Utami, S. (2015). Gambaran Psikologis Perokok Tembakau Yang Beralih Menggunakan Rokok Elektrik (Vaporizer). *JOM*, 2(2), 1285–1291. <https://doi.org/10.12816/0013114>
- Jung, J. H., Park, A., & Jung, I. H. (2018). Qualitative and Sensitivity Analysis of the Effect of Electronic Cigarettes on Smoking Cessation. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2018. <https://doi.org/10.1155/2018/3738584>
- King, B. A., Patel, R., Nguyen, K. H., & Dube, S. R. (2015). Trends in Awareness and Use of Electronic Cigarettes Among US Adults, 2010-2013. *Nicotine & Tobacco Research*.
- Lestari, P. (2020). *Kontrol Optimal Pada Model Dinamika Merokok dengan Kampanye Anti Rokok, Permen Karet Nikotin, dan Pengobatan*.
- Llibre, J., & Teruel, A. E. (2014). *Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems*. New York: Springer Basel.
- Munir, S. (2012). *Ilmu Tasawuf*. Jakarta: Teruna Grafica.

- Pang, L., Zhao, Z., Liu, S., & Zhang, X. (2015). A mathematical model approach for tobacco control in China. *Applied Mathematics and Computation*, 259, 497–509. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.078>
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (Third). Springer.
- Rahayu, W. (2005). Analisa Dinamik dan Proses Markov dari Model Penyebaran Ebola. *Skripsi*.
- Rif'an, M. (n.d.). *Bahan Ajar: Sistem Kendali Kontinyu*. Universitas Negeri Jakarta. [https://books.google.co.id/books?id=avLGDwAAQBAJ&pg=PA34&dq=kriteria+routh+hurwitz&hl=id&sa=X&ved=2ahUKEwjKl-DvgajtAhXX\\_XMBHW-5CpYQ6AEwAXoECAyQAg#v=onepage&q=kriteria+routh+hurwitz&f=false](https://books.google.co.id/books?id=avLGDwAAQBAJ&pg=PA34&dq=kriteria+routh+hurwitz&hl=id&sa=X&ved=2ahUKEwjKl-DvgajtAhXX_XMBHW-5CpYQ6AEwAXoECAyQAg#v=onepage&q=kriteria+routh+hurwitz&f=false)
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations* (Third Edit). John Wiley&Sons.Inc
- Siegel, M. B., Tanwar, K. L., & Wood, K. S. (2011). Electronic cigarettes as a smoking-cessation tool: Results from an online survey. *American Journal of Preventive Medicine*, 40(4), 472–475. <https://doi.org/10.1016/j.amepre.2010.12.006>
- Sharma, A., & Misra, A. K. (2014). Backward bifurcation in a smoking cessation model with media campaigns. *Applied Mathematical Modelling*, 39(3–4), 1087–1098. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.022>
- Sulisti, H., Noviani, E., & Kusumastuti, N. (2014). Analisis Kestabilan Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Bimaster*, 03(3), 235–244. [http://download.portalgaruda.org/article.php?article=266336&val=2316&title=ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT FLU BURUNG](http://download.portalgaruda.org/article.php?article=266336&val=2316&title=ANALISIS%20KESTABILAN%20MODEL%20DINAMIKA%20PENYEBARAN%20PENYAKIT%20FLU%20BURUNG)
- Syukur, M. (2012). *Sufi Healing : Terapi dengan Tasawuf*. Jakarta: Erlangga.
- Van Den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- WHO. (2012). *WHO Global Report : Mortality Attributable to Tobacco*.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1: M-File untuk Bifurkasi

```
clear all; clc; close all;

mu = 1/79.8;
beta_1 = 0.7552;
beta_2 = 0.42;
gamma_1 = 0.2851;
gamma_2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
g = 0.1245;
%bifurkasi maju, beta_2 <= 0.1808

a = beta_1*beta_2*(alpha+gamma_2+g+mu);
b = beta_1*mu*(alpha+gamma_2+mu+g)+(beta_1-
beta_2)*[(gamma_1*(alpha+mu)+(g+gamma_1)*gamma_2)]+beta_2*[(gamma_1+g+mu
-beta_1)*(alpha+gamma_2+mu)-(alpha*g)];
c1 = mu*((alpha+gamma_2+mu)*(g+gamma_1+mu)-(alpha*g));
r0 = (beta_1*(alpha+gamma_2+mu))/((gamma_1+g+mu)*(alpha+gamma_2+mu)-
alpha*g);

r_0 = (-b^2+4*a*c1)/(4*a*c1);
r_0

R_0 = 0:1/100:1;
for i=1:1:101
    s01(i) = 0;
end
plot(R_0, s01, 'ob', 'LineWidth', 1);

R_a = 1:(2-1)/100:2;
for i=1:1:101
    s02(i)=0;
end
hold on
plot(R_a, s02, 'or', 'LineWidth', 1)
hold off

R_c = r_0:(2-r_0)/100:2;
for i=1:1:101
    c = c1*(1-R_c(i));
    s_1(i)=(-b+sqrt(b^(2)-4*a*c))/(2*a);
    s_2(i)=(-b-sqrt(b^(2)-4*a*c))/(2*a);
end
hold on
plot (R_c, s_1 , '+b', R_c, s_2, '+r', 'LineWidth', 1);
hold off

xlabel('Bilangan Reproduksi Dasar (R0)')
ylabel('Populasi S')
grid on
axis([r_0-1, R_c(101)+0.001, 0, s_1(101)]);
```

## Lampiran 2 : M-File Simulasi Numerik

```

function dydt=numerik3(t,y)
global mu beta_1 beta_2 gamma_1 gamma_2 alpha g

dy1= beta_1*y(1)*(1-y(1)-y(2)-y(3))+beta_2*y(1)*y(3)+alpha*y(2)-
gamma_1*y(1)-g*y(1)-mu*y(1);
dy2= g*y(1)-alpha*y(2)-gamma_2*y(2)-mu*y(2);
dy3= gamma_1*y(1)+gamma_2*y(2)-beta_2*y(1)*y(3)-mu*y(3);

dydt=[dy1; dy2; dy3];
end

clc; clear all; close all;

global mu beta_1 beta_2 gamma_1 gamma_2 alpha g

% Nilai untuk R0<1
mu = 1/79.8;
beta_1 = 0.05; % R0>1 : beta_1 = 0.1961;
beta_2 = 0.0101; % R0>1 : beta_2 = 0.4;
gamma_1 = 0.0772;
gamma_2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
g = 0.1245;

x = (alpha*(gamma_1+mu)+(gamma_2+mu)*(g+gamma_1+mu))/(alpha+gamma_2+mu);
x

r_0 = (beta_1*(alpha+gamma_2+mu))/((g+gamma_1+mu)*(alpha+gamma_2+mu)-
alpha*g);
r_0

time = [0 800];

initial_s = 0.2;
initial_e = 0.1;
initial_q = 0.01;

y0 = [initial_s, initial_e, initial_q];

figure(1)
[t,y]= ode45(@(t,y) numerik3 (t,y), time, y0);
hold on
grid on
plot(t,y(:,1), 'm-', 'LineWidth' , 3)
plot(t,y(:,2), 'y-', 'LineWidth' , 3)
plot(t,y(:,3), 'g-', 'LineWidth' , 3)
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Jumlah Populasi');
title('Grafik Simulasi Numerik');
legend('s', 'e', 'q');

```

### Lampiran 3 : M-File untuk Potret Fase Titik Keseimbangan

```

function dy = SEQ1(t,y);
%Nilai parameter 1
mu = 1/79.8;
beta_1 = 0.05; %R0>1 beta_1 = 0.1961
beta_2 = 0.0101;
gamma_1 = 0.0772;
gamma_2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
g = 0.1245;

%Sistem model 1
dy(1) = beta_1*y(1)*(1-y(1)-y(2)-y(3))+beta_2*y(1)*y(3)+alpha*y(2)-
gamma_1*y(1)-g*y(1)-mu*y(1);
dy(2) = g*y(1)-alpha*y(2)-gamma_2*y(2)-mu*y(2);
dy(3) = gamma_1*y(1)+gamma_2*y(2)-beta_2*y(1)*y(3)-mu*y(3);

function dy2 = SEQ2(t,y2);
%Nilai parameter 1
mu = 1/79.8;
beta_1 = 0.05; %R0>1 beta_1 = 0.1961
beta_2 = 0.0101;
gamma_1 = 0.0772;
gamma_2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
g = 0.1245;

%Sistem model 1
dy2(1) = beta_1*y2(1)*(1-y2(1)-y2(2)-
y2(3))+beta_2*y2(1)*y2(3)+alpha*y2(2)-gamma_1*y2(1)-g*y2(1)-mu*y2(1);
dy2(2) = g*y2(1)-alpha*y2(2)-gamma_2*y2(2)-mu*y2(2);
dy2(3) = gamma_1*y2(1)+gamma_2*y2(2)-beta_2*y2(1)*y2(3)-mu*y2(3);

function dy3 = SEQ3(t,y3);
%Nilai parameter 1
mu = 1/79.8;
beta_1 = 0.05; %R0>1 beta_1 = 0.1961
beta_2 = 0.0101;
gamma_1 = 0.0772;
gamma_2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
g = 0.1245;

%Sistem model 1
dy3(1) = beta_1*y3(1)*(1-y3(1)-y3(2)-
y3(3))+beta_2*y3(1)*y3(3)+alpha*y3(2)-gamma_1*y3(1)-g*y3(1)-mu*y3(1);
dy3(2) = g*y3(1)-alpha*y3(2)-gamma_2*y3(2)-mu*y3(2);
dy3(3) = gamma_1*y3(1)+gamma_2*y3(2)-beta_2*y3(1)*y3(3)-mu*y3(3);

clc; clear all; close all;

%Nilai parameter

```

```

mu = 1/79.8;
beta_1 = 0.05; %R0>1 beta_1 = 0.1961
beta_2 = 0.0101;
gamma_1 = 0.0772;
gamma_2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
g = 0.1245;

%Nilai Awal 1, 2, dan 3
S1 = 0.2; E1 = 0.1; Q1 = 0.01;
z1(1,:) = [S1, E1, Q1];
S2 = 0.5; E2 = 0.4; Q2 = 0.1;
z2(1,:) = [S2, E2, Q2];
S3 = 0.3; E3 = 0.1; Q3 = 0.05;
z3(1,:) = [S3, E3, Q3];

%Titik kesetimbangan endemik
R0 = (beta_1*(alpha+gamma_2+mu))/((g+gamma_1+mu)*(alpha+gamma_2+mu)-
alpha*g)
a = beta_1*beta_2*(alpha+gamma_2+g+mu)
b = beta_1*mu*(alpha+gamma_2+mu+g)+(beta_1-
beta_2)*(gamma_1*(alpha+mu)+(g+gamma_1)*gamma_2)+beta_2*((gamma_1+g+mu)*
(alpha+gamma_2+mu)-alpha*g)*(1-R0)
c = mu*((gamma_1+g+mu)*(alpha+gamma_2+mu)-alpha*g)*(1-R0)
S = (-b + sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
E = (g*S)/(alpha+gamma_2+mu)
Q = (gamma_1*S+(gamma_2*(g*S)/(alpha+gamma_2+mu)))/(beta_2*S+mu)

h = 1;
t = 0:5000;
M = length(t)-1;

for i=1:M
    k1 = h*SEQ1(t(i), z1(i,:));
    k2 = h*SEQ1(t(i)+(h/2), z1(i,:)+k1/2);
    k3 = h*SEQ1(t(i)+(h/2), z1(i,:)+k2/2);
    k4 = h*SEQ1(t(i)+h, z1(i,:)+k3);
    z1(i+1,:) = z1(i,:) + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

    k12 = h*SEQ2(t(i), z2(i,:));
    k22 = h*SEQ2(t(i)+(h/2), z2(i,:)+k12/2);
    k32 = h*SEQ2(t(i)+(h/2), z2(i,:)+k22/2);
    k42 = h*SEQ2(t(i)+h, z2(i,:)+k32);
    z2(i+1,:) = z2(i,:) + (k12+2*k22+2*k32+k42)/6;

    k13 = h*SEQ3(t(i), z3(i,:));
    k23 = h*SEQ3(t(i)+(h/2), z3(i,:)+k13/2);
    k33 = h*SEQ3(t(i)+(h/2), z3(i,:)+k23/2);
    k43 = h*SEQ3(t(i)+h, z3(i,:)+k33);
    z3(i+1,:) = z3(i,:) + (k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
end
y = z1;
y2 = z2;
y3 = z3;

figure;

```

```
plot3(y(:,1), y(:,2), y(:,3), 'b', y2(:,1), y2(:,2), y2(:,3), 'g',  
y3(:,1), y3(:,2), y3(:,3), 'r', 'LineWidth', 2);  
hold on;  
plot3(S1, E1, Q1, '*b', 'LineWidth', 5);  
plot3(S2, E2, Q2, '*g', 'LineWidth', 5);  
plot3(S3, E3, Q3, '*r', 'LineWidth', 5);  
plot3(0, 0, 0, '*black', 'LineWidth', 5);  
%jika  $R_0 > 1$  maka terdapat titik endemik  
%plot3(S, E, Q, '*y', 'LineWidth', 5);  
%text(S, E, Q, 'E*', 'HorizontalAlignment', 'left', 'VerticalAlignment',  
'top')  
  
xlabel('S');  
ylabel('E');  
zlabel('Q');  
grid on;
```

#### Lampiran 4 : M-File Analisis Sensitivitas

```

clc; clear all; close all;

beta1 = 0.1961;
beta2 = 0.0101;
gamma1 = 0.0772;
gamma2 = 0.1008;
alpha = 0.0822;
mu = 1/79.8;
g = 0.1245;
x = 0.0:0.01:1.0;

for p = 1:length(x)
    R0(p) = 1;
    R0g(p) =
(beta1*(alpha+gamma2+mu))/((gamma1+x(p)+mu)*(alpha+gamma2+mu) -
alpha*x(p));
    R0a(p) = (beta1*(x(p)+gamma2+mu))/((gamma1+g+mu)*(x(p)+gamma2+mu) -
x(p)*g);
    R0c1(p) = (beta1*(alpha+gamma2+mu))/((x(p)+g+mu)*(alpha+gamma2+mu) -
alpha*g);
    R0c2(p) = (beta1*(alpha+x(p)+mu))/((gamma1+g+mu)*(alpha+x(p)+mu) -
alpha*g);
end

figure(1);
plot(x, R0a, 'b', x, R0g, 'r', x, R0c1, 'k', x, R0c2, 'g', x, R0, 'c',
LineWidth=1.5);
grid on;
legend('Pengaruh alpha terhadap R0', 'Pengaruh g terhadap R0', 'Pengaruh
gamma1 terhadap R0', 'Pengaruh gamma2 terhadap R0');
xlabel('Nilai parameter'); ylabel('Nilai R0'); title('Grafik
sensitivitas nilai parameter terhadap R0');

```

## RIWAYAT HIDUP



Fasya Ilya Cahyadina, lahir di Malang pada tanggal 25 September 1999, biasa dipanggil Fasya. Bertempat tinggal di Perum Graha Dewata, Malang. Anak pertama dari Bapak Nurcahyo dan Ibu Siti Aisyah.

Pendidikan yang pernah ditempuh penulis yaitu dari TK Islam Athirah Makassar (2003-2005), kemudian melanjutkan di SD Plus Rahmat Kediri (2005-2011). Setelah itu pendidikan jenjang SMP di SMPN 18 Malang (2011-2014). Kemudian melanjutkan jenjang SMA di MA Muhammadiyah I Malang (2014-2017). Pendidikan berikutnya pada tahun 2017 penulis menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Fasya Ilya Cahyadina  
NIM : 17610005  
Fakultas/ Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Populasi Perokok  
Konvensional dan Elektrik  
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si  
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	14 Oktober 2021	Konsultasi Bab I & II	1.
2	20 Oktober 2021	Revisi Bab I & II	2.
3	28 Oktober 2021	Konsultasi Bab I, II, & III	3.
4	06 November 2021	Revisi Bab I, II, & III	4.
5	18 November 2021	ACC untuk Seminar Proposal	5.
6	24 Januari 2022	Konsultasi Bab III	6.
7	02 Februari 2022	Revisi Bab III	7.
8	28 Maret 2022	Konsultasi Bab IV	8.
9	19 April 2022	Revisi Bab IV	9.
10	27 April 2022	ACC untuk Seminar Hasil	10.
11	17 Mei 2022	Konsultasi keseluruhan	11.
12	31 Mei 2022	Revisi keseluruhan	12.
13	01 Juni 2022	ACC keseluruhan untuk Ujian Sidang Skripsi	13.

Malang, 22 Juni 2022  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005