

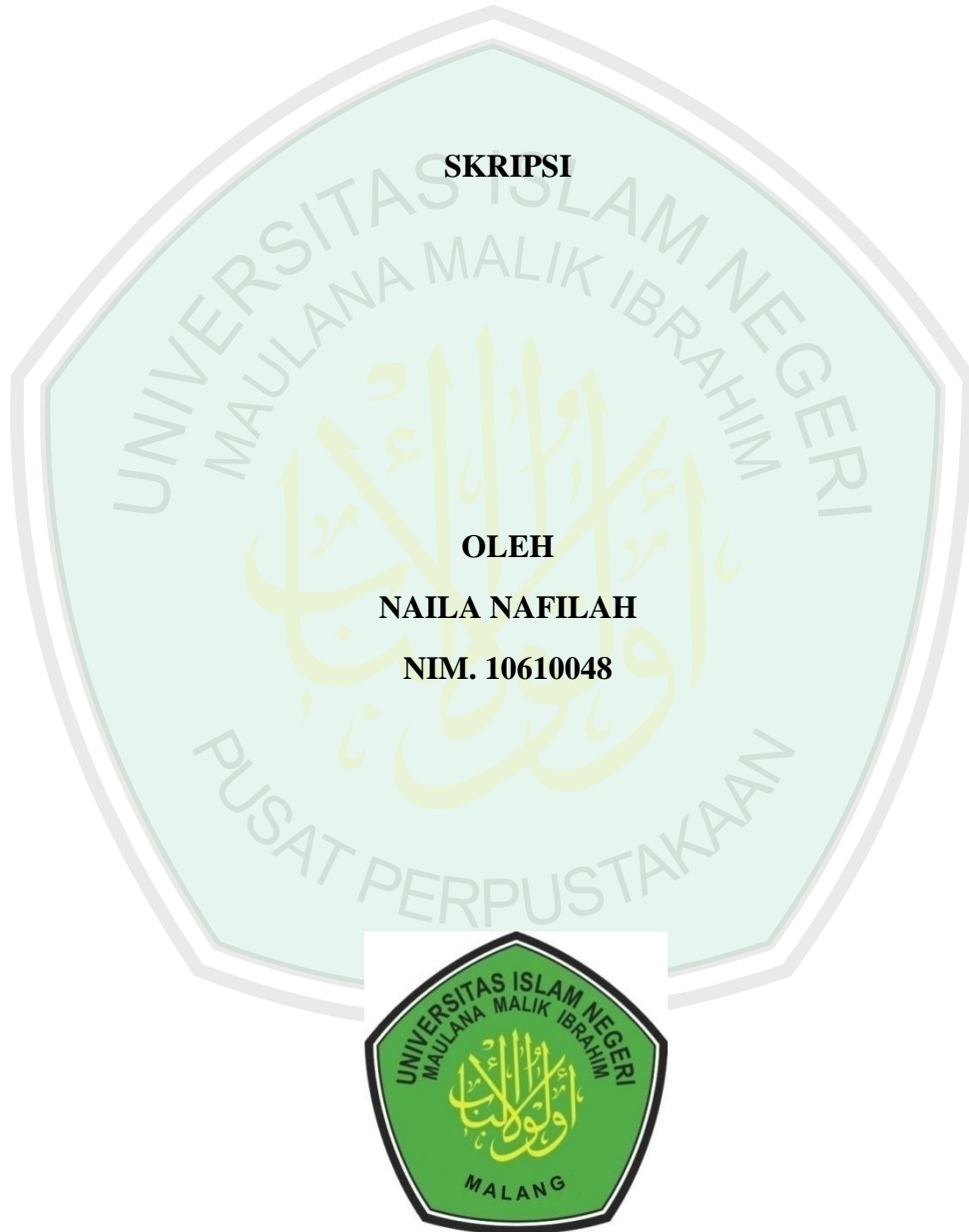
**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *BOUSSINESQ*
DENGAN METODE *LAX-WENDROFF***

SKRIPSI

OLEH

NAILA NAFILAH

NIM. 10610048



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *BOUSSINESQ*
DENGAN METODE *LAX-WENDROFF***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Naila Nafilah
NIM. 10610048**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *BOUSSINESQ*
DENGAN METODE *LAX-WENDROFF***

SKRIPSI

Oleh
Naila Nafilah
NIM. 10610048

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 01 Juni 2016

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Ari Kusumastuti, M. Pd, M.Si
NIP. 19770501 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *BOUSSINESQ*
DENGAN METODE *LAX-WENDROFF***

SKRIPSI

**Oleh
Naila Nafilah
NIM. 10610048**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 08 Juni 2016

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Naila Nafilah

NIM : 10610048

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Solusi Numerik Persamaan *Boussinesq* dengan Metode *Lax-Wendroff*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Naila Nafilah
NIM. 10610048

MOTO

“Man Jadda Wajada”



PERSEMBAHAN

Subhanallah Maha Suci Allah dengan segala Kekuasaan-Nya

Penulis persembahkan karya ini untuk:

Ayahanda **Achmad Huda** dan Ibunda **Siti Masruroh**

yang telah membesarkan, mendidik, membimbing, dan memberikan segenap cinta kasih kepada penulis, serta iringan doanya yang selalu menyertai setiap langkah penulis.

Adik-adik penulis **A'an Lathif Al Faqih, Inda Salsabeela dan Moch.**

Rafy Denis Syahbana

yang tak pernah lelah untuk mendukung dan memberi semangat demi terselesaikannya skripsi ini.

Orang terdekat penulis yang selalu memberi dukungan, motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.

Serta segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi bagi penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Solusi Numerik Persamaan *Boussinesq* dengan Metode *Lax-Wendroff*” ini dengan baik dan tepat waktu sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah mengantarkan manusia dari jaman kegelapan ke jaman yang terang benderang yakni dengan ajaran agama Islam.

Selesainya skripsi ini tidak luput dari bantuan berbagai pihak, baik secara moral maupun spiritual. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen wali.
5. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan ide mengenai permasalahan skripsi ini serta meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan dengan penuh kesabaran.

6. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
8. Ayahanda tercinta Achmad Huda dan Ibunda tercinta Siti Masruroh yang senantiasa memberikan doa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, memberikan inspirasi dalam kehidupan penulis, serta kasih sayang yang begitu besarnya demi tercapainya keberhasilan bagi penulis.
9. Adik-adik tercinta A'an Lathif Al Faqih, Inda Salsabeela, dan Moch. Rafy Denis Syahbana yang telah memberikan motivasi kepada penulis agar dapat menjadi teladan yang baik.
10. KH. M. Sholeh Hudi Muhyidin Al Amin dan Ibu Sri Rahayu Setyana yang senantiasa memberikan bimbingan dan petunjuk bagi kehidupan penulis.
11. Keluarga besar Bani Hasan Munadi dan Bani Sholeh Faqih yang senantiasa melimpahkan wasilah doanya.
12. Muhammad Syafa' sebagai teman, sahabat, dan guru terbaik yang senantiasa memotivasi agar skripsi ini dapat diselesaikan.
13. Seluruh teman-teman penulis seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010, khususnya Afifah Nur'aini M, Harum Kurniasari, Rowaihul Jannah, Nur Aini, Nurul Jannah, Fitria Nur Aini, Siti Muyassaroh, Alvi Nur Hidayah, Syarifatuz Zakkiyah, Siti Chamidatuz Zahra, Syifa'ul Amamah, Khafidhoh Nurul Aini, Muhammad Sukron, Muhammad Ghozali, Ah.

Syihabudin Zahid, Muhammad Fahmi C.A, Sigit Fembrianto, Muhammad Hasan, dan Wahyu S.M terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.

14. Keluarga besar Integral, PMII Rayon *Pencerahan* Galileo, dan Teater Galileo tanpa terkecuali.
15. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah wawasan keilmuan khususnya di bidang matematika. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	7
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Manfaat Penelitian.....	8
1.5 Batasan Masalah.....	8
1.6 Metode Penelitian.....	9
1.7 Sistematika Penulisan.....	9
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Metode <i>Lax-Wendroff</i>	8
2.1.1 Deret Taylor.....	9
2.1.2 Metode <i>Lax-Wendroff</i>	10
2.2 Persamaan <i>Boussinesq</i>	11
2.2.1 Penurunan Persamaan <i>Boussinesq</i>	13
2.2.1.1 Penskalaan.....	13
2.2.1.2 Aproksimasi Variabel yang Digunakan.....	15
2.3 Metode Beda Hingga.....	16
2.4 Orde <i>Error</i>	19
2.5 Kajian Agama.....	21

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Diskritisasi	40
3.2 Orde <i>Error</i>	44
3.3 Simulasi dan Interpretasi Hasil	50
3.4 Kajian Keagamaan	55

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	59
4.2 Saran.....	60

DAFTAR PUSTAKA	61
-----------------------------	----

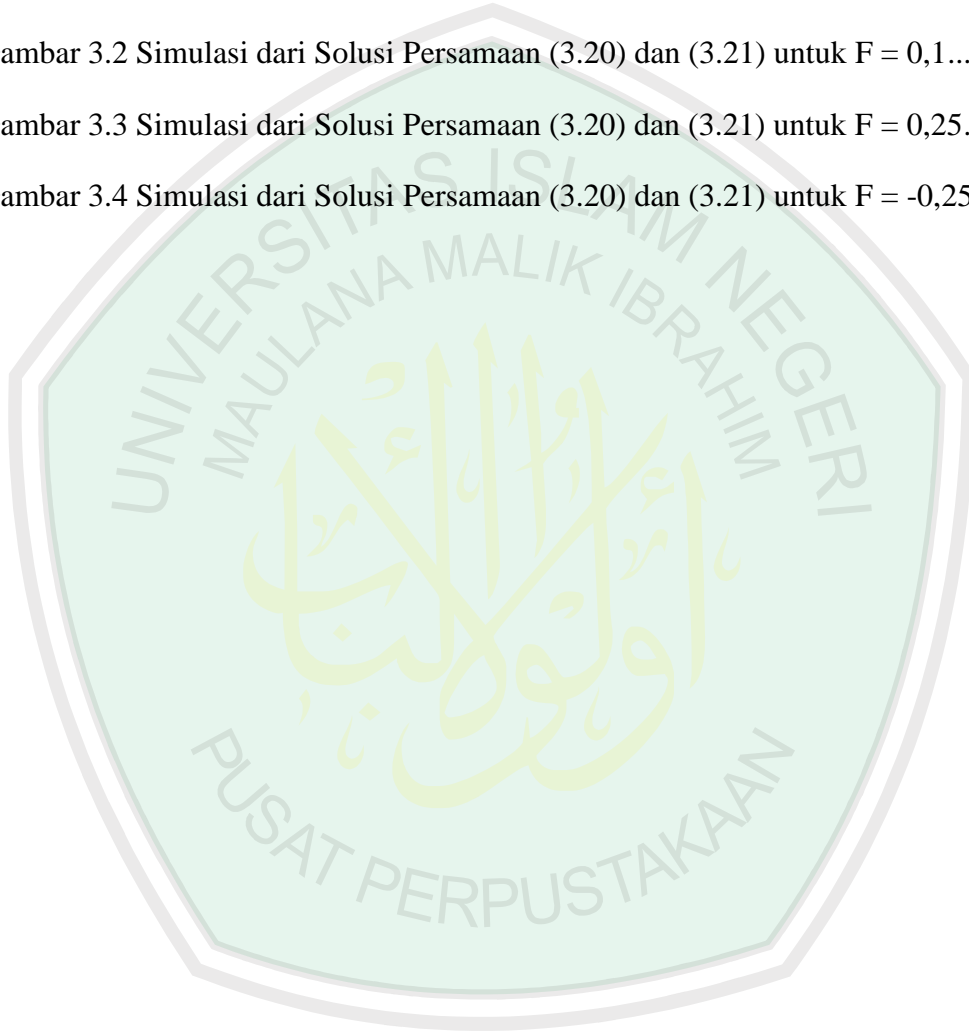
LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sketsa Aliran Gelombang dengan Kondisi Batas	15
Gambar 3.1 Simulasi dari Solusi Persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = 0,01..$	51
Gambar 3.2 Simulasi dari Solusi Persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = 0,1....$	52
Gambar 3.3 Simulasi dari Solusi Persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = 0,25..$	53
Gambar 3.4 Simulasi dari Solusi Persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = -0,25$	54



ABSTRAK

Nafilah, Naila. 2016. **Solusi Numerik Persamaan Boussinesq dengan Metode Lax-Wendroff**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si.

Kata kunci: solusi numerik, persamaan *Boussinesq*, metode *Lax-Wendroff*

Skripsi ini membahas tentang solusi numerik persamaan *Boussinesq* yang merupakan persamaan differensial parsial orde satu dengan menggunakan metode *Lax-Wendroff*. Langkah awal adalah dilakukan diskritisasi pada persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff*, yaitu mencari turunan pertama dan kedua pada persamaan *Boussinesq* dan mensubstitusikan hasil turunan pertama dan kedua ke dalam metode *Lax-Wendroff*. Selanjutnya mendiskritkan hasil substitusi dengan metode beda hingga pusat terhadap ruang. Kemudian mensimulasikan hasil solusi numerik persamaan *Boussinesq* dengan bantuan program MATLAB (R2010a) dan menginterpretasikannya.

Hasil penelitian ini menunjukkan perhitungan yang dilakukan sudah benar dan sesuai dengan yang diharapkan. Sedangkan hasil simulasi dari program MATLAB (R2010a) menunjukkan bahwa terdapat riak-riak gelombang yang disebabkan adanya gundukan pada dasar laut, dan nilai dari F yang berbeda-beda pada air menghasilkan tinggi gelombang permukaan yang berbeda.

ABSTRACT

Nafilah, Naila. 2015. **Numerical Solution of Boussinesq Equation Using Lax-Wendroff Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si.

Keywords: numerical solution, Boussinesq equation, Lax-Wendroff method

This thesis discusses the Boussinesq equations numerical solution of first order nonlinear partial differential equations using the Lax-Wendroff method. The initial step is discretization on Boussinesq equation by the method of Lax-Wendroff, namely determining the first and second derivative of Boussinesq equation and substituting the results of the first and second derivative results into Lax-Wendroff method. The next step is discretizing the substitution result using the central finite difference method respect to space. Then simulating the results of the numerical solution of Boussinesq equation using MATLAB (R2010a) and interpreting it.

The result of the study indicate the calculations performed are correct and as expected, while the simulation results of the program MATLAB (R2010a) indicates that there are ripples were caused by the bumps of the ocean floor, and the value of F varies on water produce different surface wave heigh

ملخص

نافلة، نيلا. ٢٠١٦. حل عددي معادلة *Boussinesq* بطريقة *Lax-Wendroff*. بحث جامعي. شعب الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، وجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: خير الرحمن، الماجستير و آري كوسومستوتي، الماجستير

الكلمات الرئيسية: الحل العددي، معادلة *Boussinesq*، طريقة *Lax-Wendroff*

هذا البحث الجامعي يتناول عن الحل العددي المعادلة *Boussinesq* التي كانت للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية على الرتبة الأولى باستخدام *Lax-Wendroff* الخطوة الأولى هي تفريد على المعادلة *Boussinesq* من خلال طريقة *Lax-Wendroff*، ثم العثور على المشتقة الأولى والمشتق الثاني على المعادلة *Boussinesq*، واستبدال النتائج المشتقة الأولى والنتائج المشتقة الثانية الي الطريقة *Lax-Wendroff*، وعلاوة على ذلك نتائج الاستبدال بطريقة الفرق محدود لمركزي على الفضاء. ثم محاكاة نتائج حل *Boussinesq* العددية بمساعدة برنامج MATLAB (R2010a) وتفسير ذلك.

وتدل نتائج هذه الدراسة إلى أن يتم حساب بشكل صحيح وكما هو متوقع. في حين أن نتائج المحاكاة برنامج MATLAB (R2010a) إلى أن هناك تموجات كانت بسبب المطبات في قاع المحيط، وسوف قيم F والتي المختلفة في الماء ينتج ارتفاع الموجات السطحية المختلفة

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Islam memiliki perhatian yang sangat besar terhadap ilmu pengetahuan. Dalam al-Quran dan hadits sebagai pedoman umat Islam banyak sekali yang mendeskripsikan tentang ilmu pengetahuan serta pentingnya memperoleh ilmu baik dengan membaca, menganalisis maupun mengamalkannya. Setiap proses dalam mendapatkan ilmu pengetahuan amatlah berharga dalam pandangan Islam, karena beberapa ayat dalam al-Quran menjelaskan tentang pentingnya hal ini, sehingga hasil dan manfaat yang amat besar akan diperoleh manusia yang berilmu, baik dalam kehidupannya di dunia (bermasyarakat) maupun di akhirat kelak (Yusuf, 2009:20). Firman Allah Swt. dalam al-Quran surat an-Nisaa' ayat 174 yang berbunyi:

يَأَيُّهَا النَّاسُ قَدْ جَاءَكُمْ بُرْهَانٌ مِّن رَّبِّكُمْ وَأَنْزَلْنَا إِلَيْكُمْ نُورًا مُّبِينًا ﴿١٧٤﴾

Wahai manusia! Sesungguhnya telah sampai kepadamu bukti kebenaran dari Tuhanmu, (Muhammad dengan mukjizatnya) dan telah Kami turunkan kepadamu cahaya yang terang benderang (Al-Quran).

Maksud ayat ini adalah telah datang kepada manusia dari sisi Allah Swt., sesuatu bukti kebenaran yang terang. Allah Swt. menjelaskan kepada manusia hakikat yang sebenarnya dan tentang segala sesuatu yang manusia perlukan, yaitu diperkuat dengan dalil-dalil dari keterangan-keterangan yang jelas. Al-Quran itu diturunkan sebagai cahaya yang memberi penerang kepada seluruh umat manusia tentang apa yang mereka perlukan dalam menempuh hidup di dunia maupun di akhirat kelak, supaya mereka perhatikan terhadap ayat-ayat dengan seksama, sehingga dengan

demikian mereka berbahagia hidupnya di dunia, dan mendapat kebaikan kelak di hari kemudian (Al-Maragi, 1993b:68-69).

Dari penjelasan di atas, bahwa suatu bukti yang terang harus diperoleh dengan mengkaji penelitian-penelitian sebelumnya dengan seksama guna mengembangkan ilmu pengetahuan terutama sains. Allah Swt. menyuruh umatnya untuk mengkaji ayat-ayat al-Quran dengan seksama karena pentingnya memperoleh ilmu, salah satunya ilmu yang berkaitan dengan persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam yang bergantung pada jumlah variabel bebasnya. Apabila persamaan tersebut hanya mengandung satu variabel bebas maka disebut dengan persamaan diferensial biasa (PDB), sedangkan jika mengandung lebih dari satu variabel bebas maka disebut dengan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial parsial dibedakan menjadi tiga bentuk, yaitu: PDP eliptik yang contohnya adalah persamaan *Laplace*, PDP parabolik yang contohnya adalah persamaan konduksi panas, dan selanjutnya PDP hiperbolik yang contohnya adalah persamaan gelombang. Sehingga, pada skripsi ini bentuk PDP yang digunakan adalah PDP jenis hiperbolik pada persamaan *Boussinesq*.

Persamaan *Boussinesq* pertama kali diperkenalkan oleh *Boussinesq* dengan keberhasilannya menurunkan secara matematis persamaan gelombang yang diteliti oleh John Scott R pada tahun 1834 (Patiroi, dkk, 2010:4). Persamaan *Boussinesq* didapatkan dengan melakukan penurunan pada aliran gelombang yang melalui sebuah gundukan. Sebelumnya telah diperoleh persamaan kontinuitas yang

menghasilkan persamaan *Laplace*, persamaan momentum yang memperoleh kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida, serta kondisi batas kinematik dasar fluida. Di mana nantinya pada persamaan-persamaan yang diperoleh di atas akan dilakukan penskalaan, setelah itu dilakukan ekspansi dengan deret, dan selanjutnya melakukan peninjauan tiap-tiap orde pada deret, dan selanjutnya membawa ke dalam model matematika yaitu gelombang permukaan (Sukron, 2014:24).

Persamaan *Boussinesq* dapat diselesaikan secara numerik karena persamaan ini berupa sistem PDP nonlinear orde 2. Dengan metode numerik akan diperoleh solusinya menggunakan operasi matematika dan hasil perhitungannya dapat disimulasikan dengan bantuan program komputer. Penelitian terkait gelombang juga menarik perhatian banyak para peneliti matematika. Salah satunya yaitu persamaan *Boussinesq* yang merupakan persamaan gelombang. Seperti Patiroi, dkk (2010) mengembangkan sebuah pendekatan numerik baru terhadap persamaan *Boussinesq* dengan menggunakan metode elemen hingga skema 2 langkah *Taylor-Galerkin*. Penyelesaian suku nonlinearnya dilakukan dengan menerapkan metode *gradient recovery* dan hasilnya dapat memodelkan persamaan *Boussinesq* 1 dimensi untuk pemodelan perambatan gelombang sinusoidal, soliter, dan fenomena *Shoaling*.

Hasil simulasi perambatan gelombang sinusoidal dengan Persamaan *Boussinesq* memiliki batasan keberlakuan sampai dengan skala kedalaman relatif 0,089 d/L. Hasil simulasi model untuk perambatan gelombang sinusoidal tampak stabil pada angka *Courrant* (Cr) $\leq 0,0673$. Sehingga, untuk pemodelan gelombang soliter tampak stabil pada angka *Courrant* $Cr \leq 0,330$. Skema

numerik juga dapat mensimulasikan fenomena perambatan 2 gelombang soliter yang bertubrukan. Berdasarkan hasil simulasi, tinggi maksimal gelombang akibat tubrukan adalah 0,719 m, sedangkan berdasarkan hasil perhitungan analitik Lo dan Young (2004) sebesar 0,776 m, sehingga diperoleh beda sebesar 7,22%. Christou dan Papanicolaou (2014) menggunakan metode *Robust – Christov – Galerkin Spectral* untuk membatasi dan memvalidasi teknik *Galerkin* yang diusulkan dan menggunakannya dalam penyelidikan numerik dari persamaan *Boussinesq* orde 6 dan orde 4.

Percobaan numerik dengan angka yang berbeda dari istilah yang dilakukan menunjukkan tingkat konvergensi eksponensial dari metode ini. Hasil yang paling akurat ditentukan untuk *time-dependent problem* dengan sedikitnya $n = 80$ terms. Hal ini menunjukkan bahwa teknik yang diusulkan adalah pendekatan numerik yang efisien, kuat, dan akurat, cocok untuk solusi dari masalah tergantung waktu pemodelan interaksi soliton. Panda, dkk (2014) menyelesaikan persamaan *Boussinesq-Green-Naghdi* dengan metode *Galerkin* diskontinu. Hasil numerik menunjukkan pendekatan solusi yang baik dengan nilai-nilai eksperimental. Langkah validasi tersebut telah memenuhi standar untuk menguji tidak hanya sifat transformasi linier tetapi juga transformasi nonlinear yang kompleks.

Donahue, dkk (2015) mengembangkan model tekanan *Poisson* menggunakan skala *Boussinesq* dan ekspansi tipe *Green-Naghdi* pada sumbu vertikal, sifat analitik dari model dan membandingkannya dengan hasil analitik. Model yang dihasilkan mampu menyelesaikan penyebaran orde tinggi, sekumpulan dan efek nonlinear dan ketika digabungkan dengan model SWE (*Shallow Water Equation*) menghasilkan solusi yang efisien untuk gelombang di air dangkal dan

menengah. Penurunan terhadap persamaan *Boussinesq* ini juga dilakukan oleh Wiryanto (2010), menurunkan persamaan *Boussinesq* yang diselesaikan secara numerik dengan mengembangkan skema *Adam-Bashforth* untuk prediktor dan *Adam-Moulton* untuk korektor. Hal ini digunakan untuk melihat efek dari bilangan *Froud*. Penelitian yang dilakukan oleh Wiryanto dalam menurunkan persamaan *Boussinesq* pada model aliran gelombang tersebut diperoleh dari fungsi potensial yaitu dengan mengaproksimasi masalah nilai batas persamaan *Laplace* dari fungsi potensial menjadi persamaan *Boussinesq*.

Pada penelitian sebelumnya (Sukron, 2014) membahas penurunan persamaan *Boussinesq* pada gelombang yang melalui sebuah gundukan yang menghasilkan persamaan *Boussinesq*. Persamaan ini nantinya digunakan pada penelitian ini untuk dicari solusi numeriknya. Melihat dari saran pada penelitian sebelumnya yang hanya melakukan penurunan model terhadap masalah yang dibahas. Selanjutnya menyarankan agar pada penelitian berikutnya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan differensial parsial yang dihasilkan.

Dalam matematika banyak persamaan yang membutuhkan sebuah analisis solusi, di antaranya PDP. Solusi yang dapat digunakan yakni secara analitik dan numerik, jika solusi analitik sulit dipecahkan maka dapat menggunakan solusi numerik sebagai alternatif.

Salah satu contoh metode numerik yaitu metode *Lax-Wendroff*. Metode ini berasal dari nama Peter Lax dan Burton Wendroff. Metode ini adalah metode numerik untuk solusi PDP hiperbolik berdasarkan beda hingga dengan akurasi orde dua bergantung ruang dan waktu (Anonymous, 2015). Metode ini melakukan pendekatan dengan cara mengekspansikan $\eta(x, t)$ dan $u(x, t)$ ke dalam deret

Taylor menggunakan PDP, di mana x tetap dan t berada pada orde dua, kemudian mengaproksimasikannya dengan menggunakan beda tengah terhadap ruang. Banyak penelitian yang membahas tentang metode *Lax-Wendroff*.

Bennet dan Rohani (2001) menyatakan bahwa mencari solusi dari persamaan keseimbangan populasi dengan menggunakan metode *Lax-Wendroff*, *Crank Nicholson*, dan metode baru yang merupakan kombinasi dari *Lax-Wendroff* dengan *Crank Nicholson*. Dari ketiga metode tersebut, peneliti mengusulkan bahwa metode gabungan dari *Lax-Wendroff/Crank Nicholson* menghasilkan metode numerik yang stabil. Sedangkan apabila *Lax-Wendroff* digunakan tanpa kombinasi *Crank Nicholson* metode numerik menjadi tidak stabil dan apabila *Crank Nicholson* digunakan tanpa kombinasi dari *Lax-Wendroff* menyebabkan berosilasi di luar kebenaran.

Qiu (2007) menyelesaikan persamaan *Hamilton-Jacobi* menggunakan skema *Hermite Weighted Essentially Non-Oscillatori* (HWENO) dengan metode *Lax-Wendroff* (LW) yang selanjutnya disebut HWENO-LW dan menggunakan skema *Hermite Weighted Essentially Non-Oscillatori* (HWENO) dengan metode *Runge-Kutta* (RK) yang selanjutnya disebut HWENO-RK dan kemudian membandingkannya. Hasilnya adalah HWENO-LW lebih mudah dalam penyelesaian secara komputasi dan dalam merekonstruksinya. HWENO-LW memiliki kesalahan yang lebih kecil dibandingkan dengan HWENO-RK.

Pochai dan Sornsori (2011) menggunakan metode *Lax-Wendroff* pada model Hidrodinamika untuk mengetahui kecepatan dan ketinggian pasang surut air dengan koefisien variabel. Solusi numerik yang dihasilkan dapat digunakan sebagai input data persamaan Konveksi-Difusi untuk mengetahui kualitas air.

Pada penelitian ini dilakukan pencarian solusi numerik terhadap persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff*, di mana nantinya ditemukan suatu hasil kestabilan dan simulasi program dengan MATLAB. Untuk itu sebelumnya dilakukan pendiskritisasian dengan menggunakan metode beda hingga tengah. Penelitian ini diharapkan mampu menyelesaikan dan menyimulasikan persamaan *Boussinesq* secara numerik dengan metode yang lebih mudah dan dapat diselesaikan dengan waktu yang lebih cepat. Sehingga nantinya penelitian ini memberikan penjelasan mengenai persamaan *Boussinesq* yang diselesaikan dengan metode *Lax-Wendroff* untuk kajian penelitian selanjutnya.

Berdasarkan uraian tersebut maka penulis tertarik untuk mengembangkan tugas akhir Sukron (2014) yang berjudul *Penurunan Persamaan Boussinesq pada Gelombang yang Melalui Sebuah Gundukan*. Selanjutnya penulis mencari solusi numerik dari sistem persamaan differensial parsial pada persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax Wendroff*. Sehingga penulis mengambil judul pada skripsi ini yaitu “Solusi Numerik Persamaan *Boussinesq* dengan Metode *Lax-Wendroff*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana solusi numerik persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff* dan simulasinya.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui bentuk solusi numerik persamaan *Boussinesq* dengan

metode *Lax-Wendroff* dan hasil simulasinya.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat berupa:

1. Penjelasan mengenai solusi numerik dari persamaan *Boussinesq* yang menggunakan metode *Lax-Wendroff*.
2. Pembahasan, pengetahuan, dan informasi pada penelitian yang terkait dengan persamaan *Boussinesq*.

1.5 Batasan Masalah

Batasan dari penelitian ini adalah:

1. Persamaan Boussinesq yang diselesaikan adalah:

$$\eta_t + F(u_x + h_x) + \epsilon F u \eta_x = 0$$

$$F u_t + F^2 u_x + \eta_x = 0$$

2. Kondisi awal yang digunakan adalah $\eta(x, 0) = 0$ dan $u(x, 0) = \frac{1}{\epsilon}$.
3. Kondisi batas yang digunakan adalah $\eta(0, t) = 0$, $\eta(60, t) = 0$, $u(0, t) = 0$, dan $u(60, t) = 0$.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *study literature*, yakni dengan menelaah beberapa literatur berupa buku, jurnal, dan referensi lain yang bersangkutan. Kemudian melakukan penelitian untuk memperoleh data dan informasi-informasi yang dibutuhkan dalam pembahasan masalah tersebut. Secara umum langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai

berikut:

1. Menjabarkan deret Taylor hingga orde 2.
2. Mencari turunan pertama dan turunan kedua pada persamaan *Boussinesq*.
3. Mensubstitusikan hasil turunan pertama dan hasil turunan kedua ke dalam deret Taylor.
4. Mendiskritkan hasil substitusi dengan metode beda hingga pusat terhadap ruang.
5. Menentukan orde *error*.
6. Mensimulasikan persamaan *Boussinesq* dengan menggunakan bantuan program MATLAB.
7. Menginterpretasikan hasil solusi numerik persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff*.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah menggunakan sistematika penulisan yang dibagi ke dalam empat bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dijelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan terkait dengan penelitian yaitu mengenai, deret Taylor, metode *Lax-Wendroff*, persamaan *Boussinesq*, dan orde *error*.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dijabarkan tentang bagaimana analisis numerik pada persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff*, orde *error*, juga simulasi dan interpretasi hasil.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dikemukakan kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan dan penelitian yang telah dilakukan.



BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Metode Lax-Wendroff

2.1.1 Deret Taylor

Purcell & Varberg (1987:56) menyatakan bahwa deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Persamaan deret Taylor berasal dari deret pangkat dalam x , di mana bentuk umumnya adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

Bentuk umum deret pangkat dalam x juga berlaku pada deret pangkat dalam $x - a$, sehingga menjadi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 (x - a)^0 + c_1 (x - a)^1 + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + c_4 (x - a)^4 + \dots$$

Misalkan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = f(x)$ maka

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + c_4(x - a)^4 + \dots$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2! c_2 + 3! c_3(x - a) + 4.3c_4(x - a)^2 \dots$$

$$f'''(x) = 3! c_3 + 4! c_4(x - a) + \dots$$

apabila $x = a$ maka

$$f(a) = c_0$$

$$f'(a) = c_1$$

$$\frac{f''(a)}{2!} = c_2$$

$$\frac{f'''(a)}{3!} = c_3$$

⋮

$$\frac{f^n(a)}{n!} = c_n$$

dengan memasukkan nilai c_0, c_1, c_2, c_3 dan seterusnya, maka deret Taylor pun terbukti:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

(Purcell & Varberg, 1987:56)

2.1.2 Metode Lax-Wendroff

Lax Wendroff diambil dari nama Peter Lax dan Burton Wendroff, yang mendasari metode ini adalah mengekspansikan $\eta(x, t)$ ke dalam deret Taylor untuk x tetap dan t berada pada orde dua menggunakan PDP untuk menggantikan turunan waktu dengan turunan ruang, dan menggunakan beda tengah untuk mengaproksimasikan turunan ruang pada orde dua. Persamaan beda hingga kemudian menghasilkan akurasi orde dua, lihat Jamhuri (2013). Pada metode ini digunakan hampiran sebagai berikut:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt} \Big|_j^n \quad (2.1)$$

karena

$$\eta_t = -Fu_x - \epsilon Fu \eta_x - Fh_x \quad (2.2)$$

maka

$$\begin{aligned} \eta_{tt} = & F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + \epsilon F^2 u_x \eta_x + \epsilon (\eta_x)^2 + \epsilon F^2 u u_{xx} + \epsilon^2 F^2 u u_x \eta_x \\ & + \epsilon^2 F^2 u^2 \eta_{xx} + \epsilon F^2 u h_{xx} \end{aligned} \quad (2.3)$$

kemudian substitusikan persamaan (2.2) dan persamaan (2.3) ke dalam persamaan (2.1) diperoleh:

$$\begin{aligned} \eta^{n+1} = & \eta^n + \Delta t [-F u_x - \epsilon F u \eta_x - F h_x] + \frac{\Delta t^2}{2} [F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + \epsilon F^2 u_x \eta_x \\ & + \epsilon (\eta_x)^2 + \epsilon F^2 u u_{xx} + \epsilon^2 F^2 u u_x \eta_x + \epsilon^2 F^2 u^2 \eta_{xx} + \epsilon F^2 u h_{xx}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

aproksimasi u_x , u_{xx} , η_x dan η_{xx} pada persamaan (2.4) dengan beda pusat, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \eta^{n+1} = & \eta^n - \frac{\Delta t F}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t \epsilon F}{2 \Delta x} u_j^n (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) - \Delta t F h_x + \\ & \frac{\Delta t^2 F^2}{2 \Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u \eta_{j-1}^n) + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{8 \Delta x^2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8 \Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n)^2 + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2 \Delta x^2} u_j^n (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{8 \Delta x^2} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ & (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{2 \Delta x^2} (u_j^n)^2 (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u \eta_{j-1}^n) + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2 Persamaan Boussinesq

Model gelombang nonlinear pertama kali diteliti oleh *John Scott R* pada tahun 1834 secara eksperimental. Beberapa tahun kemudian *Boussinesq* berhasil menurunkan secara matematis persamaan gelombang yang diteliti *John Scott R*.

Persamaan *Boussinesq* dapat menjelaskan nonlinearitas dan *dispersivitas* gelombang, dan telah memberikan penjelasan yang cukup akurat terhadap fenomena transformasi gelombang di daerah pantai, termasuk transfer energinya (Patiroi, dkk, 2010:4).

Menurut Djohan (1997) Persamaan *Boussinesq* merupakan model bagi persamaan gelombang air dua arah di atas dasar tak rata. Di atas dasar rata, persamaan *Boussinesq* mempunyai solusi gelombang berjalan periodik, yaitu gelombang yang menjalar tanpa berubah bentuk dan kecepatan, yang disebut gelombang Cnoidal.

2.2.1 Penurunan Persamaan *Boussinesq*

Pada skripsi sebelumnya yang dikaji oleh Sukron (2014) telah menjelaskan bagaimana penurunan persamaan *Boussinesq* pada aliran gelombang yang melalui sebuah gundukan. Sebelumnya telah diperoleh

- a. Persamaan kontinuitas yang menghasilkan persamaan *Laplace*,

$$\bar{\Phi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\Phi}_{\bar{y}\bar{y}} = 0 \quad (2.6)$$

- b. Persamaan momentum yang memperoleh kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida,

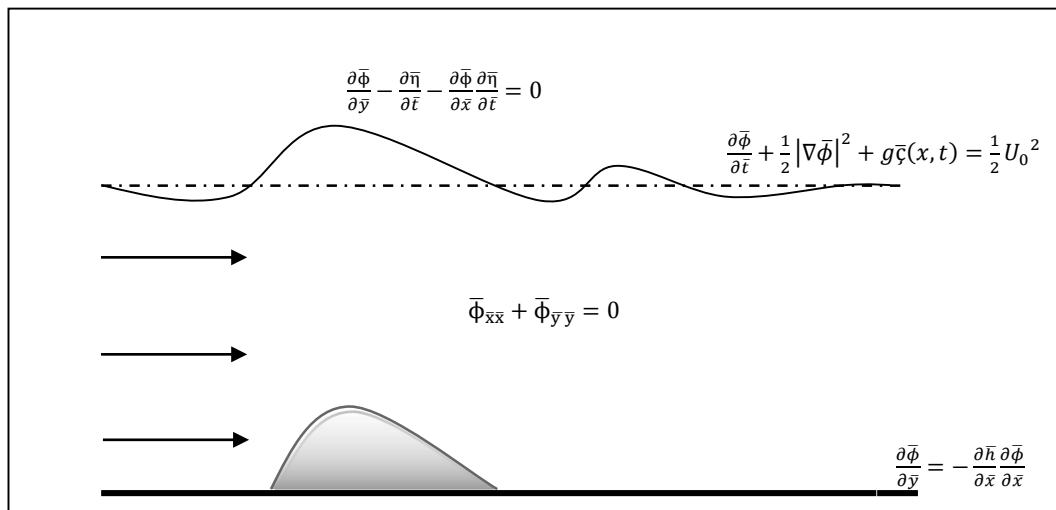
$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} |\nabla \bar{\Phi}|^2 + g \bar{\eta}(x, t) = \frac{1}{2} U_0^2 \quad (2.8)$$

- c. Kondisi batas kinematik dasar fluida.

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} \quad (2.9)$$

Sehingga dapat ditunjukkan dengan Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1: Sketsa aliran gelombang dengan kondisi batas

Di mana nantinya pada persamaan-persamaan yang diperoleh di atas dilakukan penskalaan, ekspansi dengan deret, peninjauan tiap-tiap orde pada deret, dan hasilnya dibawa ke dalam model matematika yaitu gelombang permukaan (Sukron, 2014:24).

2.2.1.1 Penskalaan

Skala digunakan untuk membandingkan antara keadaan nyata dengan model atau gambaran dan penskalaan digunakan untuk mengubah ukuran baik memperbesar atau mengecilkan. Sebagai contohnya, ketika dalam menggambar sebuah gedung maka cukup sulit apabila menggambar sesuai dengan keadaan aslinya, sehingga terlebih dahulu dilakukan penskalaan. Begitu juga model gelombang soliter, sehingga sebelum diperoleh modelnya terlebih dahulu dilakukan penskalaan terhadap persamaan *Laplace* beserta kondisi batas pada permukaan fluida dan kondisi batas pada dasar fluida.

Suatu saluran fluida yang memiliki panjang gelombang λ jauh lebih besar dibanding dengan kedalamannya h_0 , sehingga dapat didefinisikan sebuah

parameter yang sangat kecil μ sebagai $\mu\lambda = \frac{h_0}{\lambda}$ serta memiliki amplitudo yang kecil yaitu a .

Skala-skala yang digunakan di antaranya:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{\lambda} & t &= \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \bar{t} \\ y &= \frac{\bar{y}}{h_0} & \phi(x, y, t) &= \frac{h_0}{\lambda a U_0} \bar{\phi}(x, y, t) \\ h &= \frac{\bar{h}}{a} & \eta(x, t) &= \frac{\bar{\eta}(x, t)}{a} \end{aligned}$$

Selanjutnya dari skala-skala tersebut nantinya akan disubstitusikan kedalam persamaan (2.6), persamaan (2.7), persamaan (2.8) dan persamaan (2.9).

Pertama, dilakukan penskalaan variabel pada persamaan (2.6).

Skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi$, $\phi = \frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi$, dan $\bar{x} = x\lambda$ disubstitusikan ke dalam

$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2}$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

dengan $\phi = \frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi$ sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda U_0 \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \frac{\lambda a U_0}{h_0} \Phi \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\lambda} \right) \\ &= \left(\lambda U_0 + \frac{\lambda a U_0}{h_0} \Phi_x \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$= U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \quad (2.10)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\lambda} \right) \\ &= \left(0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_{xx} \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{aU_0}{\lambda h_0} \Phi_{xx} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi$, $\phi = \frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi$, dan $\bar{y} = y h_0$ disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2}$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{y}}{h_0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{y}}{h_0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda U_0 \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \frac{\lambda a U_0}{h_0} \Phi \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{y}}{h_0} \right) \\ &= \left(0 + \frac{\lambda a U_0}{h_0} \Phi_y \right) \left(\frac{1}{h_0} \right) \\ &= \frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_y \end{aligned} \quad (2.12)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_y \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{y}}{h_0} \right) \\
 &= \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_{yy} \right) \left(\frac{1}{h_0} \right) \\
 &= \frac{\lambda a U_0}{h_0^3} \Phi_{yy}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.11) dan persamaan (2.13) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.6), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} &= 0 \\
 \frac{a U_0}{\lambda h_0} \Phi_{xx} + \frac{\lambda a U_0}{h_0^3} \Phi_{yy} &= 0
 \end{aligned}$$

Dengan dikali dengan $\frac{h_0}{a U_0}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} \Phi_{xx} + \frac{\lambda}{h_0^2} \Phi_{yy} &= 0 \\
 \frac{h_0^2 \Phi_{xx} + \lambda^2 \Phi_{yy}}{\lambda h_0^2} &= 0
 \end{aligned}$$

$$h_0^2 \Phi_{xx} + \lambda^2 \Phi_{yy} = 0$$

$$\frac{h_0^2}{\lambda^2} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{2.14}$$

di mana $\frac{h_0}{\lambda} = \mu$, sehingga $\frac{h_0^2}{\lambda^2} = \mu^2$, maka persamaan (2.14) menjadi:

$$\mu^2 \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{2.15}$$

Kedua, dilakukan penskalaan pada persamaan (2.7):

Skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi$, $\phi = \frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi$, $\bar{x} = x\lambda$ dan $\bar{y} = yh_0$ disubstitusikan

ke dalam $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh persamaan (2.10) dan $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}$ diperoleh persamaan (2.12).

Selanjutnya skala $\bar{\eta} = a\eta$, dan $\bar{x} = x\lambda$ disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (a\eta) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\lambda} \right) \\ &= (a\eta_x) \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{a}{\lambda} \eta_x \end{aligned} \quad (2.16)$$

dengan skala $\bar{\eta} = a\eta$, dan $\bar{t} = \frac{t\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}}$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (a\eta) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\bar{t} \sqrt{gh_0}}{\lambda} \right) \\ &= (a\eta_t) \left(\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \right) \\ &= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda} \eta_t \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dari persamaan (2.10), (2.12), (2.16), dan (2.17) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.7), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_y &= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda} \eta_t + \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right) \left(\frac{a}{\lambda} \eta_x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda} \eta_t + \frac{a}{\lambda} \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right) \eta_x \\
&= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda} \eta_t + \frac{a}{\lambda} U_0 \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) \eta_x
\end{aligned}$$

Selanjutnya dikalikan dengan $\frac{1}{U_0}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda a}{h_0^2} \Phi_y &= \frac{a\sqrt{gh_0}}{\lambda U_0} \eta_t + \frac{a}{\lambda} \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) \eta_x \\
\Phi_y &= \frac{h_0^2 \sqrt{gh_0}}{\lambda^2 U_0} \eta_t + \frac{h_0^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) \eta_x
\end{aligned}$$

Dengan dikalikan $\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}$, maka diperoleh

$$\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} \Phi_y = \frac{h_0^2}{\lambda^2} \eta_t + \frac{h_0^2 U_0}{\lambda^2 \sqrt{gh_0}} \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) \eta_x \quad (2.18)$$

di mana $\frac{h_0}{\lambda} = \mu$, sehingga $\frac{h_0^2}{\lambda^2} = \mu^2$, $\frac{a}{h_0} = \epsilon$ dan $\frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} = F$, maka persamaan (2.18)

menjadi:

$$F \Phi_y = \mu^2 \eta_t + \mu^2 F \left(1 + \epsilon \Phi_x \right) \eta_x \quad (2.19)$$

Ketiga, dilakukan penskalaan pada persamaan (2.8):

Skala yang digunakan $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi$, $\phi = \frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi$, $\bar{x} = x\lambda$ dan $\bar{y} = yh_0$

disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh persamaan (2.10) dan $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}$ diperoleh persamaan

(2.12). Sehingga dari persamaan (2.10) maka untuk $\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 &= \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right)^2 \\
&= \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right) \left(U_0 + \frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right)
\end{aligned}$$

$$= U_0^2 + 2 \frac{aU_0^2}{h_0} \Phi_x + \left(\frac{aU_0}{h_0} \Phi_x \right)^2 \quad (2.20)$$

Dari persamaan (2.12) diperoleh $\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \right)^2$

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \right)^2 = \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_y \right)^2 \quad (2.21)$$

Selanjutnya skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi$, $\phi = \frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi$, dan $\bar{t} = \frac{t\lambda}{\sqrt{gh_0}}$

disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0} \phi \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\bar{t} \sqrt{gh_0}}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{a} \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \Phi \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\bar{t} \sqrt{gh_0}}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda U_0 \left(x - \frac{Ft}{2} \right) + \frac{\lambda a U_0}{h_0} \Phi \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\bar{t} \sqrt{gh_0}}{\lambda} \right) \\ &= \left(-\frac{\lambda U_0 F}{2} + \frac{\lambda a U_0}{h_0} \Phi_t \right) \left(\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \right) \\ &= -\frac{U_0 F \sqrt{gh_0}}{2} + \frac{a U_0 \sqrt{gh_0}}{h_0} \Phi_t \end{aligned} \quad (2.22)$$

Persamaan (2.20), (2.21), (2.22) dan $\bar{\eta} = a\eta$ disubstitusikan ke dalam persamaan

(2.8) diperoleh

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{U_0 F \sqrt{gh_0}}{2} + \frac{a U_0 \sqrt{gh_0}}{h_0} \Phi_t \right) + \frac{1}{2} \left(U_0^2 + 2 \frac{a U_0^2}{h_0} \Phi_x + \left(\frac{a U_0}{h_0} \Phi_x \right)^2 + \left(\frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_y \right)^2 \right) \\ &+ g a \eta = \frac{1}{2} U_0^2 \end{aligned}$$

karena $F = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}$, sehingga

$$\left(-\frac{U_0^2}{2} + \frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right) + \frac{1}{2}\left(U_0^2 + 2\frac{aU_0^2}{h_0}\Phi_x + \left(\frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2 + \left(\frac{\lambda aU_0}{h_0^2}\Phi_y\right)^2\right) + ga\eta = \frac{1}{2}U_0^2$$

dengan ruas kanan dan kiri ditambahkan dengan $\frac{U_0^2}{2}$, sehingga menjadi

$$\left(\frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right) + \frac{1}{2}\left(U_0^2 + 2\frac{aU_0^2}{h_0}\Phi_x + \left(\frac{aU_0}{h_0}\Phi_x\right)^2 + \left(\frac{\lambda aU_0}{h_0^2}\Phi_y\right)^2\right) + ga\eta = U_0^2$$

atau

$$\left(\frac{aU_0\sqrt{gh_0}}{h_0}\Phi_t\right) + \frac{1}{2}U_0^2\left(1 + 2\frac{a}{h_0}\Phi_x + \left(\frac{a}{h_0}\Phi_x\right)^2 + \left(\frac{\lambda a}{h_0^2}\Phi_y\right)^2\right) + ga\eta = U_0^2$$

selanjutnya dikalikan dengan $\frac{1}{gh_0}$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{aU_0}{h_0\sqrt{gh_0}}\Phi_t\right) + \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{gh_0}\left(1 + 2\frac{a}{h_0}\Phi_x + \left(\frac{a}{h_0}\Phi_x\right)^2 + \left(\frac{\lambda a}{h_0^2}\Phi_y\right)^2\right) + \frac{a\eta}{h_0} = U_0^2$$

di mana $\frac{a}{h_0} = \epsilon$, sehingga:

$$\epsilon F\Phi_t + \frac{1}{2}F^2\left(1 + 2\epsilon\Phi_x + \epsilon^2\Phi_x^2 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2}\Phi_y^2\right) + \epsilon\eta = U_0^2 \quad (2.23)$$

dengan kecepatan awalnya $U_0 = 0$, sehingga diperoleh:

$$\epsilon F\Phi_t + \frac{1}{2}F^2\left(1 + 2\epsilon\Phi_x + \epsilon^2\Phi_x^2 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2}\Phi_y^2\right) + \epsilon\eta = 0 \quad (2.24)$$

Keempat, dilakukan penskalaan variabel pada persamaan (2.9) sehingga dengan

skala-skala $\bar{\phi} = \frac{\lambda a U_0}{h_0}\phi$, $\phi = \frac{h_0}{a}\left(x - \frac{Ft}{2}\right) + \Phi$, $\bar{y} = yh_0$ dan $\bar{x} = x\lambda$ disubstitusikan

ke dalam $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh persamaan (2.10) dan $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}$ diperoleh persamaan (2.12).

Selanjutnya skala-skala $h = \frac{\bar{h}}{a}$, dan $x = \frac{\bar{x}}{\lambda}$, disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (ah) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\lambda} \right) \\
&= (ah_x) \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\
&= \left(\frac{a}{\lambda} h_x \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Persamaan (2.10), (2.12), dan (2.25) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.9), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda a U_0}{h_0^2} \Phi_y &= - \left(U_0 + \frac{a U_0}{h_0} \Phi_x \right) \left(\frac{a}{\lambda} h_x \right) \\
&= - \frac{a}{\lambda} \left(U_0 + \frac{a U_0}{h_0} \Phi_x \right) h_x \\
&= - \frac{a U_0}{\lambda} \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) h_x
\end{aligned}$$

dengan dikalikan $\frac{1}{U_0}$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda a}{h_0^2} \Phi_y &= - \frac{a}{\lambda} \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) h_x \\
\Phi_y &= - \frac{h_0^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{a}{h_0} \Phi_x \right) h_x
\end{aligned} \tag{2.26}$$

di mana $\frac{h_0}{\lambda} = \mu$, sehingga $\frac{h_0^2}{\lambda^2} = \mu^2$, dan $\frac{a}{h_0} = \epsilon$, maka persamaan (2.26) menjadi:

$$\Phi_y = -\mu^2 (1 + \epsilon \Phi_x) h_x \tag{2.27}$$

2.2.1.2 Aproksimasi Variabel yang Digunakan

Langkah berikutnya yaitu menentukan nilai Φ dari persamaan (2.15) dan persamaan (2.26) dengan fungsi potensial yang diekspresikan sebagai deret, sebagaimana menurut L.H. Wiryanto (2010) yaitu sebagai berikut:

$$\Phi = \Phi_0 + \mu^2 \Phi_1 + \mu^4 \Phi_2 + \dots \quad (2.28)$$

selanjutnya disubstitusikan persamaan (2.28) ke persamaan (2.15) dan (2.27), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} & \mu^2 \left[(\Phi_0)_{xx} + \mu^2 (\Phi_1)_{xx} + \mu^4 (\Phi_2)_{xx} + \dots \right] + \left[(\Phi_0)_{yy} + \mu^2 (\Phi_1)_{yy} \right. \\ & \left. + \mu^4 (\Phi_2)_{yy} + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

dan

$$\begin{aligned} & \mu^2 h_x + \mu^2 \epsilon \left[(\Phi_0)_x + \mu^2 (\Phi_1)_x + \mu^4 (\Phi_2)_x + \dots \right] h_x + \left[(\Phi_0)_y + \mu^2 \right. \\ & \left. (\Phi_1)_y + \mu^4 (\Phi_2)_y + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

persamaan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$(\Phi_0)_{yy} + \mu^2 \left[(\Phi_0)_{xx} + (\Phi_1)_{yy} \right] + \mu^4 \left[(\Phi_1)_{xx} + (\Phi_2)_{yy} \right] + \dots = 0 \quad (2.31)$$

dan

$$\begin{aligned} & (\Phi_0)_y + \mu^2 \left[(\Phi_1)_y + \left(1 + \epsilon (\Phi_0)_x \right) h_x \right] + \mu^4 \left[\epsilon h_x (\Phi_1)_x + (\Phi_2)_y \right] \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sehingga untuk orde 1 diperoleh:

a. Persamaan (2.26)

$$(\Phi_0)_{yy}(x, y, t) = 0 \quad (2.33)$$

b. Kondisi batas kinematik (2.27) pada $y = -1$

$$(\Phi_0)_y(x, y, t) = 0 \quad (2.34)$$

dan orde 2 diperoleh:

a. Persamaan (2.26)

$$(\Phi_0)_{xx} + (\Phi_1)_{yy} = 0 \quad (2.35)$$

b. Kondisi batas kinematik (2.27) pada $y = -1$

$$(\Phi_1)_y + h_x = 0 \quad (2.36)$$

Sehingga untuk solusi dari orde 1, langkah pertama yaitu dari persamaan (2.28) diintegrasikan terhadap y sehingga diperoleh:

$$\int (\Phi_0)_{yy}(x, y, t) dy = \int 0 dy$$

$$(\Phi_0)_y(x, y, t) = C \quad (2.37)$$

dengan C merupakan konstanta terhadap y yang dapat dituliskan sebagai $C(x, t)$.

dengan kondisi batas di $y = -1$

$$(\Phi_0)_y(x, -1, t) = 0$$

Jika disubstitusikan pada persamaan (2.37) diperoleh

$$(\Phi_0)_y(x, -1, t) = C(x, t)$$

Berakibat nilai $C(x, t) = 0$, sehingga persamaan (2.37) menjadi

$$(\Phi_0)_y(x, y, t) = 0$$

Selanjutnya $(\Phi_0)_y(x, y, t) = 0$ diintegrasikan kembali terhadap y , sehingga

$$\int (\Phi_0)_y(x, y, t) dy = \int 0 dy$$

$$\Phi_0(x, y, t) = A(x, t) \quad (2.38)$$

Dari orde 2 diperoleh:

$$(\Phi_0)_{xx} + (\Phi_1)_{yy} = 0$$

atau

$$(\Phi_1)_{yy}(x, y, t) = -(\Phi_0)_{xx}(x, y, t) \quad (2.39)$$

Dari persamaan (2.33) dapat diketahui bahwa

$$(\Phi_0)_{xx}(x, y, t) = A_{xx}(x, t)$$

sehingga berakibat pada persamaan (2.34) menjadi:

$$\begin{aligned} (\Phi_1)_{yy}(x, y, t) &= -A_{xx}(x, t) \\ \int (\Phi_1)_{yy}(x, y, t) dy &= \int -A_{xx}(x, t) dy \\ (\Phi_1)_y(x, y, t) &= -A_{xx}(x, t)y + B \end{aligned} \quad (2.40)$$

di mana B merupakan konstanta pengintegralan terhadap y yang dapat dituliskan $B(x, t)$.

Dari persamaan (2.36) diperoleh:

$$(\Phi_1)_y(x, -1, t) = -h_x$$

Sehingga persamaan (2.40) diperoleh:

$$\begin{aligned} -A_{xx}(x, t)(-1) + B(x, t) &= (\Phi_1)_y(x, -1, t) \\ A_{xx}(x, t) + B(x, t) &= -h_x \\ B(x, t) &= -A_{xx}(x, t) - h_x \end{aligned} \quad (2.41)$$

sehingga persamaan (2.41), maka persamaan (2.40) menjadi:

$$(\Phi_1)_y(x, y, t) = -A_{xx}(x, t)y - A_{xx}(x, t) - h_x \quad (2.42)$$

Selanjutnya untuk mencari Φ_1 , maka diintegrasikan kembali, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int (\Phi_1)_y(x, y, t) dy &= \int -A_{xx}(x, t)y - A_{xx}(x, t) - h_x dy \\ \Phi_1(x, y, t) &= -\frac{1}{2}A_{xx}(x, t)y^2 - A_{xx}(x, t)y - h_x y + B \\ &= -A_{xx}(x, t) \left(\frac{1}{2}y^2 + y \right) - h_x y + B \end{aligned}$$

$$= -A_{xx}(x, t) \left(\frac{y^2 + 2y}{2} \right) - h_x y + B$$

di mana B merupakan konstanta pengintegralan terhadap y yang dapat dituliskan $B(x, t)$.

Dengan manipulasi aljabar sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, t) &= -\frac{1}{2}(y^2 + 2y + 1)A_{xx}(x, t) - h_x y \\ &\quad + \left\{ B(x, t) + \frac{1}{2}A_{xx}(x, t) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}(y^2 + 2y + 1)A_{xx}(x, t) - h_x y + F(x, t) \\ &= -A_{xx}(x, t) \frac{(y + 1)^2}{2} - h_x y + F(x, t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Selanjutnya persamaan (2.38) dan (2.43) disubstitusikan pada persamaan (2.29), sehingga $\Phi(x, y, t)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= A(x, t) + \mu^2 \left[-A_{xx}(x, t) \frac{(y + 1)^2}{2} - h_x y + F(x, t) \right] \\ &\quad + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Karena tujuannya adalah mencari model gelombang permukaan, sehingga langkah selanjutnya yaitu dari persamaan (2.44) disubstitusikan pada kondisi batas permukaan fluida yaitu persamaan (2.19) dan (2.24). Di mana dari persamaan (2.44) diperoleh nilai dari $\Phi_x(x, y, t)$ sebagai berikut

$$\Phi_x(x, y, t) = A_x + \mu^2 \left[-A_{xxx} \frac{(y + 1)^2}{2} - h_{xx} y + F_x \right]$$

sehingga jika $y = 0$ maka menjadi

$$\Phi_x(x, 0, t) = A_x + \mu^2 \left[-\frac{1}{2}A_{xxx} + F_x \right]$$

Dari persamaan (2.44) diperoleh $\Phi_y(x, y, t)$ sebagai berikut

$$\Phi_y(x, y, t) = \mu^2[-A_{xx}(y + 1) - h_x]$$

sehingga jika $y = 0$ maka menjadi

$$\Phi_y(x, 0, t) = \mu^2[-A_{xx} - h_x]$$

Dari persamaan (2.44) juga diperoleh $\Phi_t(x, y, t)$ sebagai berikut

$$\Phi_t(x, y, t) = A_t + \mu^2 \left[-A_{xxt} \frac{(y + 1)^2}{2} + F_t \right]$$

sehingga persamaan (2.19) menjadi:

$$F\mu^2[-A_{xx} - h_x] = \mu^2\eta_t + \mu^2 F \left(1 + \epsilon A_x + \epsilon\mu^2 \left[-\frac{1}{2}A_{xxx} + F_x \right] \right) \eta_x$$

atau

$$F[-A_{xx} - h_x] = \eta_t + F \left(1 + \epsilon A_x + \epsilon\mu^2 \left[-\frac{1}{2}A_{xxx} + F_x \right] \right) \eta_x$$

dengan asumsi bahwa $\epsilon = \mu^2$, sehingga persamaan di atas menjadi:

$$F[-A_{xx} - h_x] = \eta_t + F \left(1 + \epsilon A_x + \epsilon^2 \left[-\frac{1}{2}A_{xxx} + F_x \right] \right) \eta_x$$

Jika persamaan di atas diambil sampai orde ϵ saja, maka diperoleh:

$$F[-A_{xx} - h_x] = \eta_t + F(1 + \epsilon A_x) \eta_x$$

$$\eta_t + F[A_{xx} + h_x] + F\eta_x + \epsilon F A_x \eta_x = 0$$

(2.45)

Selanjutnya persamaan (2.24) menjadi:

$$\epsilon F \Phi_t + \frac{1}{2} F^2 \left(1 + 2\epsilon \Phi_x + \epsilon^2 \Phi_x^2 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2} \Phi_y^2 \right) + \epsilon \eta = 0$$

$$\epsilon F \left(A_t + \mu^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} + F_t \right] \right) + \frac{1}{2} F^2 \left(1 + 2\epsilon \left(A_x + \mu^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} + F_x \right] \right) \right)$$

$$+ \epsilon^2 \left(A_x + \mu^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} + F_x \right] \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2} (\mu^2[-A_{xx} - h_x])^2 + \epsilon \eta = 0$$

Karena $\epsilon = \mu^2$, sehingga

$$\begin{aligned} & \epsilon F \left(A_t + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} + F_t \right] \right) + \frac{1}{2} F^2 \left(1 + 2\epsilon \left(A_x + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} + F_x \right] \right) \right) \\ & + \epsilon^2 \left(A_x + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} + F_x \right] \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon} (\epsilon[-A_{xx} - h_x])^2 + \epsilon \eta = 0 \end{aligned}$$

Persamaan di atas diambil sampai dengan orde ϵ , maka diperoleh

$$\epsilon F(A_t) + \frac{1}{2} F^2(1 + 2\epsilon(A_x)) + \epsilon \eta = 0$$

atau dapat disederhanakan menjadi η

$$\epsilon F A_t + \epsilon F^2 A_x + \epsilon \eta + \frac{1}{2} F^2 = 0$$

$$\epsilon(F A_t + F^2 A_x + \eta) + \frac{1}{2} F^2 = 0 \quad (2.46)$$

Dengan didefinisikan bahwa kecepatan rata-rata adalah

$$u(x, t) = \frac{1}{\epsilon \eta + 1 + \epsilon h} \int_{-(1+\epsilon h)}^{\epsilon \eta} \phi_x dy \approx \frac{1}{\epsilon} + A_x \quad (2.47)$$

sehingga dari persamaan (2.47) maka diperoleh

$$u = \frac{1}{\epsilon} + A_x$$

$$A_x = u - \frac{1}{\epsilon}$$

$$A_{xx} = u_x$$

sehingga persamaan (2.45) menjadi:

$$\eta_t + F[u_x + h_x] + F\eta_x + \epsilon F \left(u - \frac{1}{\epsilon} \right) \eta_x = 0$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\eta_t + F u_x + F h_x + F \eta_x + \epsilon F u \eta_x - F \eta_x = 0$$

sehingga persamaan (2.45) diperoleh bentuk sederhana sebagai berikut:

$$\eta_t + Fu_x + Fh_x + \epsilon Fun_x = 0 \quad (2.48)$$

Selanjutnya untuk persamaan (2.46) mempunyai variabel A_t , sehingga terlebih dahulu untuk mencari nilai dari A , yaitu bahwasanya dari persamaan (2.47) diperoleh

$$u = \frac{1}{\epsilon} + A_x$$

$$A_x = u - \frac{1}{\epsilon}$$

sehingga untuk mencari nilai A , maka diintegrasikan terhadap x , sehingga diperoleh

$$\int A_x dx = \int u - \frac{1}{\epsilon} dx$$

$$A = \int u dx - \frac{1}{\epsilon} x$$

sehingga dengan demikian A_t diperoleh

$$A_t = \int u_t dx$$

sehingga persamaan (2.46) menjadi

$$\epsilon \left(F \int u_t dx + F^2 \left(u - \frac{1}{\epsilon} \right) + \eta \right) + \frac{1}{2} F^2 = 0$$

atau

$$\epsilon \left(F \int u_t dx + F^2 u - F^2 \frac{1}{\epsilon} + \eta \right) + \frac{1}{2} F^2 = 0$$

sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$F \int u_t dx + F^2 u - F^2 \frac{1}{\epsilon} + \eta + \frac{1}{2\epsilon} F^2 = 0$$

$$F \int u_t dx + F^2 u + \eta - \frac{1}{2\epsilon} F^2 = 0$$

sehingga untuk menghilangkan integral terhadap x , maka diturunkan terhadap x ,

sehingga diperoleh

$$Fu_t + F^2u_x + \eta_x = 0 \quad (2.49)$$

sehingga dari (2.48) dan (2.49) diperoleh sistem persamaan differensial parsial sebagai berikut:

$$\eta_t + F(u_x + h_x) + \epsilon Fu\eta_x = 0 \quad (2.50)$$

$$Fu_t + F^2u_x + \eta_x = 0$$

Persamaan (2.50) merupakan model persamaan *Boussinesq* untuk gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan di mana $\eta(x, t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x, t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, h_x adalah representasi dari gundukan pada dasar saluran, F adalah *froud number*, dan ϵ adalah perbandingan dari amplitudo gelombang dengan kedalaman aliran.

Untuk mencari solusi dari persamaan (2.50) dibutuhkan kondisi awal η dan u . Dengan diberikan $\eta(x, 0) = 0$ yang menggambarkan bahwa pada saat permulaan belum terjadi gelombang. Selanjutnya akan dicari $u(x, 0)$ dengan memberikan suatu fungsi $z = x - ct$ yang disubstitusikan dalam persamaan (2.50) sehingga

$$Fu_t + F^2u_x + \eta_x = 0$$

$$Fu_t + F^2u_x = -\eta_x$$

$$u_t + Fu_x = -\frac{1}{F} \eta_x$$

karena

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= u_z(-c)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= u_z(1)$$

dan

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \eta_z(1)$$

sehingga diperoleh

$$u_z(-c) + Fu_z = -\frac{1}{F} \eta_z \quad (2.51)$$

$$(F - c)u_z = -\frac{1}{F} \eta_z$$

Maka dari persamaan (2.51) diperoleh

$$u_z = -\frac{1}{F(F - c)} \eta_z$$

Untuk memperoleh u maka diintegrasikan terhadap z , menjadi

$$\int u_z dz = -\int \frac{1}{F(F - c)} \eta_z dz$$

$$u = -\frac{1}{F(F - c)} \eta + C \quad (2.52)$$

sehingga persamaan (2.47) dan persamaan (2.52) pada $t = 0$ diperoleh

$$u(x, 0) = u(x, 0)$$

$$\frac{1}{\epsilon} + A_x(x, 0) \approx -\frac{1}{F(F - c)} \eta(x, 0) + C \quad (2.48)$$

sehingga nilai C pada persamaan (2.53) dapat diperoleh dari

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} A_x(x, 0) + \frac{1}{\epsilon} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{F(F - c)} \eta(x, 0) + C$$

$$0 + \frac{1}{\epsilon} \approx 0 + C$$

sehingga

$$u(x, 0) = u(x, 0)$$

$$C = \frac{1}{\epsilon}$$

$$u(x, 0) = C = \frac{1}{\epsilon}$$

sehingga diperoleh kondisi awal $\eta(x, 0) = 0$ dan $u(x, 0) = \frac{1}{\epsilon}$.

2.3 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan metode yang sangat umum dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Adapun operator metode beda hingga menurut Strauss (1992) yaitu

persamaan beda maju

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (2.54)$$

persamaan beda mundur

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.55)$$

persamaan beda pusat

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.56)$$

Persamaan (2.54), (2.55), dan (2.56) dapat diperoleh dari ekspansi deret Taylor, misalkan diberikan fungsi $u(x + \Delta x, t)$, $u(x - \Delta x, t)$, $u(x, t + \Delta t)$, $u(x, t - \Delta t)$ diaproksimasikan ke dalam deret Taylor di sekitar (x, t) sebagai berikut:

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.57)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \\
&\quad \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t - \Delta t) &= u(x, t) - u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 - \\
&\quad \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda maju, beda mundur dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.57), (2.58), (2.59) dan (2.60) yang dipotong sampai orde tertentu. Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.57) dengan persamaan (2.58), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2u_x(x, t)\Delta x - \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \\
2\Delta x u_x(x, t) &= u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \\
u_x(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Sedangkan turunan hampiran pertama terhadap t untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.59) dengan persamaan (2.60), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) &= 2u_t(x, t)\Delta t - \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \\
2\Delta t u_t(x, t) &= u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t)^3 \\
u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)^3
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.61) dan (2.62) dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

Adapun aproksimasi turunan kedua terhadap x untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.57) dengan persamaan (2.58), sehingga diperoleh

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) - 2\frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \dots$$

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) - u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + O(\Delta x)^4$$

$$u_{xx}(x, t)\Delta x^2 = u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^4$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^4 \quad (2.63)$$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.63) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.64)$$

2.4 Orde Error

Menurut Munir (2008), secara umum terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan numerik, di antaranya:

1. Galat pemotongan (*truncation error*)

2. Galat pembulatan (*round-off error*)

Galat pemotongan mengacu pada galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Tipe galat pemotongan bergantung pada metode komputasi yang digunakan untuk penghampiran sehingga kadang-kadang disebut galat metode.

Istilah pemotongan muncul karena banyak metode numerik yang diperoleh dengan penghampiran fungsi menggunakan deret Taylor. Karena deret Taylor merupakan deret tak hingga, maka untuk penghampiran tersebut deret *Taylor* di potong sampai suku orde tertentu saja.

Solusi kriteria konsistensi dengan sendirinya akan terpenuhi jika $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, artinya skema dikatakan konsisten terhadap PDPnya jika selisih antara persamaan tersebut dengan PDPnya (suku-suku *truncation error*) menuju nol. Kriteria kekonsistenan ini ditentukan dengan menggunakan deret Taylor. Dalam Zauderer (2006) disebutkan bahwa aproksimasi solusi pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan dan kestabilan dari skema yang diberikan terpenuhi.

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan. Untuk menyederhanakan permasalahan biasanya hanya ditunjukkan pada beberapa suku deret Taylor tersebut, sedangkan suku yang lainnya diabaikan (Triatmodjo, 2002:98).

2.5 Kajian Agama

Allah Swt. telah menurunkan surat an-Nisaa' ayat 174 dengan maksud telah datang kepada manusia dari sisi Tuhan, sesuatu bukti kebenaran yang terang. Ia menjelaskan kepada manusia hakekat yang sebenarnya dan tentang segala sesuatu yang manusia perlukan, yaitu diperkuat dengan dalil-dalil dari keterangan-keterangan yang jelas (Al-Maragi, 1993b:68). Namun pencarian bukti kebenaran ini membutuhkan suatu petunjuk dari peristiwa sebelumnya. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat Ali Imron ayat 137 yang berbunyi:

فَسِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ كَانَ عَاقِبَةُ الْمُكْذِبِينَ ﴿١٣٧﴾

Karena itu berjalanlah kamu di muka bumi dan perhatikanlah bagaimana akibat orang-orang yang mendustakan (rasul-rasul).

Berjalanlah kalian di muka bumi ini, dan renungkanlah peristiwa-peristiwa yang telah menimpa umat sebelum kalian. Jadikanlah hal tersebut sebagai pelajaran, agar kalian mendapatkan ilmu yang benar, yang didasari oleh bukti. Disitulah kalian mendapatkan petunjuk, bahwa pengaturan antara kebenaran dengan kebatilan memang telah terjadi pada umat terdahulu sebelum kalian (Al-Maragi, 1993a:131).

Ayat ini mengandung *tasyri'*, sebagaimana mengandung *wa'ad* (janji baik), *wa'id* (ancaman), *amar* (perintah) dan *nahyu* (larangan). Besar manfaatnya peneliti mempelajari buku-buku sejarah (*tarikh*) yang telah ditulis oleh mereka yang ikut menyaksikan peninggalan masa lalu, walaupun kesan yang peneliti peroleh tidak sepenuhnya sama dengan kesan yang disaksikan secara langsung (Hasbi, 2000:694).

Berjalan di muka bumi untuk menyelidiki keadaan orang-orang terdahulu guna mengetahui apa yang telah menimpa mereka, merupakan alat pembantu yang

paling baik untuk mengetahui sunnah dan mengambil pelajaran darinya. Terkadang dapat peneliti ambil juga pelajaran seperti ini dari buku-buku yang telah dicatat oleh orang-orang yang telah menyelidiki ihwal mereka. Mereka ini telah melihat langsung bekas-bekas peninggalannya, sehingga dapat dibuat pelajaran dan petuah untuk peneliti (Al-Maragi, 1993a:132).

Sejarah masa lalu merupakan pelita bagi jalan hidup generasi yang berikutnya. Sejarah umat manusia memiliki hubungan mental dan kultural satu sama lain. Perubahan yang terjadi di masa lalu memiliki refleksi terhadap apa yang terjadi pada hari ini. Pada gilirannya, apa yang terjadi hari ini memiliki efek bagi kehidupan yang akan datang (Faqih, 2006:353).

Melakukan perjalanan dengan tujuan yang jelas, dan mempelajari efek-efek yang terjadi disertai dengan suatu perenungan dapat menjadi tempat belajar yang terbaik, guru yang terbaik, dan pengalaman yang terbaik bagi umat manusia (Faqih, 2006:353).

Penuturan yang telah lalu tersebut merupakan penjelasan tentang keadaan umat manusia, sekaligus sebagai petuah dan nasehat bagi orang yang bertakwa. Petunjuk ini sifatnya umum bagi seluruh umat manusia dan merupakan *hujjah* atau bukti. Oleh karena itu, penjelasan ini berlaku bagi seluruh umat manusia, yang masing-masing dapat memahaminya sesuai dengan bakat dan pembawaan mereka dalam memahami suatu *hujjah* (Al-Maragi, 1993a:133).

Sedang penjelasan ini adalah sebagai petunjuk dan petuah yang khusus bagi orang-orang yang bertakwa, karena mereka orang yang mau mengambil petunjuk dengan kenyataan-kenyataan seperti itu. Mereka juga mau mengambilnya sebagai pelajaran dalam menghadapi kenyataan-kenyataan yang sedang mereka alami.

Berkat petunjuk ini, mereka berjalan lurus sesuai dengan metode yang benar, menjauh dari hal-hal yang mengakibatkan kelalaian yang sudah tampak jelas akibatnya, yakni membahayakan diri mereka (Al-Maragi, 1993a:133).

Allah Swt. menunjuki mereka jalan yang lempang dan petunjuk khusus yang dapat mengantar mereka kepada kebahagiaan di dunia dengan kejayaan dan kemuliaan, di samping kebahagiaan di akhirat dengan surga dan keridaan Tuhan (Al-Maragi, 1993b:70).



BAB III

PEMBAHASAN

Sistem persamaan *Boussinesq* pada persamaan (2.50) dapat dituliskan sebagai:

$$\eta_t + Fu_x + \epsilon Fu\eta_x = -Fh_x \quad (3.1)$$

$$u_t + Fu_x + \frac{1}{F} \eta_x = 0 \quad (3.2)$$

Persamaan (3.1) dan (3.2) merupakan model persamaan *Boussinesq* untuk gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan di mana $\eta(x, t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x, t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, h_x adalah representasi dari gundukan pada dasar saluran, F adalah *froud number*, dan ϵ adalah perbandingan amplitudo gelombang dengan kedalaman aliran (Sukron, 2014:38).

Penyelesaian numerik persamaan tersebut menggunakan metode *Lax-Wendroff* yaitu dengan mengekspansikan $u(x, t)$ ke dalam deret Taylor untuk x tetap dan t berada pada orde dua menggunakan PDP untuk menggantikan turunan waktu dengan turunan ruang, dan menggunakan beda tengah untuk mengaproksimasikan turunan ruang pada orde dua.

3.1 Diskritisasi

Menyelesaikan solusi numerik persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff* menggunakan deret Taylor orde-2 untuk melakukan perluasan terhadap variabel-variabel yang dicari, yaitu:

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \Delta t \eta_t |^n + \frac{\Delta t^2}{2} \eta_{tt} |^n + \dots \quad (3.3)$$

dan

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t |^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} |^n + \dots \quad (3.4)$$

Langkah pertama yang harus dilakukan yaitu mencari suku η_t , η_{tt} , u_t , dan u_{tt} dari persamaan (3.3) dan (3.4), yaitu

$$\eta_t = -Fu_x - \epsilon Fu \eta_x - Fh_x \quad (3.5)$$

$$u_t = -Fu_x - \frac{1}{F} \eta_x \quad (3.6)$$

Sedangkan turunan keduanya adalah

$$\eta_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} [-Fu_x - \epsilon Fu \eta_x - Fh_x] \quad (3.7)$$

Karena h_x hanya bergantung terhadap ruang sehingga ketika diturunkan terhadap waktu maka diperoleh

$$\eta_{tt} = -Fu_{xt} - \epsilon F[u_t \eta_x + u \eta_{xt}] \quad (3.8)$$

Selanjutnya u_{xt} dan $u \eta_{xt}$ diasosiatifkan untuk mensubstitusikan nilai u_t dan η_t

$$\eta_{tt} = -F(u_t)_x - \epsilon F \left[\left(-Fu_x - \frac{1}{F} \eta_x \right) \eta_x + u(\eta_t)_x \right] \quad (3.9)$$

mensubstitusikan nilai u_t dan η_t

$$\eta_{tt} = -F \left(-Fu_x - \frac{1}{F} \eta_x \right)_x - \epsilon F \left(-Fu_x \eta_x - \frac{1}{F} (\eta_x)^2 \right) - \epsilon Fu \left(-Fu_x - \epsilon Fu \eta_x - Fh_x \right)_x \quad (3.10)$$

Menurunkan nilai u_t dan η_t terhadap x

$$\eta_{tt} = F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + \epsilon F^2 u_x \eta_x + \epsilon (\eta_x)^2 - \epsilon Fu (-Fu_{xx} - \epsilon F(u_x \eta_x + u \eta_{xx}) - Fh_{xx}) \quad (3.11)$$

Sehingga diperoleh nilai η_{tt} ,

$$\eta_{tt} = F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + \epsilon F^2 u_x \eta_x + \epsilon (\eta_x)^2 + \epsilon F^2 u u_{xx} + \epsilon^2 F^2 u u_x \eta_x + \epsilon^2 F^2 u^2 \eta_{xx} + \epsilon F^2 u h_{xx} \quad (3.12)$$

Dan turunan kedua untuk u_{tt} adalah

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-F u_x - \frac{1}{F} \eta_x \right] \\ &= -F u_{xt} - \frac{1}{F} \eta_{xt} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Selanjutnya u_{xt} dan η_{xt} diasosiatifkan untuk mensubstitusikan nilai u_t dan η_t

$$u_{tt} = -F (u_t)_x - \frac{1}{F} (\eta_t)_x \quad (3.14)$$

mensubstitusikan nilai u_t dan η_t

$$u_{tt} = -F \left(-F u_x - \frac{1}{F} \eta_x \right)_x - \frac{1}{F} \left(-F u_x - \epsilon F u \eta_x - F h_x \right)_x \quad (3.15)$$

Menurunkan nilai u_t dan η_t terhadap x

$$u_{tt} = F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + u_{xx} + \epsilon (u_x \eta_x + u \eta_{xx}) + h_{xx} \quad (3.16)$$

Maka diperoleh nilai u_{tt} ,

$$u_{tt} = F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + u_{xx} + \epsilon u_x \eta_x + \epsilon u \eta_{xx} + h_{xx} \quad (3.17)$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \eta^{n+1} &= \eta^n + \Delta t [-F u_x - \epsilon F u \eta_x - F h_x] + \frac{\Delta t^2}{2} [F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + \\ &\quad \epsilon F^2 u_x \eta_x + \epsilon (\eta_x)^2 + \epsilon F^2 u u_{xx} + \epsilon^2 F^2 u u_x \eta_x + \\ &\quad \epsilon^2 F^2 u^2 \eta_{xx} + \epsilon F^2 u h_{xx}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t \left[-F u_x - \frac{1}{F} \eta_x \right] + \frac{\Delta t^2}{2} [F^2 u_{xx} + \eta_{xx} + u_{xx} + \\ &\quad \epsilon u_x \eta_x + \epsilon u \eta_{xx} + h_{xx}] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diskritisasi terhadap dimensi ruang- x diperoleh:

$$\begin{aligned}
\eta_j^{n+1} = & \eta_j^n - \frac{\Delta t F}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t \epsilon F}{2\Delta x} u_j^n (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) \\
& - \Delta t F h_x + \frac{\Delta t^2 F^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \\
& (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u\eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{8\Delta x^2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\
& (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8\Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n)^2 + \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2\Delta x^2} \\
& u_j^n (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{8\Delta x^2} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\
& (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{2\Delta x^2} (u_j^n)^2 (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u\eta_{j-1}^n) \\
& + \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dan

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\Delta t F}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2F\Delta x} (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) \\
& + \frac{\Delta t^2 F^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n \\
& + \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8\Delta x^2} \\
& (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon}{2\Delta x^2} u_j^n (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n \\
& + \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} h_{xx}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2 Orde Error

Orde *error* pada metode *Lax-Wendroff* dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.20) dan (3.21).

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \dots \quad (3.22)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.23)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.24)$$

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \dots \quad (3.25)$$

$$\eta_{j+1}^n = \eta_j^n + \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.26)$$

$$\eta_{j-1}^n = \eta_j^n - \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.27)$$

Selanjutnya persamaan (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), disubstitusikan ke persamaan (3.20) dengan nilai dari

$$\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n = \left(\eta_j^n + \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right) - \left(\eta_j^n - \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right)$$

$$\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n = 2\Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.28)$$

$$\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n = \left(\eta_j^n + \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right) - \left(\eta_j^n - \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right)$$

$$\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n = \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \dots \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n - u_{j-1}^n &= \left(u_j^n + \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \right) - \\
&\quad \left(u_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\
u_{j+1}^n - u_{j-1}^n &= 2\Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \tag{3.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n &= \left(u_j^n + \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad - \left(u_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\
u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n &= \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \dots \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Sehingga ketika persamaan (3.25), (3.28), (3.29), (3.30) dan (3.31) disubstitusikan

ke persamaan (3.20) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left(\eta_j^n + \Delta t \eta \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \dots \right) - \eta_j^n + \frac{\Delta t F}{2\Delta x} (2\Delta x u_x|_j^n + \\
&\frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots) + \frac{\Delta t \epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \left(2\Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right) + \Delta t F h_x - \\
&\frac{\Delta t^2 F^2}{2\Delta x^2} (\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (\Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{8\Delta x^2} (2\Delta x u_x|_j^n + \\
&\frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots) \left(2\Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8\Delta x^2} (2\Delta x \eta_x|_j^n + \\
&\frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots)^2 - \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2\Delta x^2} u_j^n (\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{8\Delta x^2} u_j^n (2\Delta x \\
&u_x|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots) \left(2\Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{2\Delta x^2} \\
&(u_j^n)^2 (\Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} = 0 \\
&\left(\eta_j^n + \Delta t \eta \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \dots \right) - \eta_j^n + \frac{\Delta t F}{2\Delta x} (2\Delta x u_x|_j^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx} \right|_j^n + \dots \Big) + \frac{\Delta t \epsilon F}{2 \Delta x} u_j^n \left(2 \Delta x \eta_x \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) + \Delta t F h_x - \\
& \frac{\Delta t^2 F^2}{2 \Delta x^2} \left(\Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} \left(\Delta x^2 \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{8 \Delta x^2} \left(4 \Delta x^2 u_x \eta_x \Big|_j^n \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \Delta x^4 u_x \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{2}{3} \Delta x^4 \eta_x u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{9} \Delta x^6 u_{xxx} \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8 \Delta x^2} \left(\Delta x^4 \right. \\
& \left. (\eta_x)^2 \Big|_j^n + \frac{2}{3} \Delta x^4 \eta_x \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{2}{3} \Delta x^4 \eta_x \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{9} \Delta x^6 (\eta_{xxx})^2 \Big|_j^n + \dots \right) - \\
& \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2 \Delta x^2} u_j^n \left(\Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{8 \Delta x^2} u_j^n \left(4 \Delta x^2 u_x \eta_x \Big|_j^n + \frac{2}{3} \Delta x^4 u_x \eta_{xxx} \Big|_j^n \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \Delta x^4 \eta_x u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{9} \Delta x^6 u_{xxx} \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{2 \Delta x^2} (u_j^n)^2 \left(\Delta x^2 \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) \\
& - \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} = 0 \\
& \left(\eta_j^n + \Delta t \eta \eta_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) - \eta^n + \Delta t F \left(u_x \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 u_{xxx} \Big|_j^n \right. \\
& \left. + \dots \right) + \Delta t \epsilon F u_j^n \left(\eta_x \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) + \Delta t F h_x - \Delta t^2 F^2 \left(\frac{1}{2} u_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) \\
& - \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon F^2 \left(\frac{1}{2} u_x \eta_x \Big|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 u_x \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \eta_x u_{xxx} \Big|_j^n \right. \\
& \left. + \frac{1}{72} u_{xxx} \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon \left(\frac{1}{2} (\eta_x)^2 \Big|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \eta_x \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \eta_x \eta_{xxx} \Big|_j^n \right. \\
& \left. + \frac{1}{72} \Delta x^4 (\eta_{xxx})^2 \Big|_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon F^2 u_j^n \left(\frac{1}{2} u_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon^2 F^2 u_j^n \left(\frac{1}{2} u_x \eta_x \Big|_j^n \right. \\
& \left. + \frac{1}{12} \Delta x^2 u_x \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \eta_x u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{1}{72} \Delta x^4 u_{xxx} \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon^2 F^2 (u_j^n)^2 \\
& \left(\frac{1}{2} \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} = 0 \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Kemudian untuk penyederhanaan persamaan (3.32) di bagi dengan Δt sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left(\eta_t |_j^n + \frac{\Delta t}{2} \eta_{tt} |_j^n + \frac{\Delta t^2}{6} \eta_{ttt} |_j^n + F u_x |_j^n + \frac{F \Delta x^2}{6} u_{xxx} |_j^n + \epsilon F u_j^n \eta_x |_j^n + \frac{\epsilon F \Delta x^2}{6} \right. \\
& u_j^n \eta_{xxx} |_j^n + F h_x - \frac{\Delta t F^2}{2} u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} \eta_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon F^2}{2} u_x \eta_x |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon F^2}{12} \\
& u_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon F^2}{12} \eta_x u_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^4 \epsilon F^2}{72} u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon}{2} (\eta_x)^2 |_j^n - \\
& \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon}{12} \eta_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon}{12} \eta_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^4 \epsilon}{72} (\eta_{xxx})^2 |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon F^2}{2} u_j^n u_{xx} |_j^n \\
& - \frac{\Delta t \epsilon^2 F^2}{2} u_j^n u_x \eta_x |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon^2 F^2}{12} u_j^n u_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon^2 F^2}{12} u_j^n \eta_x u_{xxx} |_j^n \\
& - \left. \frac{\Delta t \Delta x^4 \epsilon^2 F^2}{72} \Delta x^4 u_j^n u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon^2 F^2}{2} (u_j^n)^2 \eta_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} \right) \\
& + \dots = 0 \\
& \left([\eta_t |_j^n + F u_x |_j^n + \epsilon F u_j^n \eta_x |_j^n + F h_x] + \left[\frac{\Delta t}{2} \eta_{tt} |_j^n - \frac{\Delta t F^2}{2} u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} \eta_{xx} |_j^n - \right. \right. \\
& \frac{\Delta t \epsilon F^2}{2} u_j^n u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon^2 F^2}{2} (u_j^n)^2 \eta_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} \left. \right] + \left[\frac{\Delta t^2}{6} \eta_{ttt} |_j^n + \right. \\
& u_{xxx} |_j^n + \frac{\epsilon F \Delta x^2}{6} u_j^n \eta_{xxx} |_j^n \left. \right] + \left[-\frac{\Delta t \epsilon F^2}{2} u_x \eta_x |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon}{2} (\eta_x)^2 |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon^2 F^2}{2} \right. \\
& u_j^n u_x \eta_x |_j^n \left. \right] + \left[-\frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon F^2}{12} u_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon F^2}{12} \eta_x u_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon}{12} \right. \\
& \eta_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon}{12} \eta_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon^2 F^2}{12} u_j^n u_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^2 \epsilon^2 F^2}{12} \\
& u_j^n \eta_x u_{xxx} |_j^n \left. \right] + \left[\left[-\frac{\Delta t \Delta x^4 \epsilon F^2}{72} u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \Delta x^4 \epsilon}{72} (\eta_{xxx})^2 |_j^n - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\Delta t \Delta x^4 \epsilon^2 F^2}{72} \Delta x^4 u_j^n u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n \right] \right) + \dots = 0 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.33) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan pertama mempunyai orde dua yaitu (Δx^2) dan orde satu (Δt) . Persamaan (3.33) dikatakan konsisten jika

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \left(\frac{F \Delta x^2}{6} u_{xxx} - \frac{\Delta t}{2} \eta_{xx} \right) \Big|_j^n = 0$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai u_{xx}, η_{xxx} jika dikalikan dengan nilai dari Δx dan Δt akan ikut mengecil. Galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$.

Selanjutnya mencari orde *error* dari persamaan (3.21) dengan mensubstitusi persamaan (3.22), (3.28), (3.29), (3.30) dan (3.31) yakni

$$\begin{aligned} & \left(\left(u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) - u_j^n + \frac{\Delta t F}{2 \Delta x} (2 \Delta x u_x \Big|_j^n + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) + \frac{\Delta t}{2 F \Delta x} \left(2 \Delta x \eta_x \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 F^2}{2 \Delta x^2} \\ & (\Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} (\Delta x^2 \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} (\Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8 \Delta x^2} \\ & \left(2 \Delta x u_x \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) \left(2 \Delta x \eta_x \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 \epsilon}{2 \Delta x^2} u_j^n \\ & (\Delta x^2 \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2} h_{xx} \Big) + \dots = 0 \\ & \left(\left(u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) - u_j^n + \frac{\Delta t F}{2 \Delta x} (2 \Delta x u_x \Big|_j^n + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) + \frac{\Delta t}{2 F \Delta x} \left(2 \Delta x \eta_x \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta x^3 \eta_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) - \frac{\Delta t^2 F^2}{2 \Delta x^2} \\ & (\Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} (\Delta x^2 \eta_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} (\Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8 \Delta x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(4\Delta x^2 u_x \eta_x |_j^n + \frac{2}{3} \Delta x^4 u_x \eta_{xxx} |_j^n + \frac{2}{3} \Delta x^4 \eta_x u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{9} \Delta x^6 u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n \right) \\
& - \frac{\Delta t^2 \epsilon}{2\Delta x^2} u_j^n (\Delta x^2 \eta_{xx} |_j^n + \dots) - \frac{\Delta t^2}{2} h_{xx} + \dots = 0 \\
& \left(\left(u_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n + \dots \right) - u_j^n + \Delta t F(u_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \right. \\
& u_{xxx} |_j^n + \dots) + \Delta t \left(\frac{1}{F} \eta_x |_j^n + \frac{1}{6F} \Delta x^2 \eta_{xxx} |_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 F^2 \left(\frac{1}{2} u_{xx} |_j^n + \dots \right) \\
& - \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} \eta_{xx} |_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} u_{xx} |_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon \left(\frac{1}{2} u_x \eta_x |_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 u_x \right. \\
& \left. \eta_{xxx} |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_x u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{72} \Delta x^4 u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n + \dots \right) - \Delta t^2 \epsilon u_j^n \left(\frac{1}{2} \eta_{xx} |_j^n + \dots \right) \\
& \left. - \frac{\Delta t^2}{2} h_{xx} \right) + \dots = 0 \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Kemudian untuk penyederhanaan persamaan (3.34) dibagi dengan Δt sehingga di peroleh

$$\begin{aligned}
& \left(u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} |_j^n + F u_x |_j^n + F \frac{1}{6} \Delta x^2 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{F} \eta_x |_j^n + \frac{1}{6F} \right. \\
& \Delta x^2 \eta_{xxx} |_j^n - \Delta t F^2 \frac{1}{2} u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} \eta_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon}{2} u_x \eta_x |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon \Delta x^2}{12} \\
& \left. u_x \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon \Delta x^2}{12} \eta_x u_{xxx} |_j^n + \frac{\Delta t \epsilon \Delta x^4}{72} u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon}{2} u_j^n \eta_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} \right. \\
& \left. h_{xx} + \dots = 0 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left[u_t |_j^n + F u_x |_j^n + \frac{1}{F} \eta_x |_j^n \right] + \left[\frac{1}{2} \Delta t u_{tt} |_j^n - \Delta t F^2 \frac{1}{2} u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} \eta_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. u_{xx} |_j^n - \frac{\Delta t}{2} h_{xx} \right] + \left[-\frac{\Delta t \epsilon}{2} u_x \eta_x |_j^n \right] + \left[-\frac{\Delta t \epsilon}{2} u_j^n \eta_{xx} |_j^n \right] + \left[-\frac{\Delta t \epsilon \Delta x^2}{12} u_x \right. \right. \\
& \left. \left. \eta_{xxx} |_j^n - \frac{\Delta t \epsilon \Delta x^2}{12} \eta_x u_{xxx} |_j^n \right] + \left[\frac{\Delta t \epsilon \Delta x^4}{72} u_{xxx} \eta_{xxx} |_j^n \right] + \left[\frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt} |_j^n + \right.
\end{aligned}$$

$$F \frac{1}{6} \Delta x^2 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{6F} \Delta x^2 \eta_{xxx} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] + \dots = 0 \quad (3.35)$$

Berdasarkan persamaan (3.35) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan pertama mempunyai orde dua yaitu (Δx^2) dan orde satu (Δt) . Persamaan (3.35) dikatakan konsisten jika

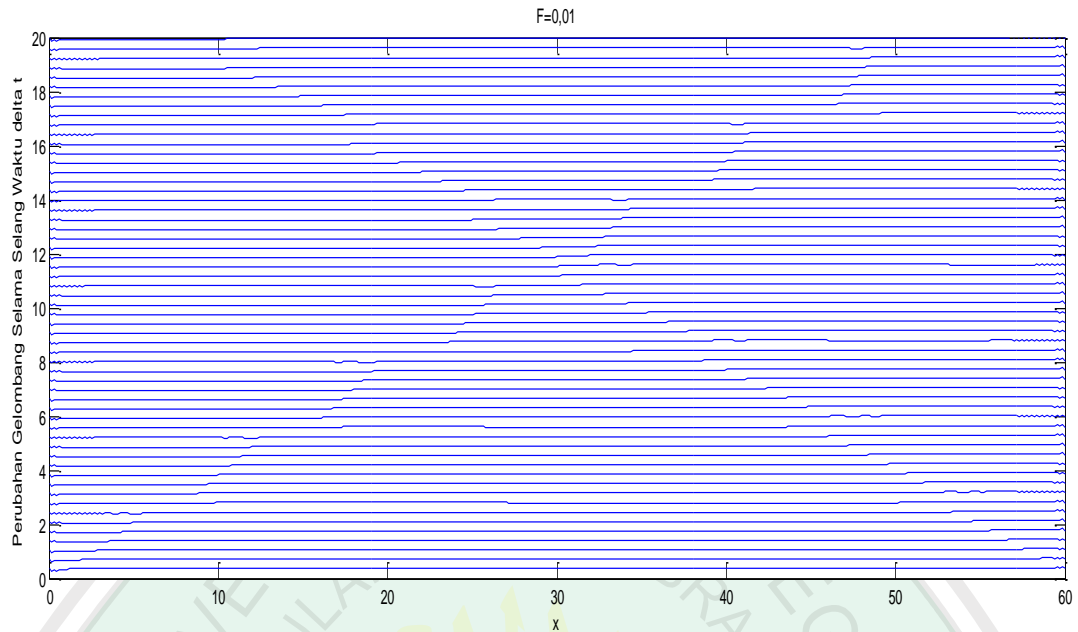
$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \left(F \left(\frac{\Delta x^2 - 3\Delta t F}{6} \right) u_{xxx} \right) \Big|_j^n = 0$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai u_{xx}, η_{xxx} jika dikalikan dengan nilai dari Δx dan Δt akan ikut mengecil. Galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$.

3.3 Simulasi dan Interpretasi Hasil

Setelah diperoleh hasil diskritisasi, maka dapat diketahui solusi numeriknya yang akan digunakan dalam simulasi. Persamaan yang digunakan adalah persamaan (3.19) dan (3.20) yang merupakan bentuk diskrit dari persamaan *Boussinesq*, dalam persamaan tersebut terdapat $\eta(x, t)$ yang merupakan ketinggian permukaan fluida dan $u(x, t)$ yang merupakan kecepatan rata-rata pada aliran fluida. Maka dalam simulasi tersebut akan digunakan 2 kemungkinan nilai F yaitu $F < 0$ dan $F > 0$. Dalam simulasi ini kondisi batas yang digunakan adalah $\eta(0, t) = 0$, $\eta(60, t) = 0$, $u(0, t) = 0$, dan $u(60, t) = 0$

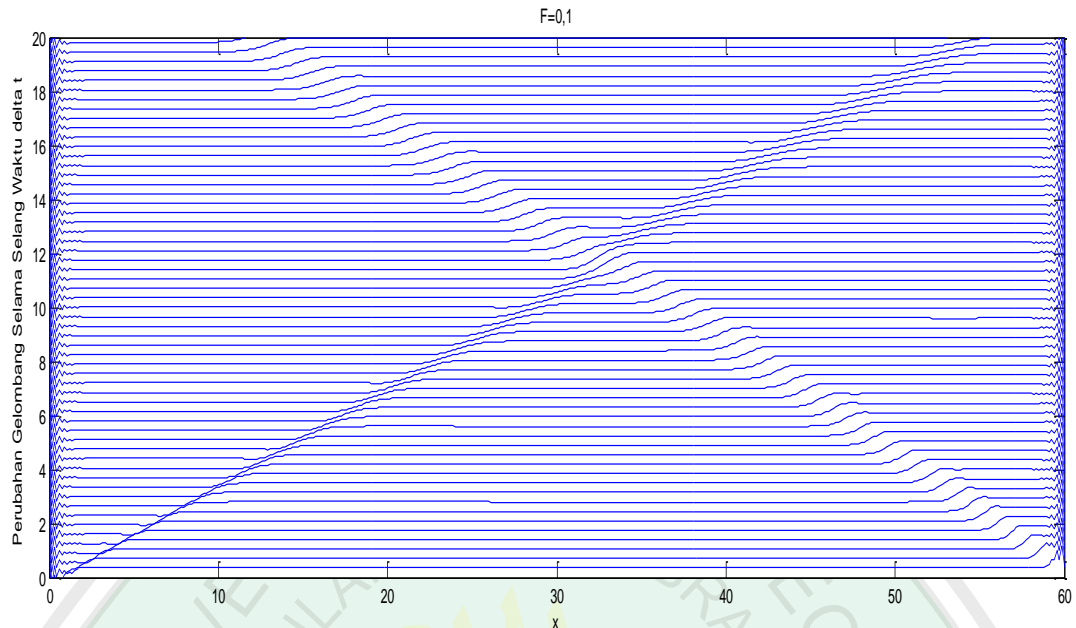
Simulasi pertama pada saat $F = 0,01$ yang artinya kekentalan air mempengaruhi gerak gelombang dengan nilai 0,01. Sehingga hasil perhitungan numeriknya dapat dilihat pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Simulasi dari solusi persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = 0.01$

Dari Gambar 3.1 diperoleh solusi persamaan (3.20) dan (3.21) dengan $\Delta x = 0,15$, $\Delta t = 0,03$ dan $F = 0,01$. Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa dengan adanya gundukan pada dasar laut mengakibatkan aliran tersebut mengalami gangguan, sehingga menimbulkan riak-riak gelombang pada permukaannya. Riak-riak gelombang tersebut berjalan dari dua arah yaitu dari arah hulu pada saat $x = 0$ dan dari arah hilir pada saat $x = 60$. Pada persekitaran $t = 12$ riak-riak gelombang terjadi pertemuan antara gelombang dari arah hulu dan dari arah hilir di persekitaran $x = 30$ dan gelombang setelah itu pecah yang satu ke arah hilir dan yang satunya ke arah hulu, tinggi gelombang yang dihasilkan sebesar 0,0836.

Simulasi kedua pada saat $F = 0,1$ yang artinya kekentalan air mempengaruhi gerak gelombang dengan nilai 0,1. Sehingga hasil perhitungan numeriknya dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut:

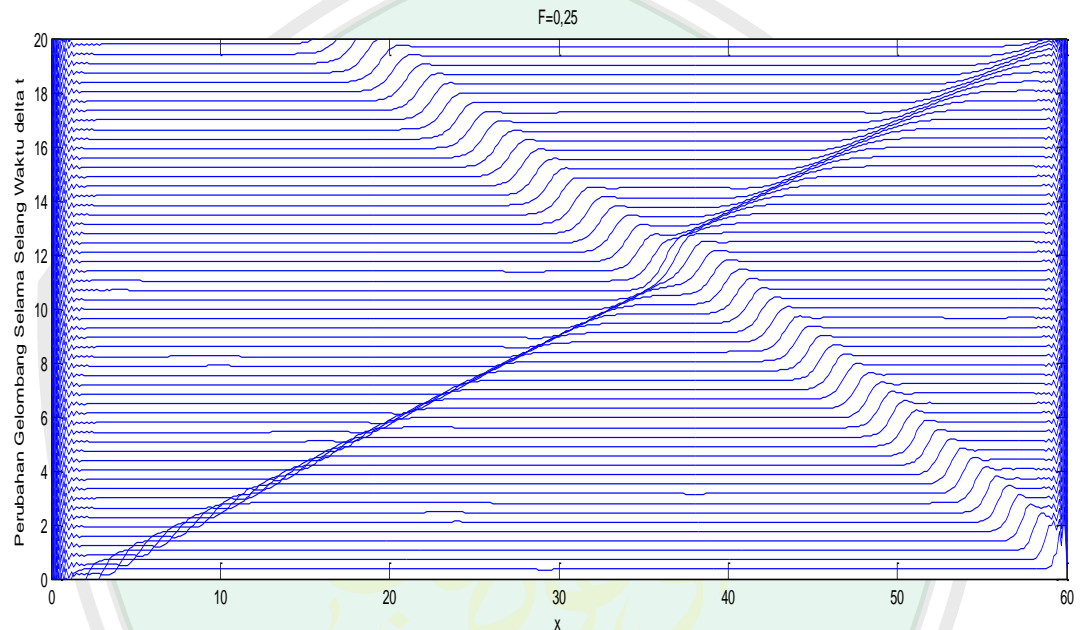


Gambar 3.2 Simulasi dari solusi persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = 0,1$

Dari Gambar 3.2 diperoleh solusi persamaan (3.20) dan (3.21) dengan $\Delta x = 0,15$, $\Delta t = 0,03$ dan $F = 0,1$. Pada gambar tersebut diperoleh bahwa dengan adanya gundukan pada dasar laut maka aliran tersebut mengalami gangguan, sehingga menimbulkan riak-riak gelombang pada permukaan tersebut. Riak-riak gelombang tersebut berjalan dari dua arah yaitu dari arah hulu pada saat $x = 0$ dan dari arah hilir pada saat $x = 60$. Pada persekitaran $t = 12$ riak-riak gelombang terjadi pertemuan antara gelombang dari arah hulu dan dari arah hilir di persekitaran $x = 32$ dan gelombang setelah itu pecah yang satu ke arah hilir dan yang satunya ke arah hulu, tinggi gelombang yang dihasilkan sebesar 0,8255.

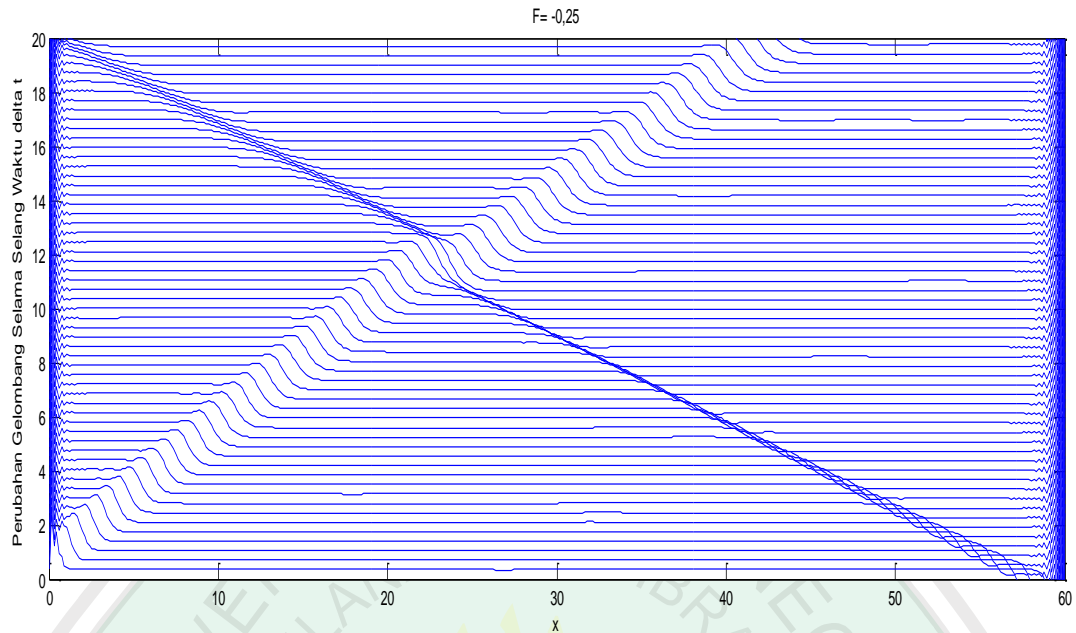
Simulasi ketiga jika $F = 0,25$ hasilnya hampir sama dengan simulasi kedua, pada gambar tersebut diperoleh bahwa dengan adanya gundukan pada dasar laut maka aliran tersebut mengalami gangguan. Sehingga terdapat riak-riak gelombang dengan ketinggian gelombang yang lebih tinggi lagi dari saat $F = 0,1$. Riak-riak gelombang tersebut berjalan dari dua arah yaitu dari arah hulu pada saat $x = 0$ dan dari arah hilir pada saat $x = 60$. Pada persekitaran $t = 12$ riak-riak gelombang

terjadi pertemuan antara gelombang dari arah hulu dan dari arah hilir di persekitaran $x = 37$ dan gelombang setelah itu pecah yang satu ke arah hilir dan yang satunya ke arah hulu. Tinggi gelombang yang dihasilkan pada saat $\Delta x = 0,15$, $\Delta t = 0,03$ dan $F = 0,25$ sebesar 2,0278. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.3 berikut:



Gambar 3.3 Simulasi dari solusi persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = 0.25$

Simulasi keempat jika $F = -0,25$ pada permukaan alirannya terdapat riak-riak gelombang dikarenakan adanya gundukan pada dasar laut. Riak-riak gelombang tersebut berjalan dari dua arah yaitu dari arah hulu pada saat $x = 0$ dan dari arah hilir pada saat $x = 60$. Pada persekitaran $t = 12$ riak-riak gelombang terjadi pertemuan antara gelombang dari arah hulu dan dari arah hilir di persekitaran $x = 22$ dan gelombang setelah itu pecah yang satu ke arah hilir dan yang satunya ke arah hulu. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut:



Gambar 3.4 Simulasi dari solusi persamaan (3.20) dan (3.21) untuk $F = -0,25$

Gambar 3.4 pada saat $\Delta x = 0,15$, $\Delta t = 0,03$ dan $F = -0,25$ menghasilkan tinggi gelombang sebesar 2,0285. Hal ini dapat disimpulkan bahwa, nilai dari F yang berbeda-beda pada air akan menghasilkan tinggi gelombang permukaan yang berbeda, semakin besar nilai F maka semakin besar pula amplitudo pada gelombang permukaan tersebut.

Pada gambar simulasi di atas ditemui keriting-keriting pada batas-batasnya, hal ini disebabkan karena tidak menerapkan kondisi batas serap atau nonrefleksi pada batas-batas domain $\eta(x, t)$ dan $u(x, t)$. Hal ini tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya dikarenakan ketaklinggaaan media. Keriting-keriting pada batas ini harus dikurangi atau bahkan dihilangkan pada model masalah perambatan gelombang soliter. Jadi syarat batas yang dicari adalah syarat batas yang akan menunjukkan bahwa gelombang datang akan melewati atau diteruskan ketika sampai pada batas.

3.4 Kajian Keagamaan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa solusi sistem persamaan *Boussinesq* dapat diselesaikan secara numerik salah satunya dengan menggunakan metode *Lax-Wendroff*. Hal ini menunjukkan bahwa semua permasalahan dapat diselesaikan sekalipun melalui beberapa kesulitan, karena pada hakikatnya semua kemudahan akan terwujud jika Allah Swt. menghendaki, baik itu dalam menyelesaikan persoalan matematika. Dari sekian banyak permasalahan khususnya dalam bidang matematika, selama proses penyelesaian dalam mencari solusi numerik ternyata dapat menambah keyakinan bahwa semua pasti ada jalan keluar dan hikmahnya tersendiri. Peneliti harus berusaha dengan sungguh-sungguh dan harus yakin bahwa setiap permasalahan pasti terdapat penyelesaiannya. Sesuai dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Insyiroh ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan(5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan(6).

Dari ayat tersebut memberikan suatu keterangan, bahwa sesuatu yang sukar pasti ada jalan keluarnya jika mau berusaha, sabar, dan tabah hati dalam menghadapi. Menyelesaikan persoalan matematika, seperti penyelesaian persamaan *Boussinesq* langkah-langkahnya harus teliti untuk memperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Dalam al-Quran surat Ali Imron ayat 139:

وَلَا تَهِنُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَنْتُمْ الْأَعْلَوْنَ إِنْ كُنْتُمْ مُؤْمِنِينَ ﴿١٣٩﴾

Janganlah kamu bersikap lemah, dan janganlah (pula) kamu bersedih hati padahal kamulah orang-orang yang paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang-orang yang beriman.

Sebagai *kholifah fil ard* peneliti dituntut untuk tidak bersikap lemah dalam menghadapi sebuah permasalahan khususnya pada ranah *scientist* seperti, menyelesaikan solusi numerik persamaan *Boussinesq*, peneliti tidak boleh lemah karena untuk memperoleh solusi numerik tersebut langkah demi langkah harus teliti dan cermat.

Janganlah kalian merasa lemah dalam menghadapi pertempuran dan hal-hal yang diakibatkan olehnya, seperti membuat persiapan dan mengatur siasat, lantaran luka dan kegagalan dalam pertempuran. Janganlah kalian bersedih atas luka tersebut, bagaimana perasaan lemah dan sedih menimpah kalian, sedangkan kalian merupakan orang-orang yang berada di atas angin (menang) (Al-Maragi, 1993a:134).

Bagaimana hati dan jiwamu dihinggapai perasaan lemah dan risau, padahal kamulah orang-orang yang tertinggi (iman dan derajatnya), jika kamu benar-benar beriman kepada Allah Swt. dan Rasul-Nya. Yang dimaksud dengan larangan peneliti bersifat lemah dan bersedih hati adalah larangan peneliti membiarkan diri dipengaruhi sifat-sifat yang lemah (berjiwa lemah). Oleh karena itu hendaklah peneliti menyiapkan perbekalan yang cukup saat akan berangkat perang, dengan semangat menyala-nyala(membaja) sambil bertawakal kepada Allah Swt. (Hasbi, 2000:695).

Sesungguhnya yang hatinya telah diisi dengan iman yang benar, sehingga iman itu benar-benar meresap dalam hati ia pasti merasa yakin terhadap akibat baik sesudah ia berpegang pada sunnatullah dan sebab-sebab yang dapat mengantarkannya ke arah keberhasilan dan kebahagiaan (Al-Maragi, 1993a:135).

Kesimpulannya, bahwa perintah untuk berbuat persiapan, menyediakan segala peralatan termasuk dengan tekad dan semangat yang benar, disamping keteguhan hati dan bertawakkal kepada Allah Swt. supaya dapat meraih kemenangan dan mendapatkan apa yang diinginkan, serta dapat mengembalikan kerugian-kerugian atau kekalahan-kekalahan yang telah mereka derita (Al-Maragi, 1993a:134).

Sesungguhnya hari kemenangan hanyalah bagi orang yang mengetahui sebab-sebab keberhasilan, dan mau memeliharanya dengan sebenar-benarnya, seperti kesepakatan, tidak pernah berselisih, teguh, selalu berpikir benar, kuat tekadnya, dan mengambil persiapan serta menyusun segala kekuatan yang ada untuk menghadapinya (Al-Maragi, 1993a:135).

Kalian harus mengerjakan pekerjaan-pekerjaan tersebut, dan harus menguasainya benar-benar agar kalian berhasil dan menang. Janganlah hal-hal yang telah menimpa kalian, yakni kegagalan membuat lemahnya tekad kalian, sebab kehidupan di dunia ini selalu berputar (Al-Maragi, 1993a:136).

Hari-hari tersebut Kami putarkan di kalangan umat manusia agar keadilan dapat tegak karenanya, tatanan menjadi mantap, orang yang berpikir dapat memperhatikan *sunnatullah* yang umum, dan orang-orang yang menyelidiki hukum Ilahi akan mengerti bahwa tidak ada pilih kasih dalam perputaran ini (Al-Maragi, 1993a:136).

Guna menampakkan ilmu-Nya kepada umat manusia yaitu dengan menampakkan hal-hal yang dapat dijangkau oleh pengetahuan mereka. Sebab ilmu Allah Swt terhadap segala sesuatu tetap berada di zaman '*azaly*, bila hal-hal tersebut

terjadi maka terjadilah perubahan dalam pengetahuan tersebut, yang lalu menjadi yang akan datang (Al-Maragi, 1993a:137).



BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh solusi numerik persamaan *Boussinesq* dengan metode *Lax-Wendroff* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta^{n+1} = & \eta^n - \frac{\Delta t F}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t \epsilon F}{2\Delta x} u_j^n (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) - \Delta t F h_x + \\ & \frac{\Delta t^2 F^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u\eta_{j-1}^n) + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{8\Delta x^2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8\Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n)^2 + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2\Delta x^2} u_j^n (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{8\Delta x^2} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \\ & (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon^2 F^2}{2\Delta x^2} (u_j^n)^2 (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u\eta_{j-1}^n) + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon F^2}{2} u_j^n h_{xx} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} u^{n+1} = & u^n - \frac{\Delta t F}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2F\Delta x} (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 F^2}{2\Delta x^2} \\ & (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u\eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \\ & (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2 \epsilon}{8\Delta x^2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \\ & \frac{\Delta t^2 \epsilon}{2\Delta x^2} u_j^n (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + u\eta_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} h_{xx} \end{aligned}$$

Error pemotongan pertama dari model diskrit yang digunakan memiliki orde dua yaitu (Δx^2) dan orde satu (Δt), hal tersebut dapat dilihat pada persamaan (3.33) dan (3.35). Hasil simulasi menunjukkan bahwa terdapat riak-riak gelombang yang disebabkan adanya gundukan pada dasar laut, dan nilai dari F yang berbeda-beda pada air akan menghasilkan tinggi gelombang permukaan yang berbeda.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk mencari analisis kestabilannya atau dapat juga dengan menghilangkan keriting-keriting pada batas dengan menerapkan kondisi batas serap atau nonrefleksi pada batas-batas domain $\eta(x, t)$ dan $u(x, t)$.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maragi, A.M. 1993a. *Tafsir Al-Maragi Juz IV*. Semarang: Toha Putra.
- Al-Maragi, A.M. 1993b. *Tafsir Al-Maragi Juz VI*. Semarang: Toha Putra.
- Anonymous. 2015. *Lax-Wendroff Method*. (Online), (https://en.wikipedia.org/wiki/Lax%E2%80%93Wendroff_method), diakses 8 Oktober 2015.
- Bennet, M., & Rohani, S. 2001. Solution of Population Balance Equations With A New Combined Lax-Wendro/Crank-Nicholson Method. *Chemical Engineering Science*, 56:6623–6633.
- Christou, M., & Papanicolaou, N. 2014. Kawahara Solitons in Boussinesq Equations Using A Robust Christov–Galerkin Spectral Method. *Applied Mathematics and Computation*, 243:245–257.
- Djohan, W. 1997. Dinamika Gelombang Cnoidal di Atas Dasar Tak Rata Menggunakan Persamaan Gelombang Dua Arah Boussinesq. *JMB*, 2:36-57.
- Donahue, A., Zhang, Y., Kennedy, A., Westerink, J., Panda, N., & Dawson, C. 2015. A Boussinesq-scaled, Pressure-Poisson Water Wave Model. *Ocean Modelling*, 86:36-57.
- Faqih, A.K. 2006. *Tafsir Nurul Qur'an Jilid III*. Jakarta: Al-Huda.
- Hasbi, T.M. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur 1*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.
- Jamhuri, M. 2013. Persamaan Difusi (Penurunan, Solusi Analitik, Solusi Numerik (Beda Hingga, RBF)). Slide Presentation. Malang: UIN Malang. 7 April 2013.
- Lo, D.C., & Young, D.L. 2004. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Analysis of Free Surface Flow Using A Velocity-Vorticity Formulation. *Journal of Computational Physics*, 195:175-201.
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Panda, N., Dawson, C., Zhang, Y., & Kennedy, A. 2014. Discontinuous Galerkin Methods for Solving Boussinesq–Green–Naghdi Equations in Resolving Non-Linear and Dispersive Surface Water Waves. *Journal of Computational Ph*, 273:572-588.
- Patiroi, A., Rahardjo, A. P., & Nizam. 2010. *Pemodelan Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Elemen Hingga 2 Langkah Taylor-Galerkin*. Yogyakarta: UGM.

- Pochai, N., & Sornsori, C. 2011. A Non-dimensional Form of Hydrodynamic Model With Variable Coefficients in A Uniform Reservoir Using Lax-Wendroff Method. *Procedia Engineering*, 8:89–93.
- Purcell, E.J & Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima: Jilid 1. Terjemahan dari Calculus with Analytics Geometry, Fifth Edition, oleh Susila, IN, B. Kartasasmita & Rawuh*. Jakarta: Erlangga.
- Qiu, J. 2007. Hermite Weno Schemes With Lax-Wendroff Type Time Discretizations for Hamilton-Jacobi Equations. *Journal of Computational Mathematics*, 25 (2):131-144.
- Sukron, M. 2014. *Penurunan Persamaan Boussinesq Pada Gelombang Yang Melalui Sebuah Gundukan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Wiryanto, L. 2010. A Solitary-like Wave Generated by Flow Passing a Bump. *Conference on Mathematics, Statistic and its Application* (pp. 1176-1183). Kuala Lumpur: ICMSA: Proceedings of the 6th IMT-GT.
- Yusuf, A. 2009. *Ensiklopedi Keajaiban Ilmiah Al-Qur'an*. Jakarta: Tausiah.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program simulasi persamaan *Boussinesq* menggunakan metode *Lax-Wendroff* saat $F = 0, 01$.

```
clc,clear

figure(1),clf

dx = 0.15;
dt = 0.03;

x = 0:dx:60;
t = 0:dt:80;

F = 0.01;
e = 0.1;

h = 0.0015-0.1./((x-28).^2+1);
hx = .100000000000000006./((x-28).^2+1).^2.*(2*x-56);
hxx = -.2000000000./((x-28).^2+1).^3.*(2*x-56).^2+.2000000000./((x-28).^2+1).^2;

M = length(x);
N = length(t);

v = zeros(M,N);
u = zeros(M,N);

v(:,1) = 0;
u(:,1) = 1/e;

plot(x,v(:,1))
ylim([0 20])

k=0;
for n=1:N-1
    for j=2:M-1
        v(j,n+1) = v(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt*e*F/(2*dx))*u(j,n)*( v(j+1,n)-v(j-1,n) ) - dt*F*hx(j) + ...
        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n)-2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e*F^2/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + (dt^2*e/(8*dx^2))*( v(j+1,n)-v(j-1,n) )^2 +
        ...
        (dt^2*e*F^2/(2*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2*e^2*F^2/(8*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)+u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e^2*F^2/(2*dx^2))*u(j,n)^2*( v(j+1,n)-
        2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + (dt^2*e*F^2/2)*u(j,n)*hxx(j);
    end
end
```

```

for j=2:M-1
    u(j,n+1) = u(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
    (dt/(2*F*dx))*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) ) + ...
    (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
    (dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-1,n+1) ) + ...
    (dt^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
    (dt^2*e/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) )
    + ...
    (dt^2*e/(2*dx^2))*u(j,n)*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-
1,n+1) ) + (dt^2/2)*hxx(j);
end

if mod(n,30)==0
    k=k+1;
    plot(x,v(:,n+1)+0.35*k), hold on
    pause(0.01)
    ylim([0 20])
    xlabel('x')
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu delta t')
    title('F= 0,01')
    tinggi=(max(v(:,n)))
end
end

```



Lampiran 2. Program simulasi persamaan *Boussinesq* menggunakan metode *Lax-Wendroff* saat $F = 0, 1$.

```

clc,clear

figure(1),clf

dx = 0.15;
dt = 0.03;

x = 0:dx:60;
t = 0:dt:80;

F = 0.1;
e = 0.1;

h = 0.0015-0.1./((x-28).^2+1);
hx = .1000000000000000006./((x-28).^2+1).^2.*(2*x-56);
hxx = -.20000000000./((x-28).^2+1).^3.*(2*x-56).^2+.2000000000./((x-28).^2+1).^2;

M = length(x);
N = length(t);

v = zeros(M,N);
u = zeros(M,N);

v(:,1) = 0;
u(:,1) = 1/e;

plot(x,v(:,1))
ylim([0 20])

k=0;
for n=1:N-1
    for j=2:M-1
        v(j,n+1) = v(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt*e*F/(2*dx))*u(j,n)*( v(j+1,n)-v(j-1,n) ) - dt*F*hx(j) + ...
        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n)-2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e*F^2/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + (dt^2*e/(8*dx^2))*( v(j+1,n)-v(j-1,n) )^2 +
        ...
        (dt^2*e*F^2/(2*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2*e^2*F^2/(8*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)+u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j,n)^2)*( v(j+1,n)-
        2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + (dt^2*e*F^2/2)*u(j,n)*hxx(j);
    end

    for j=2:M-1
        u(j,n+1) = u(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt/(2*F*dx))*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) ) + ...

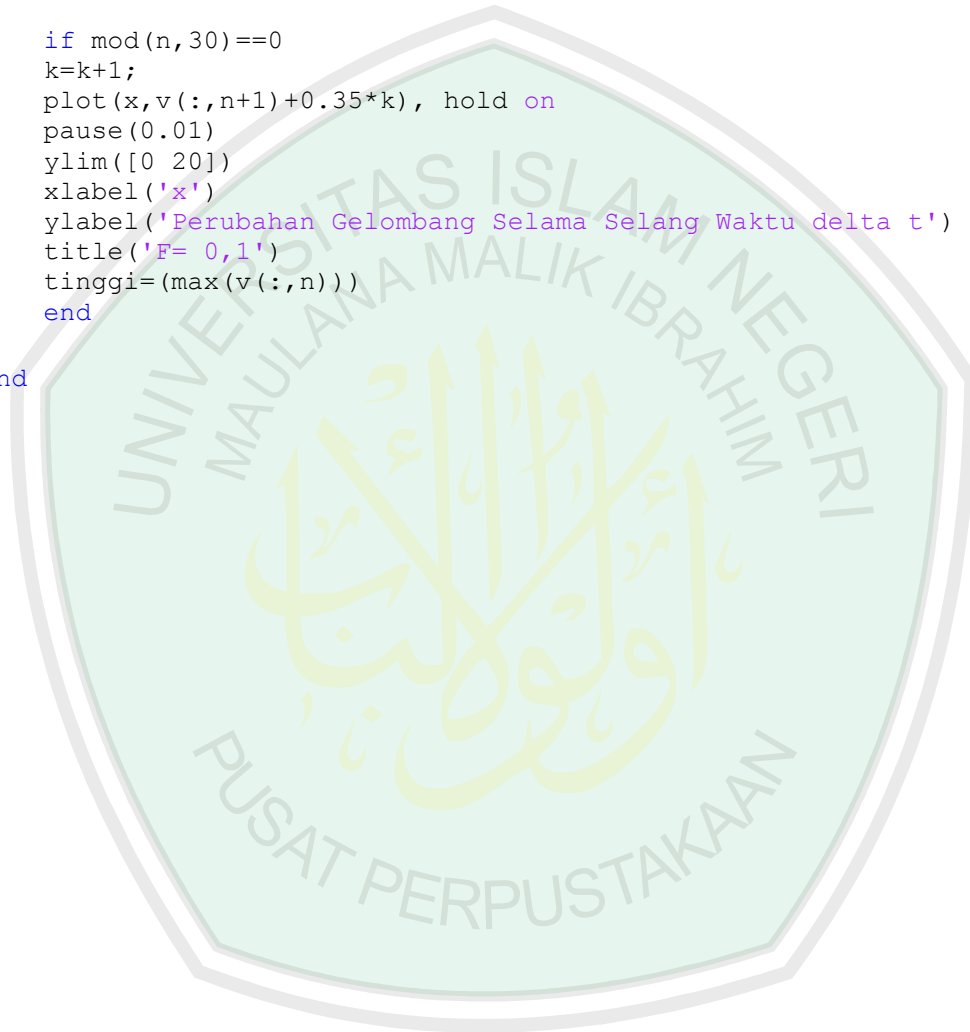
```

```

        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
(dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-1,n+1) ) + ...
        (dt^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
(dt^2*e/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) )
+ ...
        (dt^2*e/(2*dx^2))*u(j,n)*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-
1,n+1) ) + (dt^2/2)*hxx(j);
    end

    if mod(n,30)==0
    k=k+1;
    plot(x,v(:,n+1)+0.35*k), hold on
    pause(0.01)
    ylim([0 20])
    xlabel('x')
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu delta t')
    title('F= 0,1')
    tinggi=(max(v(:,n)))
    end
end

```



Lampiran 3. Program simulasi persamaan *Boussinesq* menggunakan metode *Lax-Wendroff* saat $F= 0, 25$.

```

clc,clear

figure(1),clf

dx = 0.15;
dt = 0.03;

x = 0:dx:60;
t = 0:dt:80;

F = 0.25;
e = 0.1;

h = 0.0015-0.1./((x-28).^2+1);
hx = .1000000000000000006./((x-28).^2+1).^2.*(2*x-56);
hxx = -.2000000000./((x-28).^2+1).^3.*(2*x-56).^2+.2000000000./((x-28).^2+1).^2;

M = length(x);
N = length(t);

v = zeros(M,N);
u = zeros(M,N);

v(:,1) = 0;
u(:,1) = 1/e;

plot(x,v(:,1))
ylim([0 20])

k=0;
for n=1:N-1
    for j=2:M-1
        v(j,n+1) = v(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt*e*F/(2*dx))*u(j,n)*( v(j+1,n)-v(j-1,n) ) - dt*F*hx(j) + ...
        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n)-2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e*F^2/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + (dt^2*e/(8*dx^2))*( v(j+1,n)-v(j-1,n) )^2 +
        ...
        (dt^2*e*F^2/(2*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2*e^2*F^2/(8*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)+u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j,n)^2)*( v(j+1,n)-
        2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + (dt^2*e*F^2/2)*u(j,n)*hxx(j);
    end

    for j=2:M-1
        u(j,n+1) = u(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt/(2*F*dx))*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) ) + ...

```

```

        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
(dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-1,n+1) ) + ...
        (dt^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
(dt^2*e/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) )
+ ...
        (dt^2*e/(2*dx^2))*u(j,n)*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-
1,n+1) ) + (dt^2/2)*hxx(j);
    end

    if mod(n,30)==0
    k=k+1;
    plot(x,v(:,n+1)+0.35*k), hold on
    pause(0.01)
    ylim([0 20])
    xlabel('x')
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu delta t')
    title('F= 0,25')
    tinggi=(max(v(:,n)))
    end
end

```



Lampiran 4. Program simulasi persamaan *Boussinesq* menggunakan metode *Lax-Wendroff* saat $F = -0,25$.

```

clc,clear

figure(1),clf

dx = 0.15;
dt = 0.03;

x = 0:dx:60;
t = 0:dt:80;

F = -0.25;
e = 0.1;

h = 0.0015-0.1./((x-28).^2+1);
hx = .1000000000000000006./((x-28).^2+1).^2.*(2*x-56);
hxx = -.20000000000./((x-28).^2+1).^3.*(2*x-56).^2+.2000000000./((x-28).^2+1).^2;

M = length(x);
N = length(t);

v = zeros(M,N);
u = zeros(M,N);

v(:,1) = 0;
u(:,1) = 1/e;

plot(x,v(:,1))
ylim([0 20])

k=0;
for n=1:N-1
    for j=2:M-1
        v(j,n+1) = v(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt*e*F/(2*dx))*u(j,n)*( v(j+1,n)-v(j-1,n) ) - dt*F*hx(j) + ...
        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n)-2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e*F^2/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + (dt^2*e/(8*dx^2))*( v(j+1,n)-v(j-1,n) )^2 +
        ...
        (dt^2*e*F^2/(2*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
        (dt^2*e^2*F^2/(8*dx^2))*u(j,n)*( u(j+1,n)+u(j-1,n) )*(
        v(j+1,n)-v(j-1,n) ) + ...
        (dt^2*e^2*F^2/(2*dx^2))*u(j,n)^2*( v(j+1,n)-
        2*v(j,n)+v(j-1,n) ) + (dt^2*e*F^2/2)*u(j,n)*hxx(j);
    end

    for j=2:M-1
        u(j,n+1) = u(j,n) - (dt*F/(2*dx))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) ) -
        (dt/(2*F*dx))*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) ) + ...

```

```

        (dt^2*F^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
(dt^2/(2*dx^2))*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-1,n+1) ) + ...
        (dt^2/(2*dx^2))*( u(j+1,n)-2*u(j,n)+u(j-1,n) ) +
(dt^2*e/(8*dx^2))*( u(j+1,n)-u(j-1,n) )*( v(j+1,n+1)-v(j-1,n+1) )
+ ...
        (dt^2*e/(2*dx^2))*u(j,n)*( v(j+1,n+1)-2*v(j,n+1)+v(j-
1,n+1) ) + (dt^2/2)*hxx(j);
    end

    if mod(n,30)==0
    k=k+1;
    plot(x,v(:,n+1)+0.35*k), hold on
    pause(0.01)
    ylim([0 20])
    xlabel('x')
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu delta t')
    title('F= -0,25')
    tinggi=(max(v(:,n)))
    end
end

```

