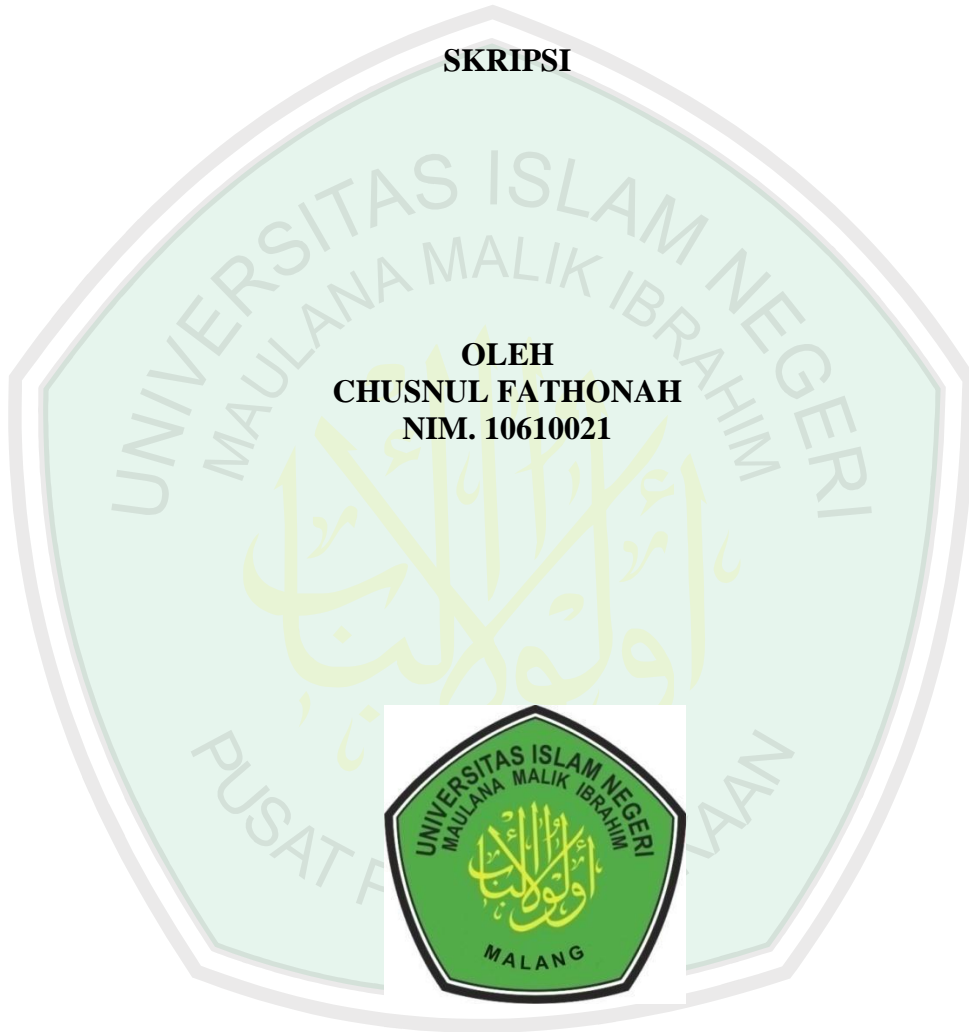


**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DOUBLE PENDULUM TERBALIK PADA KERETA
MENGUNAKAN METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR* (LQR)**

SKRIPSI

**OLEH
CHUSNUL FATHONAH
NIM. 10610021**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DOUBLE PENDULUM TERBALIK PADA KERETA
MENGUNAKAN METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR* (LQR)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Chusnul Fathonah
NIM. 10610021**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DOUBLE PENDULUM TERBALIK PADA KERETA
MENGUNAKAN METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR* (LQR)**

SKRIPSI

**Oleh
Chusnul Fathonah
NIM. 10610021**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 Desember 2015

Pembimbing I,



**Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003**

Pembimbing II,



**Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



**Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
DOUBLE PENDULUM TERBALIK PADA KERETA
MENGUNAKAN METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR* (LQR)**

SKRIPSI

**Oleh
Chusnul Fathonah
NIM. 10610021**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 28 Januari 2016

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Chusnul Fathonah

NIM : 10610021

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul skripsi : Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal *Double* Pendulum

Terbalik pada Kereta Menggunakan Metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Desember 2015

Yang membuat pernyataan,



Chusnul Fathonah
NIM. 10610021

MOTO

فَبِأَيِّ آءِ آلَاءِ رَبِّكُمَا تُكَذِّبَانِ

“Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan”

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah: 6)

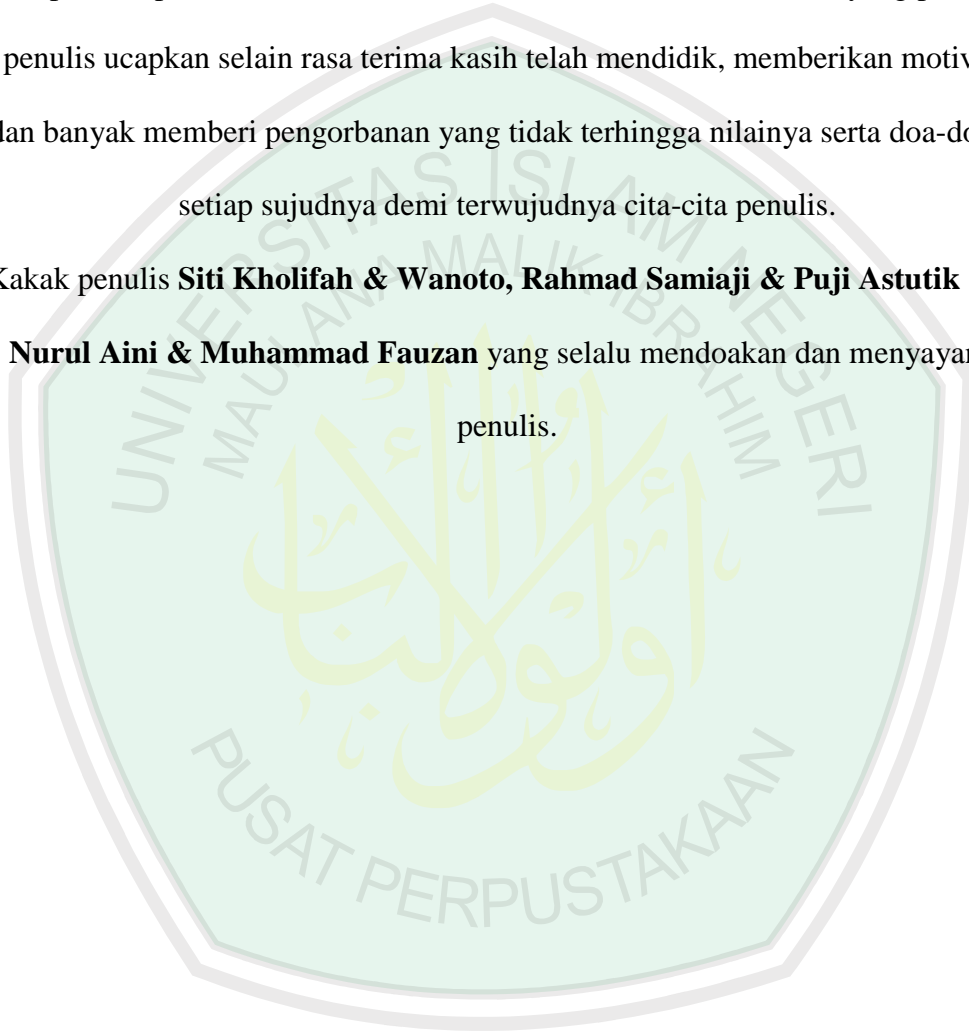


PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ini kepada:

Bapak Ibu penulis tercinta **Kusni Sukardi** dan **Ni'ati**, tiada kata yang pantas penulis ucapkan selain rasa terima kasih telah mendidik, memberikan motivasi dan banyak memberi pengorbanan yang tidak terhingga nilainya serta doa-doa di setiap sujudnya demi terwujudnya cita-cita penulis.

Kakak penulis **Siti Kholifah & Wanoto, Rahmad Samiaji & Puji Astutik** serta **Nurul Aini & Muhammad Fauzan** yang selalu mendoakan dan menyayangi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Bismillah wal hamdulillah, penulis ucapkan ke hadirat Allah *Ta'ala* yang Maha Pengasih dan Penyayang atas segala limpahan karunia yang tiada terhingga. Shalawat serta salam tiada lupa penulis persembahkan bagi sang pendidik sejati dan penghulu para nabi, nabi Muhammad *Shallallahu'alaihi wasallam* beserta para keluarga, sahabat dan penerus perjuangan beliau.

Suatu kebanggaan tersendiri bagi penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang tentunya tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen wali.
5. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan pengetahuan, arahan, nasihat, serta meluangkan waktu untuk bimbingan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
6. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku pembimbing II yang telah memberikan saran serta bimbingan dengan penuh kesabaran.

7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menempuh pendidikan S1.
8. Bapak dan Ibu penulis yang selalu memberikan semangat dan doa dalam setiap sujudnya, seluruh kakak dan adik penulis yang selalu menyayangi penulis.
9. Seluruh sahabat-sahabat terbaik yang tak pernah bosan memberikan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010 dan teman yang telah meluangkan waktunya untuk membagikan ilmunya kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Keluarga besar UKM PRAMUKA Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan dukungan moril dan materiil serta kebersamaan.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Jazakumullahu khairan katsiran. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis khususnya dan para pembaca umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan <i>Lagrange</i>	8
2.1.1 Metode <i>Lagrange</i>	8
2.1.2 Koordinat Umum	8
2.1.3 Gaya pada Sistem Koordinat Umum	11
2.1.4 Gaya Umum untuk Sistem Konservatif	12
2.1.5 Prosedur Umum Metode <i>Lagrange</i>	13
2.1.6 Contoh Pemakaian Metode <i>Lagrange</i>	14
2.2 <i>State Space</i>	15
2.3 Karakteristik Analisis pada Sistem	19
2.3.1 Kestabilan	19
2.3.2 Keterkendalian	20
2.3.3 Keteramatan	24
2.4 Sistem Kontrol Optimal Menggunakan Metode LQR	26
2.5 Kajian Islam Mengenai Kesempurnaan Ciptaan Allah	31
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Pemodelan Sistem <i>Double</i> Pendulum Terbalik	35
3.2 Model Fisik	37
3.3 Model Matematika	46
3.4 <i>State Space</i>	52

3.5 Linierisasi Model Non Linier ke dalam Bentuk Linier	54
3.6 Karakteristik Analisis pada Sistem	62
3.6.1 Kestabilan	62
3.6.2 Keterkendalian	63
3.6.3 Keteramatan	64
3.7 Simulasi dan Interpretasi Menggunakan Metode LQR	66
3.8 Kajian dalam Al-Quran Mengenai Ciptaan Allah	68

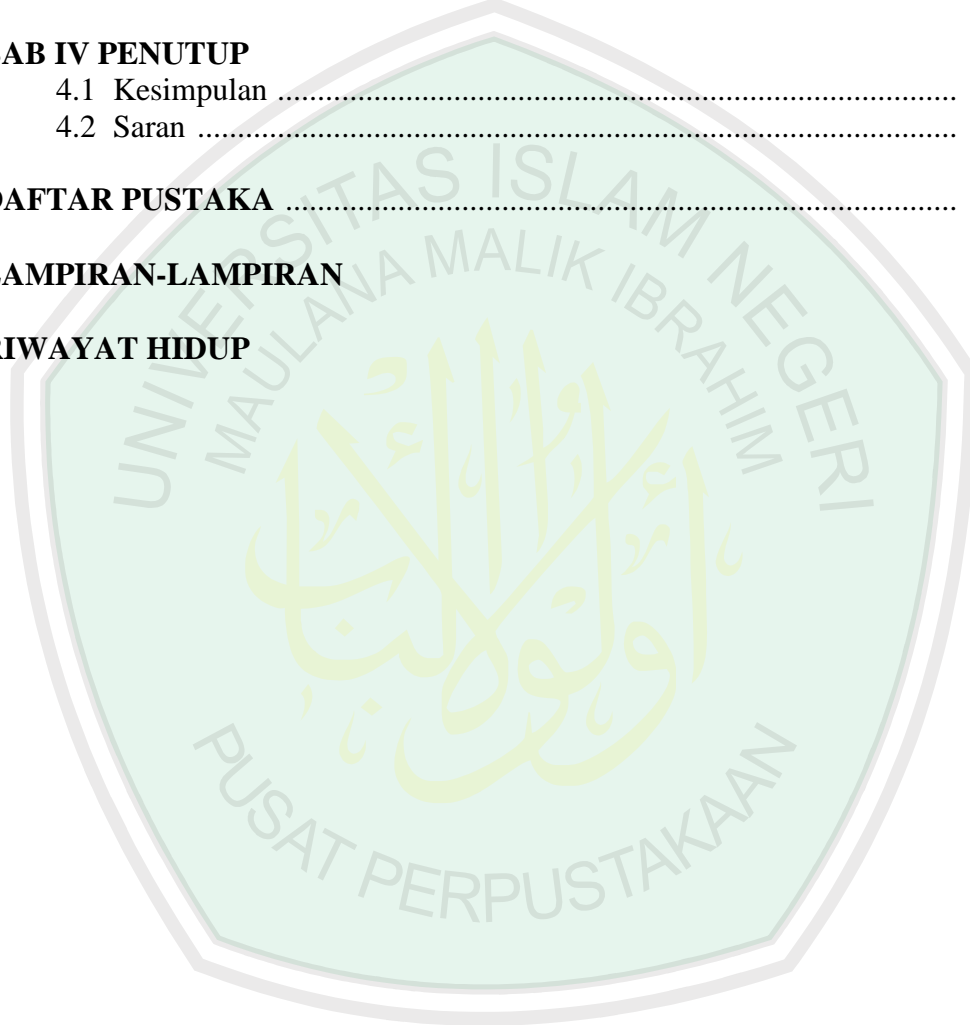
BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	70
4.2 Saran	70

DAFTAR PUSTAKA	72
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Pendulum Ganda	10
Gambar 2.2 Mesin <i>Adwood</i> Tunggal	14
Gambar 2.3 Sistem Dinamika	17
Gambar 3.1 <i>Double</i> Pendulum Terbalik yang Dipasang pada Kereta	35
Gambar 3.2 Segitiga Siku-Siku yang Terbentuk pada Pendulum	38
Gambar 3.3 Hasil Simulasi Kestabilan pada Kereta	67
Gambar 3.4 Hasil Simulasi Kestabilan Pendulum 1 Menggunakan Metode <i>Linear Quadratic Regulator</i>	67
Gambar 3.5 Hasil Simulasi Kestabilan Pendulum 2 Menggunakan Metode <i>Linear Quadratic Regulator</i>	68



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Keterangan Simbol	36
-----------------------------------	----



ABSTRAK

Fathonah, Chusnul. 2016. **Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal *Double Pendulum Terbalik* pada Kereta Menggunakan Metode *Linear Quadratic Regulator (LQR)***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata kunci: *state space*, kestabilan, keterkendalian, keterampilan, penerapan metode LQR.

Skripsi ini bertujuan untuk mengetahui kestabilan dan kontrol optimal *double pendulum* terbalik pada kereta menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator (LQR)*. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*). Penelitian kepustakaan merupakan penampikan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kepustakaan yang di dalamnya memuat beberapa gagasan yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan yaitu baik dari buku, jurnal, artikel, laporan penelitian dan situs-situs di internet. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan persamaan *Lagrange* sebagai persamaan gerak dengan cara mencari selisih energi kinetik dan energi potensial dalam *double pendulum* terbalik penurunan persamaan *Lagrange*, kemudian dilinierkan menggunakan deret *Taylor* agar didapat persamaan yang linier. Dalam skripsi ini penerapan metode LQR dapat digunakan apabila pada karakteristiknya yaitu keterkendalian dan keterampilan mempunyai nilai rank sebanyak n . Hasil dalam skripsi ini yaitu mempertahankan *double pendulum* terbalik dalam keadaan stabil dengan memberikan kontrol pada kereta yaitu dengan memberikan gaya horisontal ke kiri dan ke kanan. Berdasarkan hasil simulasi dan interpretasi, posisi *double pendulum* terbalik yang dipasang pada kereta mampu dipertahankan pada posisi tegak atau stabil yaitu tepat pada koordinat nol. Kondisi stabil terjadi saat mencapai waktu 30 detik dan seterusnya.

ABSTRACT

Fathonah, Chusnul. 2016. **Stability Analysis and Optimal Control Double Inverted Pendulum on Cart Using Linear Quadratic Regulator Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keywords: stability, state space, controllability, observability, LQR method application.

This thesis to determine the stability and optimal control of double inverted pendulum on a cart using the Linear Quadratic Regulator (LQR). The method used in this research is the library research. The research literature is the appearance argument that presents the results of the scientific reasoning which includes the literature relating some idea and should be supported by data obtained from various sources of literature that is wether from books, journals, articles, research reports or websites on the internet. The first step is to determine the Lagrange equation as the equation of motion by finding the difference of kinetic energy and potential energy in a double inverted pendulum from Lagrange equation derivative, then it is linearized using taylor series in order to obtain a linear equation. In this paper the application of LQR method can be used when the controllability and observability characteristics which have a rank value of n . The results in this paper are maintaining double inverted pendulum in a stable state by giving control of the cart by providing a horizontal force to the left and to the right. Based on simulation results and interpretations, the position of double inverted pendulum mounted on the cart can be maintained in an upright position or stable is right on the coordinate zero. It reaches a stable condition on 30 seconds and so on.

ملخص

الفضاء، حسن ٢٠١٦. تحليل الاستقرار وتحكم والأمثل البندول المقلوب مزدوجة بالطريقة **Linear Quadratic Regulator (LQR)**. البحث الجامع. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١)خير الرحمن الماجستير (٢)محمد جمهوري الماجستير.

الكلمات الرئيسية : الاستقرار، ومساحة الدولة، والسيطرة، قابلية الملاحظة طريقة (**LQR**)

وتهدف هذه الأطروحة لتحديد الاستقرار والتحكم الأمثل المزدوج البندول المقلوب على عربة باستخدام **Linear Quadratic Regulator**. الطريقة المستخدمة في هذا البحث هو مكتبة البحوث. أدبيات البحوث هو حجة المظهر الذي يعرض نتائج المنطق العلمي الذي يضم المؤلفات المتعلقة ويجب أن تكون معتمدة من قبل بيانات تم الحصول عليها من مصادر مختلفة من الأدب ما هو جيد من الكتب والمجلات والمقالات والتقارير البحثية والمواقع على شبكة الإنترنت. الخطوة الأولى هي تحديد معادلة لاغرانج كما في معادلة الحركة من خلال إيجاد الفرق من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة في مقلوب انخفاض البندول حصلت عليها اشتقاق معادلة لاغرانج، ثم تخطيط باستخدام سلسلة تايلور من أجل الحصول على معادلة خطية. في هذا البحث يمكن استخدام تطبيق طريقة (**LQR**) إذا كانت الخصائص التي لها قيمة رتبة n . النتائج في هذا البحث هي الحفاظ على البندول مزدوج المقلوب في حالة مستقرة من خلال إعطاء السيطرة على القطار هو توفير القوة الأفقية إلى اليسار وإلى اليمين. وبناء على نتائج المحاكاة والتفسيرات، موقف مزدوج البندول مقلوب شنت على النقل لا يمكن الحفاظ عليه في وضع رأسي أو مستقرة حق على تنسيق الصفر. عندما يصل حدوث حالة مستقرة عند ٣٠ ثانية، وهلم جرا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dapat dinyatakan dalam bentuk model matematika. Sebagian besar model matematika yang muncul berbentuk non linier. Untuk mendapatkan solusi masalah yang berbentuk non linier tidaklah mudah. Namun, hal ini tidak menjadi masalah karena bentuk model matematika khususnya yang berbentuk persamaan non linier dapat diubah menjadi bentuk linier dengan cara linierisasi (Putranto, 2009).

Pendulum terbalik merupakan sebuah bandul dengan massa bandul tersebut berada di atas titik tumpunya. Pada kasus ini titik tumpu diletakkan di tengah-tengah bagian atas pada sebuah kereta yang dapat digerakkan dalam arah mendatar (horisontal). Pendulum terbalik memiliki sifat yang tidak stabil, sehingga harus di atur sedemikian rupa agar pendulum tetap tegak dengan cara memberikan gaya pada titik tumpunya atau pada kereta. *Double* pendulum terbalik merupakan modifikasi dari pendulum terbalik, yaitu dengan cara menambahkan satu pendulum lagi yang disambungkan di ujung pendulum sebelumnya (Putranto, 2009).

Gaya $u(t)$ yang terdapat pada kereta. Jika tanpa adanya gaya yang sesuai *double* pendulum akan jatuh. Dengan adanya kontrol, maka motor pada kereta akan memberikan gaya yang sesuai sehingga pendulum tetap dalam keadaan tegak (Putranto, 2009).

Menstabilkan *double* pendulum terbalik dapat dilakukan dengan menggunakan sistem kontrol. Pada desain sistem kontrol yang baik harus memenuhi persyaratan-persyaratan tertentu yang telah ditetapkan. Persyaratannya yaitu *double* pendulum terbalik tersebut harus memiliki keteramatan dan keterkendalian atau keterkontrolan, maka kontrol dapat digunakan untuk menstabilkan *double* pendulum terbalik tersebut. Sehingga salah satu sistem kontrol yang dapat digunakan dalam menstabilkan *double* pendulum terbalik yaitu menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR) (Sandeep, dkk, 2012).

Dalam beberapa penelitian sebelumnya dijelaskan bahwa tujuan utama dari sistem pendulum terbalik adalah menjaga kesetimbangan pendulum dalam posisi tegak atau vertikal dengan memberikan sebuah gaya dorong pada motor dan sistem pendulum terbalik memiliki beberapa karakteristik yaitu non linier dan tidak stabil. Sistem tersebut dilinierkan di sekitar titik kesetimbangan (Putranto, 2009).

Pada tahun 1972, dua peneliti dari bidang kontrol berhasil menggunakan komputer analog, dalam mengendalikan sebuah pendulum terbalik dalam posisi berdiri di atas gerobak, yang distabilkan oleh gaya horisontal (Sandeep, dkk, 2012).

Linear Quadratic Regulator (LQR) dan *Proportional Derivative* (PD) *controller* berhasil dirancang untuk sistem *double* pendulum terbalik dan berdasarkan hasilnya kedua *controller* mampu mengendalikan *double* pendulum terbalik pada sudut dan posisi kereta saling tegak lurus (Narinder dan Sandeep, 2012).

Pengontrol pada metode LQR yaitu untuk menstabilkan pendulum yang berada di atas kereta tetap dalam posisi terbalik dan tegak lurus pada kereta dengan meminimumkan tenaga listrik yang diberikan kedalam kereta. Selanjutnya disajikan simulasi hasil perhitungan pengontrol untuk memberikan gambaran pengaruh kerja pengontrol dan menstabilkan sistem dan sebuah sistem yang sangat tak linier dapat distabilkan oleh linierisasi dari sekitar titik keseimbangan (Mandar, dkk, 2014).

Kerja *double* pendulum terbalik pada kereta seperti salah satu organ tubuh manusia yaitu pada bagian kaki dengan kereta sebagai telapak kaki, pendulum 1 sebagai tumpuhan pada lutut dan pendulum 2 sebagai tumpuhan pada persendian kaki. Sehingga dengan adanya kaki memudahkan manusia untuk bergerak ataupun melakukan aktivitas. Hal tersebut membuktikan bahwa Allah menciptakan manusia sebagai makhluk yang sempurna dan sebaik-baiknya makhluk. Dalam firman Allah pada surat at-Tin ayat 4 yang berbunyi:

لَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ فِي أَحْسَنِ تَقْوِيمٍ ﴿٤﴾

"Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya" (Q.S At-Tin: 04).

Penjelasan dari ayat tersebut bahwa Allah menjadikan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya, proses terbentuknya manusia tidak sama dengan makhluk lain, manusia memiliki akal, jasmani, rohani dan nafsu. Anggota tubuh mereka serasi dan seimbang sehingga terlihat indah dan mudah untuk melakukan kegiatan. Sedangkan, hewan hanya memiliki jasmani dan nafsu saja, manusia harus mampu menjaga keseimbangan yang dimilikinya itu supaya menjadi mulia. Apabila manusia mengutamakan nafsunya maka ia turun derajat seperti hewan.

Selain rohani manusia dibekali akal dan pikiran supaya dapat membedakan yang baik dan yang buruk.

Penelitian ini adalah untuk menganalisis kestabilan sistem *double pendulum* terbalik dan menstabilkan sistem *double pendulum* terbalik dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Sehingga penulis merumuskan judul untuk skripsi ini yaitu “*Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Double Pendulum Terbalik pada Kereta Menggunakan Metode Linear Quadratic Regulator (LQR)*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka rumusan masalah yang dibahas adalah sebagai berikut:

- 1) Bagaimana menstabilkan *double pendulum* terbalik dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR)?
- 2) Bagaimana analisis kestabilan dari persamaan *double pendulum* terbalik?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) Untuk mengetahui cara menstabilkan *double pendulum* terbalik dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).
- 2) Untuk mengetahui kestabilan dari persamaan *double pendulum* terbalik.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan skripsi ini adalah hasil yang diperoleh dari penelitian diharapkan dapat menjelaskan bagaimana analisis kestabilan optimal kontrol *double* pendulum terbalik serta dapat menjadi inspirasi untuk penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan *double* pendulum terbalik.

1.5 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tidak meluas dan menyimpang dari pembahasan maka perlu diberikan suatu batasan masalah. Batasan masalah pada skripsi ini sebagai berikut:

1. *Double* pendulum terbalik bersifat tidak stabil.
2. Optimal kontrol yang digunakan adalah metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR)

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*). Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) Persamaan *Lagrange*, mempelajari dan memahami persamaan *Lagrange*.
- 2) Analisis karakteristik pada sistem yaitu kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dengan menentukan nilai rangenya.
- 3) Mensubstitusikan sistem persamaan *double* pendulum terbalik ke dalam *state space*.

- 4) Menstabilkan *double* pendulum terbalik dengan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).
- 5) Membuat kesimpulan dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah dan mudah dipahami mengenai pokok bahasan dalam setiap bab, maka diperlukan sistematika penulisan. Berikut sistematika penulisan pada masing-masing bab:

Bab I Pendahuluan

Bagian ini menjelaskan tentang latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang fungsi *Lagrange*, analisis karakteristik pada sistem, *state space*, kontrol optimal menggunakan metode LQR. Serta membahas mengenai kajiannya dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bagian ini menjelaskan tentang semua langkah-langkah yang ada pada metode penelitian yang meliputi analisis persamaan *double* pendulum terbalik, menerapkan metode LQR pada analisis kestabilan *double* pendulum terbalik. Serta berisi tentang penjelasan dalam al-Quran dengan keseimbangan *double* pendulum terbalik.

Bab IV Penutup

Bagian ini menjelaskan tentang kesimpulan dan saran sebagai acuan untuk penelitian berikutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan *Lagrange*

2.1.1 Metode *Lagrange*

Persamaan gerak partikel yang dinyatakan oleh persamaan *Lagrange* dapat diperoleh dengan meninjau energi kinetik dan energi potensial partikel tanpa perlu meninjau gaya yang beraksi pada partikel. Energi kinetik partikel dalam koordinat kartesian adalah fungsi dari kecepatan, energi potensial partikel yang bergerak dalam medan gaya konservatif adalah fungsi dari posisi. Jika didefinisikan *Lagrangian* sebagai selisih antara energi kinetik dan energi potensial (Rafsenjani, dkk, 2013).

2.1.2 Koordinat Umum

Persamaan gerak suatu sistem dapat dirumuskan dalam sejumlah sistem koordinat yang berbeda. Tetapi n koordinat bebas adalah perlu untuk menyatakan gerak sistem dengan n derajat bebas. Koordinat bebas ini disebut koordinat umum dan dinyatakan dengan huruf q_k (William, 1986).

Posisi sebuah partikel dalam 1 ruang dapat dinyatakan dengan menggunakan tiga jenis koordinat, dapat berupa koordinat kartesian, koordinat polar atau koordinat silinder. Jika partikel bergerak pada sebuah bidang, atau pada sebuah permukaan yang terbatas, maka hanya dibutuhkan dua koordinat untuk menyatakan posisinya, sedangkan untuk partikel yang bergerak pada sebuah garis lurus atau pada lintasan lengkung cukup dengan menggunakan satu koordinat saja (Rafsenjani, dkk, 2013).

Jika sistem yang ditinjau mengandung N partikel, maka diperlukan paling kurang $3N$ koordinat untuk menyatakan posisi semua partikel. Secara umum, terdapat n jumlah minimum koordinat yang diperlukan untuk menyatakan konfigurasi sistem. Koordinat-koordinat tersebut dinyatakan dengan

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

yang disebut dengan koordinat umum. Koordinat q_k dapat saja berupa sudut atau jarak. Tiap koordinat dapat berubah secara bebas terhadap lainnya (*holonomic*). Jumlah koordinat n dalam hal ini disebut dengan derajat kebebasan sistem tersebut (Rafsenjani, dkk, 2013)

Dalam sistem yang non *holonomic*, masing-masing koordinat tidak dapat berubah secara bebas satu sama lain, yang berarti bahwa banyaknya derajat kebebasan adalah lebih kecil dari jumlah minimum koordinat yang diperlukan untuk menyatakan konfigurasi sistem. Salah satu contoh sistem non *holonomic* adalah sebuah bola yang dibatasi meluncur pada sebuah bidang kasar. Lima koordinat diperlukan untuk menyatakan konfigurasi sistem, yakni dua koordinat untuk menyatakan posisi pusat bola dan tiga koordinat untuk menyatakan perputarannya. Dalam hal ini, koordinat-koordinat tersebut tidak dapat berubah semuanya secara bebas. Jika bola tersebut menggelinding, paling kurang dua koordinat mesti berubah. Dalam pembahasan selanjutnya akan membatasi diri pada sistem *holonomic* (Rafsenjani, dkk, 2013).

Untuk partikel tunggal, fungsi koordinat umum lebih mudah diungkapkan dengan menggunakan koordinat Kartesius.

$x = x(q)$ (satu derajat kebebasan – gerak pada sebuah kurva)

$x = x(q_1, q_2)$ (dua derajat kebebasan – gerak pada sebuah permukaan)

$$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{(tiga derajat kebebasan – gerak pada sebuah bidang)} \\ & z = z(z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

Misalkan q berubah dari harga awal (q_1, q_2, \dots) menuju harga $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots)$. Perubahan koordinat Kartesius yang bersesuaian adalah

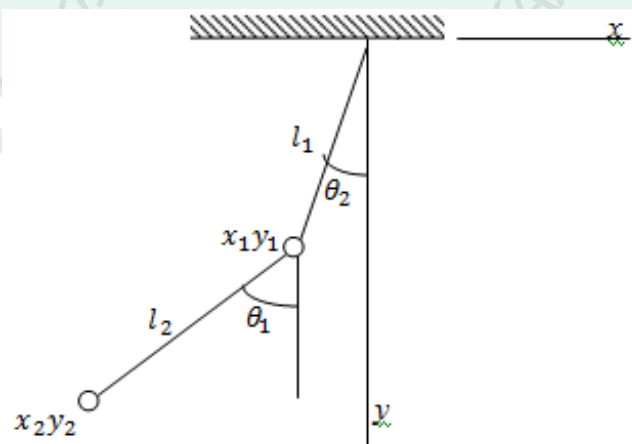
$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

Turunan parsial $\frac{\partial y}{\partial q_1}$ dan seterusnya adalah fungsi dari q (Rafsenjani, dkk, 2013).

Posisi pendulum ganda seperti terlihat pada Gambar 2.1. Pendulum ganda hanya mempunyai dua derajat kebebasan dan sudut θ_1 dan θ_2 dengan lengkap menetapkan posisi m_1 dan m_2 . Jadi θ_1 dan θ_2 adalah koordinat umum yaitu $\theta_1 = q_1$ dan $\theta_2 = q_2$ (William, 1986:238).



Gambar 2.1 Pendulum Ganda

2.1.3 Gaya pada Sistem Koordinat Umum

Jika sebuah partikel mengalami pergeseran sejauh $\delta \mathbf{r}$ dibawah pengaruh sebuah gaya aksi \mathbf{F} , gaya yang bekerja padanya dinyatakan dengan

$$\delta W = F \delta r = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana dinyatakan dengan

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i$$

Tampak bahwa persamaan di atas tidak hanya berlaku untuk partikel tunggal, tetapi juga untuk sistem banyak partikel. Untuk satu partikel, harga i adalah dari 1 sampai 3. Untuk N partikel, harga i adalah dari 1 sampai $3N$ (Rafsenjani, dkk, 2013).

Jika pertambahan δx_i dinyatakan dalam koordinat umum, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_i \left(F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis

$$\delta W = \sum_k Q_k \delta q_k$$

dimana

$$Q_k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

Besaran Q_k yang didefinisikan menurut persamaan di atas disebut dengan *gaya umum*. Oleh karena perkalian $Q_k \delta q_k$ memiliki dimensi usaha, maka dimensi

Q_k adalah gaya jika q_k menyatakan jarak, dan dimensi Q_k adalah torka jika q_k menyatakan sudut (Rafsenjani, dkk, 2013).

2.1.4 Gaya Umum untuk Sistem Konservatif

Untuk mencari persamaan diferensial gerak sebuah benda yang dinyatakan dalam koordinat rampatan, kita dapat memulai dengan persamaan berikut:

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

dan selanjutnya kita akan mencoba menyatakan persamaan tersebut dalam q . Pendekatan pertama yang akan kita pakai adalah dari persamaan energi. Kita akan menghitung energi kinetik T dalam bentuk koordinat Kartesian dan selanjutnya kita akan nyatakan dalam koordinat rampatan dan turunannya terhadap waktu. Energi kinetik T dari sebuah sistem yang mengandung N partikel dapat dinyatakan dengan

$$T = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right]$$

atau dalam bentuk yang lebih ringkas ditulis sebagai berikut:

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

Jika sebuah gaya bekerja pada sebuah partikel dalam sebuah medan gaya konservatif, besarnya gaya tersebut dinyatakan oleh persamaan

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

dimana V menyatakan sebuah fungsi energi potensial. Oleh karena itu perumusan gaya umum dapat dinyatakan

$$Q_k = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

merupakan turunan parsial V terhadap q_k , maka

$$Q_k = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} \right)$$

Misalkan, menggunakan koordinat polar, $q_1 = r$; $q_2 = \theta$, maka gaya umum dapat dinyatakan dengan $Q_r = \frac{\partial V}{\partial r}$; $Q_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta}$. Jika V merupakan fungsi r saja (dalam kasus gaya sentral), maka $Q_\theta = 0$ (Rafsenjani, dkk, 2013).

Persamaan diferensial gerak untuk suatu sistem konservatif dapat dicari jika ketahu fungsi *Lagrange* dalam bentuk koordinat tertentu yaitu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

di sisi lain, jika gaya rampatan tidak konservatif, misalkan nilainya adalah Q'_k , maka dapat menuliskan:

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Selanjutnya dapat mendefinisikan sebuah fungsi *Lagrange* $L = T - V$, dan menuliskan persamaan diferensial gerak dalam bentuk (Rafsenjani, dkk, 2013):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

2.1.5 Prosedur Umum Metode *Lagrange*

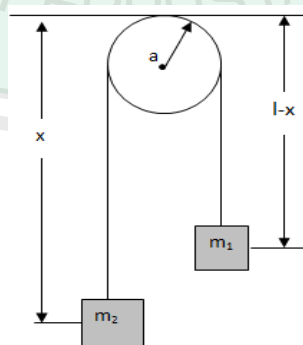
Prosedur umum yang dipakai untuk mencari persamaan diferensial gerak dari sebuah sistem adalah sebagai berikut:

1. Pilih sebuah kumpulan koordinat untuk menyatakan konfigurasi sistem.

2. Cari energi kinetik T sebagai fungsi koordinat tersebut beserta turunannya terhadap waktu.
3. Jika sistem tersebut konservatif, cari energi potensial V sebagai fungsi koordinatnya, atau jika sistem tersebut tidak konservatif, cari koordinat umum Q_k .
4. Persamaan diferensial gerak selanjutnya dapat dicari dengan menggunakan persamaan di atas.
5. Beberapa contoh pemakaian metode *Lagrange* berikut (Rafsenjani, dkk, 2013).

2.1.6 Contoh Pemakaian Persamaan *Lagrange*

Sebuah pesawat *Atwood* yang terdiri dari dua benda bermassa m_1 dan m_2 dihubungkan oleh tali homogen yang panjangnya l m dan dilewatkan pada katrol (lihat Gambar 2.2). Sistem ini memiliki satu derajat kebebasan. Kita ambil variabel x untuk menyatakan konfigurasi sistem, dimana x adalah jarak vertikal dari katrol ke massa m_1 seperti yang ditunjukkan pada gambar (Rafsenjani, dkk, 2013).



Gambar 2.2 Pesawat *Atwood* Tunggal

Kecepatan sudut katrol adalah $\frac{\dot{x}}{a}$, dimana a adalah jari-jari katrol. Energi kinetik sistem ini adalah :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

dimana I adalah momen inersia katrol. Energi potensial sistem adalah :

$$V = -m_2 gx - m_1 g(l - x)$$

Anggap bahwa pada sistem tidak bekerja gaya gesekan, sehingga fungsi

Lagrangian adalah

$$L = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)x + m_2 gl$$

dan persamaan diferensial adalah

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

yang berarti bahwa,

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \ddot{x} = g(m_1 - m_2)$$

atau,

$$\ddot{x} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/a^2}$$

Nampak bahwa jika $m_1 > m_2$, maka m_1 akan bergerak turun, sebaliknya jika $m_1 < m_2$ maka m_1 akan bergerak naik dengan percepatan tertentu (Rafsenjani, dkk, 2013).

2.2 State Space

State atau keadaan suatu dinamik adalah sekelompok variabel terkecil (disebut variabel keadaan) sehingga pengetahuan dari variabel tersebut pada $t = t_0$, bersama masukan untuk $t \geq t_0$, secara lengkap menentukan kelakuan sistem untuk $t \geq t_0$ (Ogata, 1994).

Jadi, *state* dari suatu sistem dinamik pada waktu t ditentukan secara unik oleh *state* saat t_0 dan masukan pada $t \geq t_0$, serta kebebasan *state* dan masukan sebelum t_0 . Perhatikan bahwa untuk sistem *linear* tidak berubah waktu, biasanya dipilih acuan $t_0 = 0$ (Ogata, 1994).

Variabel keadaan dari suatu sistem dinamik adalah variabel yang membentuk variabel terkecil yang menentukan keadaan sistem dinamik. Jika paling sedikit n variabel x_1, x_2, \dots, x_n diperlukan untuk menggambarkan secara lengkap dinamika sistem (jadi jika diberikan masukan untuk $t \geq t_0$ dan keadaan awal pada $t = t_0$ diketahui, keadaan selanjutnya dari sistem dapat ditentukan secara lengkap). Maka sekelompok variabel tersebut disebut variabel keadaan (Ogata, 1994).

Jika n diperlukan variabel untuk menggambarkan secara lengkap kelakuan sistem, maka n variabel keadaan tersebut dapat dipandang sebagai n komponen vektor x dan disebut vektor keadaan. Vektor keadaan adalah suatu vektor yang menentukan secara unik keadaan sistem $x(t)$ untuk $t \geq t_0$, sekali keadaan pada $t = t_0$ diberikan maka *input* $u(t)$ untuk $t \geq t_0$ diketahui (Ogata, 1994).

Ruang n dimensi yang sumbu koordinatnya sumbu x_1 , sumbu x_2 , ..., sumbu x_n disebut ruang keadaan. Suatu keadaan dapat dinyatakan dengan satu titik dalam ruang keadaan (Ogata, 1994).

Persamaan ruang keadaan (*state-space equation*) dari sistem dinamik mengandung tiga hal, yaitu variabel *input* (*input variable*), variabel *output* (*output variable*) dan variabel keadaan (*state variable*). Persamaan ruang keadaan dari

suatu sistem dapat bervariasi, sesuai dengan definisi awal dari variabel-variabel dari suatu sistem.



Gambar2.3 Sistem Dinamika

Perhatikan sistem dinamika yang ditunjukkan dalam Gambar2.3 Sistem Dinamika dalam diagram tersebut panah tebal berarti bahwa sinyal mempunyai kuantitas vektor. Pada sistem ini keluaran $y(t)$ untuk $t \geq t_1$ tergantung pada nilai $y(t_1)$ dan masukan $u(t)$ untuk $t \geq t_1$. Sistem dinamika harus melibatkan elemen-elemen yang mengingat nilai masukan untuk $t \geq t_1$. Karena integrator dalam sistem kontrol waktu berkesinambungan bekerja sebagai alat pengingat (*memory device*), maka keluaran dari integrator demikian dianggap sebagai variabel yang menentukan kedudukan internal dari sistem dinamika. Jadi, keluaran dari integrator bekerja sebagai variabel kedudukan. Jumlah variabel kedudukan untuk menentukan dinamika sistem secara lengkap adalah sama dengan jumlah integrator yang terlibat dalam sistem (Ogata, 1997).

Anggap sistem dengan banyak masukan, banyak keluaran melibatkan n integrator. Anggap juga bahwa r masukan $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ dan m keluaran $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Tentukan n keluaran integrator sebagai variabel keadaan $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Sehingga sistem dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Keluaran $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ diberikan oleh

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

⋮

$$y_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \text{ (Ogata, 1997)}. \quad (2.2)$$

Jika didefinisikan

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

Maka persamaan (2.1) dan (2.2) menjadi

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \text{ (Ogata, 1997)} \quad (2.3)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \text{ (Ogata, 1997)} \quad (2.4)$$

Dengan persamaan (2.3) adalah persamaan keadaan dan persamaan (2.4) adalah persamaan keluaran. Bila fungsi vektor f dan g eksplisit terhadap waktu t , maka sistem disebut sistem yang bervariasi terhadap waktu (Ogata, 1997).

Bila persamaan (2.3) dan (2.4) dilinearkan terhadap keadaan operasi, maka diperoleh persamaan keadaan *linear* dan persamaan keluaran

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\quad (2.5)$$

dengan $A(t)$ disebut matriks keadaan, $B(t)$ matriks masukan, $C(t)$ matriks keluaran, dan $D(t)$ matriks transmisi langsung (Ogata, 1997).

Bila fungsi vektor f dan g tidak eksplisit terhadap waktu t , maka disebut dengan sistem invariant waktu. Dalam hal ini persamaan (2.3) dan (2.4) dapat disederhanakan menjadi (Ogata, 1997):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}\quad (\text{Ogata, 1997})$$

2.3 Karakteristik Analisis pada Sistem

2.3.1 Kestabilan

Suatu sistem dinamik dikatakan stabil apabila sistem tersebut dapat kembali ke posisi setimbangnya semula, apabila diberikan *input* lalu *input* tersebut dihilangkan. Secara matematik, hal ini dapat dilihat dari posisi akar-akar karakteristik sistem tersebut. Apabila semua akar karakteristiknya negatif, maka sistemnya stabil dan apabila minimal terdapat satu akar karakteristik yang positif, maka sistemnya tidak stabil.

Metode pencarian akar-akar karakteristik dalam sistem pengendalian *input* dan *output* adalah menggunakan *eigen value*. Pencarian harga *eigen value* adalah dengan mengurai dari matrik keadaan A yang dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.6)$$

dengan:

λ = akar-akar karakteristik

I = matriks identitas

A = matriks keadaan

2.3.2 Keterkendalian

Diberikan sistem linier invarian waktu yang disajikan oleh persamaan

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Definisi 1: Sistem linier (2.5) dikatakan terkontrol bila untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $u(t)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 sebarang keadaan akhir $x(t_1) = x_1$ dengan waktu akhir t_1 hingga. Dari pengertian sistem terkendali yang diberikan dalam definisi 1, hal ini berarti bahwa bila diberikan sebarang keadaan awal $x(0)$ dan sebarang keadaan akhir $x(t_1)$ akan selalu ada pengontrol $u(t)$ yang akan mentransfer keadaan awal $x(0)$ ke keadaan akhir yang diinginkan $x(t_1)$ dalam waktu yang berhingga t_1 . Perlu diingat bahwa sebarang keadaan awal dan sebarang keadaan akhir ini terdiri dari n komponen dan apabila semua komponen dari keadaan awal ini bisa dikontrol ke n komponen yang sesuai keadaan akhir, maka sistem bisa terkontrol. Sedangkan maksud dari keberadaan pengontrol $u(t)$ yang tidak dibatasi adalah tidak disyaratkan apa-apa kecuali hanya untuk mentransfer sebarang keadaan awal yang diberikan ke sebarang keadaan akhir yang diinginkan dalam waktu yang berhingga. Dalam kajian kontrol optimal pemilihan pengontrol $u(t)$ ini merupakan

pengontrol yang mentransfer keadaan awal ke keadaan akhir yang diinginkan dengan energi yang sekecil mungkin (minimum) (Subiono, 2010).

Penyelesaian dari $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ diberikan oleh

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-r)} Bu(r)dr \quad (2.7)$$

bila sistem terkontrol, yaitu ada masukan $u(t)$ yang mentransfer x_0 ke x_1 dalam waktu berhingga $t = t_1$. Dalam hal ini x_1 diberikan oleh

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-r)} Bu(r)dr \quad (2.8)$$

Teorema berikut adalah memberikan syarat perlu dan cukup sistem (2.5) adalah terkontrol. Ada dua bagian dari teorema ini, yang pertama adalah untuk menjamin keadaan pengontrol $u(t)$ untuk mentransfer sebarang keadaan awal ke sebarang keadaan akhir yang diinginkan dalam waktu berhingga sedangkan bagian yang kedua adalah untuk menjamin bahwa semua n komponen dari keadaan awal bisa dikontrol ke n komponen yang bersesuaian dari keadaan akhir yang diinginkan (Subiono, 2010).

Teorema 1: Syarat perlu dan cukup sistem (2.5) terkontrol adalah:

1. $w(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T r} d\tau$ non-singular
2. Matriks: $Ktr = (B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B)$ mempunyai rank sama dengan n

Bukti

1. Bila $w(0, t_1)$ non-singular

Diberikan sebarang keadaan awal $x(0) = x_0$ dan keadaan akhir x_1 pilih masukan

$$u(t) = -B^T e^{-AT_t} w^{-1}(0, t_1) [x_0 - e^{-At_1} x_1] \quad (2.9)$$

Dengan masukan ini dan kita gunakan persamaan (2. 6), diperoleh:

$$\begin{aligned}
x_1 &= e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-r)} Bu(r)dr \\
&= e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-r)} B\{-B^T e^{-At} w^{-1}(0, t_1)[x_0 - e^{-At_1}x_1]\}dr \\
&= e^{At_1}x_0 - e^{At_1} \left[\int_0^{t_1} e^{-Ar} BB^T e^{-A^T r} dr \right] w^{-1}(0, t_1)x_0 \\
&\quad + e^{At_1} \left[\int_0^{t_1} e^{-Ar} BB^T e^{-A^T r} dr \right] w^{-1}(0, t_1)x_1 \\
&= e^{At_1}x_0 - e^{At_1}w^{-1}(0, t_1)x_0w^{-1}(0, t_1)x_1 \\
&\quad + e^{At_1}w^{-1}(0, t_1)x_0w^{-1}(0, t_1)x_1 \\
&= e^{At_1}x_0 - e^{At_1}x_0 + x_1 \\
&= x_1
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa dengan masukan $u(t)$ yang diberikan dalam (2.9) sebarang keadaan awal x_0 ditransfer ke sebarang keadaan akhir $x(t_1) = x_1$, jadi sistem terkontrol. Sebaliknya, andaikan $w(0, t_1)$ singular tetapi sistem terkontrol. Maka untuk $t_1 > 0$ pilih vektor $\alpha \neq 0$ sedemikian hingga

$$\alpha^T w(0, t_1)\alpha = \int_0^{t_1} \alpha^T e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T \tau} \alpha d\tau = 0 \quad (2.10)$$

Untuk setiap t dengan $0 < t \leq t_1$ kita peroleh:

$$\alpha^T e^{-At} B = 0 \quad (2.11)$$

Dari asumsi sistem terkontrol, maka untuk setiap keadaan awal x_0 ada $u(t)$ yang memenuhi (2.7), oleh karena itu kita peroleh:

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

Jika kedua ruas persamaan diatas kita kalikan dengan $\alpha^T e^{-At_1}$, diperoleh:

$$\alpha^T e^{-At_1}x_1 = (\alpha^T e^{-At_1}) \left[e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-r)} Bu(\tau)d\tau \right]$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha^T e^{-At_1})e^{At_1}x_0 + (\alpha^T e^{-At_1}) \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\
&= \alpha^T x_0 + \int_0^{t_1} 0u(\tau) d\tau \\
&= \alpha^T x_0
\end{aligned}$$

atau

$$\alpha^T [x_0 - e^{-At_1}x_1] = 0$$

Dipilih $x_0 = e^{-At_1}x_1 + \alpha$, maka diperoleh persamaan

$$\alpha^T [e^{-At_1}x_1 + \alpha - e^{-At_1}x_1] = 0$$

$$\alpha^T \alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

Dari persamaan di atas diperoleh $\alpha = 0$, ini bertentangan dengan kenyataan $\alpha \neq 0$, jadi haruslah $w(0, t_1)$ non-singular (Subiono,2010).

2. Asumsikan rank $Ktr = n$

Andaikan sistem tak-terkontrol, maka $w(0, t_1)$ singular. Jadi, diperoleh suatu persamaan yang serupa pada (2.11). penurunan persamaan (2.11) terhadap t sampai k kali, dengan $k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$ dan pada $t = 0$ diperoleh:

$$\alpha^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots (n-1) \quad (2.12)$$

Jadi:

$$\alpha^T (B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B) = \alpha^T Ktr = 0 \quad (2.13)$$

Karena $\alpha \neq 0$ maka rank $Ktr < n$. Hal ini bertentangan dengan kenyataan rank $Ktr = n$, jadi haruslah sistem terkontrol. Sebaiknya, asumsikan sistem terkontrol tetapi rank $Ktr < n$. Dari asumsi, kita pilih $\alpha \neq 0$ yang memenuhi (2.13). hal ini ekuivalen dengan (2.12). Dari teorema ‘Hamilton-

Cayley” $A^{(n+1)}$ dapat diuraikan sebagai kombinasi linier dari $I, A, A^2, \dots, A^{(n-1)}$.

Jadi $e^{-A\tau}$ juga dapat diuraikan sebagai kombinasi linier dari

$$I, A, A^2, \dots, A^{(n-1)}$$

Dari hal ini diperoleh:

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad \alpha \neq 0$$

Oleh karena itu kita peroleh:

$$0 = \int_0^{t_1} \alpha^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} \alpha d\tau = \alpha^T w(0, t_1) \alpha$$

Karena $\alpha \neq 0$, maka $w(0, t_1)$ singular. Jadi sistem tidak terkontrol, hal ini bertentangan dengan asumsi sistem terkontrol. Jadi haruslah rank $Ktr = n$. Matriks terkontrol Ktr diatas ditentukan oleh pasangan matriks (A, B) , adakalanya juga disebutkan matriks terkontrol dari sistem dengan (A, B) (Subiono, 2010).

2.3.3 Keteramatan

Sistem dikatakan teramati sempurna jika setiap keadaan awal dapat ditentukan dari pengamatan *output* selama selang waktu terhingga. Oleh karena itu sistem teramati sempurna jika setiap transisi keadaan akhirnya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran. Konsep keteramatan berguna dalam menyelesaikan persoalan rekonstruksi variabel keadaan yang tidak terukur.

Definisi 2: Bila setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem (2.22) dari waktu $t = 0$ ke $t = t_1$ maka sistem dikatakan “teramati” (Subiono, 2010).

Masukan $u(t)$ diganti dengan keluaran $y(t)$, yaitu dalam terminologi keterkontrolan kita mengontrol sebarang keadaan awal x_0 dengan suatu masukan

$u(t)$ ke sebarang keadaan akhir x_1 dimana $0 < t \leq t_1$, sedangkan dalam terminologi keteramatan diamati sebarang keadaan awal x_0 lewat sebarang pengukuran keluaran $y(t)$ pada interval waktu $0 < t \leq t_1$.

Keluaran sistem (2.7) diberikan oleh:

$$y(t) = Ce^{A(t)}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-r)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (2.14)$$

Bila diukur keluaran $y(t)$ pada $t = 0$, maka diperoleh:

$$y(0) = Cx_0 + Du(0) \quad (2.15)$$

Terlihat keadaan awal x_0 muncul dalam persamaan (2.15).selanjutnya

bila kita ukur keluaran $y(t)$ pada t_s dengan $0 < t_s \leq t_1$, diperoleh:

$$\begin{aligned} y(t_s) &= Ce^{A(t_s)}x_0 + C \int_0^{t_s} e^{A(t_s-r)}Bu(\tau)d\tau + Du(t_s) \\ &= Cx(t_s) + Du(t_s) \end{aligned}$$

Bila keadaan awal x_0 dapat diamati, maka keadaan ini juga akan muncul pada pengukuran keluaran $y(t_s)$, yaitu

$$Cx(t_s) + Du(t_s) \quad (2.16)$$

Sehingga dari persamaan (2.15) dan (2.16) diperoleh:

$x_0 = x(t_s)$, dengan $0 < t_s \leq t_1$ (Subiono, 2010).

Berikut ini kita definisikan suatu matriks:

$$m(0, t) = \int_0^t e^{A^T r} C^T C A^r dr \quad (2.17)$$

Bila diperhatikan matriks $m(0, t)$ ini mempunyai bentuk yang hampir serupa dengan matriks $w(0, t)$ yang muncul pada kajian keterkontrolan. Matriks A dalam $m(0, t)$ muncul sebagai $-A^T$ dalam $w(0, t)$ sedangkan matriks C dalam $m(0, t)$ muncul sebagai B^T dalam $w(0, t)$.

Selanjutnya diberikan suatu pernyataan dalam suatu teorema berikut ini yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem teramati (Subiono, 2010).

Teorema 2: Syarat perlu dan syarat cukup sistem (2.7) teramati adalah:

1. Matriks $m(0, t)$ pada (2.17) non-singular
2. Matriks keteramatan

$$Ter = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

mempunyai rank sama dengan n .

Seperti halnya matriks Ktr , adakalanya matriks keteramatan Ter dinotasikan dengan (C, A) (Subiono, 2010).

2.4 Sistem Kontrol Optimal Menggunakan Metode *Linear Quadratic Regulator*(LQR)

Sistem akan optimal bila indeks performansinya adalah minimum. Agar sistem tersebut dapat dikontrol, maka perlu dibuat model matematis yang menghubungkan antara masukan (*input*) dan keluaran (*output*). Pada sistem kontrol optimal, model yang banyak digunakan adalah persamaan keadaan (*state space*). Teori *Regulator Optimal* dalam beberapa proses, variabel yang dikontrol akan mengalami deviasi karena adanya kendala. Regulator kontrol dirancang untuk melakukan kompensasi terhadap kendala. Dalam bagian ini akan meninjau desain sistem kontrol stabil yang didasarkan pada indeks kinerja kuadratik. Sistem kontrol yang akan tinjau disini mengikuti definisi, yaitu (Ogata, 1997):

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.18}$$

dengan

x = vektor keadaan (n-vektor)

u = vektor kontrol (r-vektor)

A = matriks konstan $n \times n$

B = matriks konstan $n \times r$

Dalam perancangan sistem kontrol, tertarik dalam memilih vektor kontrol $u(t)$ yang memungkinkan indeks kinerja yang diberikan dapat diminimumkan. Ini dapat dibuktikan dengan indeks kinerja kuadratik, yang batas integrasinya adalah 0 dan ∞ , misalnya

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt \quad (2.19)$$

disini $L(x, u)$ adalah fungsi kuadratik atau fungsi hermitian x dan u , akan menghasilkan hukum kontrol linier, yaitu

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.20)$$

disini K adalah matriks $r \times n$, atau

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

oleh karena itu, disain sistem kontrol optimal dan sistem regulator optimal yang didasarkan pada indeks kinerja kuadratik seperti itu dapat mengurangi penentuan unsur matriks K (Ogata, 1997).

Selanjutnya, akan ditinjau masalah penentuan vektor kontrol optimal $u(t)$ untuk sistem yang dijelaskan oleh persamaan (2.13) dan indeks kinerja yang diberikan oleh

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.21)$$

dengan Q adalah fungsi hermitian matriks semi definit positif, R adalah matriks definit positif dan u tidak terbatas. Perhatikan bahwa suku kedua pada ruas kanan persamaan (2.16) dihitung untuk mengeluarkan sinyal kontrol (Ogata, 1997).

Seperti akan di lihat nanti, hukum kontrol *linear* yang diberikan oleh persamaan (2.16) adalah hukum kontrol optimal. Oleh sebab itu jika unsur matriks K yang tidak diketahui ditentukan sedemikian rupa sehingga dapat meminimumkan indeks kinerjanya, maka $u(t) = -Kx(t)$ akan optimal untuk setiap keadaan asal $x(0)$ (Ogata, 1997).

Dengan substitusi persamaan (2.20) ke persamaan (2.18), maka

$$\dot{x} = Ax + BKu = (A - BK)x$$

dalam turunan berikut, menganggap bahwa matriks $A - BK$ stabil, atau nilai $eigen(A - BK)$ mengandung bagian bilangan *real negative*. Dengan mensubstitusikan persamaan $u(t) = -Kx(t)$ ke dalam persamaan (2.16) maka akan dihasilkan matriks umpan balik K diperoleh dengan memecahkan persamaan *Riccati*. Salah satu kendala penggunaan metode LQR adalah pemecahan persamaan *Riccati* yang tidak mudah jika diselesaikan secara manual, maka dibutuhkan bantuan komputer, dalam hal ini dengan paket program MATLAB (Ogata, 1997).

Controller Algebraic Riccati Equation (CARE) untuk sistem *Linear, time-invariant*, dapat diturunkan persamaan Aljabar Riccati untuk mencari solusi optimal sebagai berikut (Ogata, 1997):

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T u R) dt$$

Formulasi dan solusi masalah LQR untuk waktu *continuous*, dengan umpan balik keadaan dituliskan sebagai berikut:

$$u = -Kx$$

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.22)$$

Syarat cukup untuk kontrol optimal matriks P harus memenuhi:

$$\frac{dP}{dt} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.23)$$

Contoh:

Dengan asumsi kontrol untuk (Ogata, 1997):

$$u(t) = -Kx(t)$$

Menentukan optimal memperoleh umpan balik matriks K sedemikian rupa sehingga indeks kinerja berikut ini di minimalkan:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt$$

dengan

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu \geq 0)$$

tahu bahwa persamaan *state* yaitu:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

akan ditunjukkan penggunaan persamaan Riccati dengan pengurangan matriks dalam desain sistem kontrol yang optimal, yaitu:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Memperhatikan bahwa matriks A adalah real dan matriks Q adalah real simetris, serta matriks P adalah matriks real simetris. Oleh karena itu, persamaan ini dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga mendapatkan tiga persamaan berikut:

$$1 - p_{12}^2 = 0$$

$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$\mu + p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

Memecahkan tiga persamaan simultan untuk p_{11} , p_{12} , dan p_{22} , membutuhkan P menjadi definit positif, sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu + 2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix}$$

Mengacu persamaan sebelumnya maka diperoleh umpan balik matriks optimal K sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K &= R^{-1}B^T P \\ &= [1][0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= [p_{12} \quad p_{22}] \\ &= [1 \quad \sqrt{\mu + 2}] \end{aligned}$$

Dengan demikian, sinyal kontrol optimal adalah:

$$u = -Kx = -x_1 - \sqrt{\mu + 2}x_2$$

Perhatikan bahwa hukum kontrol yang diberikan menghasilkan hasil yang optimal untuk setiap keadaan awaldi bawah indeks kinerja yang diberikan. Karena persamaan karakteristiknya adalah:

$$|sI - A + BK| = s^2 + (-x_1 - \sqrt{\mu + 2})s + 1 = 0$$

Jika $\mu = 1$ maka

$$s = -0.866 + j \quad \text{dan} \quad s = -0.866 - j$$

Ini sesuai dengan *closed loop* yang diinginkan pada saat $\mu = 1$ (Ogata, 1997).

Manusia merupakan makhluk Allah yang diciptakan dalam sebaik-baik bentuk. Bentuk tubuhnya melebihi keindahan bentuk tubuh hewan yang lain. Manusia diciptakan dilengkapi dengan akal. Maka dengan keseimbangan sebaik-baik tubuh dan pedoman pada akalnya itu dapatlah dia hidup dipermukaan bumi ini menjadi pengatur. Dalam firman Allah pada surat al-Infithaar ayat 7 yang berbunyi:

الَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّاكَ فَعَدَلَكَ ﴿٧﴾

“Yang telah menciptakan kamu, lalu menyempurnakan kejadianmu, lalu menjadikan (susunan tubuh) mu seimbang” (Q.S. al-Infithaar : 7).

Kata “yang telah menciptakan kamu” yaitu yang mengatur penciptaanmu dari setetes air mani. “lalu menyempurnakan kejadianmu” dalam rahim ibu, kemudian menjadikan dua tangan, dua kaki, sepasang mata, serta seluruh anggota tubuhmu (al-Qurthubi, 2009).

Dalam tafsir al-muyassar menjelaskan bahwa Allah telah menciptakan tubuh kalian dengan susunan yang sangat sempurna, dengan anggota tubuh yang lengkap, dan bentuk tubuh yang serasi. Dia menyusun kalian dalam bentuk yang sangat bagus dan menakjubkan. Dia memilihkan yang terbaik untuk bentuk kalian

dan juga membedakan antara satu manusia dengan manusia yang lainnya dari segi bentuk, suara dan warna kulit.

Kata “seimbang” berarti menjadikan anggota tubuh manusia seimbang, serasi sehingga tampak harmonis, dapat juga berarti menjadikanmu memiliki kecenderungan untuk bersikap adil. Memang keadilan menjadi dambaan manusia. Di sisi lain jika terjadi gangguan pada jiwa atau kepribadian manusia, maka ketika itu kecenderungan tersebut sirna pada dirinya. Namun memahami kata *‘adalaka* dalam arti demikian, tidak sejalan dengan kandungan ayat berikutnya yang masih berbicara tentang pembentukan fisik manusia, yakni Allah membentuk manusia dalam bentuk apa saja yang dikehendaki-Nya antara lain dalam bentuk cantik atau buruk, gagah atau jelek, pria atau wanita, tinggi atau pendek. Sehingga, dalam apapun bentuk yang dikehendaki-Nya (al-Mishbah, 2003)

Kata “seimbang” yakni menjadikanmu ciptaan yang lurus, sepadan dan seimbang dan dapat berarti menjadikan anggota tubuh manusia seimbang, seperti dikatakan (ini sesuatu yang lurus), qira’ah ini adalah qira’ah mayoritas ulama, dan qira’ah yang dipilih oleh Abu Ubaid dan Abu Hatim. Al Farra’ dan Abu ubaid mengatakan dalilnya adalah firman Allah dalam QS. At-Tin : 4 (al-Qurthubi, 2009)

لَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ فِي أَحْسَنِ تَقْوِيمٍ ﴿٤﴾

“*Sesungguhnya kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya*”. (QS. At-Tin : 4).

Allah SWT dalam ayat ini menegaskan secara eksplisit bahwa manusia itu diciptakan dalam bentuk yang paling sempurna. Ar-Raghib Al Asfahani, seorang pakar bahasa al-Quran menyebutkan bahwa kata *taqwiim* pada ayat ini merupakan syarat tentang keistimewaan manusia dibanding binatang, yaitu

dengan dikaruniannya akal, pemahaman, dan bentuk fisik yang tegak dan lurus. Jadi *ahsani taqwiim* berarti bentuk fisik dan psikis yang sebaik-baiknya (Aam, 2004).

Kalau cermati, sesungguhnya kesempurnaan manusia bukan hanya sekedar pada bentuk fisik dan psikisnya saja. Kedudukan manusia diantara makhluk Allah lainnya pun menempati tempat tertinggi, melebihi kedudukan malaikat. Firman Allah dalam QS. al- Isra : 70 (Aam, 2004)

وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِي آدَمَ وَحَمَلْنَاهُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ وَرَزَقْنَاهُمْ مِنَ الطَّيِّبَاتِ وَفَضَّلْنَاهُمْ
عَلَىٰ كَثِيرٍ مِّمَّنْ خَلَقْنَا تَفْضِيلًا

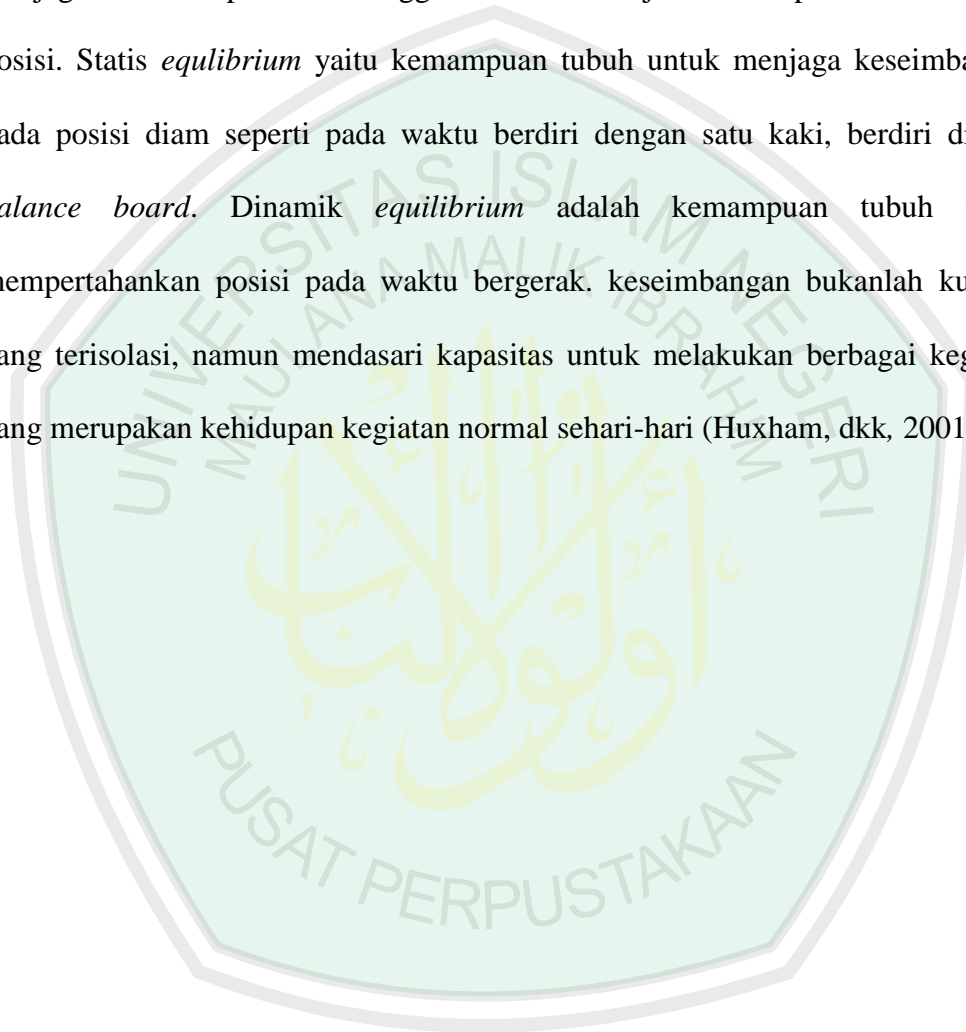
“Dan sesungguhnya kami telah memuliakan anak Adam (manusia) dan kami angkat mereka di darat dan dilaut, dan kami melebihi mereka atas makhluk-makhluk yang Kami ciptakan, dengan kelebihan yang menonjol” (QS. al- Isra : 70) (Aam, 2004)

Keseimbangan adalah kemampuan untuk mempertahankan keseimbangan tubuh ketika ditempatkan di berbagai posisi. Keseimbangan menurut O’Sullivan adalah kemampuan untuk mempertahankan pusat gravitasi pada bidang tumpu terutama ketika saat posisi tegak. Kemampuan tubuh untuk mempertahankan keseimbangan dan kestabilan postur oleh aktivitas motorik tidak dapat dipisahkan dari faktor lingkungan yang berperan dalam pembentukan keseimbangan (Irfan, 2012).

Tujuan dari tubuh mempertahankan keseimbangan adalah menyangga tubuh untuk melawan gravitasi dan faktor-faktor eksternal lain, mempertahankan pusat massa tubuh agar sejajar dan seimbang dengan bidang tumpu, serta menstabilisasi bagian tubuh ketika bagian tubuh lain bergerak. Kemampuan untuk

menyeimbangkan massa tubuh dengan bidang tumpu akan membuat manusia mampu untuk beraktivitas secara efektif dan efisien (Irfan, 2012).

Equilibrium adalah sebuah bagian penting dari pergerakan tubuh dalam menjaga tubuh tetap stabil sehingga manusia tidak jatuh walaupun tubuh berubah posisi. Statis *equilibrium* yaitu kemampuan tubuh untuk menjaga keseimbangan pada posisi diam seperti pada waktu berdiri dengan satu kaki, berdiri di atas *balance board*. Dinamik *equilibrium* adalah kemampuan tubuh untuk mempertahankan posisi pada waktu bergerak. keseimbangan bukanlah kualitas yang terisolasi, namun mendasari kapasitas untuk melakukan berbagai kegiatan yang merupakan kehidupan kegiatan normal sehari-hari (Huxham, dkk, 2001).

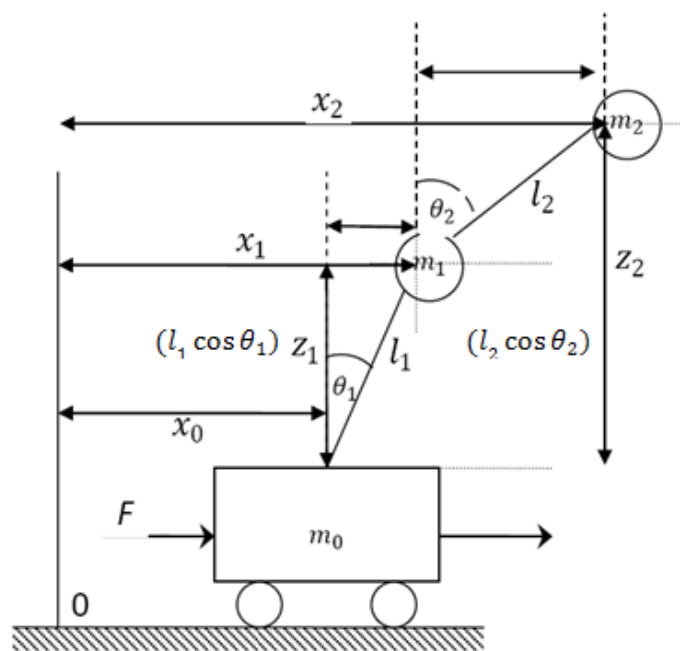


BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pemodelan Sistem *Double* Pendulum Terbalik

Pendulum terbalik merupakan sebuah bandul dengan massa bandul tersebut berada di atas titik tumpunya. Pada kasus ini titik tumpu diletakkan di tengah-tengah atas sebuah kereta yang dapat digerakkan dalam arah mendatar (horisontal). Pendulum terbalik memiliki sifat yang tidak stabil, sehingga harus di atur sedemikian rupa agar pendulum tetap tegak dengan cara memberikan gaya pada titik tumpunya atau pada kereta. *Double* pendulum terbalik merupakan modifikasi dari pendulum terbalik, yaitu dengan cara menambahkan satu pendulum lagi yang disambungkan di ujung pendulum sebelumnya. Berikut ini disajikan contoh gambar *double* pendulum terbalik pada Gambar 3.1 berikut (Narinder dan Sandeep, 2013):



Gambar 3.1 *Double* Pendulum Terbalik yang di Pasang pada Kereta

Secara ilustrasi, *double* pendulum terbalik dalam Gambar 3.1 terdiri dari

3 bagian utama, yaitu:

- a. Kereta beroda yang dapat bergerak horisontal (kiri kanan)
- b. Pendulum 1 dengan tangkainya dipasang di bagian tengah atas kereta yang dapat bergerak horisontal dengan membentuk sudut dengan arah vertikal
- c. Pendulum 2 dengan tangkainya dipasang dibagian tengah atas pendulum 1 yang dapat bergerak horisontal dengan membentuk sudut arah vertikal

Berikut ini adalah tabel tentang simbol-simbol *Double* pendulum terbalik pada kereta (Sandeep, dkk, 2012):

Tabel 3.1 Keterangan Simbol

Simbol	Keterangan	Nilai	Satuan
m_0	Massa kereta	0,8	Kg
m_1	Massa pendulum 1	0,5	Kg
m_2	Massa pendulum 2	0,3	Kg
L_1	Panjang tali pendulum 1	0,3	Meter
L_2	Panjang tali pendulum 2	0,2	Meter
J_1	Momen inersia pendulum 1	0,006	Kgm ²
J_2	Momen inersia pendulum 2	0,006	Kgm ²
x_0	Jarak tempuh kereta		Meter
x_1	Jarak tempuh pendulum 1		Meter
x_2	Jarak tempuh pendulum 2		Meter
θ_1	Posisi sudut pendulum 1 terbalik dengan garis vertical		Radian
θ_2	Posisi sudut pendulum 2 terbalik dengan garis vertical		Radian

z_1	Ketinggian vertikal pendulum 1		Meter
z_2	Ketinggian vertikal pendulum 2		Meter
F	Gaya yang diberikan pada kereta		Newton
g	Gravitasi	9,8	m/s^2

Sifat fisis *double* pendulum terbalik itu akan terlihat jelas, jika kereta diberi gaya dorong sebesar F . Sehingga akan timbul gerakan pada kereta bersama-sama dengan kedua pendulum itu sendiri. Dengan demikian terjadi proses pergerakan yang mendorong pendulum untuk bergerak horisontal dan pada akhirnya mencapai titik keseimbangan yaitu pada saat pendulum berada pada posisi vertikal.

3.2 Model fisik

Model fisik adalah deskripsi fisik dari karakteristik suatu sistem. Model fisik *double* pendulum terbalik dapat diturunkan berdasarkan prinsip-prinsip mekanika, sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1. Sasaran pengendalian adalah menjaga *double* pendulum terbalik tersebut dalam posisi vertikal. *Double* pendulum terbalik sebetulnya tidak stabil dan mungkin jatuh ke segala arah, tetapi dalam hal ini untuk penyederhanaan gerak *double* pendulum terbalik dibatasi dalam dua dimensi sehingga *double* pendulum terbalik tersebut hanya bergerak pada dua arah yaitu gerak kereta ke kiri dan bergerak ke kanan, serta gerak pendulum ke kiri dan ke kanan.

Jika pada kereta diberi gaya sebesar F , maka akan timbul energi kinetik pada kereta dan sekaligus timbul energi kinetik pada pendulum 1 dan pendulum 2.

Energi kinetik atau energi gerak merupakan usaha yang diberikan untuk menggerakkan sebuah benda pada massa tertentu dari keadaan diam hingga bergerak untuk mencapai kecepatan tertentu. Kereta hanya bergerak ke arah horisontal, sehingga energi kinetik pada kereta T_0 yaitu:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 \quad (3.2)$$

dengan $\frac{dx_0}{dt}$ merupakan kecepatan perpindahan massa kereta, karena pendulum itu sendiri dapat bergerak horisontal, vertikal dan rotasi, maka energi kinetik pada pendulum 1 terbalik (T_1) yaitu:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \quad (3.3)$$

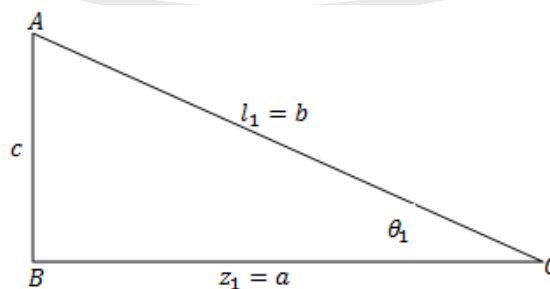
dengan,

$\frac{dx_1}{dt}$ = perpindahan gerakan horisontal pendulum 1 pada posisi θ terhadap waktu

$\frac{dz_1}{dt}$ = perpindahan ketinggian vertikal pendulum 1 terhadap waktu

$\frac{d\theta_1}{dt}$ = perpindahan gerak rotasi pendulum 1 terhadap waktu

dengan menggunakan aturan sinus dan cosinus pada segitiga siku-siku pada *double* terbalik akan diperoleh x_1 dan z_1 masing-masing adalah:



Gambar 3.2 Segitiga Siku-Siku yang Terbentuk pada Pendulum

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{l_1}{\sin 90} = \frac{c}{\sin \theta_1}$$

$$l_1 \sin \theta_1 = c \sin 90$$

$$l_1 \sin \theta_1 = c (1)$$

$$l_1 \sin \theta_1 = c$$

$$x_1 = x_0 + c$$

$$x_1 = x_0 + l_1 \sin \theta_1 \quad (3.4)$$

untuk z_1 terdapat dalam Gambar 3.1 yaitu:

$$z_1 = l_1 \cos \theta_1 \quad (3.5)$$

Dengan demikian kecepatan gerakan horisontal pendulum pada posisi dan kecepatan ketinggian pendulum vertikal pendulum adalah:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_1 \quad (3.6)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = l_1 \left(-\frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_1 \right) = -l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_1 \quad (3.7)$$

Hal tersebut berakibat, energi kinetik dalam pendulum 1 dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\frac{dx_0}{dt} + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_1 \right)^2 + \left(-l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_1 \right)^2 \right) + \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) \right) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3.8) \end{aligned}$$

Berdasarkan proses penurunan pada persamaan (3.8), maka energi kinetik pada pendulum 2 terbalik yang dinotasikan dengan T_2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_0}{dt} + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_1 + l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_2 \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left(-L_1 \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_1 - L_2 \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_2 \right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{dx_0}{dt} + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_1 + \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_2 \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left(-L_1 \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_1 - L_2 \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_2 \right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_2 (-L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Misal $m = (a + b)^2$ dan $n = (-a - b)^2$ akan dibuktikan bahwa $m = n$

$$\begin{aligned}
 m &= (a + b)^2 \\
 &= (a + b)(a + b) \\
 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 n &= (-a - b)^2 \\
 &= (-a - b)(-a - b) \\
 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $m = n = a^2 + 2ab + b^2$

Sehingga persamaan (3.9) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 (L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Total energi kinetik pada *double* pendulum terbalik yaitu:

$$\begin{aligned}
T &= T_0 + T_1 + T_2 \\
&= \left(\frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 \right) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 (L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Pandang bentuk:

$$\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\
&= a^2 + ab + ac + b^2 + ba + bc + c^2 + ca + cb \\
&= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Maka gunakan rumus (3.12) tersebut untuk menyederhanakan T sehingga persamaan T dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 (L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_0^2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_0^2 + 2\dot{x}_0 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2\dot{x}_0 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
& + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
& + \frac{1}{2} m_2 (L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2) \\
& + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Karena setiap perpindahan pendulum 1 dan pendulum 2 dipengaruhi oleh perpindahan kereta sehingga $x_1, x_2 = x_0 = x$, maka

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + 2\dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1) \\
&+ \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&+ \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + 2\dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2\dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
&+ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\
&+ \frac{1}{2} m_2 (L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2) \\
&+ \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 2\dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 \\
&+ \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 \\
&+ \frac{1}{2} m_2 2\dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 2\dot{x} l_2 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \\
& + \frac{1}{2} m_2 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \\
& + \frac{1}{2} m_2 2L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \dot{x} m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 \\
& + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + m_2 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\
& + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \\
& + m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \\
& + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \dot{x} m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\
& + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \\
& + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
& + m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 + m_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_1^2 \cos^2 \theta_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 (L_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ketika dipilih $L_1 = l_1$ dan $L_2 = l_2$ maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 + m_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 (l_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_1^2 \cos^2 \theta_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 (l_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
&= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \\
&\quad + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Berdasarkan sifat trigonometri yaitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dan $\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ sehingga persamaan (3.16) akan menjadi:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_1) + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (1) \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} F_2 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (1) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 (1) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \\
 &\quad + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
 &\quad + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sehingga energi kinetik dari *double* pendulum terbalik yaitu:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_1) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (m_2 l_2^2 + J_2) \\
 &\quad + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sekarang akan menghitung energi potensial pada sistem *double* pendulum terbalik. Energi potensial adalah suatu energi yang dimiliki oleh benda karena kedudukan atau letaknya terhadap bumi. Energi potensial dipengaruhi oleh massa (m), percepatan gravitasi (g) serta kedudukan terhadap bumi (h).

Energi potensial pada kereta yang dinotasikan dengan V_0 yaitu

$$V_0 = 0 \tag{3.19}$$

Untuk energi potensial pada pendulum 1 terbalik yaitu

$$V_1 = m_1 g h$$

$$\begin{aligned}
 &= m_1 g z_1 \\
 &= m_1 g l_1 \cos \theta_1
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Dan energi potensial pada pendulum 2 terbalik, karena untuk ketinggian pendulum 2 terbalik dipengaruhi oleh pendulum 1 terbalik, maka

$$\begin{aligned}
 V_2 &= m_1 g (h_1 + h_2) \\
 &= m_2 g (z_1 + z_2) \\
 &= m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Sehingga energi potensial total diperoleh

$$\begin{aligned}
 V &= V_0 + V_1 + V_2 \\
 &= 0 + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\
 &= m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \\
 &= (m_1 l_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

3.3 Model Matematika

Model matematika merupakan deskripsi matematika dari karakteristik suatu sistem yang terdiri dari simbol-simbol dan persamaan matematik untuk mendapatkan suatu sistem. Untuk mendapatkan model matematika untuk model dari sistem *double* pendulum terbalik dapat digunakan persamaan *Lagrange* untuk gerak mekanik.

$$L = T - V$$

keterangan:

L = Fungsi *Lagrange*

T = Energi kinetik

V = Energi potensial

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.20) dan (3.22) maka diperoleh fungsi

Lagrange sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_1) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (m_2 l_2^2 + J_2) \\
 &\quad + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 &\quad - [(m_1 l_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2] \\
 &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_1) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (m_2 l_2^2 + J_2) \\
 &\quad + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 &\quad - (m_1 l_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \\
 &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_0 + m_1 + m_2) + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + J_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 &\quad + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_1 l_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Untuk menyamaratakan koordinat perlu diperhatikan gerakan translasi kereta (x), gerakan osilasi pendulum 1 terbalik (θ_1) dan gerakan osilasi pendulum 2 terbalik (θ_2) sebagai tiga buah keluaran yang selalu berubah-ubah jika diberikan gaya (u). Dengan memperhatikan komponen vertikal dan horisontal atau (x, θ_1, θ_2) , maka *double* pendulum terbalik pada kereta mempunyai derajat kebebasan yaitu (x, θ_1, θ_2) , sehingga x, θ_1 dan θ_2 merupakan

koordinat umum yaitu $x = q_1$, $\theta_1 = q_2$ dan $\theta_2 = q_3$ maka persamaan *Lagrange* untuk persamaan ini adalah (William, 1986:238):

- Untuk gerak translasi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = u \quad (3.24)$$

- Untuk gerak osilasi pendulum 1 terbalik

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.25)$$

- Untuk gerak osilasi pendulum 2 terbalik

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (3.26)$$

keterangan:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ = persamaan *Lagrange* akan diturunkan terhadap \dot{x} , sehingga pada persamaan yang memuat variabel \dot{x} akan menjadi \ddot{x}

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}$ = persamaan *Lagrange* akan diturunkan terhadap $\dot{\theta}_1$, sehingga pada persamaan yang memuat variabel $\dot{\theta}_1$ akan menjadi $\ddot{\theta}_1$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}$ = persamaan *Lagrange* akan diturunkan terhadap $\dot{\theta}_2$, sehingga pada persamaan yang memuat variabel $\dot{\theta}_2$ akan menjadi $\ddot{\theta}_2$

Sehingga diperoleh:

- Gerak translasi

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \dot{x}(m_0 + m_1 + m_2) + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ &= \dot{x}(m_0 + m_1 + m_2) + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \ddot{x}(m_0 + m_1 + m_2) + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\
&\quad + (m_1 l_1 + m_2 l_1) (-\sin \theta_1) (\dot{\theta}_1)^2 + m_2 \ddot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 - m_2 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2 \\
&= \ddot{x}(m_0 + m_1 + m_2) + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\
&\quad + m_2 \ddot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 - (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{3.29}$$

Dari persamaan (3.28) dan (3.29) disubstitusikan kedalam persamaan (3.27) maka diperoleh bentuk persamaan gerak translasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= u \\
\ddot{x}(m_0 + m_1 + m_2) + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \ddot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 - \\
(m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - 0 &= u
\end{aligned} \tag{3.30}$$

➤ Gerak osilasi pendulum 1 terbalik

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{1}{2} \cdot 2 (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1 \\
&\quad + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{x} \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\
&= (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1 \\
&\quad + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{x} \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + (m_1 l_1 + m_2 l_1) \ddot{x} \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 (-\sin \theta_1) + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad - (m_1 l_1 + m_2 l_1) g \sin \theta_1
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dari persamaan (3.32) dan (3.33) disubstitusikan kedalam persamaan (3.25) maka diperoleh bentuk persamaan gerak osilasi pendulum 1 terbalik adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \left[(m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 \right. \\ &+ (m_1 l_1 + m_2 l_1) \ddot{x} \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \left. \right] \\ &- \left[(m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 (-\sin \theta_1) \right. \\ &+ m_2 l_1 l_2 (-\sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g (-\sin \theta_1) \left. \right] \\ &= 0 \\ (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 &+ (m_1 l_1 + m_2 l_1) \ddot{x} \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ &+ (m_1 l_1 + m_2 l_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ &+ m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g (-\sin \theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

➤ Gerak osilasi pendulum 2 terbalik

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (m_2 l_2^2 + J_2) \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 \dot{x} \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = (m_2 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_2 \dot{x} (-\sin \theta_2) + m_2 l_1 l_2 (-\sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g (-\sin \theta_2) \\ &= -m_2 l_2 \dot{x} \sin \theta_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dari persamaan (3.36) dan (3.37) disubstitusikan kedalam persamaan (3.26) maka diperoleh bentuk persamaan gerak osilasi pendulum 2 terbalik sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[(m_2 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 \right] \\ & - \left[-m_2 l_2 \dot{x} \sin \theta_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2 \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (m_2 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{x} \sin \theta_2 + \\ & m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Berdasarkan dari ketiga persamaan *Lagrange* (3.30), (3.36) dan (3.38) maka dapat diasumsikan sebagai berikut:

$$a_0 = m_0 + m_1 + m_2 \quad (3.39)$$

$$a_1 = m_1 l_1 + m_2 l_2 \quad (3.40)$$

$$a_2 = m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 l_2^2 \quad (3.41)$$

$$a_3 = m_2 l_2 \quad (3.42)$$

$$a_4 = m_2 l_1 l_2 \quad (3.43)$$

$$a_5 = m_2 l_2^2 + J_2 \quad (3.44)$$

Asumsi-asumsi di atas disubstitusikan kedalam persamaan (3.30), (3.36) dan (3.38), sehingga akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{a. } & a_0 \ddot{x} + a_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + a_3 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - a_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - a_3 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 = u \\ \text{b. } & a_1 \ddot{x} \cos \theta_1 + a_2 \ddot{\theta}_1 + a_4 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_4 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_1 g \sin \theta_1 = 0 \\ \text{c. } & a_3 \ddot{x} \cos \theta_2 + a_4 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_5 \ddot{\theta}_2 - a_4 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_3 g \sin \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.4 Ruang Keadaan (*State Space*)

Dengan mengacu pada model matematika yang diuraikan sebelumnya dapat diterapkan keadaan-keadaan sebagai berikut:

dengan $y(t) = (x, \theta_1, \theta_2)$ sebagai koordinat umum dan

$\dot{x}(t) = (x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ sebagai hasil *state space*, maka:

Inputnya adalah

$$u(t) = F$$

Outputnya adalah

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Statenya adalah

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Model di atas jika dibawa ke dalam bentuk persamaan keadaan (*state space*), maka ditulis:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.45) *state space* ke dalam bentuk *state space* maka diperoleh $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$, untuk memperolehnya dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Misal untuk menentukan \dot{x}_1 , lihat pada persamaan *state space* $\dot{x}_1 = \dot{x}$

2. Lihat pada *state* bahwa $\dot{x} = x_4$
3. Sehingga $\dot{x}_1 = x_4$
4. Demikian pula untuk menentukan $\dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$ dilakukan langkah-langkah tersebut.
5. Untuk persamaan $\dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$ berdasarkan pada persamaan (3.45a), (3.45b) dan (3.45c)

Sehingga:

$$a) \dot{x}_1 = x_4$$

$$b) \dot{x}_2 = x_5$$

$$c) \dot{x}_3 = x_6$$

$$d) a_0 \dot{x}_4 + a_1 \dot{x}_5 \cos \theta_1 + a_3 \dot{x}_6 \cos \theta_2 - a_1 \dot{x}_2^2 \sin \theta_1 - a_3 \dot{x}_3^2 \sin \theta_2 = u$$

$$a_0 \dot{x}_4 = -a_1 \dot{x}_5 \cos \theta_1 - a_3 \dot{x}_6 \cos \theta_2 + a_1 \dot{x}_2^2 \sin \theta_1 + a_3 \dot{x}_3^2 \sin \theta_2 + u$$

$$\dot{x}_4 = \frac{u - a_1 \dot{x}_5 \cos \theta_1 - a_3 \dot{x}_6 \cos \theta_2 + a_1 \dot{x}_2^2 \sin \theta_1 + a_3 \dot{x}_3^2 \sin \theta_2}{a_0}$$

$$e) a_1 \dot{x}_4 \cos \theta_1 + a_2 \dot{x}_5 + a_4 \dot{x}_6 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_4 \dot{x}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_1 g \sin \theta_1 =$$

$$0$$

$$a_2 \dot{x}_5 = -a_1 \dot{x}_4 \cos \theta_1 - a_4 \dot{x}_6 \cos(\theta_1 - \theta_2) - a_4 \dot{x}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + a_1 g \sin \theta_1$$

$$\dot{x}_5 = \frac{-a_1 \dot{x}_4 \cos \theta_1 - a_4 \dot{x}_6 \cos(\theta_1 - \theta_2) - a_4 \dot{x}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + a_1 g \sin \theta_1}{a_2}$$

$$f) a_3 \dot{x}_4 \cos \theta_2 + a_4 \dot{x}_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_5 \dot{x}_6 - a_4 \dot{x}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_3 g \sin \theta_2 =$$

$$0$$

$$a_5 \dot{x}_6 = -a_3 \dot{x}_4 \cos \theta_2 - a_4 \dot{x}_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_4 \dot{x}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + a_3 g \sin \theta_2$$

$$\dot{x}_6 = \frac{-a_3 \dot{x}_4 \cos \theta_2 - a_4 \dot{x}_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_4 \dot{x}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + a_3 g \sin \theta_2}{a_5}$$

(3.46)

3.5 Linierisasi Model Non Linier ke dalam Bentuk Linier

Persamaan (3.46) adalah persamaan *state space*. Dari enam persamaan keadaan (3.46) ada tiga persamaan dinamik yang non linier. Persamaan non linier dapat diubah ke dalam persamaan linier yang disebut dengan linierisasi. Linierisasi dapat dilakukan menggunakan deret *Taylor* orde 1.

❖ Persamaan (3.46.d)

$$a_0\ddot{x} + a_1\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + a_3\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - a_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - a_3\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 = u$$

Persamaan (3.46.d) terdapat suku-suku yang non linier, maka akan dilinierkan suku-suku tersebut sebagai berikut:

a. $\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1$

Misal: $\ddot{\theta}_1 = v$ dan $\theta_1 = w$

$$\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 = v \cos w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0,0) + f_v(0,0)v + f_w(0,0)w$$

$$v \cos w = 0 + \cos(0)v - v \sin(0)w$$

$$= v$$

Sehingga $x = \ddot{\theta}_1$

b. $\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2$

Misal: $\ddot{\theta}_2 = v$ dan $\theta_2 = w$

$$\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 = v \cos w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0,0) + f_v(0,0)v + f_w(0,0)w$$

$$v \cos w = 0 + \cos(0)v - v \sin(0)w$$

$$= v$$

Sehingga $v = \dot{\theta}_2$

c. $\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1$

Misal: $\dot{\theta}_1 = v$ dan $\theta_1 = w$

$$\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 = v^2 \sin w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0, 0) + f_v(0, 0)v + f_w(0, 0)w$$

$$v^2 \sin w = 0 + 2v \sin w + v^2 \sin w$$

$$= 0 + 2(0) \sin(0) + 0^2 \sin(0)$$

$$= 0$$

d. $\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2$

Misal: $\dot{\theta}_2 = v$ dan $\theta_2 = w$

$$\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 = v^2 \sin w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0, 0) + f_v(0, 0)v + f_w(0, 0)w$$

$$v^2 \sin w = 0 + 2v \sin w + v^2 \sin w$$

$$= 0 + 2(0) \sin(0) + 0^2 \sin(0)$$

$$= 0$$

- e. Berdasarkan hasil pada poin a, b, dan c tersebut maka disubstitusikan ke dalam poin 1, sehingga persamaan liniernya dapat diperoleh sebagai berikut:

$$a_0 \ddot{x} + a_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + a_3 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - a_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - a_3 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 = u$$

$$a_0 \ddot{x} + a_1 \ddot{\theta}_1 + a_3 \ddot{\theta}_2 - a_1(0) - a_3(0) = u$$

$$a_0 \ddot{x} + a_1 \ddot{\theta}_1 + a_3 \ddot{\theta}_2 = u$$

$$\ddot{x} = \frac{u - a_1\ddot{\theta}_1 - a_3\ddot{\theta}_2}{a_0}$$

$$\ddot{x} = \frac{u - a_1x_5 - a_3x_6}{a_0}$$

❖ Persamaan (3.46.e)

$$\begin{aligned} a_1\ddot{x} \cos \theta_1 + a_2\ddot{\theta}_1 + a_4\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_4\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_1g \sin \theta_1 \\ = 0 \end{aligned}$$

Persamaan (3.46.e) terdapat suku-suku yang non linier, maka akan dilinierkan suku-suku tersebut sebagai berikut:

a. $\ddot{x} \cos \theta_1$

Misal: $\ddot{x} = v$ dan $\theta_1 = w$

$$\ddot{x} \cos \theta_1 = v \cos w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0,0) + fv(0,0)v + fw(0,0)w$$

$$v \cos w = 0 + \cos(0)v - v \sin(0)w$$

$$= v$$

Sehingga $v = \ddot{x}$

b. $\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

Misal: $\ddot{\theta}_2 = v$ dan $(\theta_1 - \theta_2) = w$

$$\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 = v \cos w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0,0) + fv(0,0)v + fw(0,0)w$$

$$v \cos w = 0 + \cos(0)v - w \sin(0)w$$

$$= v$$

Sehingga $v = \ddot{\theta}_2$

$$c. \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{Misal: } \dot{\theta}_2 = v \quad \text{dan} \quad (\theta_1 - \theta_2) = w$$

$$\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = v^2 \sin w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0, 0) + f_v(0, 0)v + f_w(0, 0)w$$

$$v \sin w = 0 + 2v \sin w + v^2 \sin w$$

$$= 0 + 2(0) \sin(0) + 0^2 \sin(0)$$

$$= 0$$

- d. Berdasarkan hasil pada poin a, b, dan c tersebut maka disubstitusikan ke dalam poin 2, sehingga persamaan liniernya dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{x} \cos \theta_1 + a_2 \ddot{\theta}_1 \\ + a_4 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_4 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ - a_1 g \sin \theta_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Misal } \sin \theta_1 = \theta_1$$

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \ddot{\theta}_1 + a_4 \ddot{\theta}_2 + a_4(0) - a_1 g \theta_1 = 0$$

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \ddot{\theta}_1 + a_4 \ddot{\theta}_2 - a_1 g \theta_1 = 0$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-a_1 \ddot{x} - a_4 \ddot{\theta}_2 - a_1 g \theta_1}{a_2}$$

- ❖ Persamaan (3.46.f)

$$a_3 \ddot{x} \cos \theta_2 + a_4 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ a_5 \ddot{\theta}_2 - a_4 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_3 g \sin \theta_2 = 0$$

Persamaan (3.46.f) terdapat suku-suku yang non linier, maka akan dilinierkan suku-suku tersebut sebagai berikut:

a. $\ddot{x} \cos \theta_2$

Misal: $\dot{x} = v$ dan $\theta_2 = w$

$$\ddot{x} \cos \theta_2 = v \cos w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0, 0) + f_v(0, 0)v + f_w(0, 0)w$$

$$v \cos w = 0 + \cos(0)v - v \sin(0)w$$

$$= v$$

Sehingga $v = \ddot{x}$

b. $\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

Misal: $\dot{\theta}_1 = v$ dan $(\theta_1 - \theta_2) = w$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = v \cos w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0, 0) + f_v(0, 0)v + f_w(0, 0)w$$

$$v \cos w = 0 + \cos(0)v - v \sin(0)w$$

$$= v$$

Sehingga $v = \ddot{\theta}_1$

c. $\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$

Misal: $\dot{\theta}_1 = v$ dan $(\theta_1 - \theta_2) = w$

$$\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = v^2 \sin w$$

Maka

$$f(v, w) = f(0, 0) + f_v(0, 0)v + f_w(0, 0)w$$

$$v^2 \sin w = 0 + 2v \sin w + v^2 \sin w$$

$$= 0 + 2(0) \sin(0) + 0^2 \sin(0)$$

$$= 0$$

- d. Berdasarkan hasil pada poin a, b, dan c tersebut maka disubstitusikan ke dalam persamaan poin 3 sehingga persamaan liniernya dapat diperoleh sebagai berikut:

$$a_3\ddot{x} \cos \theta_2 + a_4\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + a_5\ddot{\theta}_2 - a_4\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - a_3g \sin \theta_2 = 0$$

Misal $\sin \theta_2 = \theta_2$

$$a_3\ddot{x} + a_4\dot{\theta}_1 + a_5\ddot{\theta}_2 - a_4\dot{\theta}_1^2(0) - a_3g\theta_2 = 0$$

$$a_3\ddot{x} + a_4\dot{\theta}_1 + a_5\ddot{\theta}_2 - a_3g\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-a_3\ddot{x} - a_4\dot{\theta}_1 - a_3g\theta_2}{a_5}$$

Setelah enam persamaan pada persamaan (3.46) linier maka berdasarkan persamaan *state space* diperoleh:

- $\dot{x}_1 = x_4$
- $\dot{x}_2 = x_5$
- $\dot{x}_3 = x_6$
- $\dot{x}_4 = \ddot{x}$

dengan $\ddot{x} = \frac{u - a_1\dot{\theta}_1 - a_3\ddot{\theta}_2}{a_0}$ maka:

$$\dot{x}_4 = \frac{u - a_1\dot{x}_5 - a_3\ddot{\theta}_2}{a_0}$$

- $\dot{x}_5 = \ddot{\theta}_1$

dengan $\ddot{\theta}_1 = \frac{-a_1\ddot{x} - a_4\dot{\theta}_2 - a_1g\theta_1}{a_2}$ maka:

$$\dot{x}_5 = \frac{-a_1\dot{x}_4 - a_4x_6 - a_1gx_2}{a_2}$$

$$f. \quad \dot{x}_6 = \ddot{\theta}_2$$

dengan $\ddot{\theta}_2 = \frac{-a_3\dot{x}_4 - a_4\dot{x}_5 - a_3g\theta_2}{a_5}$ maka:

$$\dot{x}_6 = \frac{-a_3\dot{x}_4 - a_4\dot{x}_5 - a_3g\theta_2}{a_5}$$

(3.47)

Mensubstitusikan persamaan (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) dan (3.44) ke dalam persamaan (3.47), maka diperoleh sebagai berikut:

$$a. \quad \dot{x}_1 = x_4$$

$$b. \quad \dot{x}_2 = x_5$$

$$c. \quad \dot{x}_3 = x_6$$

$$d. \quad \dot{x}_4 = \frac{u - a_1\ddot{\theta}_1 - a_3\ddot{\theta}_2}{a_0}$$

$$= \frac{u - a_1x_5 - a_3x_6}{a_0}$$

$$= \frac{u - 0,24x_5 - 0,06x_6}{1,6}$$

$$= 0,625u - 0,15x_5 - 0,0375x_6$$

$$e. \quad \dot{x}_5 = \frac{-a_1\dot{x}_4 - a_4x_6 - a_1g\theta_2}{a_2}$$

Substitusikan persamaan $\dot{x}_4 = 0,625u - 0,15x_5 - 0,0375x_6$, maka:

$$\dot{x}_5 = \frac{-0,24(0,625u - 0,15x_5 - 0,0375x_6) - 0,018x_6 - (0,24)(9,8)x_2}{0,078}$$

$$= \frac{-0,15u + 0,036x_5 + 0,009x_6 - 0,018x_6 - 2,352x_2}{0,078}$$

$$= \frac{-0,15u + 0,036x_5 - 0,009x_6 - 2,352x_2}{0,078}$$

$$= -1,923u + 0,461x_5 - 0,115x_6 - 30,153x_2$$

$$f. \quad \dot{x}_6 = \frac{-a_3x_4 - a_4x_5 - a_3gx_3}{a_5}$$

Substitusikan persamaan $\dot{x}_4 = 0,625u - 0,15x_5 - 0,0375x_6$ dan $\dot{x}_5 = -1,923u + 0,461x_5 - 0,115x_6 - 30,153x_2$, maka:

$$\dot{x}_6 = \frac{-a_3\dot{x}_4 - a_4\dot{x}_5 - a_3gx_3}{a_5}$$

Untuk

$$\begin{aligned} -a_3\dot{x}_4 - a_4\dot{x}_5 - a_3gx_3 &= -0,06(0,625u - 0,15x_5 - 0,0375x_6) \\ &\quad -0,018(-1,923u + 0,461x_5 - 0,115x_6 - 30,153x_2) \\ &\quad - (0,06)(9,8)x_3 \\ &= -0,0375u + 0,009x_5 + 0,00225x_6 + 0,0346u \\ &\quad -0,0082x_5 + 0,00207x_6 + 0,5427x_2 - 0,588x_3 \\ &= -0,0029u + 0,0008x_5 + 0,0043x_6 + 0,5427x_2 \\ &\quad -0,588x_3 \end{aligned}$$

sehingga

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-0,0029u + 0,0008x_5 + 0,0043x_6 + 0,5427x_2 - 0,588x_3}{0,018}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -0,161u + 0,044x_5 + 0,2389x_6 + 30,15x_2 - 32,667x_3$$

(3.48)

Dari persamaan (3.48) akan diperoleh persamaan persamaan secara serempak dan dapat dinyatakan dalam notasi matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,15 & -0,0375 \\ 0 & 30,153 & 0 & 0 & 0,461 & -0,115 \\ 0 & 30,15 & -32,667 & 0 & 0,044 & 0,2389 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,625 \\ -1,923 \\ -0,161 \end{bmatrix} u(t)$$

Sehingga secara umum sistem *double* pendulum terbalik dapat dituliskan ruang keadaan $\dot{x} = Ax + Bu$ dan keluaran $y = Cx + Du$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.15 & -0.0375 \\ 0 & 30.153 & 0 & 0 & 0.461 & -0.115 \\ 0 & 30.15 & -32.667 & 0 & 0.044 & 0.2389 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.625 \\ -1.923 \\ -0.161 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.6 Karakteristik Analisis pada Sistem

3.6.1 Kestabilan

Metode pencarian akar-akar karakteristik dalam sistem pengendalian *input* dan *output* adalah menggunakan *eigen value*. Pencarian harga *eigen value* adalah dengan mengurai dari matrik keadaan A yang dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\diamond \lambda I - A$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -0.15 & 0.0375 \\ 0 & -30.153 & 0 & 0 & \lambda - 0.461 & 0.115 \\ 0 & -30.15 & 32.667 & 0 & 0.044 & \lambda - 0.2389 \end{bmatrix}$$

$$\diamond |\lambda I - A| = 0$$

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan maple (Lampiran 1) yaitu diperoleh:

$$(\lambda^4 - 0.6999\lambda^3 + 2.6190729\lambda^2 - 4.3886853\lambda - 985.008051)\lambda^2 = 0$$

$$(\lambda + 5,652979594)(\lambda + 0,4269690853)(\lambda^2)(\lambda - 0,4297730374)$$

$$(\lambda - 5,778675642) = 0$$

Maka diperoleh:

$$\lambda_1 = -5,652979594$$

$$\lambda_2 = -0,4269690853$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = 0,4297730374$$

$$\lambda_5 = 5,778675642$$

Sehingga, *double* pendulum terbalik tersebut tidak stabil karena ada nilai eigennya yang lebih besar atau sama dengan nol.

3.6.2 Keterkendalian

Berdasarkan pada teorema 1 syarat perlu dan cukup suatu sistem dikatakan terkendali apabila matriks:

$$Ktr = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

mempunyai rank sama dengan n . Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan matlab (Lampiran 1) sehingga hasil Ktr dan nilai ranknya, yang akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$Ktr = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$Ktr = \begin{bmatrix} 0 & 0.8459 & 0 & 5.3398 & 0 & 0.1885 \\ 0.8459 & 0 & 5.3398 & 0 & 0.1885 & 0 \\ 0 & -2.5204 & 0 & -113.9571 & 0 & -5.7547 \\ -2.5204 & 0 & -113.9571 & 0 & -5.7547 & 0 \\ 0 & -0.2298 & 0 & 77.5761 & 0 & 0.1885 \\ -0.2298 & 0 & 77.5761 & 0 & 7.2621 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi terbagi baris dan kolom diperoleh matriks eselon baris,

$$Ktr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga, *double* pendulum terbalik tersebut terkendali karena mempunyai $rank=6$

3.6.3 Keteramati

Berdasarkan pada teorema 2 syarat perlu dan cukup suatu sistem

dikatakan teramati apabila matriks keteramati $Ter = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}$

mempunyai rank sama dengan n . Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan matlab (Lampiran 1) sehingga hasil teramati dan nilai ranknya, yang akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$Ter = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$Ter = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & -2.0495 & 0 & -0.5813 & 0 \\ 0 & 0 & 46.0000 & 0 & -6.6086 & 0 \\ 0 & 0 & -35.6800 & 0 & 41.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.0495 & 0 & -0.5813 \\ 0 & 0 & 0 & 46.0000 & 0 & -6.6086 \\ 0 & 0 & 0 & -35.6800 & 0 & 41.2000 \\ 0 & 0 & -0.0735 & 0 & -0.0104 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3518 & 0 & -0.5763 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1113 & 0 & 1.9332 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0735 & 0 & -0.0104 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3518 & 0 & -0.5763 \\ 0 & 0 & 0 & -3.1113 & 0 & 1.9332 \end{bmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi terbagi baris dan kolom diperoleh matriks eselon baris,

$$Ter = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga, *double* pendulum terbalik tersebut teramati karena mempunyai rank = 6.

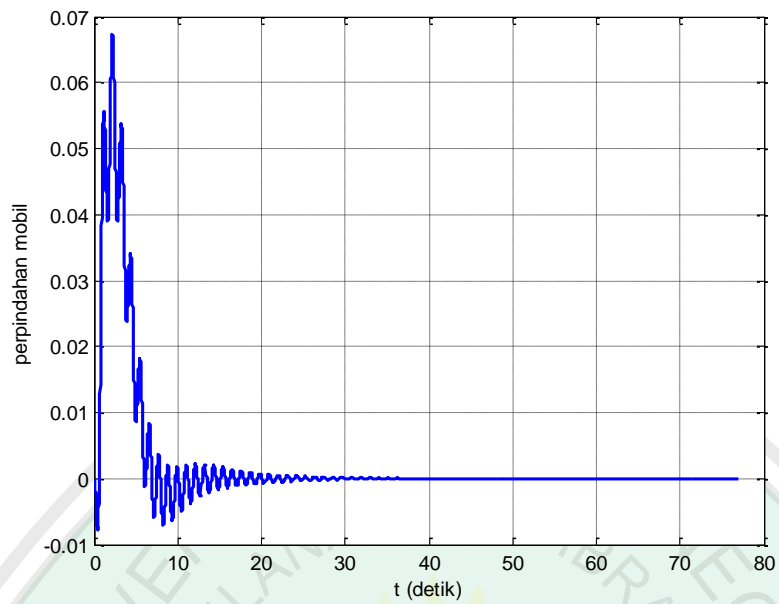
3.7 Simulasi dan Interpretasi *Double Pendulum Terbalik* pada Kereta Menggunakan Metode LQR

Double pendulum terbalik merupakan suatu sistem yang tidak stabil. *Double pendulum* terbalik tersebut akan stabil jika diberi kontrol atau gaya pada kereta untuk mempertahankan posisi *double pendulum* terbalik dalam kondisi tegak lurus dengan kereta.

Linear Quadratic Regulator (LQR) adalah salah satu metode perancangan sistem kendali modern. Dengan menggunakan metode LQR, dampak kontrol optimal tergantung pada pemilihan matriks bobot Q dan R . Tidak ada solusi yang unik untuk matrik-matrik ini. Pemilihan matrix ini tergantung dari seberapa besar pengaruh y dan u yang diinginkan pada *cost function* dan dilakukan dengan trial and error (coba-coba), yang perlu diperhatikan dalam proses trial dan *error* ini adalah matrix Q dan R harus simetris dan *positive definite*.

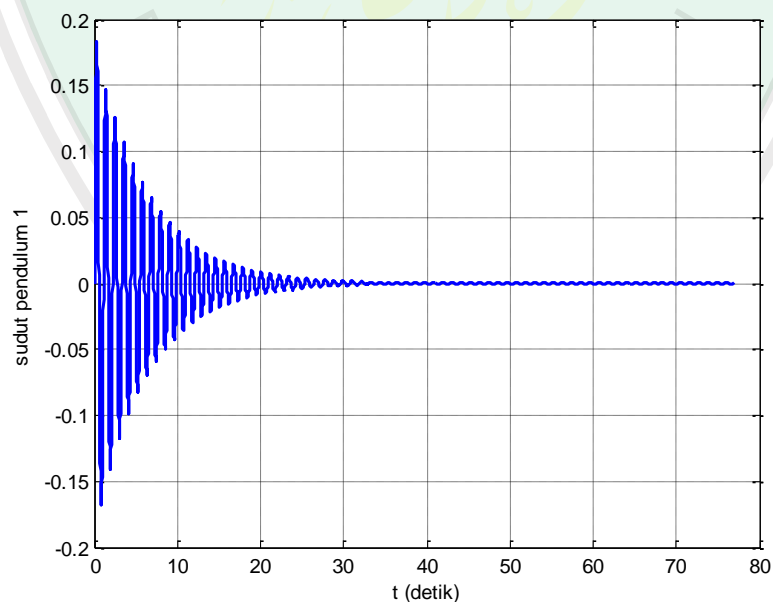
Metode LQR bisa diterapkan jika sistem tersebut tidak stabil dan memenuhi syarat karakteristik, yaitu sistem tersebut terkendali dan teramati. Syaratnya pada sitem terkendali dan teramati harus mempunyai rank n . Berdasarkan persamaan *double pendulum* terbalik yang telah di dapat terdapat 3 variabel yaitu variabel x , θ_1 dan θ_2 di mana x sebagai perpindahan kereta, θ_1 sebagai sudut pendulum 1 dan θ_2 sebagai sudut pendulum 2. Dalam penyelesaian metode LQR bisa dilakukan dengan menggunakan aplikasi Matlab. $K = LQR(A, B, Q, R)$, Matriks bobot $Q = \text{diag}(1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$, matriks diagonal dan $R = 1$. Dalam perintah di atas K adalah nilai umpan balik. Sehingga, didapat nilai $K = [-0.7071 \ -41.1460 \ 4.1303 \ -1.7807 \ -7.3450 \ -0.0726]$ (Lampiran 2).

Berikut merupakan hasil gambar simulasi dengan menggunakan aplikasi matlab (Lampiran 3).



Gambar 3.3 Hasil Simulasi Kestabilan pada Kereta

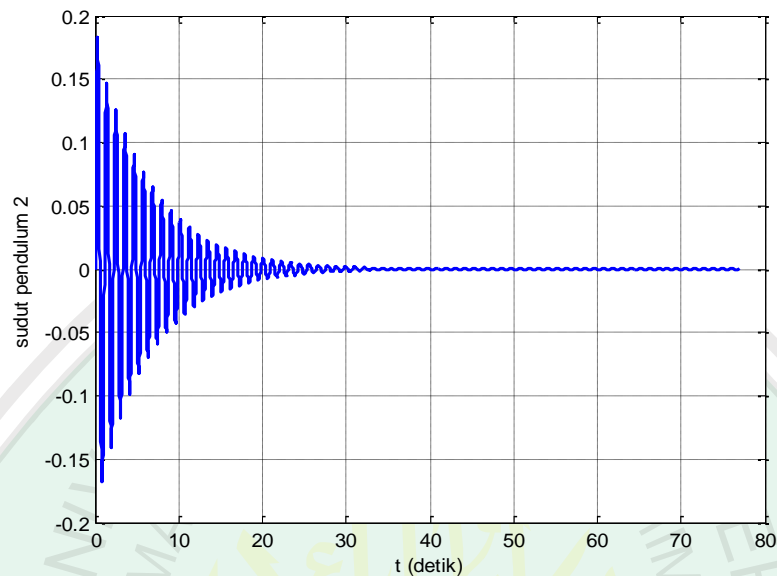
Gambar 3.3 merupakan gambar simulasi kestabilan pada kereta. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa saat kereta mulai berjalan pada $t = 0$ sampai pada t mendekati $t = 30$ dalam keadaan tidak stabil dan kereta tersebut stabil pada saat $t = 30$ dan kereta berada pada titik nol.



Gambar 3.4 Hasil Simulasi Kestabilan Pendulum 1 Menggunakan Metode LQR

Gambar 3.4 merupakan gambar simulasi kestabilan pada pendulum 1. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa pendulum pada saat $t = 0$ sampai

pada t mendekati $t = 30$ dalam keadaan tidak stabil dan pendulum tersebut mulai stabil pada saat $t = 30$ dan pendulum berada pada titik nol.



Gambar 3.5 Hasil Simulasi Kestabilan Pendulum 2 Menggunakan Metode LQR

Gambar 3.5 merupakan gambar simulasi kestabilan pada pendulum 2. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa pendulum pada saat $t = 0$ sampai pada t mendekati $t = 30$ dalam keadaan tidak stabil dan pendulum tersebut mulai stabil pada saat $t = 30$ dan pendulum berada pada titik nol.

3.8 Kajian dalam Al-Quran Mengenai Ciptaan Allah

Allah menjadikan manusia dalam sebaik-baiknya, proses kejadian manusia tidak sama dengan makhluk lain, manusia memiliki akal, jasmani, rohani dan nafsu. Anggota tubuh mereka serasi dan seimbang sehingga terlihat indah dan mudah untuk melakukan kegiatan. Sedangkan, hewan hanya memiliki jasmani dan nafsu saja, manusia harus mampu menjaga keseimbangan yang dimilikinya itu supaya menjadi mulia. Apabila manusia mengutamakan nafsunya maka ia turun derajat seperti hewan. Selain rohani manusia dibekali akal dan pikiran supaya dapat membedakan yang baik dan yang buruk. Kerja *double* pendulum terbalik

sama halnya terjadi pada tubuh manusia yaitu kerja pada kaki. Tubuh manusia dikatakan seimbang apabila berdiri tegak lurus. Dalam al-Quran sudah dijelaskan dalam surah at-Tin ayat 4 dan al-Infithor ayat 7, bahwa manusia diciptakan sebagai makhluk yang sebaik-baiknya dan diciptakan dalam bentuk tubuh yang seimbang.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Double pendulum terbalik yang mulanya belum diberi kontrol, kerja *double* pendulum tersebut tidak stabil karena jatuh ke segala arah. Namun, setelah diberikan kontrol pada *double* pendulum terbalik tersebut dengan memberikan gaya pada kereta untuk mempertahankan *double* pendulum terbalik tersebut dalam keadaan tegak lurus maka *double* pendulum terbalik tersebut akan stabil.

Setelah menerapkan metode LQR maka *double* pendulum terbalik tersebut bersifat stabil. Penerapan metode LQR bisa digunakan apabila pada karakteristiknya yaitu keterkendalian dan keteramatan mempunyai nilai rank sebanyak n . Hasil dalam skripsi ini yaitu mempertahankan *double* pendulum terbalik dalam keadaan stabil dengan memberikan kontrol pada kereta yaitu dengan memberikan gaya horizontal ke kiri dan ke kanan. Berdasarkan hasil simulasi dan interpretasi, posisi *double* pendulum terbalik yang dipasang pada kereta mampu dipertahankan pada posisi tegak atau stabil yaitu tepat pada koordinat nol. Kondisi stabil terjadi saat mencapai pada waktu 30 detik dan seterusnya.

4.2 Saran

Penelitian ini untuk mendapatkan kestabilan kerja dari sistem *double* pendulum terbalik yaitu menggunakan metode LQR. Selain itu, penulis juga menggunakan aplikasi MATLAB *toolbox*. Selanjutnya disarankan agar pada

penelitian selanjutnya untuk memperoleh kestabilan *double* pendulum terbalik dengan metode yang lain. Kemudian dibandingkan untuk mendapatkan kelebihan dan kekurangan masing-masing metode serta mengetahui metode mana yang paling baik dalam menyelesaikan persamaan tersebut.



DAFTAR PUSTAKA

- Aam, A. 2004. *Tafsir Kontemporer*. Bandung: Khazanah Intelektual.
- Huxham, E.F., Goldie, A.P. dan Patla, E.A. 2001. Theritical Consideration in Balance Assesment. *Austrian Journal Physioteraphy*, 47.
- Irfan, M. 2012. *Fisioterapi Bagi Insan Stroke*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Imam, A.Q. 2009. *Tafsir AlQurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Jabir, A.J. dan Abu, B. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (jilid 7)*. Jakarta: Darus Sunnah.
- Mandar, N.R., Mangesh J.B. dan Vinay, V.P. 2014. Balancing Double Inverted Pendulum on A Cart by Linearization Technique. *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)*, 3(1): 153-157.
- Narinder, S dan Sandeep K.Y. 2012. Comparison of LQR and PD controller for stabilizing Double Inverted Pendulum System. *International Journal of Engineering Research and Development*, 19 (12): 69-74.
- Ogata, K. 1994. *Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan). Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Ogata, K. 1997. *Teknik Kontrol Automatik. Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Putranto, H.U. 2009. *Pengendalian Sistem Pendulum Terbalik dengan Umpan-Balik State dan Output*. Skripsi tidak Dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Rafsenjani, H., Vantri P.K., Agustina E. dan Asty P. dkk. 2013. *Metode Lagrange dan Mekanika Hamilton*. Makalah Kajian Sains Fisika I. Surabaya: SPS-UNESA. Awal Juni.
- Rahul, R.K., Rekha, dan Singh, A.K. 2014. Design and Simulation of Different Controllers for Stabilizing Inverted Pendulum System. *International Journal of Engineering Research*, 4: 236-242.
- Sandeep, Y.K., Sachin, S dan Narinder S. 2012. Optimal Control of Double Inverted Pendulum Using LQR Controller. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 2 (2): 189-192.
- Shihab, Q.M. 2002. *Tafsir Al-mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran*. Jakarta: Lentera Hati.
- Subiono. 2010. *Matematika Sistem*. Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA-ITS

William, T.T. 1986. *Teori Getaran dengan Penerapan*. Surabaya: PT Gelora Aksara Pratama.



LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

❖ Menentukan Determinan Menggunakan Aplikasi Maple

❖ Kestabilan

```
> restart;
> with(linalg) : with(LinearAlgebra) :
> A := Matrix([[λ, 0, 0, -1, 0, 0], [0, λ, 0, 0, -1, 0], [0, 0, λ, 0, 0, -1],
               [0, 0, 0, λ, 0.15, 0.0375], [0, -30.153, 0, 0, λ - 0.461, 0.115], [0,
               -30.15, 32.667, 0, 0.044, λ - 0.2389]])
```

$$A := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0.15 & 0.0375 \\ 0 & -30.153 & 0 & 0 & \lambda - 0.461 & 0.115 \\ 0 & -30.15 & 32.667 & 0 & 0.044 & \lambda - 0.2389 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(A);
      (λ4 - 0.6999λ3 + 2.6190729λ2 - 4.3886853λ - 985.00805) λ2
```

```
> Faktor := factor((λ4 - 0.1285λ3 - 32.84988284λ2 + 0.11466116λ
                    + 5.99433945) λ2);
      Faktor := (λ + 5.652979594) (λ + 0.4269690853) λ2 (λ
                    - 0.4297730374) (λ - 5.778675642)
```

❖ Menentukan Matrik Keterkendalian

Matrik $Ktr = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]^T$

Hasil penyusunan matrik keterkendalian dan menentukan banyaknya rank pada matrik tersebut menggunakan matlab

```
A=[0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1; 0 0 0 0 -0.15 -
0.0375; 0 30.153 0 0 0.461 -0.115; 0 30.15 -32.667 0 0.044
0.2389]
B=[0;0;0;0.625;-1.923;-0.161]
AB=A*B
AAB=A*AB
AAAB=A*AAAB
AAAAB=A*AAAAB
AAAAAB=A*AAAAAB
```

A =

0	0	0	1.0000	0	0
0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	1.0000
0	0	0	0	-0.1500	-0.0375
0	30.1530	0	0	0.4610	-0.1150
0	30.1500	-32.6670	0	0.0440	0.2389

B =

0
0
0
0.6250
-1.9230
-0.1610

AB =

0.6250
-1.9230
-0.1610
0.2945
-0.8680
-0.1231

AAB =

0.2945
-0.8680
-0.1231
0.1348
-58.3702
-52.7867

AAAB =

0.1348
-58.3702
-52.7867

10.7350
-47.0106
-37.3284

AAAAB =

1.0e+003 *
0.0107
-0.0470
-0.0373
0.0085
-1.7774
-0.0465

AAAAAB =

1.0e+003 *
0.0085
-1.7774
-0.0465
0.2684
-2.2316
-0.2873

keterkendalian = [0, 0.6250, 0.2945, 0.1348, 0.0107, 0.0085;
0, -1.9230, -0.8680, -58.3702, -0.0470, -1.7774; 0, -0.1610, -
0.1231, -52.7867, -0.0373, -0.0465; 0.6250, 0.2945, 0.1348,
10.7350, 0.0085, 0.2684; -1.9230, -0.8680, -58.3702, -47.0106,
-1.774, -2.2316; -0.1610, -0.1231, -52.7867, -37.3284, -
0.0465, -0.2673]

keterkendalian =

0	0.6250	0.2945	0.1348	0.0107	0.0085
0	-1.9230	-0.8680	-58.3702	-0.0470	-1.7774
0	-0.1610	-0.1231	-52.7867	-0.0373	-0.0465
0.6250	0.2945	0.1348	10.7350	0.0085	0.2684
-1.9230	-0.8680	-58.3702	-47.0106	-1.7740	-2.2316
-0.1610	-0.1231	-52.7867	-37.3284	-0.0465	-0.2673

Rref (keterkendalian)

ans =

```
1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1
```

❖ **Menentukan Matrik Keteramatan**

$$Ter = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Hasil penyusunan matrik keterkendalian dan menentukan banyaknya rank

pada matrik tersebut menggunakan matlab

```
A=[0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1;0 0 0 0 -0.15 -
0.0375; 0 30.153 0 0 0.461 -0.115;0 30.15 -32.667 0 0.044
0.2389]
```

```
C=[1 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 1 0]
```

```
CA=C*A
```

```
CAA=CA*A
```

```
CAAA=CAA*A
```

```
CAAAA=CAAA*A
```

```
CAAAAA=CAAAA*A
```

```
A =
```

```
0 0 0 1.0000 0 0
0 0 0 0 1.0000 0
0 0 0 0 0 1.0000
0 0 0 0 -0.1500 -0.0375
0 30.1530 0 0 0.4610 -0.1150
0 30.1500 -32.6670 0 0.0440 0.2389
```

```
C =
```

```
1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0
```

```
CA =
```

```
0 0 0 1.0000 0 0
```

0	0	0	0	0	1.0000
0	30.1530	0	0	0.4610	-0.1150

CAA =

0	0	0	0	-0.1500	-0.0375
0	30.1500	-32.6670	0	0.0440	0.2389
0	10.4333	3.7567	0	30.3605	-0.0805

CAAA =

0	-5.6536	1.2250	0	-0.0708	0.0083
0	8.5296	-7.8041	0	30.1808	-32.6150
0	913.0323	2.6293	0	24.4259	0.2460

CAAAA =

1.0e+003 *

0	-0.0019	-0.0003	0	-0.0057	0.0012
0	-0.0733	1.0654	0	0.0210	-0.0191
0	0.7439	-0.0080	0	0.9243	-0.0001

CAAAAA =

1.0e+004 *

0	-0.0134	-0.0040	0	-0.0004	0.0001
0	0.0059	0.0623	0	-0.0064	0.1058
0	2.7867	0.0004	0	0.1170	-0.0114

keteramatan = [1 0 0 0 0 0, 0 0 1 0 0 0, 0 0 0 0 1 0, 0 0 0 1.0000 0 0, 0 0 0 0 0 1.0000, 0 30.1530 0 0 0.4610 -0.1150, 0 0 0 0 -0.1500 -0.0375, 0 30.1500 -32.6670 0 0.0440 0.2389, 0 10.4333 3.7567 0 30.3605 -0.0805, 0 -5.6536 1.2250 0 -0.0708 0.0083, 0 8.5296 -7.8041 0 30.1808 -32.6150, 0 913.0323 2.6293 0 24.4259 0.2460, 0 -0.0019 -0.0003 0 -0.0057 0.0012, 0 -0.0733 1.0654 0 0.0210 -0.0191, 0 0.7439 -0.0080 0 0.9243 -0.0001, 0 -0.0134 -0.0040 0 -0.0004 0.0001, 0 0.0059 0.0623 0 -0.0064 0.1058, 0 2.7867 0.0004 0 0.1170 -0.0114]

keteramatan =

1.0000	0	0	0	0	0
0	0	1.0000	0	0	0
0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000	0	0
0	0	0	0	0	1.0000
0	30.1530	0	0	0.4610	-0.1150
0	0	0	0	-0.1500	-0.0375
0	30.1500	-32.6670	0	0.0440	0.2389
0	10.4333	3.7567	0	30.3605	-0.0805
0	-5.6536	1.2250	0	-0.0708	0.0083
0	8.5296	-7.8041	0	30.1808	-32.6150
0	913.0323	2.6293	0	24.4259	0.2460

Lampiran 2

❖ Menentukan Kestabilan Double Pendulum Terbalik Metode LQR

Menggunakan Matlab.

```
A=[0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1;0 0 0 0 -0.15 -
0.0375; 0 30.153 0 0 0.461 -0.115;0 30.15 -32.667 0 0.044
0.2389]
B=[0;0;0;0.625;-1.923;-0.161]
Q=[1 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1
0;0 0 0 0 0 0]
R = [2]
[K,P,E]=lqr(A, B, Q, R)
t=0:0.01:77;
sys=ss(A-B*K,eye(6),eye(6),eye(6));
x=initial(sys,[0;0;0;0;0;1],t);
x1=[1 0 0 0 0 0]*x';
x2=[0 0 1 0 0 0]*x';
x3=[0 0 0 0 1 0]*x';
figure(1)
plot(t,x1,'b','LineWidth',2);
xlabel('t (detik)');ylabel('perpindahan mobil');
grid on

figure(2)
plot(t,x2,'b','LineWidth',2);
xlabel('t (detik)');ylabel('sudut pendulum 1');
grid on

figure(3)
plot(t,x(:,3),'b','LineWidth',2);
xlabel('t (detik)');ylabel('sudut pendulum 2');
grid on

A =
    0         0         0    1.0000         0         0
    0         0         0         0    1.0000         0
    0         0         0         0         0    1.0000
    0         0         0         0   -0.1500   -0.0375
    0   30.1530         0         0    0.4610   -0.1150
    0   30.1500  -32.6670         0    0.0440    0.2389

B =
    0
    0
    0
    0.6250
   -1.9230
   -0.1610
```

Q =

1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

R =

2

K =

-0.7071 -41.1460 4.1303 -1.7807 -7.3450 -0.0726

P =

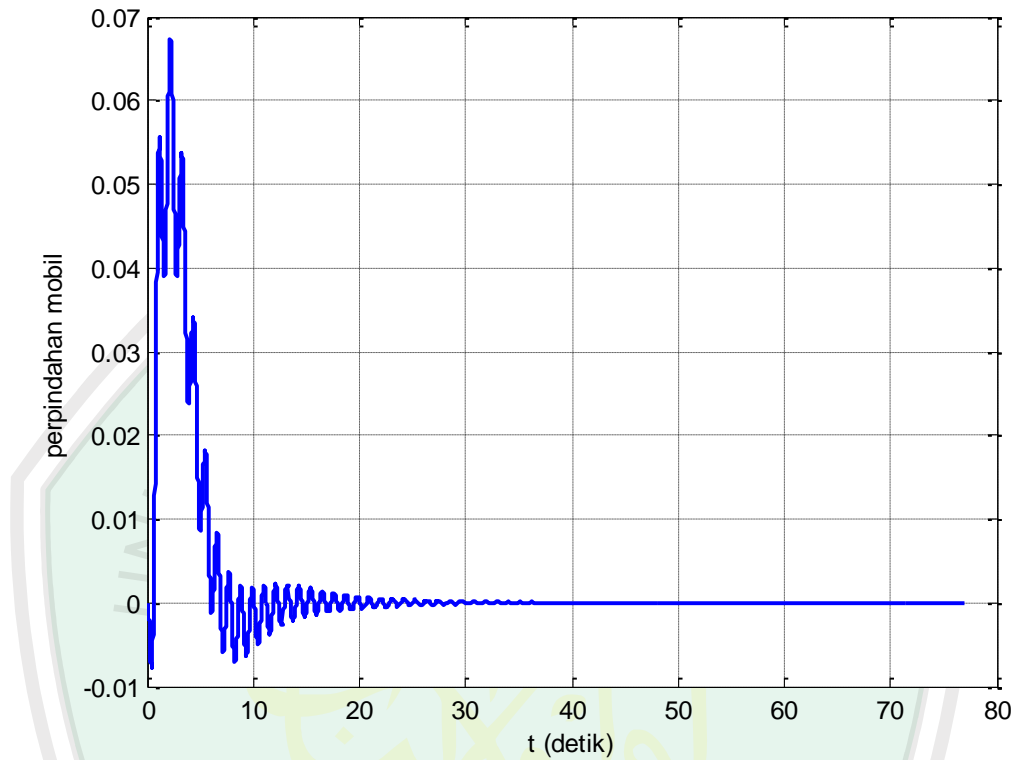
2.5183	10.0479	0.3802	3.1708	1.7510	0.1788
10.0479	313.4359	-57.4316	23.5520	49.9275	6.2199
0.3802	-57.4316	72.0937	0.6966	-4.0268	-0.5069
3.1708	23.5520	0.6966	6.9269	4.0646	0.4619
1.7510	49.9275	-4.0268	4.0646	8.9569	0.0385
0.1788	6.2199	-0.5069	0.4619	0.0385	2.2350

E =

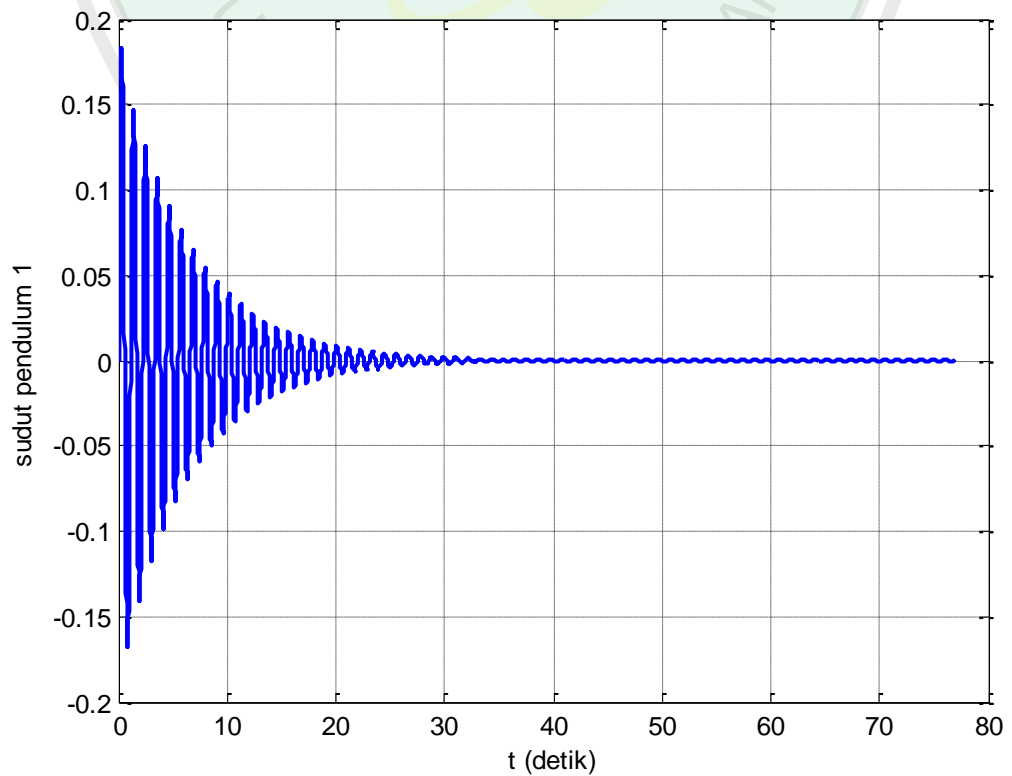
-6.2448
-4.8309
-0.4698 + 0.4700i
-0.4698 - 0.4700i
-0.1540 + 5.7141i
-0.1540 - 5.7141i

Lampiran 3

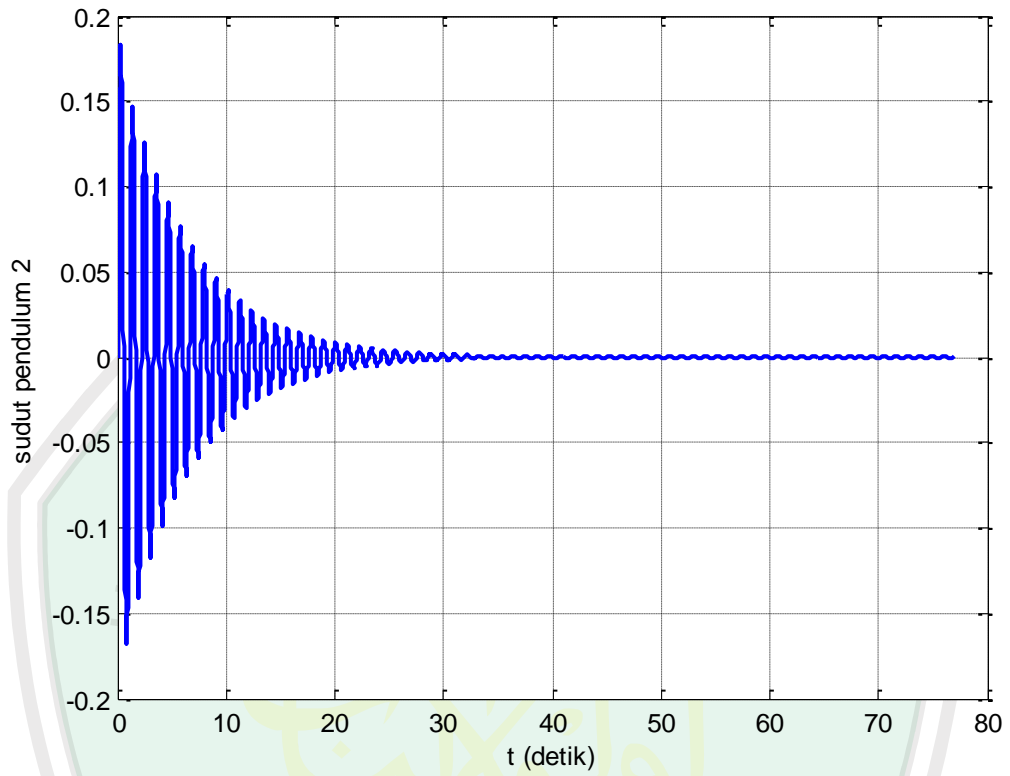
❖ Gambar Hasil Simulasi Kestabilan pada Kereta



❖ Gambar Hasil Simulasi Kestabilan Pendulum 1



❖ **Gambar Hasil Simulasi Kestabilan Pendulum 2**



PUSAT PERPUSTAKAAN

RIWAYAT HIDUP



Chusnul Fathonah yang biasa dipanggil Chusnul, lahir di kabupaten Pasuruan 19 Mei 1992.

Anak ke-4 dari empat bersaudara pasangan Bapak Kusni Sukardi dan Ibu Ni'ati. Penulis tinggal di Lingkungan Geneng Sari GG IV RT/RW: 001/007 Pecalukan Prigen Pasuruan.

Pendidikan dasar ditempuh di MI Miftahul Huda Pecalukan dan lulus pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke SMP Maarif Prigen dan lulus tahun 2007. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Maarif NU Pandaan dan lulus tahun 2010. Selanjutnya, pada tahun 2010 menempuh penulis menempuh S1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif pada organisasi Mabna SABAB devisi K3O, SAKHO devisi keamanan, dan organisasi intra kampus. Penulis pernah menjadi Dewan Racana PRAMUKA pada periode 2012 dan 2013 serta pengurus PASUSKA pada periode 2014.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Chusnul Fathonah
NIM : 10610021
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal *Double*
Pendulum Terbalik pada Kereta Menggunakan Metode
Linear Quadratic Regulator (LQR).
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	29 Mei 2015	Konsultasi Bab I dan Bab II	1. ✓
2.	08 Juni 2015	Bab III	2. ✓
3.	12 Juni 2015	Kajian Agama	3. ✓
4.	19 Juni 2015	Revisi Kajian Agama	4. ✓
5.	14 Agustus 2015	Revisi Bab III dan Bab I	5. ✓
6.	30 Oktober 2015	Revisi Bab I, II, dan III	6. ✓
7.	13 November 2015	Revisi Bab III dan ACC Bab I, II	7. ✓
8.	16 November 2015	Linierisasi	8. ✓
9.	17 November 2015	Bab III	9. ✓
10.	24 November 2015	Revisi Kajian Agama	10. ✓
11.	27 November 2015	Keseluruhan Kajian Agama	11. ✓
12.	8 Desember 2015	ACC Keseluruhan	12. ✓
13.	8 Desember 2015	ACC Kajian Agama	13. ✓

Malang, 08 Desember 2015

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001