PENYELESAIAN NUMERIK GELOMBANG AIR DANGKAL LINEAR ID DENGAN METODE *LAX-FRIEDRICHS*

SKRIPSI

OLEH

ROWAIHUL JANNAH

NIM. 10610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2016

PENYELESAIAN NUMERIK GELOMBANG AIR DANGKAL LINEAR ID DENGAN METODE *LAX-FRIEDRICHS*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Rowaihul Jannah
NIM. 10610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL LINEAR 1D MENGGUNAKAN METODE *LAX-FRIEDRICHS*

SKRIPSI

Oleh
Rowaihul Jannah
NIM. 10610002

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 Mei 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19810502 200501 1 004	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL LINEAR 1D MENGGUNAKAN METODE *LAX-FRIEDRICHS*

SKRIPSI

Oleh
Rowaihul Jannah
NIM. 10610002

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 8 Juni 2016

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rowaihul Jannah
NIM	: 10610002
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Air Dangkal Line 1D Menggunakan Metode *Lax-Friedrichs*.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-ben merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, at pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya send kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka s bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 31 Mei 2016
Yang membuat pernyataa

Rowaihul Jannah
NIM. 10610002

MOTO

"Telah pasti datangnya ketetapan Allah, maka janganlah kamu meminta agar disegerakan datangnya. Maha Suci Allah dan Maha Tinggi dari apa yang mereka persekutukan" (An Nahl: 1)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ini kepada:

Kedua orang tua ayahanda **M. Muhtadi Mukhtar** dan ibunda **Anik Mu'izzah**

yang tak pernah berhenti untuk mendoakan dan memberi motivasi kepada penulis

Adik-adik penulis **Lu'lui Zulaikho** dan **Hasnai Masruhani**

yang tak pernah lelah untuk mendukung dan memberi semangat demi terselesaikannya skripsi ini.

Suami tercinta **Abd. Rouf** sebagai teman, sahabat, dan guru terbaik yang senantiasa memotivasi agar skripsi ini dapat diselesaikan.

Bidadari kecil penulis **Rahma Zuhaira Syauqiyya**

Semoga menjadi putri sholihah.

Serta segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi bagi penulis.

.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, saran, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan ilmu serta arahan yang sangat bermanfaat bagi penulis.
6. Segenap keluarga besar Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

7. Kedua orang tua ayahanda M. Muhtadi Mukhtar dan Ibu Anik Mu'izzah serta ayahanda Mu'adi (alm) dan ibu Ni'mah yang tak pernah lelah memberikan doa, kasih sayang, semangat, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh keluarga PMII Rayon "*Pencerahan*" Galileo dan Teater Galileo (TEGAL) khususnya Naila Nafilah, Nur Aini, Nurul Jannah, Harum Kurniasari, Fitria Nur Aini, Muhamad Ghozali, Ah. Syihabuddin Zahid, Muhammad Hasan, Moch. Fahmi, C.A, Sigit Fembrianto, Afifah Nur Aini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2010, yang telah banyak membantu dan terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Jannah, Rowaihul. 2016. **Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D Menggunakan Metode *Lax-Friedrichs***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Kata Kunci**:** persamaan gelombang air dangkal linear 1D, metode *Lax-Friedrichs*, syarat kestabilan, orde *error*.

Penelian ini, mengkaji tentang penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linear 1D. Metode yang digunakan dalam penyelesaian persamaan ini adalah Metode *Lax-Friedrichs*. Metode *Lax-Friedrichs* adalah salah satu dari metode beda hingga dimana metode ini merupakan perbaikan dari metode *Forward Time Centered Space (FTCS).* Setelah diketahui penyelesaian numeriknya, selanjutnya adalah menentukan syarat kestabilan dan orde *error* untuk menjamin kekonvergenan solusi. Metode yang digunakan untuk menganalisis kestabilan dalam penelitian ini adalah kestabilan *von Neumann*, sedangkan untuk orde *error* adalah menggunakan ekspansi deret Taylor. Kemudian dilakukan beberapa simulasi berdasarkan hasil diskritisasi persamaan gelombang air dangkal linear 1D dan syarat kestabilan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan metode *Lax-Friedrichs* pada persamaan gelombang air dangkal linear 1D stabil dengan syarat tertentu.

ABSTRACT

Jannah, Rowaihul. 2016. **Numerical Solution of 1D Linear Shallow Water Equation Using Lax-Friedrichs** Method. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) H. Wahyu. H. Irawan, M.Pd

Keyword: 1D Linear Shallow Water Equation, *Lax-Friedrichs* Method, Stability, Consistency.

This research, observes the numerical solution of 1D linear shallow water equation. The method that uses in the solution of this equation is *Lax-Friedrichs* method. Lax-Friedrichs method an improvement of the Forward Time Centered Space (FTCS) method. After find the solution numeric then find the stability and orde error to ensure convergency of solution. The method that is used to analyze the stability on this research is the stability of *von Neumann*, while the error orde is using is Taylor series expansion. And then some simulation to be done based on discrete form of 1D linear shallow water equation and stability condition. From a series of the simulation it shows that *Lax-Friedrichs* method on 1D linear shallow water equation is stable with certain conditions.

ملخص

جنة, روائح. 2016. **الحلول المعادلة موحة المياه السطحية على الرتبة الاولى باستخدام طريق *Lax-Friedrichs*** البحث الجامعى شعبة الريا ضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك ابراهيم مالانج. المشرف: محمد جامهوري الماجستر, الحاج وحيو. ه. ايراوان الماجستر.

كلمات: معادلة موجة المياه السطحية على الرتبة الاولى, طريقة *Lax-Friedrichs* شرط الاستدامة, رتبة الخطأ

تدريس الباحثة عن الحلول المادلة موجة المياه السطحية على الرتبة الاولى في هذا البحث الطريقة التي تستخدم في الحل هذه المعادلة هو طريقة *Lax-Friedrichs* طريقة *Lax-Friedrichs* نفسها هي واحدة من طريقة الفرق المحدود حيث هذا طريقة هو تحسنا عن طريقة *Lax-Friedrichs* بعدان يولم الحلول لمعادلته من هذه طريقة ثم تعيين شرط الاستدامة ورتبة الخطأ ليضمن سداد الحل. طريقة المستخدمة لتحليل استفرار في هذا البحث هو استفرار *von Neuman* في حين لامر خطأ يستخدم توسع رتل تا يلور. ثم يعمل المعا كاة با عتبار على معادلة موجة الماه السطحية على الرّتبة الاولى. حا صل يدل على ان استخدام طريقة *Lax-Friedrichs* على معادلة موجة المياه السطحية على الرتية الاولى هي مسميدة بشرط معين.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami dan dipecahkan. Langkah pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan masalah atau model matematikanya (Purwanto, 1998). Secara bahasa (*lughawi)* kata matematika berasal dari bahasa Yunani yaitu "*mathema"* atau mungkin *"mathematikos"* yang artinya hal-hal yang dipelajari. Bagi orang Yunani, matematika tidak hanya meliputi pengetahuan mengenai angka dan ruang tetapi juga mengenai musik dan ilmu falak (Abdusysyakir, 2007).

Dalam ayat al-Quran surat al-Baqarah (2) ayat 261 disebutkan:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى كُلِّ سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ ۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ ۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ

"Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah Swt. Swt. adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah Swt. melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki dan Allah Swt. Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui".

Maksud ayat tersebut, nampak jelas bahwa Allah Swt. telah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah Swt. dengan rumus matematika. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan $y = 700x$, dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdusysyakir, 2007).

Ketika berbicara dalam konteks perhitungan dengan menggunakan suatu metode, sesungguhnya banyak hal yang melalui sistem perhitungan atau estimasi tersebut dalam kehidupan ini, seperti perhitungan penetapan awal bulan puasa dan perhitungan dalam pembagian waris. Dalam menyelesaikan permasalahan tersebut tentunya menggunakan metode-metode pendekatan yang ada dan mempunyai bentuk solusi estimasi yang sempurna. Dalam ilmu matematika terapan kita kenal dengan ilmu numerik yang bentuk solusinya mampu mendekati kebenaran dalam menyelesaikan persoalan (Munir, 2008). Misalnya metode numerik dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berkaitan dengan gelombang, misalnya gelombang elektromagnetik, gelombang air, dan gelombang radio. Berbicara tentang gelombang, Allah Swt. telah menjelaskan manusia dalam surat an-Nur ayat 40 yang berbunyi:

أَوۡ كَظُلُمَٰتٖ فِي بَحۡرٖ لُّجِّيّٖ يَغۡشَىٰهُ مَوۡجٞ مِّن فَوۡقِهِۦ مَوۡجٞ مِّن فَوۡقِهِۦ سَحَابٞۚ ظُلُمَٰتُۢ
بَعۡضُهَا فَوۡقَ بَعۡضٍ إِذَآ أَخۡرَجَ يَدَهُۥ لَمۡ يَكَدۡ يَرَىٰهَاۗ وَمَن لَّمۡ يَجۡعَلِ ٱللَّهُ لَهُۥ نُورٗا فَمَا
لَهُۥ مِن نُّورٍ ٤٠

“ Atau seperti gelap gulita di lautan yang dalam, yang diliputi oleh ombak, yang di atasnya ombak (pula), di atasnya (lagi) awan; gelap gulita yang tindih-bertindih, apabila Dia mengeluarkan tangannya, Tiadalah Dia dapat melihatnya, (dan) Barangsiapa yang tiada diberi cahaya (petunjuk) oleh Allah Swt. Tiadalah Dia mempunyai cahaya sedikitpun” .

Berdasarkan ayat tersebut terdapat kalimat “*Atau seperti gelap gulita di lautan yang dalam, yang diliputi oleh ombak, yang di atasnya ombak (pula), di atasnya (lagi) awan”* para ilmuwan menemukan bahwasanya adanya keberadaan gelombang yang terjadi pada pertemuan antara lapisan-lapisan air laut atau massa jenis yang berbeda. Gelombang yang dinamakan gelombang internal ini meliputi wilayah perairan di kedalaman lautan dan samudra dikarenakan pada kedalaman ini air laut masih memiliki massa jenis lebih tinggi dibanding lapisan air di atasnya (Yahya, 2000).

Halik (2015) menyebutkan gelombang merupakan gangguan medium yang dapat berlanjut dengan sendirinya, yang bergerak dari suatu titik ke titik lainnya dengan membawa energi dan momentum. Mengingat kata gelombang, maka banyak sekali gelombang yang ada dalam kehidupan, salah satunya adalah gelombang air dangkal. Hapsari (2014) menyebutkan bahwa gelombang air dangkal adalah gelombang yang terjadi pada pemukaan air dangkal dimana panjang gelombang cukup besar dibandingkan kedalamannya. Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk mensimulasikan penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam ruang 1D. Persamaan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah persamaan air dangkal 1D. Persamaan air dangkal 1D mengasumsikan gelombang air sebagai masalah satu dimensi, yakni sebagai fungsi satu variabel ruang x dan variabel waktu t. Hal ini dilakukan untuk menyederhanakan masalah sehingga mempermudah dalam perhitungan.

Sedangkan penyelesaian dalam masalah gelombang air dangkal ini dapat diselesaikan dengan metode numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitis atau eksak (Triatmodjo, 2002).

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk penyelesaian pada persamaan gelombang air dangkal adalah Metode *Lax-Friedrichs*. Metode *Lax-Friedrichs* ini merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan mengimplementasikan metode beda hingga yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang. Metode *Lax-Friedrichs* sendiri adalah perbaikan dari metode FTCS. Pada metode *Lax-Friedrichs* nilai dari u_j^n pada FTCS diganti dengan rata-rata dari u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n (Ma'rifah, 2014). Pada penelitian sebelumnya yakni Moh. Halik (2015) menggunakan *Lax-Friedrichs* sebagai metode numerik dalam menyelesaikan persamaan gelombang tali. Berdasarkan uraian di atas maka judul yang diangkat dalam penelitian ini adalah "Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D Menggunakan Metode *Lax-Friedrichs*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linear 1D menggunakan metode *Lax-Friedrichs*?
2. Bagaimana analisis syarat kestabilan dan orde *error* dari persamaan gelombang air dangkal linear 1D menggunakan metode tersebut?

1.3 TujuanPenelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui bentuk penyelesaian persamaan gelombang air dangkal linear 1D menggunakan metode *Lax-Friedrichs*.
2. Mengetahui kestabilan dan orde *error* dari persamaan gelombang air dangkal linear 1D menggunakan metode tersebut.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini yaitu sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan gelombang air dangkal linear 1D dengan menggunakan metode *Lax-Friedrichs*, serta dapat menemukan metode yang akurat dalam menyelesaikan persamaan tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Untuk mendekati sasaran yang diharapkan, maka perlu adanya pembatasan permasalahan, antara lain:

1. Persamaan gelombang air dangkal yang digunakan adalah persamaan gelombang air dangkal linear 1D.

2. Persamaan gelombang air dangkal yang digunakan adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial (uh)}{\partial x}$$

dengan kondisi batas untuk η,

$$\eta(0,t) = f_1(t) \quad \text{dan} \quad \eta\,(L,t) = f_2(t)$$

kemudian untuk u,

$$u(0,t) = s_1(x) \quad \text{dan} \quad u(L,t) = s_2(x)$$

dan kondisi awal untuk η dan u adalah:

$$\eta(x,0) = \phi(x) \quad \text{dan} \quad u(x,0) = \psi(x)$$

dengan u adalah kecepatan pada arah x dalam waktu t, g adalah percepatan gravitasi, η adalah perubahan ketinggian permukaan air, dan h adalah total kedalaman air (Kampf, 2009).

3. Terdapat 2 kondisi yaitu ketika h adalah konstan dan h adalah fungsi terhadap x dengan $h = \sin x$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *study literature*, yakni dengan menelaah beberapa literatur berupa buku, jurnal, dan referensi lain yang bersangkutan. Kemudian melakukan penelitian untuk memperoleh data dan informasi-informasi yang dibutuhkan dalam pembahasan masalah tersebut. Secara umum langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan diskritisasi pada persamaan gelombang air dangkal linear 1D dengan menggunakan metode *Lax-Friedrichs*. Langkah-langkahnya yaitu:
   a. Mencari turunan pertama pada persamaan gelombang air dangkal linear 1D
   b. Mensubstitusi hasil turunan pertama ke dalam deret Taylor
   c. Mendiskritkan hasil substitusi dengan metode beda maju untuk waktu dan metode beda pusat untuk ruang.
2. Menentukan syarat kestabilan. Langkah-langkahnya yaitu:
   a. Mensubstitusi nilai $u_j^n = \rho^n e^{i\alpha j}$ dan $\eta_j^n = \alpha^n e^{i\alpha j}$ kedalam bentk diskrit persamaan gelombang air dangkal linear 1D
   b. Menentukan syarat perlu dan cukup kestabilan *Van Neumann* yaitu $|\rho| \leq 1$
3. Menentukan orde *error*. Langkah-langkahnya yaitu:
   a. Menjabarkan ekspansi deret Taylor u_j^{n+1}dan $u_{j\pm1}^n$ sampai orde tiga
   b. Mensubstitusi hasil ekspansi deret Taylor ke dalam bentuk diskrit persamaan gelombang air dangkal linear 1D
4. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan dengan menggunakan MATLAB.
5. Menginterpretasikan hasil solusi numerik persamaan gelombang air dangkal linear 1D menggunakan metode *Lax-Friedrichs*.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan karya ilmiah ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dijelaskan tentang penyelesaian masalah dalam Islam, persamaan gelombang air dangkal, deret Taylor, metode *Lax-Friedrichs*, kestabilan, dan orde *error*.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dijabarkan tentang diskritisasi, analisis kestabilan, analisis orde *error*, simulasi dan interpretasi hasil, serta kajian keagamaan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dikemukakan kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linear 1D pada penelitian ini adalah dengan menggunakan metode *Lax-Friedrichs*, serta menentukan syarat kestabilan dan orde *error* dari metode tersebut. Untuk menentukan orde *error*, maka digunakan deret *Taylor*. Oleh sebab itu pada bagian ini dijelaskan tentang persamaan gelombang air dangkal, metode *Lax-Friedrichs*, stabilitas dan orde *error* serta deret *Taylor* dalam penentuan kekonsistenan.

2.1 Persamaan Gelombang Air Dangkal

Hapsari (2014) menyebutkan bahwa gelombang air dangkal adalah gelombang yang terjadi pada pemukaan air dangkal dimana panjang gelombang cukup besar dibandingkan kedalamannya. Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk mensimulasikan penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam ruang 1D. Persamaan yang dibahas dalam skripsi ini adalah persamaan air dangkal 1D. Persamaan air dangkal 1D mengasumsikan gelombang air sebagai masalah satu dimensi, yakni sebagai fungsi satu variabel ruang x dan variabel waktu t. Hal ini dilakukan untuk menyederhanakan masalah sehingga mempermudah dalam perhitungan.

Pada persamaan ini, persamaan air dangkal merupakan persamaan bagi gelombang air yang permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman. Sistem dianggap air dangkal jika kedalaman fluida jauh lebih kecil daripada panjang gelombangnya atau persamaan air dangkal hanya berlaku untuk gelombang yang memiliki perbandingan amplitudo gelombang dan panjang gelombangnya sebesar 1:10. Persamaan air dangkal berlaku untuk fluida yang memiliki masa jenis konstan, tidak kental, dan tidak dapat ditekan. Dalam hal ini, persamaan air dangkal merupakan persamaan bagi gelombang air yang profil permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman (Kampf, 2009).

Persamaan gelombang air dangkal ini terdiri dari dua buah persamaan, yang pertama diturunkan dari hukum konservasi massa dan yang kedua diturunkan dari hukum konservasi momentum (Setiantini, 2007).

Kampf (2009) menyebutkan persamaan gelombang air dangkal 1D memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial (uh)}{\partial x} \tag{2.2}$$

dengan u adalah kecepatan pada arah x pada waktu t, g adalah percepatan gravitasi, η adalah perubahan ketinggian permukaan air, dan h adalah kedalaman air.

2.2 Deret Taylor

Deret *Taylor* merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Deret *Taylor* untuk fungsi multivariabel sebagai berikut:

Misalkan diberikan fungsi f dengan variabel bebas x dan t diekspansi dengan deret Taylor di sekitar (*x*) adalah sebagai berikut:

$$f(x_{i+1}, t_{i+1}) = f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_{i+1} - t_i) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x_{i+1} - x_i)(t_{i+1} - t_i) +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_{i+1} - t_i)^2\right) + \cdots$$

(Chapra dan Canale, 2010)

Sehingga untuk fungsi $f(x + \Delta x, t)$, $f(x - \Delta x, t)$, $f(x + 2\Delta x, t)$,$f(x, t - \Delta t)$, $f(x, t + \Delta t)$ dan $f(x + \Delta x, t + \Delta t)$ diekspansi ke dalam deret *Taylor* di sekitar (*x*,*t*) sebagai berikut:

$$f(x + \Delta x, t) = f(x,t) + f_x(x,t)\ \Delta x + \frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\ \Delta x^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(x,t)\ \Delta x^3 + \cdots$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x,t) - f_x(x,t)\ \Delta x + \frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\ \Delta x^2 - \frac{1}{6}f_{xxx}(x,t)\ \Delta x^3 + \cdots$$

$$f(x, t + \Delta t) = f(x,t) + f_t(x,t)\ \Delta t + \frac{1}{2}f_{tt}(x,t)\ \Delta t^2 + \frac{1}{6}f_{ttt}(x,t)\ \Delta t^3 + \cdots$$

$$f(x, t - \Delta t) = f(x,t) - f_t(x,t)\ \Delta t + \frac{1}{2}f_{tt}(x,t)\ \Delta t^2 - \frac{1}{6}f_{ttt}(x,t)\ \Delta t^3 + \cdots$$

Strauss (2007) menyebutkan bahwa terdapat dua jenis galat (*error*) dalam sesuatu komputasi yang menggunakan aproksimasi tersebut yaitu *truncation error* (*error* pemotongan) yaitu *error* yang terjadi karena pemotongan dari suatu deret tak hingga menjadi deret berhingga dan *round-off error (error* pembulatan) yaitu *error* yang terjadi akibat pembulatan suatu bilangan sampai pada digit tertentu.

2.3 Metode Numerik

2.3.1 Metode Beda Hingga

Strauss (2007) menyebutkan bahwa metode beda hingga merupakan sesuatu metode yang sangat popular dalam penyelesaian masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor.

Metode beda hingga adalah metode yang menggunakan deret Taylor yang dapat digunakan untuk memprediksi nilai pada suatu titik sebagai turunan dari titik yang lain (Sasongko, 2010).

Adapun operator metode beda hingga yaitu:

persamaan beda maju pada ruang

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}}{\Delta x} \tag{2.3}$$

persamaan beda mundur pada ruang

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j}^{n} - u_{j-1}^{n}}{\Delta x} \tag{2.4}$$

persamaan beda pusat pada ruang

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} \tag{2.5}$$

persamaan beda maju pada waktu

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{j}^{n+1} - u_{j}^{n}}{\Delta t} \tag{2.6}$$

persamaan beda mundur pada waktu

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{j}^{n} - u_{j}^{n-1}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

persamaan beda pusat pada waktu

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.3), (2,4), dan (2.5) dapat diperoleh dari ekspansi deret Taylor. Misalkan diberikan fungsi $u(x+\Delta x,t),\ u(x-\Delta x,t),\ u(x,t+\Delta t), u(x,t-\Delta t)$ diaproksimasikan ke dalam deret *Taylor* di sekitar (x,t) sebagai berikut:

$$u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + u_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)\Delta x^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots \tag{2.9}$$

$$u(x-\Delta x,t) = u(x,t) - u_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)\Delta x^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots \tag{2.10}$$

$$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + u_t(x,t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}u_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots \tag{2.11}$$

$$u(x,t-\Delta t) = u(x,t) - u_t(x,t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}u_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots \tag{2.12}$$

(Amamah, 2014)

Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda maju, beda mundur dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret *Taylor* dari persamaan (2.9), (2.10), (2.11) dan (2.12) yang dipotong sampai orde tertentu. Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.9) dengan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t) = 2u_x(x,t)\Delta x - \frac{1}{6}u_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots$$

$$2xu_x(x,t) = u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t) + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

$$u(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \qquad (2.13)$$

Sedangkan turunan hampiran pertama terhadap t untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.11) dengan persamaan (2.12), sehingga diperoleh:

$$u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta x) = 2u_t(x,t)\Delta t - \frac{1}{6}u_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots$$

$$2\Delta t\, u_t(x,t) = u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \qquad (2.14)$$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t, maka persamaan (2.13) dan (2.14) dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{j}^{n+1} - u_{j}^{n-1}}{2\Delta t} \qquad (2.15)$$

(Strauss, 2007).

2.3.2 Metode FTCS (Forward Time-Centered Space)

Ma'rifah (2014) mengatakan bahwa salah satu metode numerik yang termasuk metode beda hingga adalah metode FTCS (*Forward Time-Centered Space*). Metode ini menggunakan metode beda hingga skema maju dalam waktu dan beda hingga skema pusat dalam ruang. Dengan pendekatan beda maju untuk turunan terhadap waktu dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang jika pada persamaan (2.3), (2.5), (2.6) dan (2.8) disubstitusi ke persamaan (2.1) maka menjadi

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = -g\left(\frac{\eta_{j+1}^n-\eta_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1}-\eta_j^n}{\Delta t} = -h\left(\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1}-\eta_j^n}{\Delta t} + h_j\left(\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) + \left(\frac{h_{j+1}-h_{j-1}}{2\Delta x}\right)u_j^n = 0 \qquad (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan gelombang air dangkal linear 1D menuunakan metode *FTCS.*

2.3.3 Metode Lax-Friedrichs

Menurut Halik (2015) metode numerik lain yang termasuk dalam metode beda hingga adalah metode *Lax-Friedrichs*. Metode *Lax-Friedrichs* adalah salah satu metode pendekatan numerik dengan mengimplementasikan metode beda hingga yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang. Rezolla (2011) menyatakan bahwa dasar dari metode *Lax-Friedrichs* sangat sederhana yakni mengganti nilai dari u_j^n pada FTCS dengan rata-rata dari u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n. Atau dapat ditulis:

$$u_j^n = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$$

Prosedur dalam metode *Lax-Friedrichs* untuk menyeleaikan persamaan differensial parsial mengimplementasikan metode beda pusat dan metode beda maju. Metode beda pusat untuk turunan ruangnya dan metode beda baju untuk turunan waktu. Hal ini terjadi karena metode *Lax-Friedrichs* ini merupakan bentuk metode perkembangan dari metode FTCS.

2.4 Stabilitas

Dalam Zauderer (2006) disebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam metode *Lax-Friedrichs*. Ketidakstabilan metode *Lax-Friedrichs* menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan. Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan metode adalah kestabilan *von Neumann* atau juga dikenal dengan stabilitas *Fourier*, dengan menerapkan analisis kestabilan *von Neumann* terhadap metode *Lax-Friedrichs* sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan tersebut, dengan superskrip *i* menunjukkan posisi, *n* menunjukkan waktu, *j* merupakan vektor dan untuk semua *a* dalam interval $[0, 2\pi]$. Syarat perlu dan cukup kestabilan *von Neumann* adalah:

$$|\rho| \leq 1$$

2.5 Nilai Eigen

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka sesuatu vektor tak nol x di dalam R^n, dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ yang dinamakan nilai eigen dari A. Dalam hal ini dikatakan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ (Anton dan Rorres, 2004).

Andaikan bahwa λ adalah nilai eigen dari matriks A, dan x adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ, maka $Ax = \lambda x = \lambda Ix$ dimana I adalah matriks identitas $n \times n$, sedemikian hingga $(A - \lambda I)x = 0$. Karena $x \in R^n$ tidak nol, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\det (A - \lambda I) = 0 \tag{2.17}$$

atau dengan kata lain

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

Persamaan (2.17) disebut persamaan karakteristik matriks A. Skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Apabila diperluas lagi, determinan $(A - \lambda I)$ adalah sesuatu polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A. Persamaan (2.18) adalah persamaan polinomial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, diberikan nilai eigen dari matriks A. Atau sebarang nilai eigen λ dari matriks A, himpunan $\{x \epsilon R^n: (A - I)x = 0\}$ adalah ruang nul dari matriks $(A - \lambda I)$.

2.6 Orde *Error*

Menurut Munir (2008), secara umum, terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan numerik :

1. Galat pemotongan (*truncation error*)

2. Galat pembulatan (*round-off error*)

Galat pemotongan mengacu pada galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Tipe galat pemotongan bergantung pada metode komputasi yang digunakan untuk penghampiran sehingga kadang-kadang disebut galat metode.

Istilah pemotongan muncul karena banyak metode numerik yang diperoleh dengan penghampiran fungsi menggunakan deret Taylor. Karena deret Taylor merupakan deret tak hingga, maka untuk penghampiran tersebut deret *Taylor* di potong sampai suku orde tertentu saja.

Solusi kriteria konsistensi dengan sendirinya akan terpenuhi jika $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$, artinya skema dikatakan konsisten terhadap PDP (Persamaan Diferensial Parsial)nya jika selisih antara persamaan tersebut dengan PDPnya (suku-suku *truncation error*) menuju nol. Kriteria kekonsistenan ini ditentukan dengan menggunakan deret Taylor. Dalam Zauderer (2006) disebutkan bahwa aproksimasi solusi pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan dan kestabilan dari skema yang diberikan terpenuhi.

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktik hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan. Untuk menyederhanakan permasalahan biasanya hanya ditujukan pada beberapa suku deret Taylor tersebut, sedangkan suku yang lainnya diabaikan (Triatmodjo, 2002).

2.7 Kajian tentang Gelombang dalam Al-Quran

Evolusi gelombang merupakan bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Dalam al-Quran surat ar-Rum ayat 46, Allah Swt. berfirman:

وَمِنۡ ءَايَٰتِهِۦٓ أَن يُرۡسِلَ ٱلرِّيَاحَ مُبَشِّرَٰتٖ وَلِيُذِيقَكُم مِّن رَّحۡمَتِهِۦ وَلِتَجۡرِيَ ٱلۡفُلۡكُ
بِأَمۡرِهِۦ وَلِتَبۡتَغُواْ مِن فَضۡلِهِۦ وَلَعَلَّكُمۡ تَشۡكُرُونَ ٤٦

"*Dan di antara tanda-tanda kekuasan-Nya adalah bahwa Dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudah kamu bersyukur*."

Secara umum kata "angin" yaitu angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan hujan dan yang meniup kapal layar agar dapat berlayar di lautan. Kedekatan makna "angin" dalam ayat di atas adalah gelombang. Dalam tafsir al-Misbah ayat di atas berbicara tentang angin untuk menggambarkan nikmat Allah Swt. di darat dan di laut. Angin ada yang membawa manfaat ada juga yang mengakibatkan bencana. Manusia pun demikian terdapat orang kafir dengan perusakannya yang mengakibatkan bencana sedangkan orang mukmin dengan amal salehnya mengandung kemanfaatan.

Kata " بأمره " (atas perintah/izin-Nya) ditekankan oleh ayat tersebut untuk mengingatkan manusia betapa besar nikmat Allah Swt. yang dianugrahkan kepada mereka melalui kemampuan kapal mengarungi samudra serta keselamatan selama perjalanan, dan bahwa Allah Swt. menentukan hukum-hukum alam yang memungkinkan manusia memanfaatkan lautan dengan segala isinya (Quraish, 2002).

Allah Swt. juga berfirman dalam al-Quran mengenai gelombang pada surat Luqman ayat 32 yaitu:

وَإِذَا غَشِيَهُم مَّوْجٌ كَٱلظُّلَلِ دَعَوُاْ ٱللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ ٱلدِّينَ فَلَمَّا نَجَّىٰهُمْ إِلَى ٱلْبَرِّ فَمِنْهُم مُّقْتَصِدٌ ۚ وَمَا يَجْحَدُ بِـَٔايَٰتِنَآ إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

"Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah Swt. dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya Maka tatkala Allah Swt. menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus. dan tidak ada yang mengingkari ayat- ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar".

Dalam tafsir Al-Qurthubi kata " الموج " artinya gelombang diserupakan dengan " الظلل " artinya gunung-gunung, karena gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain, seperti halnya awan (Al-Qurthubi, 2008). Selain itu, tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. diperjelas pada surat al-Anbiya' ayat 30 yaitu:

أَوَلَمْ يَرَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَنَّ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَٰهُمَا ۖ وَجَعَلْنَا مِنَ ٱلْمَآءِ كُلَّ شَىْءٍ حَىٍّ ۖ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

"Dan Apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka Mengapakah mereka tiada juga beriman?"

Quraish (2002) menyatakan terdapat pendapat ulama tentang firman-Nya tersebut, ulama tersebut memahami dalam arti langit dan bumi tadinya merupakan gumpalan yang terpadu. Hujan tidak turun dan bumipun tidak ditumbuhi pepohonan, kemudian Allah Swt. membelah langit dan bumi dengan jalan menurunkan hujan dari langit dan menumbuhkan tumbuh-tumbuhan di bumi.

Sedangkan ulama lain berpendapat bahwa bumi dan langit tadinya merupakan sesuatu yang utuh tidak terpisah, kemudian Allah Swt. pisahkan dengan mengangkat langit ke atas dan membiarkan bumi tetap ditempatnya berada di bawah lalu memisahkan keduanya dengan udara.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D

Persamaan gelombang air dangkal linear 1D adalah sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial (uh)}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

dengan kondisi batas untuk η,

$$\eta(0,t) = f_1(t) \quad \text{dan} \quad \eta(L,t) = f_2(t)$$

kemudian untuk u,

$$u(0,t) = s_1(x) \quad \text{dan} \quad u(L,t) = s_2(x)$$

dan kondisi awal untuk η dan u adalah:

$$\eta(x,0) = \phi(x) \quad \text{dan} \quad u(x,0) = \psi(x)$$

dengan u adalah kecepatan pada arah x pada waktu t, g adalah percepatan gravitasi, η adalah perubahan ketinggian permukaan air, dan h adalah kedalaman air.

Persamaan gelombang air dangkal yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan (3.1). Persamaan (3.1) dapat diselesaikan dalam 2 kondisi yaitu:

1. Kondisi 1 ketika h adalah konstan, maka persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.3}$$

2. Kondisi 2 ketika h adalah fungsi terhadap x, maka persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h(x)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial h(x)}{\partial x} \tag{3.5}$$

Penyelesaian numerik dari persamaan tersebut menggunakan metode *Lax-Friedrich,* dengan mengimplementasikan metode beda maju digunakan pada turunan waktu (*t*) dan metode beda pusat pada turunan ruang (*x*). Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{3.10}$$

3.1.1 Kondisi 1: *h Konstan*

Bentuk diskrit skema *FTCS* untuk persamaan persamaan (3.2) dan (3.3) adalah:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= -g\left(\frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) \\ \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} &= -h\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Selanjutnya dengan metode *Lax-Friedrichs* untuk skema *Forward Time Centered Space (FTCS)* adalah dengan mengganti u_j^n sebagai rata-rata u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n serta

η_j^n sebagai rata – rata η_{j+1}^n dan η_{j-1}^n pada persamaan (3.10) sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) \quad (3.12)$$

$$\eta_j^{n+1} = -h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n\right) \quad (3.13)$$

3.1.2 Kondisi 2: Jika h adalah Fungsi terhadap x

Bentuk diskrit skema *FTCS* untuk persamaan persamaan (3.4) dan (3.5) adalah:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -g\left(\frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + = -h_j\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) - \left(\frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)u_j^n \quad (3.15)$$

Selanjutnya dengan metode *Lax-Friedrichs* untuk skema *Forward Time Centered Space (FTCS)* adalah dengan mengganti u_j^n sebagai rata-rata u_{j+1}^n dan u_{j-1}^n serta η_j^n sebagai rata-rata η_{j+1}^ndan η_{j-1}^n pada persamaan (3.10) sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) \quad (3.16)$$

$$\eta_j^{n+1} = -h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n\right) \quad (3.17)$$

3.2 Analisis Kestabilan

3.2.1 Kondisi 1: Ketika h Konstan

Pada analisis kestabilan ini yang dihitung adalah pada saat h konstan. Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati persamaan gelombang air dangkal tersebut stabil atau tidak, maka perlu melakukan uji kestabilan menggunakan stabilitas *von Neumann*, sehingga syarat kestabilan dari persamaan (3.12) dan (3.13) dapat dicari dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}, i = \sqrt{-1}$ dan $\eta_j^n = \alpha^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan (3.12) dan (3.13) sehingga diperoleh:

$$\rho^{n+1}e^{iaj} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\alpha^n e^{ia(j+1)} - \alpha^n e^{ia(j-1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\rho^n e^{ia(j+1)} + \rho^n e^{ia(j-1)}\right) \tag{3.18}$$

$$\alpha^{n+1}e^{iaj} = -h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho^n e^{ia(j+1)} - \rho^n e^{ia(j-1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^n e^{ia(j+1)} + \alpha^n e^{ia(j-1)}\right) \tag{3.19}$$

Untuk penyederhanaan persamaan (3.18) dan (3.19) dibagi dengan e^{iaj} sehingga diperoleh:

$$\rho^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\alpha^n e^{ia} - \alpha^n e^{-ia}\right) + \frac{1}{2}\rho^n\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) \tag{3.20}$$

$$\alpha^{n+1} = -h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho^n e^{ia} - \rho^n e^{-ia}\right) + \frac{1}{2}\alpha^n\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) \tag{3.21}$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$ maka, persamaan (3.20) dan (3.21) dapat ditulis:

$$\rho^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\alpha^n(\cos a + i\sin a - (\cos a - i\sin a)) + \frac{1}{2}\rho^n(\cos a + i\sin a + (\cos a - i\sin a))$$

$$\alpha^{n+1} = -h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\rho^n(\cos a + i\sin a - (\cos a - i\sin a)) + \frac{1}{2}\alpha(\cos a + i\sin a + \cos a - i\sin a)$$

Sehingga diperoleh:

$$\left.\begin{aligned}\rho^{n+1} &= -g\frac{\Delta t}{\Delta x}\alpha^{n}(i\sin a) + \rho^{n}(\cos a)\\ \alpha^{n+1} &= -h\frac{\Delta t}{\Delta x}\rho^{n}(i\sin a) + \alpha^{n}(\cos a)\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Persamaan (3.22) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\rho^{n+1}\\ \alpha^{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos a & -g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a)\\ -h\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a) & \cos a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho^{n}\\ \alpha^{n}\end{bmatrix}$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix}\rho^{n+1}\\ \alpha^{n+1}\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\rho^{n}\\ \alpha^{n}\end{bmatrix}$$

dengan nilai dari A adalah

$$A = \begin{bmatrix}\cos a & -g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a)\\ -h\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a) & \cos a\end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Berdasarkan kriteria kestabilan *von Neumann*, maka norm nilai eigen dari matriks A haruslah kurang dari atau sama dengan satu (Zauderer, 2006). Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan kembali

$$Ax = \lambda I x$$

atau

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{3.24}$$

Selanjutnya dapat dihitung

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos a & -g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a)\\ -h\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a) & \cos a\end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{vmatrix}\lambda - \cos a & -g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a)\\ -h\frac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a) & \lambda - \cos a\end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) \quad = (\lambda - \cos a)^2 - \left(-g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i \sin a)\right)\left(-h\frac{\Delta t}{\Delta x}(i \sin a)\right)$$

$$0 \quad = \cos^2 a - 2\lambda \cos a + \lambda^2 + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a \tag{3.25}$$

Persamaan (3.25) disebut persamaan karakteristik dari *A* dimana nilai dari akar-akar persamaan ini adalah nilai eigen dari *A*. Misal $C = \cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a$, maka persamaan (3.25) dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos a + C = 0 \tag{3.26}$$

sehingga akar-akar dari persamaan (3.26) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2\cos a) \pm \sqrt{(-2\cos a)^2 - 4(1)C}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos a \pm \sqrt{4\cos^2 a - 4C}}{2}$$

$$= \cos a \pm \sqrt{\cos^2 a - C} \tag{3.27}$$

atau dapat ditulis

$$\lambda_1 = \cos a + \sqrt{\cos^2 a - \left(\cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a\right)}$$

$$= \cos a + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin a\sqrt{gh}$$

$$\lambda_2 = \cos a - \sqrt{\cos^2 a - \left(\cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a\right)}$$

$$= \cos a - i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin a\sqrt{gh}$$

Persamaan akan stabil jika

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1 \tag{3.28}$$

Maka untuk $|\lambda_1|$ diperoleh:

$$|\lambda_1| = \left|\cos a + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin a\sqrt{gh}\right| \tag{3.29}$$

dan untuk $|\lambda_2|$ diperoleh:

$$|\lambda_2| = \left|\cos a - i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin a\sqrt{gh}\right| \tag{3.30}$$

Berdasarkan definisi modulus bilangan kompleks, maka persamaan (3.30) berlaku:

$$|\lambda_1| = \sqrt{cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a} \tag{3.31}$$

Sedangkan untuk (3.30) berlaku:

$$|\lambda_2| = \sqrt{cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a} \tag{3.31}$$

Pada persamaan (3.29) dan (3.30) dapat diketahui bahwa

$|\lambda_1| = |\lambda_2|$

Dalam kajian pustaka di atas telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan akan terpenuhi jika $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$, dimana telah diketahui di atas bahwa $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Sehingga diperoleh syarat kestabilan untuk $\lambda_{1,2}$ yaitu:

$$-1 \leq \sqrt{cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a} \leq 1$$

Syarat I:

$$-1 \leq \sqrt{cos^2 a + gh\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a}$$

$$1 \leq \; cos^2 a + gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a$$

$$1 \leq 1 - \sin^2 a + gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a$$

$$1 - 1 + \sin^2 a \leq gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a$$

$$1 \leq gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$$

$$1 \leq \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{3.33}$$

Persamaan (3.33) tidak memenuhi syarat kestabilan dari persamaan gelombang air dangkal linear 1D.

Syarat II:

$$\sqrt{cos^2 a + gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a} \leq 1$$

$$1 \, cos^2 a + gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a \leq 1$$

$$1 - \sin^2 a + gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a \leq 1$$

$$gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 a \leq 1 - 1 + \sin^2 a$$

$$gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 1$$

$$\sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{3.34}$$

Persamaan (3.34) tidak memenuhi syarat kestabilan dari persamaan gelombang air dangkal linear 1D.

Sehingga persamaan (3.34) merupakan syarat kestabilan persamaan gelombang air dangkal pada saat h konstan.

3.2.2 Kondisi 2: Jika h adalah Fungsi terhadap x

Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati persamaan gelombang air dangkal tersebut stabil atau tidak, maka perlu melakukan uji kestabilan menggunakan stabilitas *van Neumann*, sehingga syarat kestabilan dari persamaan (3.16) dan (3.17) dapat di cari dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}, i = \sqrt{-1}$ dan $\eta_j^n = \alpha^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$\rho^{n+1}e^{iaj} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\alpha^n e^{ia(j+1)} - \alpha^n e^{ia(j-1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\rho^n e^{ia(j+1)} + \rho^n e^{ia(j-1)}\right) \tag{3.35}$$

$$\alpha^{n+1}e^{iaj} = -h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho^n e^{ia(j+1)} - \rho^n e^{ia(j-1)}\right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)\left(\rho^n e^{ia(j+1)} + \rho^n e^{ia(j-1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^n e^{ia(j+1)} + \alpha^n e^{ia(j-1)}\right) \tag{3.36}$$

Untuk penyederhanaan persamaan (3.35) dan (3.36) dibagi dengan e^{iaj} sehingga diperoleh:

$$\rho^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\alpha^n e^{ia} - \alpha^n e^{-ia}\right) + \frac{1}{2}\rho^n\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) \tag{3.37}$$

$$\alpha^{n+1} = -h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho^n e^{ia} - \rho^n e^{-ia}\right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)\left(\rho^n e^{ia} + \rho^n e^{-ia}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^n e^{ia} + \alpha^n e^{-ia}\right) \tag{3.38}$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i\sin a$ maka, persamaan (3.37) dan (3.38) dapat ditulis:

$$\rho^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\alpha^n(\cos a + i\sin a - (\cos a - i\sin a)) + \frac{1}{2}\rho^n(\cos a + i\sin a + \cos a - i\sin a)$$

$$\alpha^{n+1} = -h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\rho^n\left(\cos a + i\sin a - (\cos a - i\sin a)\right)$$

$$-\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j+1}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)\rho^{n}(\cos a+i\sin a+\cos a-i\sin a)+\frac{1}{2}\alpha^{n}(\cos a+ i\sin a+\cos a-i\sin a)$$

Sehingga diperoleh:

$$\rho^{n+1}=\alpha^{n}-g\frac{\Delta t}{\Delta x}(2i\sin a)+\frac{1}{2}\rho^{n}(2\cos a) \tag{3.39}$$

$$\alpha^{n+1}=-ih_{j}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\rho^{n}2\sin a-\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j+1}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)(2\cos a) +\frac{1}{2}\alpha^{n}(2\cos a) \tag{3.35}$$

Persamaan (3.39) dan (3.40) dapat dituliskan kembali

$$\rho^{n+1}=\alpha^{n}\left(-g\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin a\right)+\rho^{n}(\cos a)$$

$$\alpha^{n+1}=\rho^{n}\left(-h_{j}\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin a-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(h_{j+1}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)(\cos a)\right)+\alpha^{n}(\cos a) \tag{3.41}$$

Persamaan (3.41) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\rho^{n+1}\\ \alpha^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos a & -g\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a)\\ -h_{j}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}i\sin a-\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(h_{j+1}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)(\cos a) & \cos a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho^{n}\\ \alpha^{n}\end{bmatrix}$$

Atau dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix}\rho^{n+1}\\ \alpha^{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\rho^{n}\\ \alpha^{n}\end{bmatrix}$$

dengan nilai dari A adalah

$$A=\begin{bmatrix}\cos a & -g\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(i\sin a)\\ -h_{j}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}i\sin a-\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(h_{j+1}^{n}-h_{j-1}^{n}\right)(\cos a) & \cos a\end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria kestabilan *von Neumann*, maka norm nilai eigen dari matriks A haruslah kurang dari atau sama dengan satu (Zauderer, 2006). Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n\times n$ maka dapat dituliskan kembali

$Ax = \lambda I x$

atau

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{3.42}$$

Selanjutnya dapat dihitung

$$\lambda I - A \quad = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos a & -g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i \sin a) \\ -h_j \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin a - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)(\cos a) & \cos a \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - \cos a & g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i \sin a) \\ h_j \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin a + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)\cos a & \lambda - \cos a \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \cos a)^2$$

$$- \left(g\frac{\Delta t}{\Delta x}(i \sin a)\right)\left(h_j \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin a + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)\cos a\right)$$

$$0 = \cos^2 a - 2\lambda \cos a + \lambda^2 + gh_j \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\sin^2 a)$$

$$-g\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)(\cos a)(i \sin a) \tag{3.43}$$

Persamaan (3.43) disebut persamaan karakteristik dari *A* dimana nilai dari akar-akar persamaan ini adalah nilai eigen dari *A*. Misal $C = \cos^2 a + gh_j \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\sin^2 a) - g\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)(\cos a)(i \sin a)$. Maka persamaan (3.43) dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos a + C = 0 \tag{3.44}$$

Maka akar-akar dari persamaan (3.44) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2\cos a) \pm \sqrt{(-2\cos a)^2 - 4(1)C}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos a \pm \sqrt{4\,cos^2 a - 4C}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \cos a \pm \sqrt{cos^2 a - C} \qquad (3.45)$$

Persamaan (3.45) dapat ditulis kembali

$$\lambda_1 = \cos a + \sqrt{-gh_j \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\sin^2 a) + ig\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)(\cos a)(\sin a)} \qquad (3.46)$$

$$\lambda_2 = \cos a - \sqrt{-gh_j \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\sin^2 a) + ig\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)(\cos a)(\sin a)} \qquad (3.47)$$

Misalkan

$$r = \cos a$$

$$s = \sin a$$

$$p = -gh_j \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} s^2 \qquad (3.48)$$

$$q = g\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right) rs \qquad (3.49)$$

Jika p dan q adalah bilangan real dimana $(B \neq 0)$, maka

$$\sqrt{p + iq} = A + iB \qquad (3.50)$$

Dengan A dan B adalah bilangan real yng diberikan oleh:

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}} \qquad B = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}}$$

(Robinowitz, 1993)

Persamaan (3.50) dapat dituliskan kembali

$$\sqrt{p + iq} = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}} \qquad (3.51)$$

Sedhingga untuk persamaan (3.46) dapat dituliskan:

$$\lambda_1 = r + A + iB$$

$$= r + \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}$$

$$\lambda_2 = r - A + iB$$

$$= r - \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}$$

Syarat kestabilan akan terpenuhi ketika $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$, sehingga dapat ditulis:

$$|\lambda_1| = \left| r + \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}} \right| \tag{3.52}$$

Berdasarkan definisi modulus, persamaan (3.52) dapat ditulis:

$$|\lambda_1| = \sqrt{\left(r + \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + \frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2} + \frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}$$

$$= \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + \sqrt{p^2+q^2}} \tag{3.53}$$

$$|\lambda_2| = \left| r - \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}} \right|$$

$$= \sqrt{r^2 - 2r\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + \frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2} + \frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}$$

$$= \sqrt{r^2 - 2r\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}} + \sqrt{p^2+q^2}} \tag{3.54}$$

Syarat kestabilan akan terpenuhi jika $|\lambda_1| \leq 1$. Sehingga diperoleh syarat kestabilan untuk λ_1 yaitu dengan mensubstitusi nilai dari p dan q ke dalam persamaan (3.53), maka diperoleh:

$$\sqrt{\begin{array}{l} r^2 + 2r\sqrt{\dfrac{\sqrt{\left(-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2\right)^2 + \left(g\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)rs\right)^2} - gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2}{2}} \\ +\sqrt{\left(-gh_j\dfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2\right)^2 + \left(g\dfrac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)rs\right)^2} \end{array}} \leq 1$$

$$\sqrt{\begin{array}{l} r^2 + 2r\sqrt{\dfrac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4 + g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2 r^2s^2} - gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2}{2}} \\ +\sqrt{(gh_j)^2\dfrac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4 + g^2\dfrac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2 r^2s^2} \end{array}} \leq 1$$

$$\begin{array}{l} r^2 + 2r\sqrt{\dfrac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4 + g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2 r^2s^2} - gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2}{2}} \\ +\sqrt{(gh_j)^2\dfrac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4 + g^2\dfrac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2 r^2s^2} \end{array} \leq 1 \qquad (3.55)$$

Jika $s^2 = 1 - r^2$, maka persamaan (3.55) dapat ditulis

$$\begin{array}{l} r^2 + 2r\sqrt{\dfrac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2r+r^2) + g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2(1-r^2)r^2} - gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(1-r^2)}{2}} \\ +\sqrt{(gh_j)^2\dfrac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2r+r^2) + g^2\dfrac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2(1-s^2)s^2} \end{array} \leq 1 \qquad (3.56)$$

Karena nilai r terletak di antara -1 dan 1, maka untuk syarat kestabilan yang pertama dapat dicari dengan mensubstitusi nilai dari -1 pada r ke dalam persamaan (3.56), sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{l} (-1)^2 + 2(-1)\sqrt{\dfrac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(-1)^2+(-1)^4) + g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2(1-(-1)^2)(-1)^2} - gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(1-(-1)^2)}{2}} \\ +\sqrt{(gh_j)^2\dfrac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(-1)^2+(-1)^4) + g^2\dfrac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right)^2(1-(-1)^2)(-1)^2} \end{array} \leq 1$$

$$1 \leq 1 \qquad (3.57)$$

Dari persamaan (3.57) diketahui bahwa pada saat $r = -1$ memenuhi syarat kestabilan pada λ_1. Selanjutnya adalah mencari syarat kestabilan kedua dari λ_1. Untuk syarat kestabilan yang kedua dapat dicari dengan mensubstitusi nilai dari 1 pada r ke dalam persamaan (3.56), sehingga diperoleh:

$$(1)^2 + 2(1)\sqrt{\frac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(1)^2+(1)^4)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-(1)^2)(1)^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(1-(1)^2)}{2} + \sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(1)^2+(1)^4)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-(1)^2)(1)^2}} \leq 1$$

$$1 \leq 1 \tag{3.58}$$

Dari persamaan (3.57) dan (3.58) diketahui bahwa pada saat $r = 1$ dan $r = -1$ memenuhi syarat kestabilan pada λ_1.

Syarat kestabilan akan terpenuhi jika $|\lambda_2| \leq 1$. Sehingga diperoleh syarat kestabilan untuk λ_2 yaitu dengan mensubstitusi nilai dari p dan q ke dalam persamaan (3.54), maka diperoleh:

$$\sqrt{r^2 - 2r\sqrt{\frac{\sqrt{\left(-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2\right)^2+\left(g\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)rs\right)^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2}{2} + \sqrt{\left(-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2\right)^2+\left(g\frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)rs\right)^2}}} \leq 1$$

$$\sqrt{r^2 - 2r\sqrt{\frac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2r^2s^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2}{2} + \sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2r^2s^2}}} \leq 1$$

$$r^2 - 2r\sqrt{\frac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2r^2s^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}s^2}{2} + \sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}s^4+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2r^2s^2}} \leq 1$$

Jika $s^2 = 1 - r^2$, maka persamaan di atas dapat ditulis

$$r^2 - 2r\sqrt{\frac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2r+r^2)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-r^2)r^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(1-r^2)}{2} + \sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2r+r^2)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-s^2)s^2}} \leq 1 \tag{3.59}$$

Karena nilai r terletak di antara -1 dan 1, maka untuk syarat kestabilan yang pertama dapat dicari dengan mensubstitusi nilai dari -1 pada r ke dalam persamaan (3.59), sehingga diperoleh:

$$(-1)^2 - 2(-1)\sqrt{\frac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(-1)^2+(-1)^4)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-(-1)^2)(-1)^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(1-(-1)^2)}{2}} \leq 1$$

$$+\sqrt{\left(gh_j\right)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(-1)^2+(-1)^4)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-(-1)^2)(-1)^2}$$

$$1 \leq 1 \tag{3.60}$$

Dari persamaan (3.60) diketahui bahwa pada saat $r = -1$ memenuhi syarat kestabilan pada λ_1. Selanjutnya adalah mencari syarat kestabilan kedua dari λ_1. Untuk syarat kestabilan yang kedua dapat dicari dengan mensubstitusi nilai dari 1 pada r ke dalam persamaan (3.59), sehingga diperoleh:

$$(1)^2 - 2(1)\sqrt{\frac{\sqrt{(gh_j)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(1)^2+(1)^4)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-(1)^2)(1)^2}-gh_j\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(1-(1)^2)}{2}} \leq 1$$

$$+\sqrt{\left(gh_j\right)^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}(1-2(1)^2+(1)^4)+g^2\frac{\Delta t^4}{16\Delta x^4}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)^2(1-(1)^2)(1)^2}$$

$$1 \leq 1 \tag{3.61}$$

Dari persamaan (3.60) dan (3.61) diketahui bahwa pada saat $r = 1$ dan $r = -1$ memenuhi syarat kestabilan pada λ_2.

3.3 Orde *Error*

Orde *error* pada metode *Lax-Friedrichs* dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret *Taylor* yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.9) dan (3.10)

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.62}$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \Delta x u_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.63}$$

$$u_{j-1}^{n} = u_j^n - \Delta x u_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.64}$$

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.65}$$

$$\eta_{j+1}^{n} = \eta_j^n + \Delta x \eta_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 \eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.66}$$

$$\eta_{j-1}^{n} = \eta_j^n - \Delta x \eta_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 \eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.67}$$

$$h_{j+1}^{n} = h_j^n + \Delta x h_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 h_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.68}$$

$$h_{j-1}^{n} = h_j^n - \Delta x h_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 h_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \cdots \tag{3.69}$$

3.3.1 Kondisi 1: Jika h Konstan

Selanjutnya persamaan (3.62), (3.63), (3.64), (3.65) dan (3.66) disubtisutisikan ke persamaan (3.12) yakni:

$$0 = u_j^{n+1} + g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$$

Sehingga diperoleh

$$0 = \left(u_j^n + \Delta t u_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}\Big|_j^n + \cdots\right) +$$
$$g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_j^n + \Delta x\eta_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\eta_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3\eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots - \left(\eta_j^n - \Delta x\eta_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\eta_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3\eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right)\right) - \frac{1}{2}\left(u_j^n + \Delta x u_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \left(u_j^n - \Delta x u_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right)\right)$$

$$0 = \left(u_j^n + \Delta t u_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}\Big|_j^n + \cdots\right) +$$
$$g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(2\Delta x\eta_x|_j^n + \frac{1}{3}\Delta x^3\eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) - \left(u_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \cdots\right)$$

$$0 = \left(\Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}\Big|_j^n + \cdots\right) + g\Delta t\left(\eta_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 \eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n + \cdots\right) \qquad (3.70)$$

Kemudian untuk penyederhanaan persamaan (3.70) dibagi dengan Δt sehingga diperoleh:

$$0 = \left(u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 u_{ttt}\Big|_j^n\right) + g\left(\eta_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 \eta_{xxx}\Big|_j^n\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx}\Big|_j^n + \cdots$$

$$0 = \left[u_t|_j^n + g\left(\eta_x|_j^n\right)\right] + \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 u_{ttt}\Big|_j^n + g\left(\frac{1}{6}\Delta x^2 \eta_{xxx}\Big|_j^n\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx}\Big|_j^n + \cdots \qquad (3.71)$$

Dari persamaan (3.1) diketahui bahwa:

$$u_t = -g\eta_x$$

Sedangkan dari persamaan (3.2) diketahui bahwa:

$$\eta_t = -hu_x$$

Maka jika persamaan (3.1) diturunkan terhadap t diperoleh:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (-g\eta)_t \\ &= \left(-g(\eta_t)\right)_x \\ &= \left(-g(-hu_x)\right)_x \\ &= ghu_{xx} \end{aligned} \qquad (3.72)$$

Selanjutnya persaman (3.49) diturunkan terhadap t sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
u_{ttt} &= (u_{tt})_t \\
&= (ghu_{xx})_t \\
&= gh(u_{xx})_t \\
&= gh(u_t)_{xx} \\
&= gh(-g\eta_x)_{xx} \\
&= -g^2 h\eta_{xxx} \qquad (3.73)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya persamaan (3.72) dan (3.73) disubstitusi ke dalam persamaan (3.71) sehingga diperoleh

$$0 = \left[u_t|_j^n + g(\eta_x|_j^n)\right] + \left(\frac{1}{2}ghu_{xx}\Big|_j^n\right)\Delta t - \left(\frac{1}{6}g^2 h\eta_{xxx}\Big|_j^n\right)\Delta t^2 + \left(g\frac{1}{6}\eta_{xxx}|_j^n\right)\Delta x^2 - \left(\frac{1}{2}u_{xx}\Big|_j^n\right)\frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \cdots$$

$$0 = \left[u_t|_j^n + g(\eta_x|_j^n)\right] + \left(\frac{\Delta t^2 gh - \Delta x^2}{2\Delta t}\right)u_{xx}|_j^n + \left(\frac{-g^2 h\Delta t^2 + g\Delta x^2}{6} + \right)\eta_{xxx}|_j^n + \cdots \qquad (3.74)$$

Berdasarkan persamaan (3.74) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan mempunyai orde dua yaitu $(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Persamaan (3.74) dikatakan konsisten saat

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \to 0} \left(\frac{\Delta t^2 gh - \Delta x^2}{2\Delta t}\right) u_{xx}\Big|_j^n = 0$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka nilai limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai u_{xx}, η_{xxx} jika dikalikan dengan nilai dari Δx dan Δt akan ikut mengecil. Galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$.

Selanjutnya mencari *orde error* dari persamaan (3.13) dengan mensubstitusi persamaan (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) dan (3.67) kepersamaan (3.13) yakni

$$0 = \eta_j^{n+1} + h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2}\left(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n\right)$$

sehingga diperoleh

$$0 = \eta_j^n + \Delta t \eta_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\left(u_j^n + \Delta x u_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots - \left(u_j^n - \Delta x u_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right)\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\eta_j^n + \Delta x \eta_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 \eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots + \left(\eta_j^n - \Delta x \eta_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}\Big|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 \eta_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right)\right)$$

$$0 = \eta_j^n + \Delta t \eta_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(2\Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{3}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(2\eta_j^n + \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \cdots\right)$$

$$0 = \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h\Delta t\left(u_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) - \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \cdots \quad (3.75)$$

Kemudian untuk penyederhanaan persamaan (3.75) dibagi dengan Δt sehingga di peroleh

$$0 = \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h\left(u_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\eta_{xx}\Big|_j^n + \cdots \quad (3.76)$$

$$0 = \left[\eta_t|_j^n + h\left(u_x|_j^n\right)\right] \quad (3.77)$$

$$+\frac{1}{2}\Delta t\eta_{tt}\Big|_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\eta_{xx}\Big|_j^n + \frac{\Delta t^2}{6}\eta_{ttt}\Big|_j^n + \frac{h}{6}u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots$$

Dari persamaan (3.2) diketahui

$$\eta_x = -\frac{1}{g}u_t$$

dan dari persamaaan (3.3) diketahui

$$u_x = -\frac{1}{h}\eta_t \tag{3.79}$$

Maka jika persamaan (3.54) diturunkan terhadap x akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= (\eta_x)_x \\
&= \left(-\frac{1}{g}u_t\right)_x \\
&= -\frac{1}{g}(u_x)_t \\
&= -\frac{1}{g}\left(-\frac{1}{h}\eta_t\right)_t \\
&= \frac{1}{gh}\eta_{tt}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Selanjutnya persamaan (3.80) diturunkan terhadap x diperoleh

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= (u_x)_x \\
&= \left(-\frac{1}{h}\eta_t\right)_x \\
&= -\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{g}u_t\right)_t \\
&= \frac{1}{gh}u_{tt}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Selanjutnya persamaan (3.81) diturunkan terhadap x diperoleh

$$\begin{aligned}
u_{xxx} &= (u_{xx})_x \\
&= \left(\frac{1}{gh}u_{tt}\right)_x
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{gh}\left(-\frac{1}{h}\eta_t\right)_{tt}$$

$$= -\frac{1}{gh^2}\eta_{ttt} \qquad (3.82)$$

Selanjutnya persamaan (3.81) dan (3.82) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.773) sehingga akan diperoleh

$$0 = [\eta_t|_j^n + h(u_x|_j^n)] + \frac{1}{2}\Delta t\eta_{tt}\Big|_j^n - \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{1}{gh}\eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{\Delta t^2}{6}\eta_{ttt}\Big|_j^n - \frac{h}{6}\frac{1}{gh^2}\eta_{ttt}\Big|_j^n + \ldots$$

$$0 = [\eta_t|_j^n + h(u_x|_j^n)] + \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{2\Delta tgh}\right)\eta_{tt}\Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t^2}{6} - \frac{h}{6gh^2}\right)\eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots$$

$$0 = [\eta_t|_j^n + h(u_x|_j^n)] + \left(\frac{\Delta t^2 gh - \Delta x^2}{2\Delta tgh}\right)\eta_{tt}\Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t^2 gh^2 - h}{6gh^2}\right)\eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots \qquad (3.83)$$

Berdasarkan persamaan (3.83) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde dua $(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Persamaan (3.83) dikatakan konsisten jika

$$\lim_{(\Delta t,\Delta x)\to 0}\left(\frac{\Delta t^2 gh - \Delta x^2}{2\Delta tgh}\right)\eta_{tt}\Big|_j^n = 0$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka nilai limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai η_{tt}, η_{ttt}, jika dikalikan dengan nilai dari Δx dan Δt akan ikut mengecil. Galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$.

3.3.2 Kondisi 2: Jika h Fungsi terhadap x

Untuk kondisi 2 yaitu dimana jika h bergantung pada x, dimana pada persamaan (3.16) untuk orde *error* nya adalah persamaan (3.74) yaitu

$$0=\left(\left[u_t|_j^n+g\left(\eta_x|_j^n\right)\right]+\left(\frac{\Delta t^2 gh-\Delta x^2}{2\Delta t}\right)u_{xx}\Big|_j^n+\left(-\frac{\Delta t^2 g^2 h+\Delta x^2 g}{6}+\right)\eta_{xxx}\Big|_j^n\right)+\cdots$$

Selanjutnya mencari orde *error* dari persamaan (3.17) yaitu pada persamaan (3.63), (3.64), (3.65), (3.66), (3,68), dan (3,69) disubstitusikan ke persamaan (3.17) yakni

$$0=\eta_j^{n+1}+h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)+\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n\right)\left(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n\right)-\frac{1}{2}\left(\eta_{j+1}^n+\eta_{j-1}^n\right)$$

.

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}0={}&\eta_j^n+\Delta t\eta_t\Big|_j^n+\frac{1}{2}\Delta t^2\eta_{tt}\Big|_j^n+\frac{1}{6}\Delta t^3\eta_{ttt}\Big|_j^n+\cdots+h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\Bigg(u_j^n+\Delta x u_x\Big|_j^n+\\&\frac{1}{2}\Delta x^2u_{xx}\Big|_j^n+\frac{1}{6}\Delta x^3u_{xxx}\Big|_j^n+\cdots-\Bigg(u_j^n-\Delta x u_x\Big|_j^n+\frac{1}{2}\Delta x^2u_{xx}\Big|_j^n-\frac{1}{6}\Delta x^3u_{xxx}\Big|_j^n+\\&\cdots\Bigg)\Bigg)+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\Bigg(\Bigg(h_j^n+\Delta x h_x\Big|_j^n+\frac{1}{2}\Delta x^2h_{xx}\Big|_j^n+\frac{1}{6}\Delta x^3h_{xxx}\Big|_j^n+\cdots\Bigg)-\Bigg(h_j^n-\Delta x h_x\Big|_j^n+\\&\frac{1}{2}\Delta x^2h_{xx}\Big|_j^n-\frac{1}{6}\Delta x^3h_{xxx}\Big|_j^n+\cdots\Bigg)\Bigg)\Bigg(u_j^n+\Delta x u_x\Big|_j^n+\frac{1}{2}\Delta x^2u_{xx}\Big|_j^n+\frac{1}{6}\Delta x^3u_{xxx}\Big|_j^n+\\&\cdots+\Bigg(u_j^n-\Delta x u_x\Big|_j^n+\frac{1}{2}\Delta x^2u_{xx}\Big|_j^n-\frac{1}{6}\Delta x^3u_{xxx}\Big|_j^n+\cdots\Bigg)\Bigg)-\frac{1}{2}\Bigg(\eta_j^n+\Delta x\eta_x\Big|_j^n+\\&\frac{1}{2}\Delta x^2\eta_{xx}\Big|_j^n+\frac{1}{6}\Delta x^3\eta_{xxx}\Big|_j^n+\cdots+\Bigg(\eta_j^n-\Delta x\eta_x\Big|_j^n+\frac{1}{2}\Delta x^2\eta_{xx}\Big|_j^n-\frac{1}{6}\Delta x^3\eta_{xxx}\Big|_j^n+\\&\cdots\Bigg)\Bigg)\end{aligned}$$

$$0 = \eta_j^n + \Delta t \eta_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h_j \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(2\Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{3}\Delta x^3 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) + \Delta t\left(h_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right)(u_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \cdots) - \frac{1}{2}(2\eta_j^n + \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \cdots)$$

$$0 = \eta_j^n + \Delta t \eta_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h_j \Delta t\left(u_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) + \Delta t\left(h_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right)(u_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \cdots)\left(2u_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}\Big|_j^n + \cdots\right) - \left(\eta_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}\Big|_j^n + \cdots\right)$$

$$0 = \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h_j \Delta t\left(u_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) + \Delta t\left(h_x|_j^n(u_j^n) + (h_x|_j^n)\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + (u_j^n)\frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n\left(\frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}\Big|_j^n\right)\right) - \frac{1}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}\Big|_j^n + \cdots \quad (3.84)$$

Persamaan (3.84) dibagi dengan Δt diperoleh

$$0 = \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 \eta_{ttt}\Big|_j^n + \cdots + h_j\left(u_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 u_{xxx}\Big|_j^n + \cdots\right) + \left(h_x|_j^n(u_j^n) + (h_x|_j^n)\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + (u_j^n)\frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n\left(\frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}\Big|_j^n\right)\right) - \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\eta_{xx}\Big|_j^n + \cdots$$

$$= \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t \eta_{tt}\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 \eta_{ttt}\Big|_j^n + h_j u_x|_j^n + h_j \frac{1}{6}\Delta x^2 u_{xxx}\Big|_j^n + h_x|_j^n(u_j^n) + (h_x|_j^n)\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + (u_j^n)\frac{1}{6}\Delta x^3 h_{xxx}\Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n\left(\frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}\Big|_j^n\right) - \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\eta_{xx}\Big|_j^n + \cdots$$

$$= [\eta_t|_j^n + h_j(u_x|_j^n) + h_x|_j^n(u_j^n)] + \left(\frac{1}{2}\eta_{tt}\right)\Delta t\Big|_j^n + \left(\frac{1}{6}\eta_{ttt}\right)\Delta t^2\Big|_j^n + + \left(h_j \frac{1}{6}u_{xxx}\right)\Delta x^2|_j^n + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{u_{xx}}{2}\right)\Delta x^2|_j^n - \eta_{xx}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\Big|_j^n + \cdots \quad (3.85)$$

Dari persamaan (3.85) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde satu dan dua $(\Delta t, \Delta x^2)$. Persamaan (3.85) dikatakan konsisten jika

$$\lim_{(\Delta t,\Delta t)\to 0}\left(\frac{1}{2}\eta_{tt}\right)\Delta t\Big|_j^n + \left(h_j\frac{1}{6}u_{xxx}\right)\Delta x^2|_j^n = 0$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka nilai limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai $\eta_{tt}, \eta_{ttt}, u_{xx}, u_{xxx}, \eta_{xx}$, jika dikalikan dengan nilai dari Δx dan Δt akan ikut mengecil. Galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$.

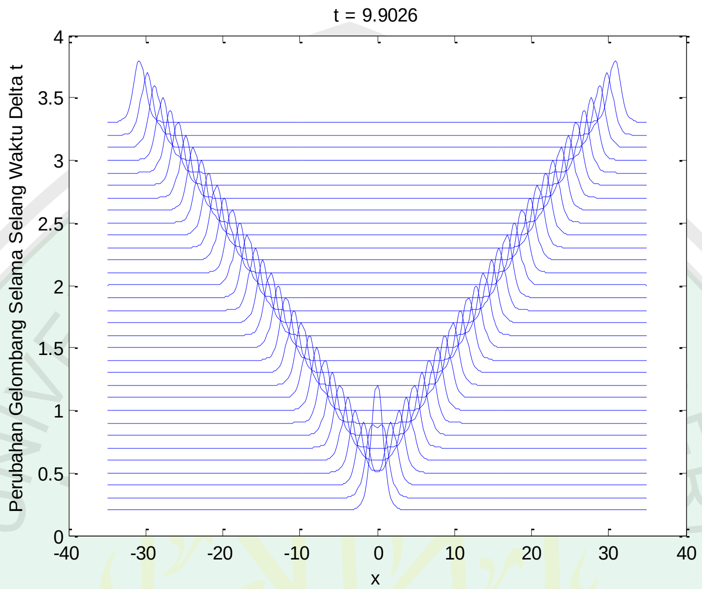
3.4 Simulasi dan Interpretasi

3.4.1 Kondisi 1: h Konstan

Pada subbab ini simulasi dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Setelah syarat kestabilan diperoleh dari skema yang digunakan, maka dapat dipilih nilai dari Δx dan Δt yang memenuhi syarat kestabilan yang akan digunakan dalam simulasi. Persamaan yang digunakan dalam program tersebut yaitu persamaan (3.12) dan (3.13) yang merupakan bentuk diskrit dari persamaan gelombang air dangkal linear 1D. Solusi persamaan gelombang air dangkal linear 1D akan stabil jika $\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{gh} \leq 1$, dengan $g = 9.8$ serta $h = 1$.

Simulasi pertama dipilih nilai $\Delta x = 0.2,\ \Delta t = \frac{0.2}{\sqrt{9.8}}$, maka diperoleh $\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{gh} = 1$ sehingga memenuhi syarat kestabilan. Diberikan kondisi awal

$\eta(x,0) = sech^2 x$ dan $u(x,0) = 0$, sehingga simulasi persamaan gelombang air dangkal linear 1D yaitu persamaan (3.12) dan (3.13) dapat dilihat pada Gambar 3.1 berikut.

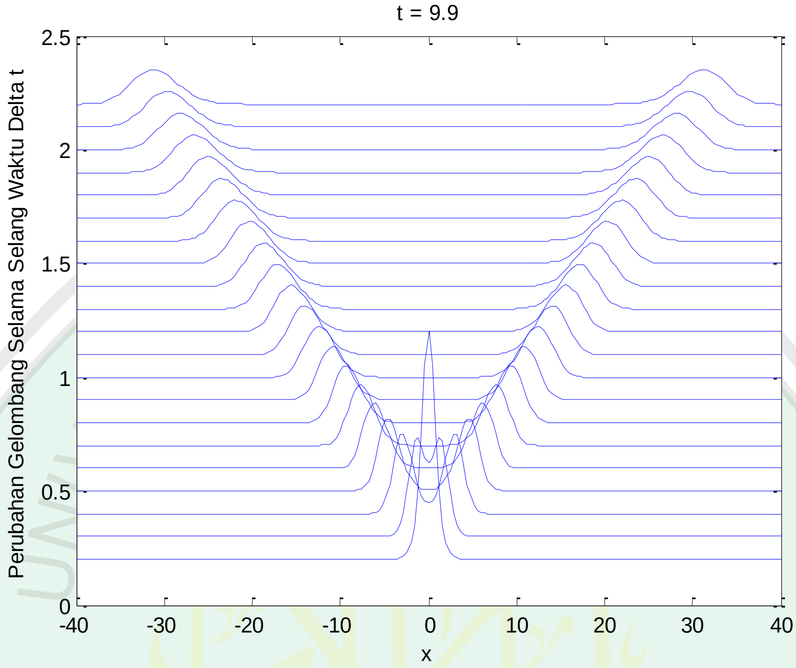


Gambar 3.1 Simulasi Pertama Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D

Gambar 3.1 menunjukkan solusi persamaan gelombang air dangkal linear 1D yang memenuhi syarat kestabilan. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa gelombang begerak dari arah pusat (pada saat $x = 0$) dengan tinggi gelombang 1, kemudian gelombang tersebut pecah menjadi dua arah yaitu bergerak menuju ke arah hulu sejauh $x = -35$ dan bergerak ke arah hilir sejauh $x = 35$. Pada simulasi ini tinggi gelombang kedua dan ketiga adalah 0.5886 dan 0.5015. sedangkan pada gelombang keempat himgga terakhir tinggi gelombang sama yakni 0.5000.

Simulasi kedua dipilih nilai $\Delta x = 0.4$, $\Delta t = 0.1$, $g = 9.8$ dan $h = 1$, maka diperoleh $\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{gh} = 0.7826$ sehingga memenuhi syarat kestabilan dimana $0.7826 \leq 1$, pada saat diberikan kondisi awal yaitu $\eta(x,0) = sech^2 x$ dan

$u(x,0) = 0$ sehingga simulasi persamaan gelombang air dangkal linear 1D yaitu persamaan (3.12) dan (3.13) dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut.

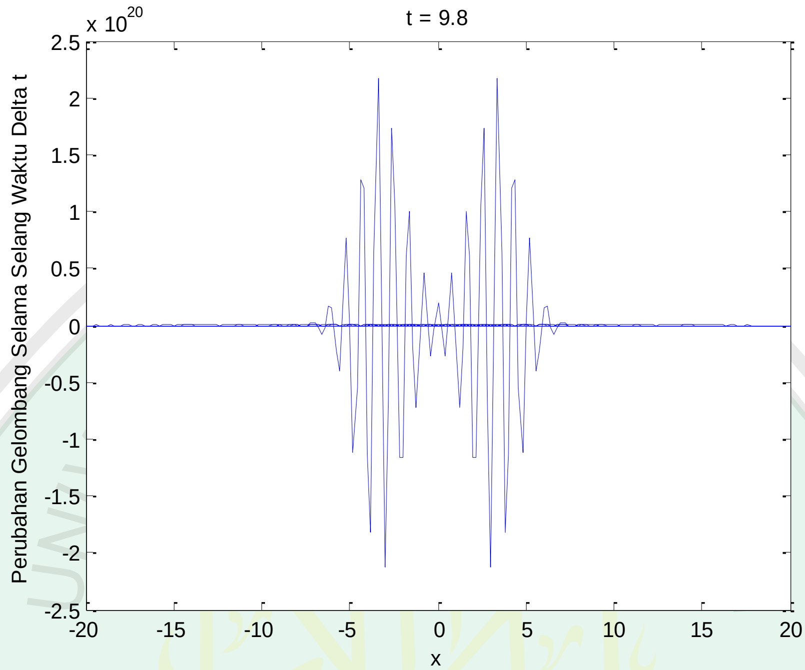


Gambar 3.2 Simulasi Kedua Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa model gelombang permukaan tersebut bergerak tetap dari arah pusat (pada saat $x = 0$) dengan tinggi gelombang 1 dalam selang waktu 0 sampai 10 kemudian gelombang tersebut pecah menjadi dua arah yaitu bergerak menuju ke arah hulu sejauh $x = -40$ dan bergerak ke arah hilir sejauh $x = 40$. Pada simulasi kedua ini perubahan tinggi gelombang terlihat berbeda dari pada simulasi pertama. Pada simulasi kedua tinggi gelombang berubah semakin rendah hingga mencapai tinggi 0.1515.

Simulasi ketiga dipilih nilai $\Delta x = 0.2,\ \Delta t = 0.2,\ g = 9.8$ dan $h = 1$, maka diperoleh $\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{gh} = 3.1305$, hal itu berarti tidak memenuhi syarat kestabilan. Diberikan kondisi awal yaitu $\eta(x,0) = sech^2 x$ dan $u(x,0) = 0$

sehingga simulasi persamaan gelombang air dangkal linear 1D yaitu persamaan (3.12) dan (3.13) dapat dilihat pada Gambar 3.3 berikut.



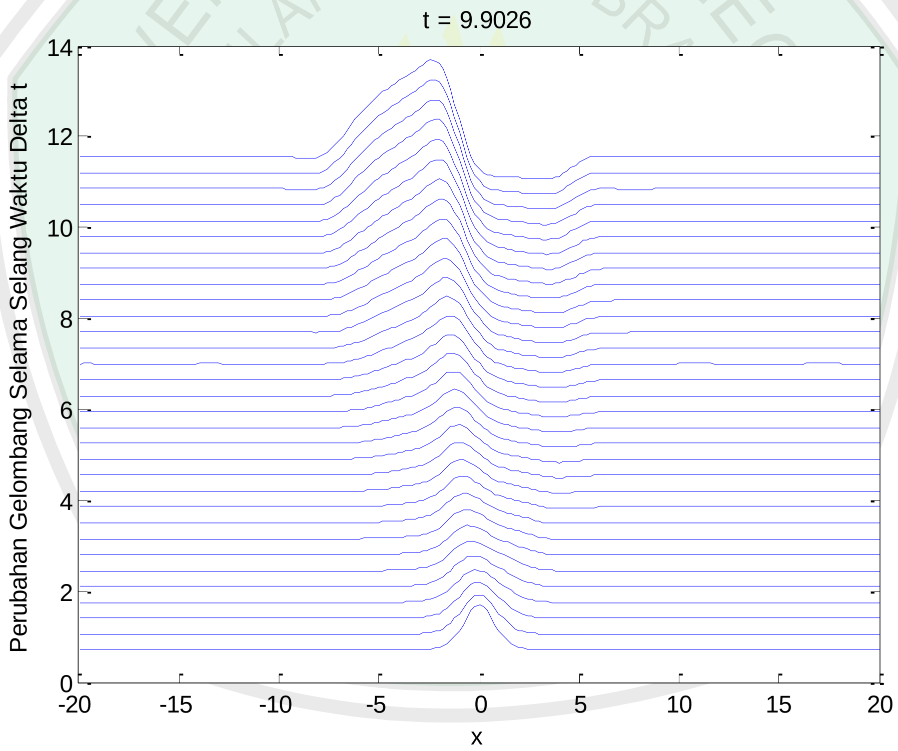
Gambar 3.3 Simulasi Ketiga Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D

Gambar 3.3 menunjukkan solusi persamaan gelombang air dangkal linear 1D yang tidak stabil, dengan kata lain perubahan tinggi gelombang dalam selang waktu 0 sampai 10 tidak beraturan. Berdasarkan gambar tersebut juga dapat dilihat bahwa gelombang begerak dari arah pusat (pada saat $x = 0$) dengan tinggi gelombang 1, kemudian gelombang tersebut pecah menuju dua arah yaitu ke arah hulu sejauh $x = -10$ dan ke arah hilir sejauh $x = 10$.

3.4.2 Kondisi 2: Ketika h Fungsi terhadap x

Pada subbab ini simulasi juga dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Persamaan yang disunakan dalam program tersebut yaitu persamaan (3.16) dan (3.17). Syarat kestabilan ketika *h* bergantung pada *x* dalam penelitian ini adalah sesuai pada persamaan (3.57), (3.58), (3.60) dan (3.61). Setelah syarat kestabilan diperoleh dari skema yang digunakan, maka dapat dipilih nilai dari Δx dan Δt yang memenuhi syarat kestabilan yang akan digunakan dalam simulasi. Sehingga untuk simulasi dan interpretasi pertama dipilih $\Delta x = 0.2,\ \Delta t = \frac{0.2}{\sqrt{9.8}}$, sedangkan pada simulasi dan interpretasi kedua dipilih $\Delta x = 0.1,\ \Delta t = 0.05$ dengan nilai $g = 9.8$ serta $h = \sin x$.

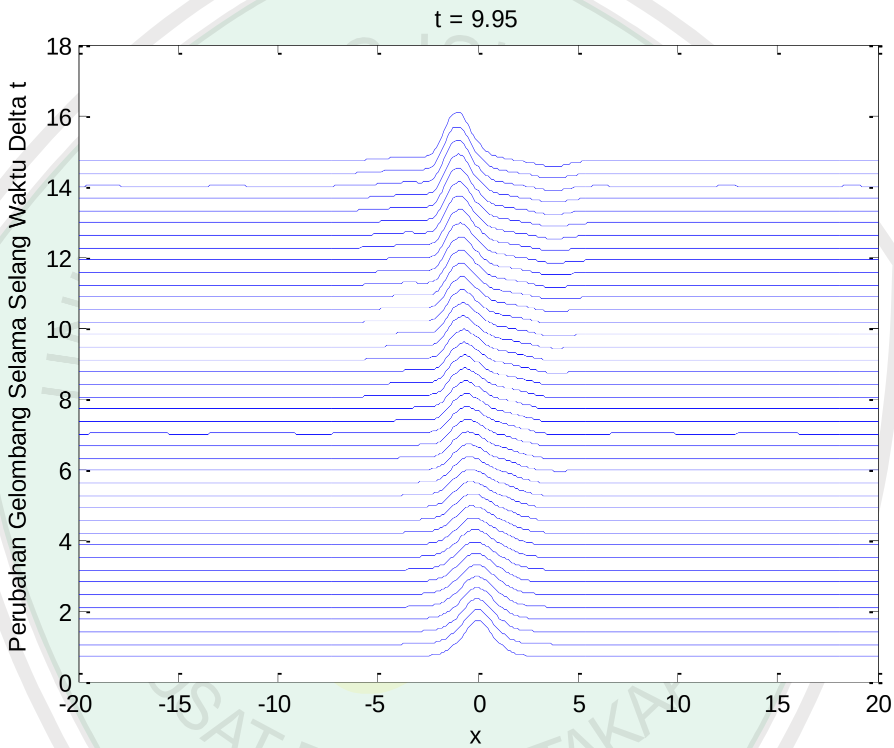
Simulasi pertama diperoleh solusi persamaan gelombang air dangkal linear 1D dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut:



Gambar 3.4 Simulasi Keempat Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa model gelombang permukaan tersebut bergerak tetap dari arah pusat (pada saat $x = 0$) dengan tinggi gelombang 1 dalam selang waktu 0 sampai 10, kemudian gelombang bergerak menuju ke arah hulu sejauh $x = -10$. Berdasarkan gambar 3.4 juga dapat dilihat bahwa terjadi perubhan tinggi gelombang. Dalam selang waktu 0 sampai 10 tinggi gelombang semakin bertambah hingga mencapai 2.1251.

Simulasi kedua diperoleh solusi persamaan gelombang air dangkal linear 1D dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut



Gambar 3.5 Simulasi Kelima Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal Linear 1D

Gambar 3.5 menunjukkan bahwa model gelombang permukaan tersebut bergerak tetap dari arah pusat (pada saat $x = 0$) dengan tinggi gelombang 1 dalam selang waktu 0 sampai 10, kemudian gelombang bergerak menuju ke arah hulu sejauh $x = -10$. Berdasarkan gambar 3.5 juga dapat dilihat bahwa terjadi perubhan tinggi gelombang. Dalam selang waktu 0 sampai 10 tinggi gelombang semakin bertambah hingga mencapai 1.3803.

3.5 Kajian Keagamaan

Model persamaan gelombang air dangkal linear 1D (3.1) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial (uh)}{\partial x}$$

Persamaan (3.1) membuktikan bahwa terdapat model matematika untuk fenomena alam yang terkait dengan gelombang. Adanya model matematika ini, dapat meningkatkan keimanan dan ketaqwaan kepada Allah Swt. sebab Allah Swt. SWT telah menciptakan alam semesta ini dengan perhitungan masing-masing. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam surat al-Furqan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa solusi persamaan gelombang air dangkal linear 1D dapat diselesaikan secara numerik salah satunya dengan menggunakan metode *Lax-Friedrichs*. Hal ini menunjukan bahwa semua permasalahan dapat diselesaikan sekalipun melalui beberapa kesulitan.

Terdapat berbagai cara penyelesaian yang dapat dilakukan oleh manusia dalam kehidupan untuk menyelesaikan suatu masalahnya. Seperti halnya dalam matematika, suatu permasalahan dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Munir (2008) menyatakan bahwa secara umum suatu persamaan terdapat dua solusi yaitu solusi analitik atau disebut solusi sesungguhnya dan solusi numerik yang disebut sebagai solusi hampiran. Sehingga dapat diketahui bahwasanya setiap permasalahan selalu ada solusinya meskipun harus melalui proses yang sulit dan bertahap. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt dalam al-Quran surat al-Insyirah/94:5 yaitu:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٥

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyiroh/94:5).

Dari ayat tersebut disebutkan bahwa sesudah mengalami kesulitan terdapat kemudahan. Ketika suatu persamaan sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka masih ada jalan lain untuk mendapatkan solusinya yakni secara numerik. Namun perhitungan secara numerik ini membutuhkan waktu yang lama dan ketelitian. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt. pada surat al-Hujurot ayat 6 yang berbunyi:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن جَآءَكُمۡ فَاسِقُۢ بِنَبَإٖ فَتَبَيَّنُوٓاْ أَن تُصِيبُواْ قَوۡمَۢا
بِجَهَـٰلَةٖ فَتُصۡبِحُواْ عَلَىٰ مَا فَعَلۡتُمۡ نَـٰدِمِينَ ٦

"Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang Fasik membawa suatu berita, Maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu.".

Ayat ini memberikan penjelasan bagi umat manusia semuanya untuk selalu tabayun (teliti) dalam segala berita yang disampaikan oleh orang muslim maupun non muslim. Kemudian ayat ini menyuruh kita berhati-hati dalam menindakkan sesuatu yang akibatnya tidak dapat diperbaiki (perkataannya banyak menimbulkan kerusakan), supaya tidak ada pihak atau kaum yang dirugikan, ditimpa musibah atau bencana yang disebabkan berita yang belum pasti kebenarannya, sehingga menyebabkan penyesalan yang terjadi (Katsir, 1992).

Ayat di atas menunjukkan bahwa kehati-hatian itu perlu supaya tidak terjadi kerusakan. Demikian juga dalam ilmu matematika yang membutuhkan ketelitian dalam menyelesaiakan persoalannya agar tidak terjadi kesalahan.

Suatu permasalahan memiliki banyak cara dalam menyelesaikannya, akan tetapi tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan cara yang sama, sekalipun Allah Swt. memberikan fasilitas yang sama kepada mereka. Karena pada hakikatnya Allah Swt. memberikan tugas kepada manusia sesuai dengan kemampuannya masing-masing, sesuai dengan surat Al-Baqarah ayat 286 yaitu:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفۡسًا إِلَّا وُسۡعَهَاۚ لَهَا مَا كَسَبَتۡ وَعَلَيۡهَا مَا ٱكۡتَسَبَتۡۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذۡنَآ
إِن نَّسِينَآ أَوۡ أَخۡطَأۡنَاۚ رَبَّنَا وَلَا تَحۡمِلۡ عَلَيۡنَآ إِصۡرٗا كَمَا حَمَلۡتَهُۥ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن
قَبۡلِنَاۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلۡنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِۦۖ وَٱعۡفُ عَنَّا وَٱغۡفِرۡ لَنَا وَٱرۡحَمۡنَآۚ أَنتَ
مَوۡلَىٰنَا فَٱنصُرۡنَا عَلَى ٱلۡقَوۡمِ ٱلۡكَٰفِرِينَ ٢٨٦

“Allah Swt. tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau hukum Kami jika Kami lupa atau Kami tersalah. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau bebankan kepada Kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau pikulkan kepada Kami apa yang tak sanggup Kami memikulnya. beri ma'aflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong Kami, Maka tolonglah Kami terhadap kaum yang kafir”.

Ayat di atas menyebutkan bahwa Allah Swt. tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kemampuannya. Ujian yang diberikan kepada setiap umat manusia dalam menyelesaikan masalah telah disesuaikan dengan kemampuannya begitu pula dengan penyelesaian dalam ilmu matematika. Tidak semua manusia dapat menyelesaiakan persoalan matematika baik secara analitik maupun numerik dan tidak semua manusia dapat menyelesaikan persoalan dengan metode yang sama. Maka, manusia telah diberi akal oleh Tuhan dengan tujuan diantaranya adalah untuk menyelesaikan persoalan-persoalan matematika sesuai dengan metode yang dipilih.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linear 1D menggunakan metode *Lax-Friedrichs*, terdapat 2 kondisi.

   a. Penyelesaian numerik pada saat kondisi 1 yaitu ketika h konstan adalah :

$$u_j^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$$

$$\eta_j^{n+1} = -h\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n)$$

   b. Penyelesaian numerik pada saat kondisi 2 yaitu ketika h adalah fungsi terhadap x adalah :

$$u_j^{n+1} = -g\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$$

$$\eta_j^{n+1} = -h_j\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n\right)$$

   Pada hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan metode *Lax-Friedrichs* pada persamaan gelombang air dangkal linier 1D stabil dengan syarat tertentu.

2. Syarat kestabilan dari *Lax-Friedrichs* untuk persamaan gelombang air dangkal linear 1D pada saat h konstan adalah persamaan (3.34). Sedangkan syarat kestabilan dari *Lax-Friedrichs* untuk h adalah fungsi terhadap x adalah persamaan persamaan (3.57), (3.58),(3.60), dan (3.61). *Error* pemotongan pertama dari model diskrit yang digunakan pada saat h konstan memiliki orde

dua $(\Delta x^2, \Delta t^2)$, hal tersebut dapat dilihat pada persamaan (374) dan (3.84) model diskrit yang digunakan tersebut memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol untuk Δx dan $\Delta \mathrm{t}$ mendekati 0. Sedangkan *error* pemotongan kedua dari model diskrit yang digunakan pada saat h fungsi terhadap x memiliki orde dua $(\Delta x^2, \Delta t^2)$, hal tersebut dapat dilihat pada persamaan (3.84) dan (3.85) model diskrit yang digunakan tersebut memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol untuk Δx dan $\Delta \mathrm{t}$ mendekati 0.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka untuk selanjutnya dapat dikembangkan pada persamaan gelombang air dangkal 2D karena pada penelitian ini dilakukan pada persamaan gelombang air dangkal 1D.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Qurthubi, S.I. 2008. *Tafsir Al-Qurtubi.* Terjemahan Fatchurrohman, Ahmad Hotih, dan Dudi Rasyati. Jakarta: Pustaka Azzam.

Amamah, S. 2014. *Penyelesaian Numerik Persamaan Forced KDV Menggunkan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik IbrahimMalang.

Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

Chapra, C.S dan Canale, P.R. 2010. *Numerical methods for Engineers* Sixth. New York: McGrow-Hill Company, Inc.

Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik.* Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Halik, M. 2015. *Penyelesaian Numerik Gelombang Tali Menggunakan Metode Lax-Friedrichs.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik IbrahimMalang.

Hapsari, N.R. 2014. *Persamaan Gelombang Air Dangkal 1D dan Aplikasinya pada Masalah Bendungan Bobol.* Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Kampf, J. 2009. *Ocean Modelling for Beginners Using Open-Source Software.* London: Springer Heildelberg Dordrecht .

Katsir, I. 1992. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid IV*. Surabaya: PT Bina Ilmu.

Ma'rifah, M. 2014. *Penerapan Metode Level Set dalam Menyelesaikan Masalah Pencairan Es dengan Menggunakan Metode Numerik Lax-Friedrichs*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Negeri Malang.

Munir, R. 2008. *Metode Numerik.* Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang:IKIP Malang.

Quraish, S. 2002. *Tafsir Al-Misbah.* Tangerang: Lentera Hati.

Rezolla, L. 2011. *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations.* Trieste: International Schoolfor Advanced Studies.

Robinowitz, S. 1993. How to Find the Square Root of a Complex Number. *Journal Mathematic and Informatics Quartely*. 3: 54-56.

Sasongko, B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab.* Yogyakarta: C.V. Andi Offset.

Setiantini, H. 2007. *Pemecah Gelombang Berupa Serangkaian Balok Terendam.* Skripsi tidak dipublikasikan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Supardi. 2011. *Metode Numerik dengan Matlab.* Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Strauss, A.W. 2007. *Pertial Differential Equatios and Introdustion Second Edition*. New York: John willey & Sons, Ltd.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yahya, H. 2000. *Ayat Al-Qur'an berkaitan dengan Fisika*. (Online), (http://keajaibanalquran.com) diakses 18 Maret 2015

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Polytechnic University.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Script M-file Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal dengan h konstan

```
clc,clear all
clf
dx = 0.2;
dt = 0.2;

x=-20:dx:20;
t=0:dt:10;
g=9.8;
h=1;

Mx=length(x);
Nt=length(t);
u=zeros(Mx,Nt);
eta=zeros(Mx,Nt);
%AWAL
eta(:,1)=sech(x).^2;
u(:,1)=0;
%BATAS
eta(1,:)=0;
u(1,:)=0;
k=1;

d =(dt/dx)*sqrt(g*h)

figure(1),clf
for n=1:Nt-1
    for j=2:Mx-1
        u(j,n+1)    = -g*(dt/(2*dx))*(eta(j+1,n)-eta(j-1,n)) +
(1/2)*(u(j+1,n)+u(j-1,n));
    end
    for j=2:Mx-1
        eta(j,n+1)  = -h*(dt/(2*dx))*(u(j+1,n)-u(j-1,n)) +
(1/2)*(eta(j+1,n)+eta(j-1,n));
       A(j)=abs( (dt/dx)*sqrt(g*h) );
    end
    max(eta(:,n));

if or(n==1,mod(n,5)==0)
    k=k+1;
    plot(x,eta(:,n)+0.1*k),hold on
    pause(0.01)
    n;
    tinggi =max(eta(:,n))
end

    xlabel('x');
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu Delta t');
    title('Gerak Permukaan Gelombang Air Dangkal');
    title(['t = ' num2str(t(n))])
```

```
    waktu=t(n);
    % text(0,2,num2str(max(A)))
   % ylim([-1 7])
    %pause(0.01)

end
figure (2), clf
surf(x,t,eta')
shading flat
zlim([0 4])
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('eta');
```

Lampiran 2. Script M-file Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal dengan h fungsi terhadap x

```
clc,clear all
clf
dx = 0.1;
dt = 0.05;

x=-50:dx:50;
t=0:dt:10;
g=9.8;
h=sin(x);
y=diff(h);


Mx=length(x);
Nt=length(t);
hx=length(y);
u=zeros(Mx,Nt);
eta=zeros(Mx,Nt);

%a
eta(:,1)=sech(x).^2;
u(:,1)=0*sin(x);

%b
eta(1,:)=0;
u(1,:)=0;
k=1;

figure(1),clf

for n=1:Nt-1
    for j=2:Mx-1
        u(j,n+1)   = -g*(dt/(2*dx))*(eta(j+1,n)-eta(j-1,n)) +
(1/2)*(u(j+1,n)+u(j-1,n));
    end
    for j=2:Mx-1
        for s=1:hx-1
        eta(j,n+1)=-(dt/2*dx)*h(j)*(u(j+1,n)-u(j-1,n))-
(dt/2*dx)*y(s)*(u(j+1,n)+u(j-1,n))+(1/2)*(eta(j+1,n)+eta(j-1,n));
        %A(j)=abs( (dt/dx)*sqrt(g*(2*h(j)-h(j+1)+h(j-1))) );

        end
    end
    max(eta(:,n));

if  or(n==1,mod(n,5)==0)
    k=k+1;
    plot(x,eta(:,n)+0.35*k),hold on
    pause(0.01)
    n
    tinggi =max(eta(:,n))
end
```

```
    %plot(x,eta(:,n))
    %ylim([-1 7])
    xlabel('x');
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu Delta t');
    title('Gerak Permukaan Gelombang Air Dangkal');
    title(['t = ' num2str(t(n))])
       %text(0,2,num2str(max(A)))

   % pause(0.01)
end
figure(2), clf
surf(x,t,eta')
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('eta');
```

RIWAYAT HIDUP

Rowaihul Jannah, lahir di kota Jombang pada tanggal 13 Maret 1992, biasa dipanggil Iik, berdomisili di Jalan Joyosuko Metro No 57A Merjosari Lowokwaru Malang, tempat tinggal asalnya di Jalan R.A. Kartini No 27 Blimbing Kwaron Diwek Jombang. Anak pertama dari tiga bersaudara dari Bapak Muhtadi dan Ibu Anik

Pendidikan dasarnya ditempuh di TK Al-Choiriyyah Seblak Jombang, kemudian melanjutkan ke MI Perguruan Mu'allimat Cukir Jombang dan lulus pada tahun 2004. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MTs Perguruan Mu'allimat Cukir Jombang dan lulus pada tahun 2007, kemudian melanjutkan ke SMA Darul Ulum 1 Unggulan BPP-Teknologi yang bertempat di Pondok Pesantren Darul 'Ulum Rejoso Peterongan Jombang dan lulus pada tahun 2010. Selama menempuh studi di MTsN, dia aktif dalam Organisasi OSIS. Pada saat di MTsN, dia Menjabat sebagai Sekretaris II periode 2005-2006, dan pada saat di SMA menjabat sebagai Bendahara II CLEO (*Club Language Excellent One*) periode 2008-2009. Selanjutnya pada tahun 2010 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi. Selama Kuliah di Universitas Islam Negeri Malang, dia aktif dalam kegiatan ekstra dan intra. Di kegiatan intra kampus dia pernah menjabat sebagai anggota divisi penalaran Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika periode 2011-2013 dan menteri keuangan Dewan Eksekutif Mahasiswa (DEMA) Fakultas Saintek periode 2013-2014. Di kegiatan ekstra kampus dia aktif sebagai anggota departemen gender PMII Rayon "*Pencerahan*" Galileo periode 2011-2013 dan anggota departemen pengkaderan Teater Galileo (TEGAL) periode 2012-2013. Selama kuliah dia tinggal di Pondok Pesantren Puteri al-Hikmah al-Fathimiyyah Joyosuko Malang dan menjabat sebagai ketua Ahaf *Institute* periode 2012-2013.