SPEKTRUM *LAPLACE* DARI GRAF INVERSE GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
NURUL FATICHAH
NIM. 11610073

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *LAPLACE* DARI GRAF INVERSE GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Nurul Fatichah
NIM. 11610073

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2018

SPEKTRUM *LAPLACE* DARI GRAF INVERSE GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Nurul Fatichah
NIM. 11610073

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 Juni 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 197104202000031003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM *LAPLACE* DARI GRAF INVERSE GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Nurul Fatichah
NIM. 11610073

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 08 Juni 2018

Penguji Utama	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurul Fatichah

NIM : 11610073

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Spektrum *Laplace* dari Graf Inverse Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Juni 2018
Yang membuat pernyataan

Nurul Fatichah
NIM. 11610073

MOTO

Selalu ada harapan bagi mereka yang berdo'a…

Selalu ada jalan bagi mereka yang berusaha…

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Khamim dan Ibunda tercinta Sufi’ah serta adik-adik yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi dukungan, motivasi, selalu memberi semangat yang tiada henti hingga terselesaikannya skripsi ini, tak lupa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk semua guru-guru yang telah memberikan bimbingan dan ilmu yang tidak bisa penulis hitung berapa banyaknya barakah dan doanya.

Dan untuk suami tercinta terimakasih atas semangatnya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah Swt yang telah memberikan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *"Spektrum Laplace dari Graf Inverse Grup Dihedral"*. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan nabi besar Muhammad Saw yang telah membimbing ummatnya dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama prosespenyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang selalu memberikan doa, bimbingan, nasihat, semangat dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011, yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang diraih bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah Swt dan dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR vii
DAFTAR ISI ix
DAFTAR TABEL xi
DAFTAR GAMBAR xii
ABSTRAK xiii
ABSTRACT xiv
الملخص xv

BAB I PENDAHULUAN`
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Graf 8
2.1.1 Definisi Graf 8
2.1.2 Graf Terhubung 10
2.1.3 Derajat Titik 10
2.1.4 Graf Invers pada Grup 12
2.1.5 Representasi Graf dalam Matriks 14
2.2 Grup 17
2.2.1 Definisi Grup 17
2.2.2 Grup Dihedral 18
2.3 Matriks *Laplace* 20

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 21
2.5 Spektrum *Laplace* 22
2.6 Eliminasi Gauss 24
2.7 Kajian Agama Terkait dengan Perintah Menuntut Ilmu 25

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Spektrum *Laplace* graf invers dari Grup Dihedral ($\boldsymbol{D_{2n}}$) untuk n Ganjil 27
3.1.1 Spektrum *Laplace* Graf invers dari Grup Dihedral-6 27
3.1.2 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-10 30
3.1.3 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedal-14 34
3.1.4 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-18 37
3.1.5 Pola Spektrum *Laplace* Graf Invers dari D_{2n} 40
3.2 Spektrum *Laplace* graf invers dari Grup Dihedral ($\boldsymbol{D_{2n}}$) untuk n Genap 44
3.2.1 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-8 44
3.2.2 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-12 48
3.2.3 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-16 51
3.2.4 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-20 55
3.2.5 Pola Spektrum *Laplace* Graf Invers dari D_{2n} 58

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 612
4.2 Saran 612

DAFTAR RUJUKAN 623

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-6 (D_6) 20

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-6 (D_6) 27

Tabel 3.2 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-10 (D_{10}) 31

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-14 (D_{14}) 34

Tabel 3.4 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-18 (D_{18}) 38

Tabel 3.5 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum *Laplace* Graf Invers Grup Dihedral 41

Tabel 3.6 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-8 (D_8) 44

Tabel 3.7 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-12 (D_{12}) 48

Tabel 3.8 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-16 (D_{16}) 51

Tabel 3.9 Tabel *Cayley* Grup Dihedral-20 ($\boldsymbol{D_{20}}$) 55

Tabel 3.10 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum *Laplace* Graf Invers Grup Dihedral 58

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G 9

Gambar 2.2 Graf Terhubung 10

Gambar 2.3 Graf Invers Grup Dihedral-6 (D_6) 13

Gambar 2.4 Graf G dan Matriks Keterhubungan Titik 15

Gambar 2.5 Graf G dan Matriks Keterhubungan Sisi 16

Gambar 2.6 Graf G dan Matriks Keterkaitannya 17

Gambar 3.1 Graf Invers Grup Dihedral-6 (D_6) 28

Gambar 3.2 Graf Invers Grup Dihedral-10 $(\Gamma_s(D_{10}))$ 31

Gambar 3.3 Graf Invers Grup Dihedral-14 $(\Gamma_s(D_{14}))$ 35

Gambar 3.4 Graf Invers Grup Dihedral-18 $(\Gamma_s(D_{18}))$ 38

Gambar 3.5 Graf Invers Grup Dihedral-8 $(\Gamma_s(D_8))$ 45

Gambar 3.6 Graf Invers Grup Dihedral-12 $(\Gamma_s(D_{12}))$ 49

Gambar 3.7 Graf Invers Grup Dihedral-16 $(\Gamma_s(D_{16}))$ 52

Gambar 3.8 Graf Invers Grup Dihedral-20 $(\Gamma_s(D_{20}))$ 56

ABSTRAK

Fatichah, Nurul. 2018. **Spektrum *Laplace* dari Graf Invers Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M. Pd. (II) H. Wahyu H. Irawan, M. Pd.

Kata Kunci: spektrum Laplace, nilai eigen, graf invers, grup dihedral

Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, misalnya matriks *Adjacency, Laplace,* dan *Signless Laplace.* Ketika graf sudah dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat didekati secara aljabar linier untuk mencari nilai eigen dan vektor eigennya bahkan juga *algebraic multiplicity* nya. Matriks Laplace yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{L}(G)$ dalah hasil pengurangan matriks derajat titik $\boldsymbol{D}(G)$ dengan matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}(G)$ yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$. Matriks yang memuat nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya *algebraic multiplicity* dari pangkat tertinggi pada baris kedua disebut spektrum. Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrum *Laplace.*

Tujuan penelitian ini adalah mencari pola spektrum *Laplace* dari graf invers yang dibangun dari grup dihedral. Langkah-langkah atau metode dalam penentuan pola umum dari spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral adalah mengidentifikasi anggota-anggota dari grup dihedral D_{2n} yang ditunjukkan pada tabel *Cayley* kemudian dapat dibentuk suatu himpunan bagian *S* dari grup dihedral D_{2n} yang inversnya bukan dirinya sendiri yang kemudian dapat digambar suatu graf inverse dari grup dihedral D_{2n}. Dari bentuk graf invers tersebut dapat ditentukan matriks *Laplace* dengan mengurangkan matriks *Adjacency* dan matriks derajatnya. Sehingga diperoleh suatu matriks baru yang menjadi pola dari spektrum *Laplace* dari graf invers grup dihedral D_{2n}.

Hasil dari penelitian ini diperoleh:

1. Spektrum *Laplace* pada graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Laplace* pada graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 6$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ABSTRACT

Fatichah, Nurul. 2018. ***Laplace* Spectrum of Inverse Graph of Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors:(I) Dr. Abdussakir, M. Pd. (II) H. Wahyu H. Irawan, M. Pd.

Keyword: *Laplace* spectrum, Eigen value, inverse of graph, dihedral group.

Graph can be shown in the matrix form, such as adjacency matrix, laplace, and signless laplace. When the graph has been shown in thematrix form, the eigen values and algebraic multiplicity can be searched. Laplace matrix wich denoted by $\boldsymbol{L}(G)$ is the result of the degree matrix $\boldsymbol{D}\ (G)$ reduction with the adjacency matrix $A(G)$ that can denoted by $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$. The matrix which containing all of eigen values in the first row and the number of algebraic multiplicity of the highest rank in the second row is called the spectrum. The spectrum obtained from the matrix $\boldsymbol{L}(G)$ is called the Laplace spectrum.

The purpose of this research is to find Laplace spectrum pattern of inverse graph obtained from dihedral group. The step or method for determining the general pattern of spectrum laplace of inverse graph of dihedral group D_{2n} is to identify the element of the dihedral group D_{2n} shown in the cayley table. Subsequently a subset denoted by S wich is the inverse is not it self is formed. Accordingly, the inverse graph of dihedral group D_{2n} is drawn. From the graph, Laplace matrix can be determined by subtracting adjacency matriks and degree matrix. So, the new matrix for the pattern of laplace spectrum of inverse group of dihedral group can be defined.

The results of this research are:

1. The Laplace spectrum of inverse graph of the dihedral group D_{2n} for odd n is
$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$
2. The Laplace spectrum of inverse graph of the dihedral group D_{2n} for neven n and dan $n \geq 6$ is
$$\boldsymbol{spec_L}(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

المخلص

الفاتحة، نورل. 2018. **طيف لابلاس من مخطط معاكس من زمرة زوجية**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (1) الدكتور عبد الشاكير، الماجستيرة التربوية (2) الحاج وحيو هـ. ايراوان، الماجستيرة التربوية.

الكلمات الرئيسية: طيف لابلاس، مصفوفة لابلاس، القيم الذاتية، تعدد جبري، زمرة زوجية.

يمكن التعبير عنها في شكل مصفوفة، علي سبيل المثال مصفوفة لابلاس الرمز بواسطة$\boldsymbol{L}(G)$تم الحصول عليها من نقطة درجة مصفوفة عملية تخفيض الرمز بواسطة$\boldsymbol{D}$ (G)ويرمز مصفوفة الجوار التي كتبها$\boldsymbol{A}(G)$، والذي دل عليه– $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G)$ $\boldsymbol{A}(G)$. عندما يتم التعبير عن مخطط في شكل مصفوفة، يمكن البحث عن التعدد الجبري .وتسمى مصفوفة جديدة تحتوي على القيم الذاتية في الصف الأول وعدد من تعدد جبري من أعلى رتبة في الصف الثاني من الطيف. و يسمي طيف المتحصل عليه من المصفوفة$\boldsymbol{L}(G)$طيف لابلاس .

والغرض من هذا البحث هو العثور على نمط الطيف لابلاس من عكس التطعيم شيدت من زمرة زوجية. الطريقة في تحديد النمط العام لطيف لابلاس من مخطط معاكس زمرة زوجية هو تحديد عظو زمرة زوجية الظاهرة في جدول *Cayley* ومن ثم يمكن تكوين مجموعة فريعة من زمرة زوجية D_{2n} حيث لا يكون العكس هو نفسه الذي يمكن بعد ذلك رسم بياني معكوس زمرة زوجية D_{2n} . ثم يمكن مخطط معكوس. يمكن تحديد شكل الرسم البيا ني العكسي مصفوفة مادة اللا تكس عن طريق طزح مصفوفة

الجوار و مصفوفة دراجتها. للحصول علي مصفوفة جديدة وهي نمط طيف اللا بيه من الرسم البياني لمجموعة عكسية ثنائي الاتجاه.

وكانت نتيجة هذا البحث:

1. طيف لابلاس من إنفرس غراف مجموعة D_{2n} Dihedral ل n فردي هو

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

2. طيف لابلاس من إنفرس غراف مجموعة D_{2n} Dihedral ل n حتى و $n \geq 6$ هو

$$\boldsymbol{spec_L}(\overline{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}})}) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang masih dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai masalah. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf G merupakan pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyak unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$ (Chartrand & Lesniak, 1996:1).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjecent)*, sisi e terkait dengan v dan u disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengn v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$(Chartrand & Lesniak, 1996:1-2).

Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_{2,\dots,}v_n\}$. Matriks keterhubungan titik (atau matriks *Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $n \times n$ dengan unsur pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ bernilai 1 jika titik v_i tterhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks *Adjacency* dapat ditulis $A(G) = [v_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$. Matriks *Adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Chartrand & Lesniak, 1996:1).

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke$-i$ dan kolom ke$-i$ adalah derajat dari $v_i, i = 1,2,3, \dots, n$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $\boldsymbol{D}(G) = [d_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$. Matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *Laplace* (Biyikoglu, dkk., 2007). Matriks $\boldsymbol{Q}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *Signless Laplace* (Brouwer dan Haemers, 2010:1).

Adapun penelitian sebelumnya yang sudah dilakukan oleh para peneliti tentang spektrum graf di antaranya adalah Shuhua Yin (2006) yang meneliti Spektrum Adjacency dan Spektrum Laplace pada graf G_1 yang diperoleh dari graf komplit K_1 dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_1. Yuanping Zhang (2008) meneliti tentang *Q-spectrum graf lollipop*. Abdussakir, dkk (2009) meneliti Spektrum Adjacency pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy dan Balachandran (2010) meneliti spektrum detour pada beberapa graf. Imam

Fachruddin (2010) meneliti Spektrum graf hasil kali Cartesius. Lailatul Khusnah (2011) meneliti spektrum detour pada graf Komplit (K_n). Bayu T. Wijaya (2011) meneliti spektrum detour graf m-partisi komplit. F. Sari (2013) meneliti spektrum adjacency, spektrum *Laplace*, dan spektrum *Signless Laplace* graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

Dilihat dari beberapa penelitian yang sudah dilakukan oleh para peneliti diatas, belum ada di antara mereka yang meneliti spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral. Maka dari itu penulis merasa perlu untuk melakukan penelitian tentang spektrum dari suatu graf inverse. Sehingga dalam hal ini penulis akan berusaha melakukan penelitian tentang spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral.

Sejalan dengan terus berkembangnya ilmu pengetahuan, maka menurut al-Quran, manusia memiliki potensi untuk meraih ilmu dan mengembangkannya dengan izin Allah. Karena itu bertebaran ayat yang memerintahkan manusia menempuh berbagai cara untuk mewujudkan betapa tinggi kedudukan orang yang berpengetahuan. Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-Mujadalah ayat 11 :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ
ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا
تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila, dikatakan; "berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan. (Q.S. al-Mujadalah: 11)

Imam Al-Ghazali juga memandang bahwa belajar atau menuntut ilmu adalah sangat penting serta menilai sebagai kegiatan yang terpuji. Untuk menerangkan keutamaan belajar tersebut Imam Al-Ghazali mengutip beberapa ayat al-Quran, hadits nabi serta atsar (Shihab, 2006).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola spektrum *Laplace* dari graf inverse dari grup dihedral $2n$ untuk n ganjil?
2. Bagaimana pola spektrum *Laplace* dari graf inverse dari grup dihedral $2n$ untuk n genap?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pola spektrum *Laplace* dari graf inverse dari grup dihedral $2n$ untuk n ganjil
2. Mengetahui pola spektrum *Laplace* dari graf inverse dari grup dihedral $2n$ untuk n genap

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memahami dan mengetahui pola spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral $2n$ untuk n ganjil sehingga dapat menambah wawasan dalam perkembangan kajian teori graf dan aljabar.

2. Memahami dan mengetahui pola spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral $2n$ untuk n genap sehingga dapat menjadi sumber rujukan dan pengembangan pembelajaran tentang spektrum, graf, dan grup dihedral.

1.5 Batasan Masalah

Untuk menentukan pola umum spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral $2n$, maka grup dihedral yang dibahas dibatasi pada $n \geq 3$ dan $n \leq 10$.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah "studi literatur", karena penelitian ini adalah berbentuk kajian. Selanjutnya pembahasan dilakukan dengan cara mengkaji literatur dengan menganalisiskan terhadap objek penelitian dan berkonsultasi dengan dosen pembimbing, serta menuangkannya dalam bentuk laporan penelitian yang akhirnya dapat ditarik sebuah kesimpulan.

Adapun tahapan yang akan dilakukan untuk menganalisis pola spektrum *Laplace* dari graf inverse grup dihedral $2n$ untuk n ganjil dan n genap adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi semua anggota dari grup dihedral D_{2n}
2. Membuat Tabel *Cayley* dengan operasi komposisi "o" pada grup dihedral D_{2n}
3. Mencari invers dari setiap anggota pada grup dihedral D_{2n}
4. Membentuk himpunan bagian S dari grup dihedral D_{2n} yang inversnya bukan dirinya sendiri.
5. Menggambar graf invers dari grup dihedral D_{2n}
6. Menentukan matriks *Adjacency* dan matriks derajat dari grup dihedral D_{2n}

7. Menentukan matriks *Laplace* yang diperoleh dari menjumlahkan dan mengurangkan matriks *Adjacency* dan matriks derajat dari grup dihedral D_{2n}
8. Menentukan nilai eigen dari matriks *Laplace* grup dihedral D_{2n} dengan menggunakan program matlab,
9. Menentukan pola umum spektrum *Laplace* dari masing-masing grup dihedral D_{2n}

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam sistematika penulisan penelitian ini dibagi menjadi 4 bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagaimana berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa konsep (teori-teori) yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu mengenai graf, grup dihedral, spektrum *Laplace*.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang bagaimana menentukan spektrum *Laplace* dari grup dihedral D_{2n}.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik *(vertex)* dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ disebut sisi *(edge)*. Selanjutnya sisi $e = \{u, v\}$ pada graf G ditulis $e = uv$ (Chartrand & Lesniak, 1996).

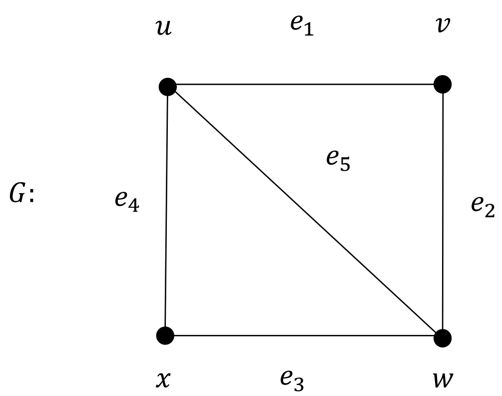
Sebuah sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut titik-titik yang terhubung langsung *(adjacent vertices),* sedangkan u dan e disebut terkait langsung *(incident),* begitu juga dengan v dan e. Selanjutnya, jika $e_1$dan e_2 adalah sisi-sisi berbeda di G yang terkait langsung *(incident)* dengan titik, maka $e_1$dan e_2 adalah sisi-sisi yang terhubung langsung *(adjacent edges)* (Chartrand & Lesniak, 1996).

Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut graf trivial.

Banyaknya titik di graf G disebut order dari G yang dilambangkan dengan $n(G)$, sedangkan banyaknya sisi disebut ukuran *(size)* dari G yang dilambangkan dengan $m(G)$. Graf $G(n, m)$ memiliki order n dan *size* m (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Sebuah graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) dimana setiap titik G digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut. Ada tiga cara untuk menggambarkan sebuah graf, yaitu dalam bentuk diagram secara geometri, matriks, dan dengan menggunakan himpunan pasangan berurutan (Budayasa, 2007).

Misalnya diberikan graf G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = uv, e_2 = vw, e_3 = wx, e_4 = ux, e_5 = uw$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

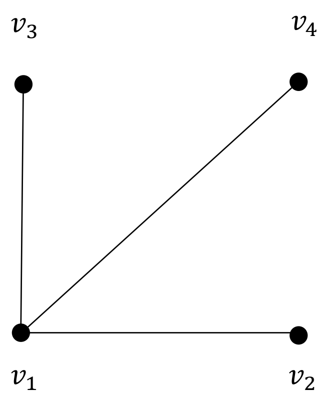
Graf G pada Gambar 2.1 mempunyai 4 titik dan 5 sisi sehingga $n(G) = 4$ dan $m(G) = 5$ (Budayasa, 2007: 2).

2.1.2 Graf Terhubung

Dua titik u dan v pada suatu graf G adalah terhubung jika G memuat suatu lintasan $u - v$. Suatu graf G itu sendiri dikatakan terhubung jika setiap dua titik dari G adalah terhubung. Suatu graf G yang tidak terhubung disebut graf tak terhubung (Chartrand, dkk, 2016).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4\}$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Graf Terhubung

Graf G pada Gambar 2.2 adalah graf terhubung karena G memuat lintasan $v_1 - v_2$ untuk setiap dua titik yang berbeda v_1 dan v_2 di G, begitu juga dengan $v_1 - v_3$ dan $v_1 - v_4$.

2.1.3 Derajat Titik

Derajat titik v dari graf G merupakan banyaknya titik di G yang berhubungan langsung dengan v. Oleh karena itu, derajat titik v merupakan banyaknya titik pada lingkungan $N(v)$. Derajat dari titik v pada graf G dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau $\deg v$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

$$\deg v = |N(v)|$$

Suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terasing dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Derajat terbesar dari semua titik di G disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari dinotasikan dengan $\delta(G)$. Oleh karena itu, jika v merupakan titik dari graf G dengan orde n, maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg v \leq \Delta(G) \leq n - 1$ (Chartrand, dkk, 2016).

Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu m adalah

$$\sum_{v \in G} \deg v = 2m$$

disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G adalah graf dengan ukuran m, maka

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G.

Terbukti bahwa

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m.$$

Teorema 2

Banyaknya titik berderajat ganjil pada sebuah graf adalah genap.

Bukti

Pandang sembarang graf G. Misalkan A dan B berturut-turut adalah himpunan semua titik G yang bersderajat genap dan ganjil. Jelas bahwa $V(G) = A \cup B$, sehingga

$$\sum_{v \in A} \deg v + \sum_{v \in B} \deg v \; = \sum_{v \in V(G)} \deg v \; = 2m$$

Selanjutnya, karena untuk setiap $\in A$, $\deg v$ genap, maka $\sum_{v \in A} \deg v$ genap. Akibatnya, $\sum_{v \in B} \deg v$ genap. Padahal, untuk setiap titik $v \in B$, $\deg v$ ganjil. Akibatnya, banyaknya titik di B genap. Terbukti.

2.1.4 Graf Invers pada Grup

Misalkan $(\Gamma,*)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma | u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers yang terkait dengan Γ. $G_S(\Gamma)$ adalah graf yang himpunan titiknya anggota dengan Γ sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah berhubungan langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Alfuraida dan Zakaria, 2017).

Catatan

1. Jelas, identitas e adalah anggota trivial yang invers terhadap dirinya sendiri dalam grup berhingga Γ. Maka $e \notin S$. Sehingga menyebabkan kardinalitas

dari S kurang dari kardinalitas dari Γ. Khususnya, jika Γ tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri selain identitas maka $|S| = |\Gamma| - 1$.

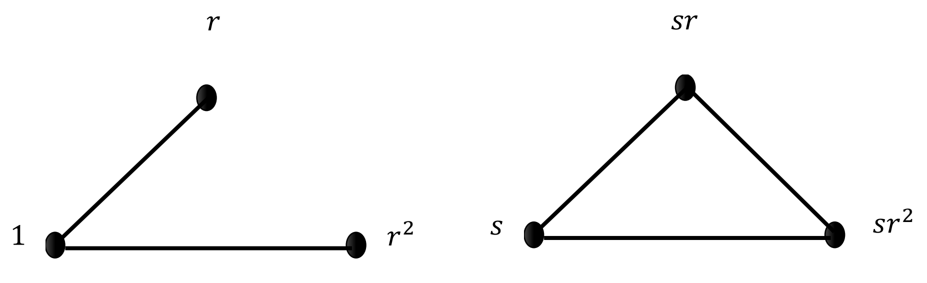
2. Banyaknya anggota S selalu genap, maka $|S| = |\Gamma| - 1$ jika banyaknya anggota Γ ganjil.
3. Untuk sebarang graf invers $\deg e = |S|$ (Alfuraida dan Zakaria, 2017).

Sebagai contoh pada grup dihedral-6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Maka invers dari masing-masing anggota D_6 adalah

$1^{-1} = 1$	$(r^2)^{-1} = r$	$sr^{-1} = sr$
$r^{-1} = r^2$	$s^{-1} = s$	$(sr^2)^{-1} = sr^2$

Berdasarkan uraian invers tersebut, didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_6 yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2\}$.

Maka terbentuklah graf invers sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf Invers Grup Dihedral-6 (D_6)

Dari Gambar 2.3 dapat diketahui bahwa

$1 \circ r = r$	$s \circ sr = r$	$sr \circ s = r^2$	$sr^2 \circ s = r$
$1 \circ r^2 = r^2$	$s \circ sr^2 = r^2$	$sr \circ sr^2 = r$	$sr^2 \circ sr = r^2$

dimana $r, r^2 \in S$ maka ada sisi sehingga titik-titik tersebut terhubung langsung.

2.1.5 Representasi Graf dalam Matriks

Misalkan G graf dengan order n $(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks keterhubungan titik atau matriks keterhubungan dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah $(n \times n)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$, dengan

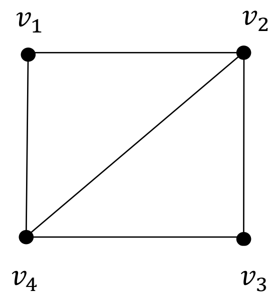
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat *loop* dan tidak memuat sisi paralel.

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut:

G:



$$\boldsymbol{A}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.4 Graf G dan Matriks Keterhubungan Titik

Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Matriks keterhubungan sisi dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{B}(G)$, adalah $(m \times m)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika sisi e_i terhubung langsung dengan sisi e_j, dan 0 untuk lainnya.

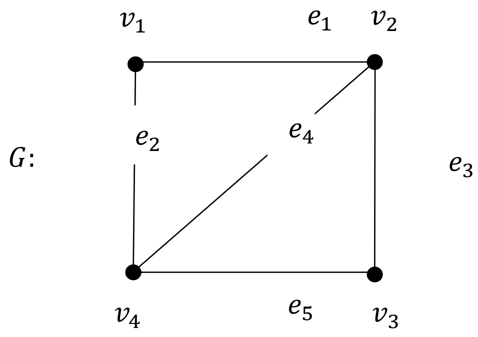
Dengan kata lain, matriks keterhubungan sisi dapat ditulis $\boldsymbol{B}(G) = [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq m$, dengan

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ terhubung langsung} \\ 0 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \notin E(G) \text{ tidak terhubung langsung} \end{cases}$$

Matriks keterhubungan sisi suatu graf G juga merupakan matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut:



$$\boldsymbol{B(G)} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.5 Graf G dan Matriks Keterhubungan Sisi

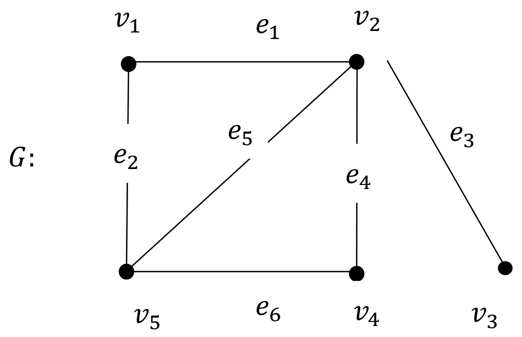
Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Matriks keterkaitan dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{I}(G)$, adalah $(n \times m)$ dengan unsur pada baris i dan kolom j adalah bilangan yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j. Dengan kata lain, matriks keterkaitan dapat ditulis $\boldsymbol{I}(G) = [c_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, dengan

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0 & \text{, jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

Matriks keterkaitan suatu graf G adalah matriks dengan unsur 0 dan 1 (Abdussakir, dkk, 2016).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$. Maka diagram dan matriks keterkaitan dari graf G sebagai berikut:



$$\boldsymbol{I}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.6 Graf G dan Matriks Keterkaitannya

2.2 Grup

2.2.1 Definisi Grup

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G bukan himpunan kosong dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu $*$ asosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

i. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner yang terdefinisi di $\mathbb{Z}$ sebab operasi biner merupakan pemetaan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Sehingga $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi $+$.

ii. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. Terdapat anggota identitas yaitu 0 terhadap operasi $*$ di $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

iv. Untuk $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedimikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv di atas memenuhi aksioma grup maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.2.2 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut ó, ô, maka st akibat dari ó ∘ ô. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$

adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik ó, s^{-1} akibat dari ó$^{-1}$) (Dummit dan Foote, 1991).

Karena grup dihedral akan digunakan secara *ektensif*, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n}, yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$
2. $|s| = 2$,
3. $s \neq r^i$, untuk sebarang i, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$
4. $sr^i \neq sr^j$,$\forall$ $0 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $i \neq j$, sehingga

   $$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

   yaitu setiap anggota dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n - 1, \forall i, j, k \in \mathbb{Z}^+$
5. $sr = r^{-1}s$

   Hal ini menunjukkan bahwa r dan s tidak saling komutatif, sehingga D_{2n} bukan grup abelian.
6. $sr^i = r^{-i}s$ untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh:

Misalkan grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s\ , sr, sr^2\}$. Jika dioperasikan dengan operasi "o" maka didapatkan tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

o	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 sr dikomposisikan dengan s akan menghasilkan r^2 dengan perhitungan sebagai berikut:

$$sr \circ s = r^{-1}s \circ s$$
$$= r^2 1$$
$$= r^2$$

2.3 Matriks *Laplace*

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$. Jadi G adalah graf dengan n titik dan m sisi.

Matriks *Laplace* dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$, dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah diagonal matriks dimana entrinya adalah derajat titik dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks *Adjacency* graf G (Biyikoglu, dkk, 2009).

Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-j derajat dari $v_i, i = 1,2,3, \dots, n$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $\boldsymbol{D}(G) = [d_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

(Abdussakir, dkk, 2016).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Kata "vektor Eigen" adalah ramuan bahasa Jerman dan Inggris. Dalam bahasa Jerman "Eigen" dapat diterjemahkan sebagai "sebenarnya" atau "karakteristik". Oleh Karena itu, nilai Eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik. Dalam literatur lama kadang-kadang dinamakan akar-akar *latent*.

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n\ x\ n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor Eigen *(Eigenvector)* dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{A}x$ adalah kelipatan skalar dari x; yakni, $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai Eigen *(Eigenvalue)* dari $\boldsymbol{A}$ dan x dikatakan vektor Eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 1987).

Teorema

Misalkan $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai Eigen jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = 0$, dimana $\boldsymbol{I}$ notasi dari matriks $n \times n$ (Jain & Gunawardena, 2004).

Nilai Eigen dan vektor Eigen mempunyai tafsiran geometrik yang bermanfaat dalam R^2 dan R^3. Jika λ adalah nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan x, maka $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, sehingga perkalian oleh $\boldsymbol{A}$ akan memperbesar x, atau membalik arah x, yang bergantung pada nilai λ. Untuk mencari nilai Eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n\ x\ n$ maka dituliskan kembali $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ sebagai $\boldsymbol{A}x = \lambda \boldsymbol{I}x$ atau secara ekivalen $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$.

Supaya λ menjadi nilai Eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan ini akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika $det(\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ ini dinamakan persamaan karakteristik $\boldsymbol{A}$, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$. Bila diperluas, maka determinan $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ adalah polinom $\boldsymbol{\lambda}$ yang dinamakan polinom karakteristik dari $\boldsymbol{A}$ (Anton, 1987).

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n\ x\ n$, maka polinom karakteristik $\boldsymbol{A}$ harus terpenuhi sebanyak n dan koefisien λ^n adalah 1. Jadi, polinom karakteristik dari matriks $n\ x\ n$ mempunyai bentuk $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$.

Jika $\boldsymbol{A}$ matriks $n\ x\ n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai Eigen dari $\boldsymbol{A}$.
2. Sistem persamaan $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$ mempunyai pemecahan yang taktrivial.
3. Ada vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $\boldsymbol{A}x = \lambda\, x$.
4. $\boldsymbol{\lambda}$ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

Vektor Eigen $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan nilai Eigen λ adalah vektor tak nol x yang memenuhi $\boldsymbol{A}x = \lambda x$. Secara ekivalen, vektor Eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol dalam ruang pemecahan dari $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$. Ruang pemecahan ini dinamakan sebagai ruang Eigen *(Eigenspace)* dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ.

2.5 Spektrum *Laplace*

Spektrum dari graf berhingga Γ didefinisikan dengan spektrum dari matriks *Laplace* yang merupakan himpunan dari nilai Eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai Eigen tersebut.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai Eigen berbeda dari L, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor Eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G. Spektrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{L(G)}$ disebut spektrum *Laplace* dan dinotasikan dengan $spec_L(G)$. Jadi, spektrum *Laplace* dari graf G dapat ditulis dengan

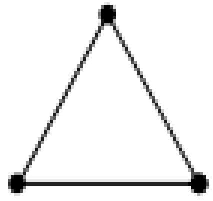
$$\boldsymbol{spec_L}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

(Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:

Untuk menentukan spektrum *Laplace* suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungan titik dan matriks derajatnya berikut ini:

K_3:



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pertama menghitung matriks *Laplace* dengan rumus

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan nilai Eigen dari matriks *Laplace* menggunakan persamaan $\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$. Diperoleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\left(\lambda^3 - 2\right)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Jadi, diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity*, $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian, spektrum *Laplace* graf K_3 adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.6 Eliminasi Gauss

Dalam Anton, dkk (2004), suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi *(reduced row-echelon form)* jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu di kelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.

4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

2.7 Kajian Agama Terkait dengan Perintah Menuntut Ilmu

Belajar atau menuntut ilmu mempunyai peranan penting dalam kehidupan. Dengan menuntut ilmu orang menjadi pandai, ia akan mengetahui terhadap segala sesuatu yang dipelajari. Tanpa menuntut ilmu orang tidak akan mengetahui sesuatu apapun. Disamping belajar dapat untuk menambah ilmu pengetahuan baik teori maupun praktik, belajar juga dinilai sebagai ibadah kepada Allah. Orang yang belajar sungguh-sungguh disertai niat iklhas ia akan memperoleh pahala yang banyak. Belajar juga dinilai sebagai perbuatan yang dapat mendatangkan ampunan dari Allah SWT.

Menurut al-qur’an, manusia memiliki potensi untuk meraih ilmu dan mengembangkannya dengan izin Allah. Karna itu bertebaran ayat yang memerintahkan manusia menempuh berbagai cara untuk mewujudkan betapa tinggi kedudukan orang yang berpengetahuan. Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-Mujadalah ayat 11 :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ
ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا
تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: “Berlapang-lapanglah dalam majlis”, Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila, dikatakan; “berdirilah kamu”, maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan. (Q.S. Al-Mujadalah : 11)

Imam Al-Ghazali juga memandang bahwa belajar atau menuntut ilmu adalah sangat penting serta menilai sebagai kegiatan yang terpuji. Untuk menerangkan keutamaan belajar tersebut Imam Al-Ghazali mengutip beberapa ayat Al-Qur’an, hadits nabi serta atsar (Shihab, 2004).

Allah berfirman :

Tidak sepatutnya bagi mukminin itu pergi semuanya (ke medan perang). Mengapa tidak pergi dari tiap-tiap golongan di antara mereka tentang agama dan untuk memberi peringatan kepada kaumnya apabila mereka telah kembali kepadanya, supaya mereka itu dapat menjaganya. (Q.S. At-Taubah : 122)

۞وَمَا كَانَ ٱلۡمُؤۡمِنُونَ لِيَنفِرُواْ كَآفَّةٗۚ فَلَوۡلَا نَفَرَ مِن كُلِّ فِرۡقَةٖ مِّنۡهُمۡ طَآئِفَةٞ لِّيَتَفَقَّهُواْ فِي
ٱلدِّينِ وَلِيُنذِرُواْ قَوۡمَهُمۡ إِذَا رَجَعُوٓاْ إِلَيۡهِمۡ لَعَلَّهُمۡ يَحۡذَرُونَ ١٢٢

‘’Tidak sepatutnya bagi mukminin itu pergi semuanya (ke medan perang). Mengapa tidak pergi dari tiap-tiap golongan di antara mereka beberapa orang untuk memperdalam pengetahuan mereka tentang agama dan untuk memberi peringatan kepada kaumnya apabila mereka telah kembali kepadanya, supaya mereka itu dapat menjaga dirinya’’.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini, spektrum *Laplace* dari graf invers grup dihedral (D_{2n}) dibahas secara terpisah antara n ganjil dengan n genap.

3.1 Spektrum *Laplace* graf invers dari Grup Dihedral (D_{2n}) untuk n Ganjil

3.1.1 Spektrum *Laplace* Graf invers dari Grup Dihedral-6

Himpunan anggota dari grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$**.** Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_6 diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

o	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 3.1 dapat diketahui invers dari setiap anggota D_6 sebagai berikut:

$1 \circ 1 = 1$ maka $1^{-1} = 1$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ maka $r^{-1} = r^2$

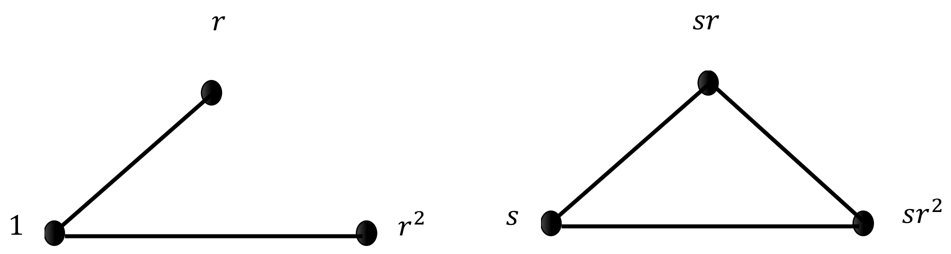
$r^2 \circ r = r \circ r^2 = 1$ maka $(r^2)^{-1} = r$

$s \circ s = 1$ maka $s^{-1} = s$

$sr \circ sr = 1$ maka $sr^{-1} = sr$

$sr^2 \circ sr^2 = 1$ maka $(sr^2)^{-1} = sr^2$

Berdasarkan uraian invers tersebut, didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_6 yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_6))$ sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Invers Grup Dihedral-6 (D_6)

Pada Gambar 3.1 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers nya

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen sebagai berikut:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

Dengan mereduksi matriks tersebut menggunakan metode Gaussian Elimination yang terdapat pada salah satu software matematika yaitu Maple, maka akan diperoleh:
$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-3\lambda+1}{-2+\lambda} & \frac{1}{-2+\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda^2-4\lambda+3)\lambda}{-\lambda^2-3\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2+4\lambda+3}{-2+\lambda} & -\frac{\lambda-3}{-2+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda-3)\lambda}{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})$ aadalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\lambda) &= (2-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda+1}{-2+\lambda}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-4\lambda+3)\lambda}{\lambda^2-3\lambda+1}\right)(2-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{-2+\lambda}\right)\left(-\frac{(\lambda-3)\lambda}{\lambda-1}\right) \\ &= \lambda^6-10\lambda^5+36\lambda^4-54\lambda^3+27\lambda^2 \\ &= \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)^3 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0,$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 3, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-6 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_6)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

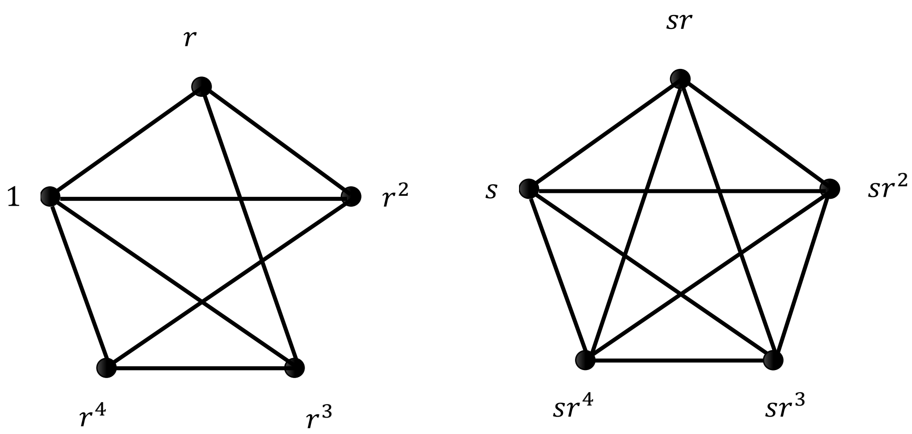
3.1.2 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-10

Himpunan anggota dari grup dihedral-10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_{10} diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley Grup Dihedral-10 (D_{10})

o	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	S	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.2 didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4$ adalah invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{10} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_S(D_{10}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Invers Grup Dihedral-10 $(\Gamma_S(D_{10}))$

Pada Gambar 3.2 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

sehingga diperoleh matriks tereduksi menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\lambda^2-7\lambda+11}{-4+\lambda} & \frac{-5+\lambda}{-5+\lambda} & \frac{-5+\lambda}{-5+\lambda} & \frac{1}{-4+\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\lambda^3-\lambda^2+30\lambda-24}{\lambda^2-7\lambda+11} & \frac{-9+2\lambda}{\lambda^2-7\lambda+11} & -\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{\lambda^2-7\lambda+11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-13\lambda^3+58\lambda^2-99\lambda+45}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24} & -\frac{(\lambda-3)(\lambda^2-8\lambda+15)}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^2-8\lambda+15)\lambda}{\lambda^2-5+3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda} & -\frac{5+\lambda}{-4+\lambda} & -\frac{5+\lambda}{-4+\lambda} & -\frac{5+\lambda}{-4+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-2} & -\frac{-5+\lambda}{\lambda-3} & -\frac{-5+\lambda}{\lambda-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-6\lambda+5}{\lambda-2} & -\frac{-5+\lambda}{\lambda-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(-5+\lambda)\lambda}{\lambda-1}
\end{bmatrix}$$

maka akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= (4-\lambda)\left(\frac{\lambda^2-7\lambda+11}{-4+\lambda}\right)\left(\frac{\lambda^3-\lambda^2+30\lambda-24}{\lambda^2-7\lambda+11}\right)\left(-\frac{\lambda^4-13\lambda^3+58\lambda^2-99\lambda-45}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24}\right)\left(-\frac{(\lambda^2-8\lambda+15)\lambda}{\lambda^2-5\lambda+3}\right)(4- \\
&\quad \lambda)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+5}{\lambda-2}\right)\left(\frac{(-5+\lambda)\lambda}{\lambda-1}\right) \\
&= \lambda^{10} - 36\lambda^9 + 564\lambda^8 - 5020\lambda^7 + 27750\lambda^6 - 97500\lambda^5 + 212500\lambda^4 - 262500\lambda^3 \\
&\quad + 140625\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-3)^2(-5+\lambda)^6
\end{aligned}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$ maka diperoleh nilai Eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 6, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-10 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{10})) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

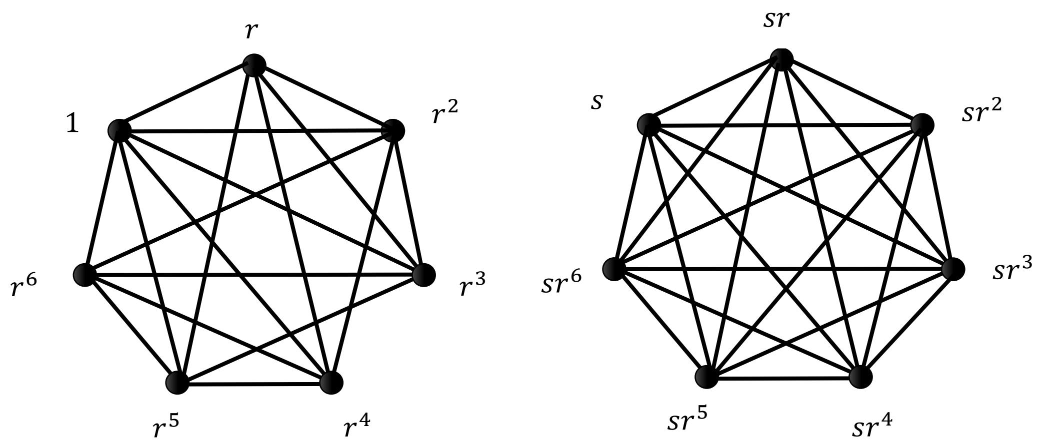
3.1.3 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedal-14

Himpunan anggota dari grup dihedral-14 adalah $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_{14} diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral-14 (D_{14})

o	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan Tabel 3.3 didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{14} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_{14}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Invers Grup Dihedral-14 $(\Gamma_s(D_{14}))$

Pada Gambar 3.3 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^{14} + 78\lambda^{13} - 2784\lambda^{12} - 60122\lambda^{11} + 874881\lambda^{10} - 9036972\lambda^{9} \\ + 67938696\lambda^{8} - 374527188\lambda^{7} + 1502495379\lambda^{6} - 4277482342\lambda^{5} \\ + 8202488280\lambda^{4} - 9511921650\lambda^{3} + 5044200875\lambda^{2} \\ = \lambda^2(\lambda-5)^3(\lambda-7)^9 \end{aligned}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 9, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-14 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{14})) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

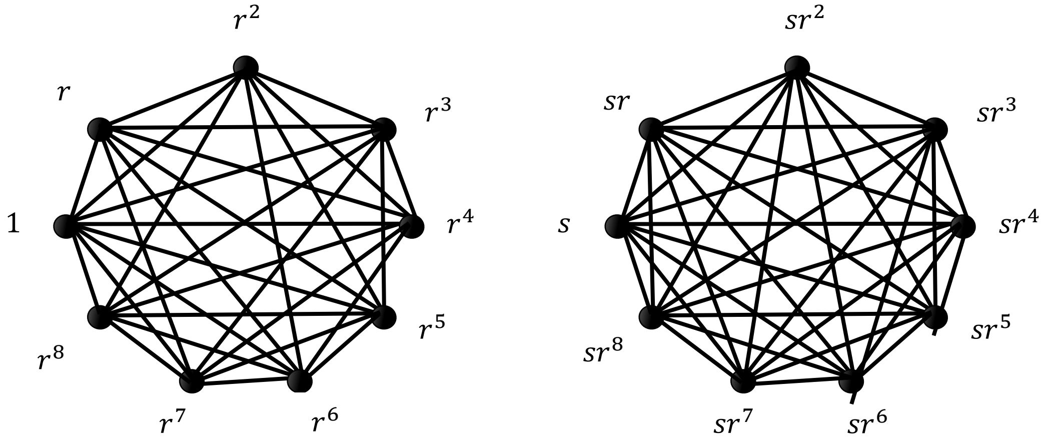
3.1.4 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-18

Himpunan anggota dari grup dihedral-18 adalah $D_{18} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_{18} diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel Cayley Grup Dihedral-18 (D_{18})

o	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3
r^6	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2
r^7	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr
r^8	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2
sr^7	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r
sr^8	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1

Berdasarkan Tabel 3.4 didapatkan bahwa $1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$, sr^6, sr^7, sr^8 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{18} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_{18}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Invers Grup Dihedral-18 $(\Gamma_s(D_{18}))$

Pada Gambar 3.4 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ r^8 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \\ sr^8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 7)^4(-9 + \lambda)^{12}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 12, m(\lambda_2) = 4, m(\lambda_3) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-18 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{18})) = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 12 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Pola Spektrum *Laplace* Graf Invers dari $\boldsymbol{D_{2n}}$

Berdasarkan hasil pembahasan diatas maka dapat dibangun suatu pola dari spektrum *Laplace* pada graf invers dari grup dihedral-$2n$ $\left(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}\right)$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.5 sebagai berikut:

Tabel 3.5 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum *Laplace* Graf Invers Grup Dihedral

D_{2n}	Polinomial Karakteriktik $P(\lambda)$	Spektrum
D_6	$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)^3$	$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_6)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
D_{10}	$\lambda^2(\lambda-3)^2(-5+\lambda)^6$	$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{10})) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
D_{14}	$\lambda^2(\lambda-5)^3(\lambda-7)^9$	$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{14})) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
D_{18}	$\lambda^2(\lambda-7)^4(-9+\lambda)^{12}$	$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{18})) = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 12 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_{2n}	$\lambda^2(\lambda-(n-2))^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-n)^{\frac{3n-3}{2}}$	$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

Dari tabel di atas maka didapatkan teorema sebagai berikut

Teorema 1

Spectrum *Laplace* pada graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Akan dibuktikan bahwa misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan n ganjil. Jika dioperasikan dengan operasi komposisi "o" di D_{2n}, maka diperoleh bahwa invers dari setiap anggota adalah

$(1)^{-1} = 1$

$(r^i)^{-1} = r^{n-i} \quad ,\forall i = 1,2,3,\dots,n-1$

$(s)^{-1} = s$

$(sr^i)^{-1} = sr^i \quad ,\forall i = 1,2,3,\dots,n-1$

Maka diperoleh unsur-unsur $S = \{r^i | i = 1,2,3,\dots,n-1\}$ yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri sehingga $|S| = n-1$.

Maka diperoleh matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)*

$$\boldsymbol{A}(D_{2n}) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat

$$\boldsymbol{D}(D_{2n})$$

$$= \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{L}(D_{2n}) = \begin{bmatrix}
n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & n-2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & -1 & n-2 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & 0 & -1 & \dots & n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1
\end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan *algebraic multiplicity* dari matriks tersebut. Dengan mereduksi matriks $(\boldsymbol{L}(D_{2n}) - \lambda\boldsymbol{I})$ menggunakan metode *Gaussian Elimination*, maka diperoleh

$$
\begin{bmatrix}
4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\lambda^2-7\lambda+11}{-4+\lambda} & \frac{-5+\lambda}{-5+\lambda} & \frac{-5+\lambda}{-5+\lambda} & \frac{1}{-4+\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\lambda^3-\lambda^2+30\lambda-24}{\lambda^2-7\lambda+11} & \frac{-9+2\lambda}{\lambda^2-7\lambda+11} & -\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{\lambda^2-7\lambda+11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-13\lambda^3+58\lambda^2-99\lambda+45}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24} & -\frac{(\lambda-3)(\lambda^2-8\lambda+15)}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^2-8\lambda+15)\lambda}{\lambda^2-5+3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda} & -\frac{5+\lambda}{-4+\lambda} & -\frac{5+\lambda}{-4+\lambda} & -\frac{5+\lambda}{-4+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-2} & -\frac{-5+\lambda}{\lambda-3} & -\frac{-5+\lambda}{\lambda-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-6\lambda+5}{\lambda-2} & -\frac{-5+\lambda}{\lambda-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(-5+\lambda)\lambda}{\lambda-1}
\end{bmatrix}
$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^2\big(\lambda - (n-2)\big)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n)^{\frac{3n-3}{2}}$$

sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = n, \lambda_2 = n-2, \lambda_3 = 0$$

dan diperoleh nilai *algebraic multiplicity* dari perpangkatan polinomial karakteristik untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1) = \frac{3n-3}{2}, m(\lambda_2) = \frac{n-1}{2}, m(\lambda_3) = 2$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$\boldsymbol{spec_L}\big(\Gamma_s(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

3.2 Spektrum *Laplace* graf invers dari Grup Dihedral (D_{2n}) untuk n Genap

3.2.1 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-8

Himpunan anggota dari grup dihedral-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_8 diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Cayley Grup Dihedral-8 (D_8)

o	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.6 dapat diketahui invers dari setiap anggota D_8 sebagai berikut:

$1 \circ 1 = 1$ maka $1^{-1} = 1$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r = 1$ maka $r^{-1} = r^3$

$r^2 \circ r^2 = 1$ maka $(r^2)^{-1} = r^2$

$r^3 \circ r = r \circ r^3 = 1$ maka $r^{-3} = r^1$

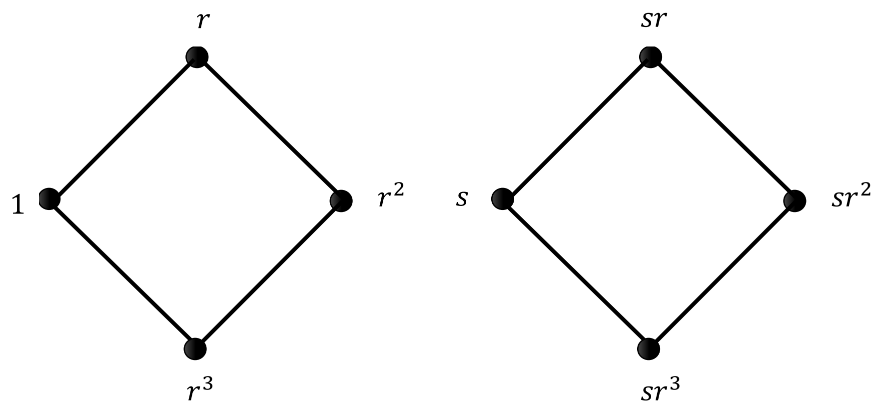
$s \circ s = 1$ maka $s^{-1} = s$

$sr \circ sr = 1$ maka $sr^{-1} = sr$

$sr^2 \circ sr^2 = 1$ maka $(sr^2)^{-1} = sr^2$

$sr^3 \circ sr^3 = 1$ maka $(sr^3)^{-1} = sr^3$

Berdasarkan uraian invers tersebut, didapatkan bahwa $1, r^2, s, sr, sr^2, sr^3$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_8 yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^3\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_8))$ sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Invers Grup Dihedral-8 $(\Gamma_S(D_8))$

Pada Gambar 3.5 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut

$$
\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0
$$

$$
\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0
$$

$$
\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0
$$

$$
\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\text{ë} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0
$$

Dengan mereduksi matriks tersebut menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, maka akan diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix}
5-\lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda} & 0 & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} & -\frac{-6+\lambda}{-5+\lambda} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-9\lambda+16}{\lambda-4} & \frac{4}{\lambda-4} & -\frac{\lambda-8}{\lambda-4} & \frac{4}{\lambda-4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60}{\lambda^2-9\lambda+16} & \frac{4(-6+\lambda)}{\lambda^2-9\lambda+16} & -\frac{\lambda^2-13\lambda+36}{\lambda^2-9\lambda+16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-19\lambda^3+122\lambda^2-288\lambda+144}{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60} & \frac{4(-6+\lambda)^2}{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192)\lambda}{\lambda^3-13\lambda^2+44\lambda-24}
\end{bmatrix}
$$

Karena $\det(\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\lambda) &= (5-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{-5+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-9\lambda+16}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^3-14\lambda+57\lambda-60}{\lambda^2-9\lambda+16}\right) \\
&\quad \left(-\frac{\lambda^4-19\lambda^3+122\lambda^2-288\lambda+144}{\lambda^3-14\lambda^2+57\lambda-60}\right)\left(-\frac{\left(\lambda^3-18\lambda^2+104\lambda-192\right)\lambda}{\lambda^3-13\lambda^2+44\lambda-24}\right) \\
&= \lambda^8-40\lambda^7+680\lambda^6-6368\lambda^5+35472\lambda^4-117504\lambda^3+214272\lambda^2 \\
&\quad -165888\lambda \\
&= \lambda^2(\lambda-4)^2(-2+\lambda)^4
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 2, m(\lambda_2) = 4, m(\lambda_3) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-8 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathrm{D}_8)}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

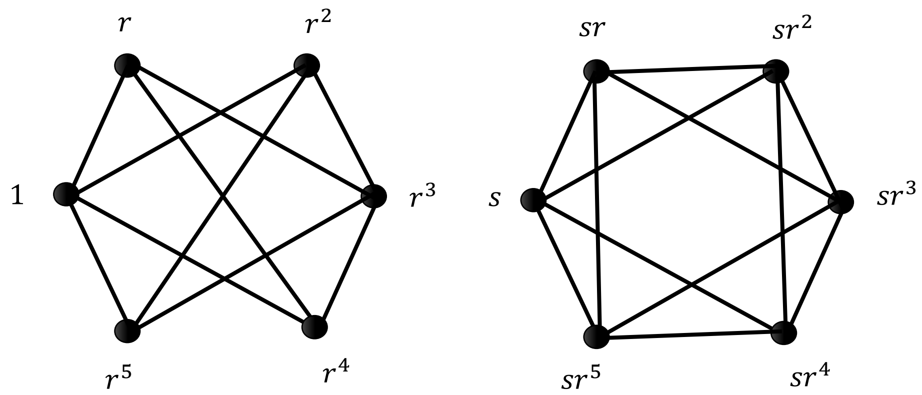
3.2.2 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-12

Himpunan anggota dari grup dihedral-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_{12} diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.7 Tabel Cayley Grup Dihedral-12 (D_{12})

o	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.6 didapatkan bahwa $1, r^3, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{12} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^4, r^5\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{12})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Invers Grup Dihedral-12 $\left(\Gamma_s(D_{12})\right)$

Pada Gambar 3.6 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^{12} - 88\lambda^{11} + 3504\lambda^{10} - 83344\lambda^{9} + 1315888\lambda^{8} - 14481984\lambda^{7}$$
$$+ 113373184\lambda^{6} - 631386112\lambda^{5} + 2451505152\lambda^{4} - 6320553984\lambda^{3}$$
$$+ 9739173888\lambda^{2} - 6794772480\lambda$$
$$= \lambda^{2}(\lambda - 2)(\lambda - 6)^{3}(-4 + \lambda)^{6}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\lambda_1) = 3, m(\lambda_2) = 6, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-12 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathrm{D}_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Spektrum Laplace Graf Invers dari Grup Dihedral-16

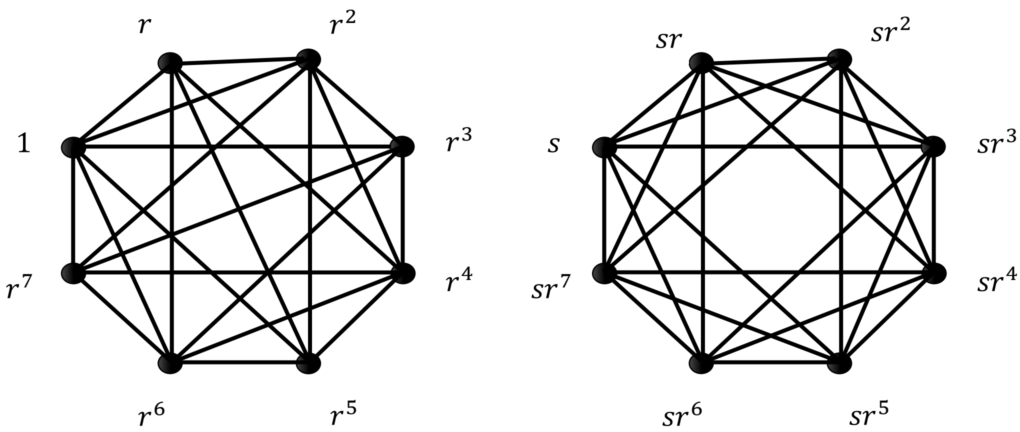
Himpunan anggota dari grup dihedral-16 adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_{16} diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.8 Tabel Cayley Grup Dihedral-16 (D_{16})

o	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5

sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.7 didapatkan bahwa $1, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$, sr^6, sr^7 invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{16} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $\left(\Gamma_s(D_{16})\right)$ sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Invers Grup Dihedral-16 $\left(\Gamma_s(D_{16})\right)$

Pada Gambar 3.7 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ r^7 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \\ sr^7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \ddot{e}\boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$P(\ddot{e}) = \ddot{e}^2(\ddot{e} - 4)(\ddot{e} - 8)^5(-6 + \ddot{e})^8$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \ddot{e}\boldsymbol{I}) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$\ddot{e}_1 = 8, \ddot{e}_2 = 6, \ddot{e}_3 = 4, \ddot{e}_4 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(\ddot{e}_1) = 5, m(\ddot{e}_2) = 8, m(\ddot{e}_3) = 1, m(\ddot{e}_4) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-16 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathrm{D}_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

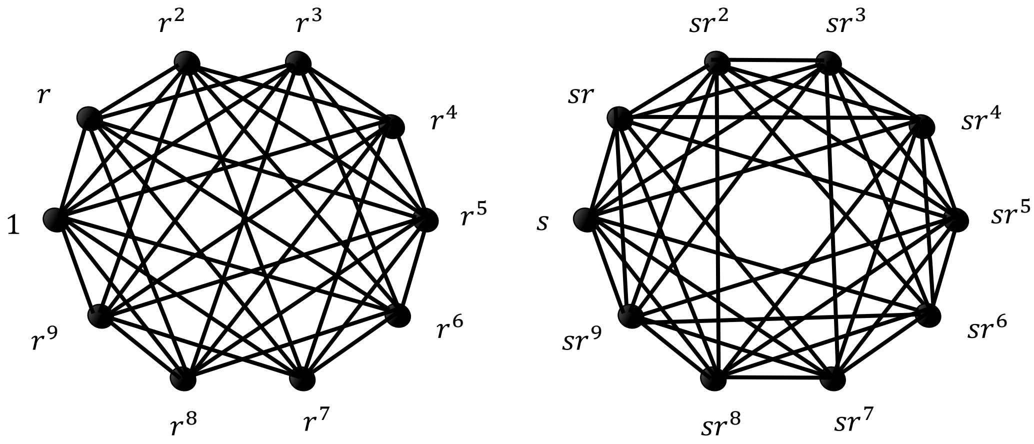
3.2.4 Spektrum *Laplace* Graf Invers dari Grup Dihedral-20

Himpunan anggota dari grup dihedral-20 adalah $D_{20} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9\}$. Dengan operasi komposisi "o" pada setiap anggota D_{20} diperoleh Tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.9 Tabel Cayley Grup Dihedral-20 (D_{20})

o	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^6	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3
r^7	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2
r^8	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr
r^9	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^9	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2	r^3
sr^7	sr^7	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r	r^2
sr^8	sr^8	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1	r
sr^9	sr^9	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	1

Berdasarkan Tabel 3.8 didapatkan bahwa $1, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8, sr^9$ invers terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, dapat dibangun suatu himpunan bagian S dari D_{20} yang tidak invers dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh $S = \{r, r^2, r^3, r^4, r^6, r^7, r^8, r^9\}$. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf invers $(\Gamma_s(D_{20}))$ sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf Invers Grup Dihedral-20 $(\Gamma_S(D_{20}))$

Pada Gambar 3.8 menghasilkan matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & r^8 & r^9 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 & sr^7 & sr^8 & sr^9 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^8 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r^9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
sr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
sr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
sr^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
sr^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
sr^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
sr^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
sr^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
sr^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
sr^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat graf invers

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$

$$= \begin{bmatrix}
8&-1&-1&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&7&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&7&0&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&7&-1&-1&-1&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&-1&-1&7&-1&0&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&-1&-1&-1&8&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&0&-1&7&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&0&-1&-1&-1&7&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&0&7&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&-1&-1&-1&-1&0&-1&-1&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&-1&-1&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&8&-1&-1&-1&-1&0&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&8&-1&-1&-1&-1&0&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&8&-1&-1&-1&-1&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&8&-1&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&8&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1&-1&-1&-1&8&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&8&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&8&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&8
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan cara yang sama yaitu:

$$\det(\boldsymbol{L} - \text{ë}\boldsymbol{I}) = 0$$

maka akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$P = ë^2(ë - 6)(ë - 10)^7(-8 + ë)^{10}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - ë\boldsymbol{I}) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya, yaitu:

$$ë_1 = 10, ë_2 = 8, ë_3 = 6, ë_4 = 0$$

Berdasarkan polinomial karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity* sebagai berikut:

$$m(ë_1) = 7, m(ë_2) = 10, m(ë_3) = 1, m(ë_4) = 2$$

Dengan demikian diperoleh spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral-20 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{20}(\mathrm{D}_{20})}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 0 \\ 7 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Pola Spektrum *Laplace* Graf Invers dari $\boldsymbol{D_{2n}}$

Berdasarkan pembahasan di atas diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *Laplace* pada graf invers dari grup dihedral-$2n$ $\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{2n})}\right)$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.10 sebagai berikut:

Tabel 3.10 Pola Polinomial Karakteristik dan Spektrum Laplace Graf Invers Grup Dihedral

D_{2n}	Polinomial Karakteriktik $P(ë)$	Spektrum
D_8	$ë^2(ë - 4)^2(-2 + ë)^4$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_8)}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
D_{12}	$ë^2(ë - 2)(ë - 6)^3(-4 + ë)^6$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
D_{16}	$ë^2(ë - 4)(ë - 8)^5(-6 + ë)^8$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
D_{20}	$ë^2(ë - 6)^2(ë - 10)^6(-8 + ë)^{10}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{20})}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 0 \\ 7 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
D_{2n}	$ë^2(ë - (n-2)^n(ë - (n-4))(ë - n)^{n-3}$	$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_s(\mathrm{D}_{2n})}\right)$ $= \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Dari tabel di atas dapat dirumuskan teorema sebagai berikut:

Teorema 2

Spektrum *Laplace* pada graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 6$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}})}\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan n genap dan $n \geq 6$. Jika dioperasikan dengan operasi komposisi "o" di D_{2n}, maka diperoleh bahwa invers dari setiap anggota adalah

$(1)^{-1} = 1$

$(r^i)^{-1} = r^{n-i}$ $\ ,\forall i = 1,2,3, \dots, n-1$ dan $i \neq \frac{n}{2}$

$(s)^{-1} = s$

$(sr^i)^{-1} = sr^i$ $\ ,\forall i = 1,2,3, \dots, n-1$

Maka diperoleh unsur-unsur $S = \left\{r^i | i \neq \frac{n}{2}, i = 1,2,3, \dots, n-1\right\}$ yang tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri sehingga $|S| = n - 2$.

Maka diperoleh matriks keterhubungan titik *(adjacency matrix)*

$$\boldsymbol{A}(D_{2n}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & \dots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat

$$\boldsymbol{D}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} n-2 & -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n-3 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n-3 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & n-2 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & -1 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & n-2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & n-2 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & n-2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan *algebraic multiplicity* dari matriks tersebut. Dengan mereduksi matriks $(\boldsymbol{L}(D_{2n}) - \ddot{e}\boldsymbol{I})$ menggunakan metode *Gaussian Elimination*, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} (n+1)-\ddot{e} & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & (n+1)-\ddot{e} & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\ddot{e}-n)(\ddot{e}-(n+2))}{\ddot{e}-(n+1)} & -\frac{\ddot{e}-(n+2)}{\ddot{e}-(n+1)} & -\frac{\ddot{e}-(n+2)}{\ddot{e}-(n+1)} & -\frac{\ddot{e}-(n+2)}{\ddot{e}-(n+1)} & -\frac{\ddot{e}-(n+2)}{\ddot{e}-(n+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\ddot{e}^2-(2n+1)\ddot{e}+n^2}{\ddot{e}-n} & \frac{n}{\ddot{e}-n} & -\frac{\ddot{e}-2n}{\ddot{e}-n} & \frac{n}{\ddot{e}-n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{(\ddot{e}-(n+1))(\ddot{e}^2-(2n+1)\ddot{e}+(n^2-n))}{\ddot{e}^2-(2n+1)\ddot{e}+n^2} & \frac{n(\ddot{e}-(n+2))}{\ddot{e}^2-(2n+1)\ddot{e}+n^2} & -\frac{(\ddot{e}-n)(\ddot{e}-(2n+1))}{\ddot{e}^2-(2n+1)\ddot{e}+n^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\ddot{e}\left((\ddot{e}-n)(\ddot{e}-(n+2))(\ddot{e}-2n)\right)}{\ddot{e}^3-(3n+1)\ddot{e}^2+n(n^2-n-1)\ddot{e}-6n} \end{bmatrix}$$

Karena $\det(\boldsymbol{L} - \lambda\boldsymbol{I})$ adalah hasil perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - (n-2)^n(\lambda - (n-4))(\lambda - n)^{n-3}$$

sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = n, \lambda_2 = n-2, \lambda_3 = n-4, \lambda_4 = 0$$

dan diperoleh nilai *algebraic multiplicity* dari perpangkatan polinomial karakteristik untuk masing-masing nilai Eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1) = n-3, m(\lambda_2) = n, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 2$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$\boldsymbol{spec_L}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{s}}(\mathrm{D}_{2\mathrm{n}})}\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah diperoleh di atas, maka dapat didapatkan kesimpulan dari pola umum spektrum *Laplace* dari graf invers grup dihedral sebagai berikut:

1. Spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\Gamma_s(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{3n-3}{2} & \frac{n-1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Laplace* dari graf invers dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 6$ adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(\overline{\Gamma_s(D_{2n})}) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ n-3 & n & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk mengkaji:

1. Spektrum *Adjacency*, spektrum *signless Laplace* dan spektrum *detour* dari graf invers atau berbagai macam graf lainnya dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil.
2. Spektrum *Adjacency*, spektrum *signless Laplace* dan spektrum *detour* dari graf invers atau berbagai macam graf lainnya dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N.N. dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Muzakir, M. dan Khasanah, Roul. 2016. *Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral.* Penelitian P3S. Malang: UIN Maliki Malang.

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elemeneter Edisi Kelima.* Jakarta: Erlangga.

Anton, H. & Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Biyikoglu. T., Leydold, J., Stadler, P. F.. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graph*. Berlin: Springer.

Brouwer, A. E. & Heamers, W. H.. 2010. *Spectra of Graph Theory and Aplication*. New York: London Academic Press.

Budayasa, I.K.. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1996. *Graph & Digraphs Third Edition.* New York: Chapman & Hall/CRC.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Press.

Dummit, D.S. & Foote, R. M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Jain, S. K. & Gunawardena, A. D. 2004. *Linear Algebra an Interactive Approach.* Belmont: Thomson Learning.

Mother, R. A., & Yusuf, F. Z. (2017). Inverse Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 142-154.

Purwanto. 1998. *Teori Graf.* Malang: IKIP Malang.

Ron dan David. 2009. *Elementary Linier Algebra*. New York: Houghton Miflin Harcourt Publishing Company.

Shihab, Quraish. 2004. *Tafsir al Mishbah Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Quran.* Jakarta: Lentera Hati.

RIWAYAT HIDUP

Nurul Fatichah lahir di Malang pada tanggal 20 April 1993. Biasa dipanggil Nurul. Ia tinggal di Desa Sudimoro Kec. Bululawang Kab. Malang Jawa Timur. Ia merupakan anak pertama dari bapak Khamim dan ibu Siti Aminah (Almh). Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Al Murtadlo dan lulus pada tahun 2006. Sekolah tingkat pertama di SMP Al Munawwariyyah Bululawang pada tahun 2009. Sekolah tingkat atas ditempuh di SMA Al Munawwariyyah Bululawang selama tiga tahun, dan selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2011.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurul Fatichah
NIM : 11610073
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Laplace* dari Graf Inverse Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M. Pd.
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M. Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 September 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	23 September 2017	Konsultasi Bab II	2.
3.	19 Oktober 2017	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	30 Oktober 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	06 November 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	27 November 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	07 Februari 2017	Konsultasi Bab III	7.
8.	18 Maret 2017	ACC Bab III	8.
9.	28 Maret 2017	Konsultasi Bab IV	9.
10.	03 Aprili 2018	Konsultasi Abstrak	10.
11.	09 April 2018	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	12 April 2018	ACC Bab IV	12.
13.	15 April 2018	ACC Abstrak	13.
14.	19 April 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 07 Juni 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurul Fatichah
NIM : 11610073
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Laplace* dari Graf Inverse Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M. Pd.
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M. Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 September 2017	Konsultasi Bab I	1.
2.	23 September 2017	Konsultasi Bab II	2.
3.	19 Oktober 2017	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	30 Oktober 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	06 November 2017	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	27 November 2017	Konsultasi Bab III	6.
7.	07 Februari 2017	Konsultasi Bab III	7.
8.	18 Maret 2017	ACC Bab III	8.
9.	28 Maret 2017	Konsultasi Bab IV	9.
10.	03 Aprili 2018	Konsultasi Abstrak	10.
11.	09 April 2018	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	12 April 2018	ACC Bab IV	12.
13.	15 April 2018	ACC Abstrak	13.
14.	19 April 2018	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 07 Juni 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001