SPEKTRUM *LAPLACE* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
SUKRIS TRI HANDAYANI
NIM. 09610116

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

SPEKTRUM *LAPLACE* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Sukris Tri Handayani
NIM. 09610116

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

SPEKTRUM *LAPLACE* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Sukris Tri Handayani
NIM. 09610116

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 Juni 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SPEKTRUM *LAPLACE* GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Sukris Tri Handayani
NIM. 09610116

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 10 Juni 2016

Penguji Utama	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Fachrur Rozi, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sukris Tri Handayani

NIM : 09610116

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi Dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Sukris Tri Handayani
NIM. 09610116

MOTO

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

“Sesungguhnya bersama setiap kesulitan ada kemudahan”

(Q.S al-Insyirah: 6)

DO IT NOW. SOMETIMES “LATER” BECOMES “NEVER”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Allah Swt.

Ayahanda Suli dan Ibunda Sukaeni, serta kakak tersayang Sugiyanto, Edi Sutrisno, dan Suyanti yang telah memberikan segalanya bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II skripsi, yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Ayahanda Suli dan Ibunda Sukaeni yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
7. Kakak-kakak Sugianto, Edi Sutrisno, dan Suyanti yang senantiasa memberikan ilmu dan doanya kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2009, terutama Deasy Sandhya Elya Ikawati, Yusuf Arifuddin, Pangestuti Prima Darajat, Ika Rahmawati.
9. Seseorang yang tidak pernah berhenti untuk memberikan motivasi dan mengingatkan penulis Haris Rachmad N, Nur Haeni Yunus, Cholifatul Maulidiah, Ahmad Muhammad Muftiridho, serta teman-teman kos Pak Slamet (Ummul Latifah, Khasmawardina Patanda, Alfianur, Ambayu sofya dkk) dan keluaga besar "UKM KSR-PMI Unit UIN Maulana Malik Ibrahim Malang" yang tiada hentinya mendukung dan mendoakan dalam mewujudkan cita-cita.
10. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis, pembaca dan bagi seluruh mahasiswa. *Amin Ya Rabbal Alamin*…..

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Handayani, Sukris Tri. 2016. **Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: spektrum, matriks *laplace*, nilai eigen, vaktor eigen, graf konjugasi, grup dihedral.

Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, misalnya matriks adjacency dan matriks derajat. Ketika graf sudah dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat didekati secara aljabar linier untuk mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Matriks baru yang memuat semua nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya vektor eigen yang bersesuaian pada baris kedua disebut spektrum. Tujuan dari penelitian ini adalah mencari pola yang nantinya dijadikan suatu teorema dari spektrum *laplace* graf konjugasi yang dibangun dari grup dihedral. Hasil dari penelitian ini adalah:
Spektrum *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil adalah:

$$Spec_L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{pmatrix}$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang spektrum *laplace* graf lainnya dari grup dihedral.

ABSTRACT

Handayani, Sukris Tri. 2016. ***Laplacian* Spektrum of Conjugate Graph of Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technologi, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Abdussakir, M.Pd. (2) Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: Spectrum, *laplacian* matrix, Eigen value, eigen Vektor, Conjugate Graph, dihedral Group

Graph can be shown in the matrix form, for example *Adjacency* matrix and degree matrix. When a graph has been shown in the matrix form, it can be approached using linear algebra to determine the eigen values and the eigen vectors. The new matrix which containing all of eigen values in the first now and the number of the corresponding eigen vectors in the second row is called spectrum. The purpose of this research is to determine a formula which will be used as a theorem of the *laplacian* spectrum of conjugate graph obtained from dihedral group. The result from this research are: *laplacian* spectrum of conjugate graph from dihedral group D_{2n} is:

$$Spec_L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{pmatrix} \quad , n \text{ is odd natural number}$$

For the next research is determine the other theorems about *laplacian* spectrum of the other graph from dihedral group.

ملخص

هندايني، سوكريس تري. ٢٠١٦. **طيف لابلاس لمخطط الإقتران من مجموعة Dihedral**. بحث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتور عبدالشاكر، ماجستير. (٢) فخرالرازي، ماجستير.

الكلمات الرئيسية: الطيف، مصفوفة لابلاس، القيم الذاتية، المتجه الذاتية، مخطط اقتران، مجموعة Dihedral.

يمكن التعبير عنها في شكل مصفوفة، المثال المصفوفة الملاصقة والمصفوفة الدرجة. عندما تم أعرب مخطط في شكل مصفوفة، ومن ثم يمكن أن يقترب من الجبر الخطي لإيجاد القيم المتجه الذاتية. وتسمى مصفوفة تحتوي على كل القيم الذاتية في الصف الأول وعدد من و المتجه الذاتية الموافق الصف الثاني يعني الطيف. والغرض من هذا البحث هو العثور على النمط الذي سيتم استخدامها بوصفها نظرية من طيف لابلاس مخطط المترافقة التي شيدت من مجموعة Dihedral. نتائج هذه الدراسة هي:

الطيف لابلاس لمخطط الإقتران من مجموعة Dihedral D_{2n} مع n يعني الغريب هو:

$$Spec_L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{pmatrix}$$

للباحث المستقبل يستطيع أن يحدد مجموعة متنوعة من النظريات عن الطيف لابلاس لمخطط الإقتران من مجموعة الاخرى من مجموعة Dihedral.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan kitab suci bagi umat Islam. Selain sebagai kitab suci, al-Quran juga merupakan sumber hukum utama dalam ajaran agama Islam. Al-Quran merupakan sumber dari berbagai macam ilmu pengetahuan. Salah satunya yaitu ilmu matematika yang terdapat dalam beberapa kitab suci al-Quran. Dalam ilmu pengetahuan, terdapat integrasi al-Quran dan matematika salah satunya yaitu surat al-Mujaadillah/58:11.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ
لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ
دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

"*Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan*." (QS. al-Mujaadillah/58:11).

Allah Swt. berfirman dalam surat al-Mujaadilah/58:11 yang artinya "Hai orang-orang beriman, apabila dikatakan kepadamu, "berlapang-lapanglah dalam majelis" maka lapangkanlah, niscaya Allah Swt. akan meninggikan derajatnya orang-orang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan".

Menurut tafsir Jalalyn yang berbunyi "Hai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepada kalian, "berlapang-lapanglah" berluas-luaslah (dalam majelis)" yaitu majelis tempat Nabi Muhammad Saw. berada dalam majelis dzikir sehingga orang-orang yang datang kepada kalian dapat tempat duduk. Menurut suatu *qiraat* lafal *al-majaalis* dibaca *al-majlis* dalam bentuk *mufrad* (maka lapangkanlah, niscaya Allah Swt. akan memberi kelapangan untuk kalian) di surga nanti (dan apabila dikatakan, "berdirilah kalian") untuk melakukan shalat dan hal-hal lainnya yang termasuk amal-amal kebaikan (maka berdirilah) menurut *qiraat* lainnya kedua-duanya dibaca *fansyuzuu* dengan memakai harakat damah pada huruf *syin*-Nya (niscaya Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kalian) karena ketaatannya dalam hal tersebut (dan) Dia meninggikan pula (orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat) di surga nanti. (Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kalian kerjakan).

Ayat di atas merupakan tuntunan akhlak yang menyangkut dalam suatu majlis. Allah Swt. berfirman; "Hai orang-orang beriman, apabila dikatakan kepada kamu" oleh siapapun "berlapang-lapanglah" yakni berupayalah dengan sungguh-sungguh walau dengan memaksakan diri untuk memberi tempat orang lain dalam majelis-majelis yakni satu tempat. Apabila diminta kepada kamu untuk melakukan itu, maka lapangkanlah tempat itu untuk orang lain dengan suka rela. Jika kamu melakukan hal tersebut, niscaya Allah Swt. akan melapangkan segala sesuatu buat kamu dalam hidup ini. Dan apabila dikatakan berdirilah kamu ke tempat yang lain atau untuk melakukan sesuatu seperti untuk shalat dan berjihad, maka berdirilah dan bangkitlah Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu wahai yang memperkenankan tuntunan ini dan orang-

orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat kemuliaan di dunia dan akhirat dan Allah Swt. terhadap apa yang kamu kerjakan sekarang dan masa datang Maha Mengetahui.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai keunikan dalam sifat, pemahaman, bahkan mempunyai bahasa sendiri yang membutuhkan keterampilan khusus untuk mengubah bahasa matematika menjadi lebih mudah untuk dipahami. Matematika mempunyai sifat yang luas yang tidak akan pernah selesai dipelajari dan akan menghasilkan suatu penemuan-penemuan baru, teorema-teorema baru, pola-pola baru, dan juga pendapat baru (Wijaya, 2011).

Meskipun sukar untuk menentukan definisi yang tepat tentang matematika, namun pada dasarnya terdapat sifat-sifat yang mudah dikenali pada matematika. Ciri khas matematika yang tidak dimiliki pengetahuan lain adalah (a) merupakan abstraksi dari dunia nyata, (b) menggunakan bahasa simbol, dan (c) menganut pola pikir deduktif.

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Abstraksi secara bahasa berarti proses pengabstrakan. Abstraksi sendiri dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan jalan memusatkan perhatian pada sifat yang umum dari berbagai objek dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Untuk menyatakan hasil abstraksi, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Penggunaan bahasa simbol mempunyai dua keuntungan yaitu sederhana dan universal yang berarti bahwa ahli matematika di belahan bumi manapun akan dapat memahaminya.

Dalam ilmu matematika terdapat cabang teori graf. Teori graf merupakan cabang ilmu yang mempelajari sifat-sifat graf. Secara informal, graf merupakan himpunan benda-benda yang disebut simpul (*vertex* atau *node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik yang dihubungkan oleh garis-garis atau garis berpanah. Suatu sisi banyak struktur yang dapat direpresentasikan dengan graf dan banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan bantuan graf sendiri. Sebuah struktur graf dapat dikembangkan dengan memberi bobot pada setiap sisi. Pada graf maka pasangan-pasangan ini merupakan pasangan terurut. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang dibutuhkan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

Penelitian aljabar dalam teori graf adalah salah satu permasalahan pada matematika yang membahas tentang graf dengan sifat-sifat aljabar dari representasi graf pada matriks. Secara spesifik, teori spektra graf mengkaji sifat yang berhubungan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan vektor eigen dari representasi graf pada matriks laplace. Peneliti sebelumnya telah melakukan penelitian tentang spektrum laplace graf commutinf dari grup dihedral yang dilakukan oleh Amalia Intifaada, dan juga penelitian tentang spektrum deteour graf-m partisi komplit oleh Wijaya. Sehingga, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam penelitian mengenai spektrum laplace graf konjugasi yang dikaitkan dengan grup dihedral. Berdasarkan latar belakang tersebut penulis merumuskan judul “Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dari penulisan skripsi ini adalah bagaimana bentuk umum spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian skripsi ini adalah untuk mengetahui bentuk umum spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan memberi manfaat sebagai berikut:

1. Untuk menambah pemahaman tentang konsep dalam matematika khususnya teori graf.
2. Mengetahui pola spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral.
3. Memberikan informasi mengenai spektrum suatu graf sehingga dapat menjadi acuan peneliti lain untuk menentukan spektrum *laplace* graf-graf yang lain yang belum dikaji dalam penelitian ini.

1.5 Batasan Masalah

Untuk tetap menjaga kedalaman pembahasan materi penulis membatasi penulisan skripsi ini pada graf sederhana dan juga membatasi pada grup dihedral D_6, D_{10}, D_{14} untuk menentukan bentuk umum spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil.

1.6 Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini adalah deskriptif kualitatif, yaitu pencarian fakta dengan interpretasi tepat untuk membuat gambaran atau lukisan secara sistematis, faktual, dan akurat. Dengan demikian, pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan yaitu usaha mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam perpustakaan (Fatkiyah, 2010).

Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil oleh pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapaun langkah-langkah yang akan digunakan oleh penulis dalam melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan grup dihedral dari D_6, D_{10}, D_{14}.
2. Menggambarkan table cayley dari grup dihedral D_6, D_{10}, D_{14} .
3. Menggambarkan graf kojugasi dari grup dihedral D_6, D_{10}, D_{14} .
4. Menentukan matriks *laplace*.
5. Menentukan polinomial karakterisktik.
6. Mencari nilai eigen dari matriks *laplace*.
7. Mencari vektor eigen dari matriks *laplace*.
8. Menentukan spektrum dari masing-masing graf yang telah terbentuk.
9. Mengamati dan menentukan pola yang terbentuk pada graf konjugasi.
10. Membuktikan pola yang terbentuk.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah dan mudah dipahami digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan dalam skripsi ini meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini meliputi kajian tentang teori yang akan digunakan dalam penelitian ini. Yaitu konsep dasar tentang graf dan aljabar abstrak, khususnya tentang graf konjugasi dari grup dihedral. Serta hubungan kajian ini dengan konsep al-Quran dan Hadits.

Bab III Pembahasan

Pembahasan ini berisi tentang spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral.

Bab IV Penutup

Pada bab ini memuat kesimpulan dan saran dari penelitian yang sudah dilakukan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf merupakan salah satu banyak cabang ilmu matematika yang aplikasinya banyak digunakan dalam kehidupan manusia, namun dalam teori graf masih banyak sekali kajian di dalamnya. Graf G terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik $(vertex)$ dalam penulisan ini disimbolkan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi $(edge)$ disimbolkan dengan $E(G)$ dan seterusnya menggunakan istilah titik dan sisi.

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

Teori graf pertama kali dikemukakan dalam tulisan Euler yang berisi tentang pemecahan masalah jembatan konisberg pada tahun 1736 yang sangat terkenal di eropa. Pada periode selanjutnya, teori graf terus berkembang seiring dengan banyaknya permasalahan yang dapat direpresentasikan dan diselesaikan dengan konsep graf, terutama pada masa tiga puluh tahun terakhir dianggap merupakan periode yang sangat intensif dalam aktifitas pengembangan teori graf (Sutarno, dkk, 2005).

Definisi 2

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sebagai *sisi*. Banyaknya unsur di

$V(G)$ disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)*, dan banyaknya unsur di *E(G)* disebut *ukuran* dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graf yang dibicarakan hanya graf *G*, maka order dan ukuran dari *G* masing-masing cukup ditulis *p* dan *q*. Graf dengan order *p* dan ukuran *q* dapat disebut graf –(*p*, *q*) (Abdussakir, dkk, 2009).

2.1.2 Graf Konjugasi

Definisi 3

Diberikan G merupakan grup non komutatif, dan $[e],[g_1],\dots,[g_n]$ merupakan kelas konjugasi dari G, dua titik dalam graf saling terhubung jika hanya jika ke dua elemen dalam kelas konjugasi saling konjugasi satu sama lain. Sehingga graf ini disebut dengan graf konjugasi dari grup non komutatif (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Contoh :

Tentukan graf konjugasi dari grup dihedral -6 $(\mathrm{D}_6) = \{1, r, r^2, s\ , sr, sr^2\}$.

Jawab :

Adapun penyajian D_6 dalam tabel Cayley adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	s
r^2	r^2	1	r	sr	s	sr
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

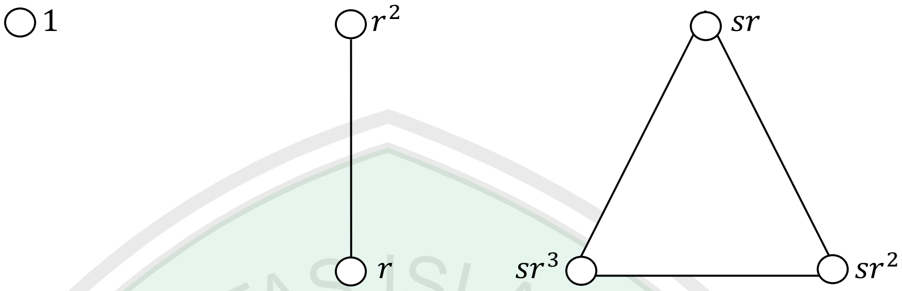
Kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral -6 $(\mathrm{D}_6) = \{1, r, r^2, s\ , sr, sr^2\}$ adalah:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{r, r^2\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$

Dari kelas-kelas konjugasi di atas maka terbentuk graf konjugasi sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf Konjugasi Grup Dihedral-6 (D_6)

2.2 Grup

2.2.1 Definisi Grup

Definisi 4

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq 0)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu * assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 1991).

2.2.2 Sifat-Sifat Grup

Teorema 1

Jika G grup dengan operasi $\circ$, maka

1. Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal
2. Untuk setiap $a \in G, a^{-1}$ adalah tunggal
3. $(a \circ a)^{-1} = a$, maka setiap $a \in G$
4. $(a^{-1})^{-1} = a$ dan $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Bukti:

1. Misal $(G, \circ)$ adalah grup

   Andaikan e dan h adalah elemen identitas $(e \neq h)$ maka berlaku

   1) $e \circ h = h \circ e = h$

   2) $e \circ h = h \circ e = e$

   Karena $e \circ h$ dan $h \circ e$ adalah elemen tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat $e = h$ (kontradiksi dengan pegandaian). Ini berarti bahwa elemen identitas di G adalah tunggal.

2. Misal $(G, \circ)$ adalah grup. Andaikan invers dari $a \in G$ tidak tunggal yaitu ${a_1}^{-1}$ dan ${a_2}^{-1}$ dengan ${a_1}^{-1} \neq {a_2}^{-1}$

   Misal e adalah elemen identitas di G maka berlaku

   $a \circ {a_1}^{-1} = {a_1}^{-1} \circ a = e$

   $a \circ {a_2}^{-1} = {a_2}^{-1} \circ a = e$

   Selanjutnya ${a_1}^{-1} \circ (a \circ {a_2}^{-1}) = \ {a_1}^{-1} \circ e = {a_1}^{-1}$

   Dan $({a_1}^{-1} \circ a) \circ {a_2}^{-1} \ = \ e \circ {a_2}^{-1} \ = {a_2}^{-1}$

   Karena operasi $\circ$ bersifat assosiatif di G yang berarti bahwa

   ${a_1}^{-1} \circ (a \circ {a_2}^{-1}) = ({a_1}^{-1} \circ a) \circ {a_2}^{-1}$

${a_1}^{-1} = {a_2}^{-1}$ (kontradiksi dengan pengandaian). Ini berarti setiap G setiap unsur di G punya invers yang tunggal.

3. Untuk menunjukan $(a \circ a)^{-1} = a$, dengan menunjukkan bahwa a adalah invers dari a^{-1} (karena pada bagian (2) a mempunyai invers tunggal), karena G suatu grup, maka $\forall a \in G$ berlaku bahwa $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ maka $(a^{-1})^{-1} = a$

4. Ambil $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

   (i). $a \circ a^{-1} = e$

$$(a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} = e \circ (a^{-1})^{-1}$$
$$(a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}$$
$$a \circ a = (a^{-1})^{-1}$$
$$a = (a^{-1})^{-1}$$

   (ii). $a^{-1} \circ a = e$

$$(a^{-1})^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) = (a^{-1})^{-1} \circ e$$
$$((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ a = (a^{-1})^{-1}$$
$$e \circ a = (a^{-1})^{-1}$$
$$a = (a^{-1})^{-1}$$

   Dari(i) dan (ii) maka $a = (a^{-1})^{-1}$

   Selanjutnya akan dibuktikan dalil de Morgan (bagian ii)

$$(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = e$$
$$(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1}$$
$$= a \circ e \circ a^{-1}$$
$$= a \circ a^{-1}$$
$$= e$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = (a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1}$ kanselasi kiri berlaku pada grup maka$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ (Dummit dan Foote, 1991).

2.2.3 Grup Dihedral

Definisi 5

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n adalah anggota bilangan bulat positif, $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah asosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

1) $1, r, r2, \dots, r\ n-1$
2) $|s| = 2,$
3) $S \neq r^i$ untuk semua i,
4) $sr^i \neq sr^i$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$.

Jadi

$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

Yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k s^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n - 1$.

5) $sr = r^{-1}s$,

6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991).

Sifat-sifat tersebut digunakan untuk mempermudah penghitungan dihedral.

Contoh:

Dari bentuk $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$, dapat diketahui dihedral-6 adalah $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan tabel cayley diperoleh sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	s
r^2	r^2	1	r	sr	s	sr
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.2 sr dikomposisikan dengan s maka akan menghasilkan r^2 dengan perhitungan sebagai berikut:

$sr\,s = r^{-1}s\,s$

$= r^2 1$

$= r^2$

2.2.4 Konjugasi Pada Grup

Definisi 6

Diberikan G adalah grup non komutatif (non Abelian). Untuk $h, g \in G$, terdapat $x \in G$ sedemikian hingga $g = x\, h\, x^{-1}$, maka disebut g dan h adalah saling konjugasi (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Definisi 7

Diberikan G merupakan grup non komutatif $[a] = \{b \in G \mid a$ dan b saling konjugasi satu sama lain$\}$. $[a]$ disebut kelas konjugasi dari G (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Contoh:

Tentukan kelas konjugasi dari grup Dihedral-6 $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

Jawab:

Kelas konjugasi dari grup Dihedral-6 $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, karena $r^3 = 1$ adalah identitas grup Dihedral-6(D_6) maka $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$,

1. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi.

   Ambil $g = 1$ dan $h = 1 \in D_6$, pilih $x = 1 \in D_6$ maka

   $g = x\, h\, x^{-1}$

   $1 = 1\, 1\, 1^{-1}$

   $1 = 1\, 1$

   $1 = 1$

   Berdasarkan definisi 3, $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $1 = 1\, 1\, 1^{-1}$. Sehingga kelas konjugasi [1] adalah $\{1\}$.

2. Akan ditunjukan bahwa $g = r$ dan $h = r^2$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r$ dan $h = r^2 \in D_6$, pilih $x = s \in D_6$ maka

$g = x\,h\,x^{-1}$

$r = s\,r^2 s^{-1}$

$r = sr^2\,s$

$r = r$

Berdasarkan definisi 3, r dan r^2 saling konjugasi, karena ada x yaitu $s \in D_6$ yang memenuhi $r = s\,r^2\,s^{-1}$, maka terbentuk kelas konjugasi $[r] = \{r, r^2\}$ di mana r dan r^2 saling konjugasi.

3. Akan ditunjukkan bahwa s, sr dan sr^2 saling konjugasi.

   a) Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi.

      Ambil $g = s$ dan $h = sr \in D_6$, pilih $x = r^2 \in D_6$ maka

      $g = x\,h\,x^{-1}$

      $s = r^2\,sr\,(r^2)^{-1}$

      $s = sr^2\,r$

      $s = s$

      Berdasarkan definisi 3, s dan sr saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_6$ yang memenuhi $s = r^2\,sr\,(r^2)^{-1}$.

   b) Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi.

      Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2 \in D_6$ maka

      $g = x\,h\,x^{-1}$

      $sr = r^2\,sr^2\,(r^2)^{-1}$

      $sr = s\,r$

      $sr = sr$

      Berdasarkan definisi 3, s dan sr saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_6$ yang mengetahui $sr = r^2\,sr^2\,(r^2)^{-1}$.

c) Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = s$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = s \in D_6$, pilih $x = r^2 \in D_6$ maka

$g = x\,h\,x^{-1}$

$sr^2 = r^2\,s\,(r^2)^{-1}$

$sr^2 = sr\,r$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, s dan sr^2 saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_6$ yang memenuhi $sr = r^2\,sr^2\,(r^2)^{-1}$.

Dari a, b, dan c dapat terbentuk kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, sr^2\}$ di mana $s, sr,$ dan sr^2 saling konjugasi. Dari 1, 2, dan 3 maka kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral-6 (D_6) adalah:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{r, r^2\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$

2.3 Matriks

2.3.1 Definisi Matriks

Definisi 8

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad [2 \quad 1 \quad 0], \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad [4]$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sehingga ukurannya adalah 3×2. Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran $1 \times 3, 2 \times 2, 1 \times 1$ (Anton & Rorres, 2004).

2.3.2 Operasi Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka $A + B$ adalah:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-4) & 1 + 3 & 0 + 5 \\ -1 + 2 & 0 + 2 & 2 + 0 \\ 4 + 3 & -2 + 2 & 7 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah suatu matriks dan C adalah suatu skalar, maka hasil kali (product) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka 2A adalah

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \\ 2\times(-1) & 2\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah matriks $m \times n$ dan B adalah matriks $n \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan (Anton & Rorres, 2004).

2.3.3 Macam-Macam Matriks

Definisi 9

Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Jika terdapat B matriks $n \times n$, seperti $AB = I = BA$, di mana I adalah matriks identitas $n \times n$, maka disebut $inverse$ dari A, dan A disebut $invertible$. Matriks $invertible$ juga dapat disebut sebagai $nonsingular$ (Janin dan Gunawadena, 2004).

Catatan:

Inverse dari matriks A dinotasikan dengan A^{-1} (tidak dengan $1/A$).

Definisi 10

Identitas matriks adalah matriks persegi yang memiliki 1 pada diagonal utama, dan 0 untuk yang lain (Ron dan David, 2009).

Jika ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi 11

Matriks persegi adalah matriks di mana banyaknya baris dan banyaknya kolom sama. Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen kecuali diagonal utama adalah nol. Matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nolndisebut matriks segitiga atas, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (Anton dan Rorres, 2004).

Definisi 12

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A, dinyatakan dengan A^T. Didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan pertukaran baris dan kolom dari A, kolom kedua adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh:

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Maka A^T adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 13

Suatu matriks persegi A disebut matriks simetri jika tersebut sama dengan transposnya $(A) = A^T$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.3.4 Matriks *Laplace*

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dikonversi menjadi $|V| = n$ dan $|E| = m$. Jadi G adalah graf dengan n titik dan m sisi.

Matriks *laplace* dari G adalah matriks $L(G) = D(G) - A(G)$. Dengan $D(G)$ adalah diagonal matriks dimana entrinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ adalah matriks Adjacency graf G (Biyikoglu, dkk, 2009).

Contoh:

Diketahui graf konjugasi sebagai berikut:

Gambar 2.2 Graf Konjugasi Grup Dihedral-6 (D_6)

Matriks *laplace* dari graf tersebut adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk graf konjugasi D_6 dengan graf tersebut menghasilkan matriks *laplace* yaitu sebagai berikut:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Determinan

Definisi 14

Determinan matriks persegi $A = |A|$ atau $\det A$ adalah jumlah semua perkalian elementer matriks A. Bila inversnya genap tanda +, bila inversnya ganjil tanda – (Gazali, 2005).

Hasil kali elementer jika A adalah matriks $n \times n$, maka hasil kali elementer dari matriks A adalah perkalian dari unsur-unsur yang berasal dari baris dan kolom yang berbeda dari matriks A.

Contoh:

Diberikan matriks:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Maka determinan dari A adalah $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Definisi 15

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det(A) dinamakan determinan (A).

Determinan A sering ditulis secara simbol:

$$\det(A) = \sum \pm \ a_{1j1}\, a_{2j2} \ \dots \ a_{njn}$$

Determinan A juga dapat dinyatakan dengan tanda Δ (delta) atau $|A|$.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = (5)(-1)(-2) + (2)(0)(4) + (3)(0)(0) - (3)(-1)(4)$$

$$-(2)(0)(-2) - (5)(0)(0)$$

$$= 10 + 12$$

$$= 22$$

2.3.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen merupakan nilai karakteristik suatu matriks. Nilai eigen merupakan bilangan real yang berarti dapat bernilai nol, negatif, dan juga positif. Sekara sederhana, nilai eigen merupakan nilai yang mempresentasikan suatu matriks dalam perkalian dengan suatu vektor.

Definisi 16

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari $x; Ax = \lambda x$ untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton & Rorres, 2004).

Teorema

Misalkan A matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen jika dan hanya jika:

Det$(A - \lambda I) = 0$, di mana I notasi dari matriks $n \times n$ (Jain & Gunawardena, 2004).

Menurut Anton & Rorres (2004), untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $Ax = \lambda Ix$ sebagai:

$$Ax = \lambda Ix$$

Atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada selesaian tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan di atas akan mempunyai selesaian tak nol jika dan hanya jika det$(\lambda I - A)x = 0$. Persamaan A dan skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Tentukan nilai eigen dari:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Kemudian diperoleh persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigennya adalah:

$\lambda = 4$, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$, dan $\lambda = 2 - \sqrt{3}$.

2.3.7 Gauss Eliminasi Dan Gauss Jordan

Dalam Anton & Rorres (2004), suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi (*reduced row-echelon form*) jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu di kelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Suatu matriks yang mempunyai sifat-sifat 1, 2 dan 3 dikatakan berada dalam bentuk eselon baris (*row-echelon form*).

Bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Ubahlah matriks A berikut sehingga menjadi matriks berbentuk eselon baris tereduksi!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Letakkan kolom paling kiri (garis vertikal) yang seluruhnya tidak terdiri dari nol.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Kolom tak nol paling kiri

Langkah 2. Pertukarkanlah baris atas dengan baris lain jika perlu untuk membawa entri tak nol ke atas kolom yang diperoleh dalam langkah 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dan baris kedua dalam matriks terdahulu dipertukarkan

Langkah 3. Jika entri yang sekarang ada di atas kolom yang diperoleh dalam langkah1 adalah a kalikanlah baris pertama tersebut dengan $\frac{1}{a}$ untuk memperoleh 1 utama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Baris pertama matriks terdahulu dikalikan dengan $\frac{1}{2}$

Langkah 4. Tambahkanlah kelipatan yang sesuai dari baris atas pada baris-baris yang di bawah sehingga semua entri di bawah 1 utama menjadi nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

-2 kali baris pertama dari matriks terdahulu akan ditambahkan pada baris

Langkah 5. Sekarang tutuplah baris atas dalam matriks tersebut dan mulailah sekali lagi dengan langkah 1 yang diterapkan pada submatriks yang masih sisa. Teruskanlah dengan cara ini sampai entri matriks tersebut berada dalam bentuk-bentuk eselon baris.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dalam submatriks dikalikan dengan $\frac{1}{2}$ untuk mendapatkan 1 utama.

Kolom tak nol paling kiri dalam submatriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

-5 kali baris pertama submatriks ditambahkan ke baris kedua dari submatriks untuk mendapatkan nol di bawah 1 utama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris atas dalam submatriks ditutupi dan kembali sekali lagi ke langkah 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Kolom tak nol paling kiri dalam submatriks yang baru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Baris pertama (dan hanya baris pertama) dalam submatriks yang baru dikalikan dengan 2 untuk mendapatkan 1 utama.

Entri matriks tersebut berada dalam bentuk eselon baris. Untuk mencari bentuk eselon baris tereduksi diperlukan langkah tambahan berikut.

Langkah 6. Dengan memulai dari baris tak nol terakhir dan bekerja ke arah atas, tambahkanlah kelipatan yang sesuai dari sekian baris pada baris-baris di atas untuk mendapatkan nol di atas 1 utama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\frac{7}{2}$ kali baris ketiga dari matriks terdahulu ditambahkan pada baris kedua.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-6 kali baris ketiga ditambah baris pertama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5 kali baris kedua ditambahkan ke baris pertama.

Prosedur di atas untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi yang dinamakan eliminasi gauss Jordan. Jika hanya menggunakan lima langka pertama, prosedur untuk menghasilkan eselon baris tersebut dinamakan eliminasi gauss.

2.4 Polinomial Karakteristik

2.4.1 Definisi Polinomial Karakteristik

Definisi 17

Polinomial $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ disebut polynomial karakteristik. Akar dari $p(\lambda) = 0$ adalah nilai eigen dari A (Demmel, 1997).

Contoh:

Misal $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

Akar dari $p(\lambda) = 0$ adalah -1 dan 2, sehingga nilai eigennya adalah -1 dan 2.

2.5 Spektrum Graf

Definisi 18

Spektrum dari graf berhingga Γ didefinisikan dengan spektrum dari matriks adjacency A yang merupakan himpunan dari nilai eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai eigen tersebut (Brouwer dan Haemers, 2010).

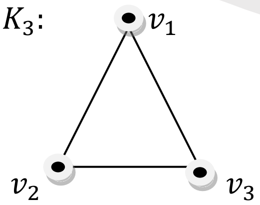
Misalkan $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\delta-1}$ adalah nilai eigen berbeda dari A, dengan $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_{\delta-1}$, dan misalkan $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_{\delta-1})$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\delta-1}$ pada baris pertama dan $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_{\delta-1})$ pada baris kedua disebut spektrum graf G, dan menotasikannya dengan Spec(G). Jadi spektrum graf G dapat ditulis dengan

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{\delta-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \ldots & m(\lambda_{\delta-1}) \end{bmatrix}$$

Contoh:

Untuk menentukan spektrum suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungannya sebagai berikut:

K_3:



$$A(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertama akan ditentukan nilai eigen dari A menggunakan persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$. Diperoleh:

$$det\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

Diperoleh vektor eigen:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_3\\ x_3\\ x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 2$.

Untuk $\lambda_2 = 1$, maka

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal, yaitu:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Diperoleh vektor eigen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$.

2.6 Kewajiban Meningkatkan Keilmuan

Al-Quran merupakan kitab suci bagi umat Islam. Selain sebagai kitab suci, al-Quran juga merupakan sumber hukum utama dalam ajaran agama Islam. Al-Quran merupakan sumber dari berbagai macam ilmu pengetahuan. Salah satunya yaitu ilmu matematika yang terdapat dalam beberapa kitab suci al-Quran. Dalam ilmu pengetahuan, terdapat integrasi al-Quran dan matematika salah satunya yaitu surat al-Mujaadillah/58:11.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ
لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ
دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

“Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan” (QS. al-Mujaadillah/58:11).

Allah Swt. berfirman dalam surat al-Mujaadilah/58:11 yang artinya “Hai orang-orang beriman, apabila dikatakan kepadamu, “berlapang-lapanglah dalam majelis” maka lapangkanlah, niscaya Allah Swt. akan meninggikan derajatnya orang-orang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan”.

Menurut tafsir Jalalyn yang berbunyi “(Hai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepada kalian, “berlapang-lapanglah) berluas-luaslah (dalam majelis”) yaitu majelis tempat Nabi Muhammad Saw. Berada, dan majelis dzikir sehingga orang-orang yang datang kepada kalian dapat tempat duduk. Menurut suatu *qiraat* lafal *al-majaalis* dibaca *al-majlis* dalam bentuk mufrad (maka lapangkanlah, niscaya Allah Swt. akan memberi kelapangan untuk kalian) di surga nanti (dan apabila dikatakan, “berdirilah kalian”) untuk melakukan shalat dan hal-hal lainnya yang termasuk amal-amal kebaikan (maka berdirilah) menurut *qiraat* lainnya kedua-duanya dibaca *fansyuzuu* dengan memakai harakat damah pada huruf *syin*-Nya (niscaya Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kalian) karena ketaatannya dalam hal tersebut (dan) Dia meninggikan pula (orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat) di surga nanti. (Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kalian kerjakan).

Ayat di atas merupakan tuntunan akhlak yang menyangkut dalam suatu majlis. Allah berfirman; “Hai orang-orang beriman, apabila dikatakan kepada kamu” oleh siapapun “berlapang-lapanglah” yakni berupayalah dengan sungguh-sungguh walau dengan memaksakan diri untuk memberi tempat orang lain dalam majelis-majelis yakni satu tempat. Apabila diminta kepada kamu untuk melakukan itu, maka lapangkanlah tempat itu untuk orang lain dengan suka rela. Jika kamu melakukan hal tersebut, niscaya Allah Swt. akan melapangkan segala sesuatu buat kamu dalam hidup ini. Dan apabila dikatakan berdirilah kamu ke tempat yang lain atau untuk melakukan sesuatu seperti untuk shalat dan berjihad, maka berdirilah dan bangkitlah Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu wahai yang memperkenankan tuntunan ini dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat kemuliaan di dunia dan akhirat dan Allah Swt. terhadap apa yang kamu kerjakan sekarang dan masa datang Maha Mengetahui.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai keunikan dalam sifat, pemahaman, bahkan mempunyai bahasa sendiri yang membutuhkan keterampilan khusus untuk mengubah bahasa matematika menjadi lebih mudah untuk dipahami. Matematika mempunyai sifat yang luas yang tidak akan pernah selesai dipelajari dan akan menghasilkan suatu penemuan-penemuan baru, teorema-teorema baru, pola-pola baru, dan juga pendapat baru (Wijaya, 2011).

Meskipun sukar untuk menentukan definisi yang tepat tentang matematika, namun pada dasarnya terdapat sifat-sifat yang mudah dikenali pada matematika. Ciri khas matematika yang tidak dimiliki pengetahuan lain adalah (a) merupakan abstraksi dari dunia nyata, (b) menggunakan bahasa simbol, dan (c) menganut pola pikir deduktif.

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Abstraksi secara bahasa berarti proses pengabstrakan. Abstraksi sendiri dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan jalan memusatkan perhatian pada sifat yang umum dari berbagai objek dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Untuk menyatakan hasil abstraksi, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Penggunaan bahasa simbol mempunyai dua keuntungan yaitu sederhana dan universal yang berarti bahwa ahli matematika di belahan bumi manapun akan dapat memahaminya.

Dalam ilmu matematika terdapat cabang teori graf. Teori graf merupakan cabang ilmu yang mempelajari sifat-sifat graf. Secara informal, graf merupakan himpunan benda-benda yang disebut simpul (*vertex* atau *node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik yang dihubungkan oleh garis-garis atau garis berpanah. Suatu sisi banyak struktur yang dapat direpresentasikan dengan graf dan banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan bantuan graf sendiri. Sebuah struktur graf dapat dikembangkan dengan memberi bobot pada setiap sisi. Pada graf maka pasangan-pasangan ini merupakan pasangan terurut. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang dibutuhkan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada pembahasan kali ini mengenai spektrum *laplace* graf konjugasi yang terbentuk dari grup dihedral berdasarkan tabel cayley.

3.1 Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral

Seperti yang kita ketahui bahwa grup dihedral adalah merupakan grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan. Dan di sini grup dihedral akan dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

1. $x = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi
2. $y = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian refleksi atau dapat dituliskan sebagai $x \subset D_{2n}$ dan $y \subset D_{2n}$.

Hasil operasi komposisi pada grup dihedral akan diberikan dalam bentuk tabel cayley.

3.1.1 Kelas-Kelas Konjugasi dari Grup Dihedral-6 $(\boldsymbol{D_6})$

Dihedral-6 $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan tabel cayley diperoleh sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	s
r^2	r^2	1	r	sr	s	sr
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2

sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel cayley 3.1 dapat diketahui kelas-kelas konjugasi dihedral-6 $(D_6) = \{r, r^2, r^3, s, sr, sr^2\}$ dengan $g, h \in D_6$, di mana terdapat $x \in D_6$, sedemikian hingga $g = x\,h\,x^{-1}$ adalah sebagai berikut:

4. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi.

   Ambil $g = 1$ dan $h = 1 \in D_6$, pilih $x = 1 \in D_6$ maka

   $g = x\,h\,x^{-1}$

   $1 = 1\;1\;1^{-1}$

   $1 = 1\;1$

   $1 = 1$

   Berdasarkan definisi 3, $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $1 = 1\;1\;1^{-1}$. Sehingga kelas konjugasi [1] adalah $\{1\}$.

5. Akan ditunjukan bahwa $g = r$ dan $h = r^2$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r$ dan $h = r^2 \in D_6$, pilih $x = s \in D_6$ maka

   $g = x\,h\,x^{-1}$

   $r = s\,r^2 s^{-1}$

   $r = sr^2\,s$

   $r = r$

   Berdasarkan definisi 3, $g = r$ dan $h = r^2$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $s \in D_6$ yang memenuhi $r = s\,r^2\,s^{-1}$, maka terbentuk kelas konjugasi $[r] = \{r, r^2\}$ di mana r dan r^2 saling konjugasi.

6. Akan ditunjukkan bahwa s, sr dan sr^2 saling konjugasi.

   d) Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi.

      Ambil $g = s$ dan $h = sr \in D_6$, pilih $x = r^2 \in D_6$ maka

      $g = x\, h\, x^{-1}$

      $s = r^2\, sr\, (r^2)^{-1}$

      $s = sr^2\, r$

      $s = s$

      Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_6$ yang memenuhi $s = r^2\, sr\, (r^2)^{-1}$.

   e) Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi.

      Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2 \in D_6$ maka

      $g = x\, h\, x^{-1}$

      $sr = r^2\, sr^2\, (r^2)^{-1}$

      $sr = s\, r$

      $sr = sr$

      Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_6$ yang mengetahui $sr = r^2\, sr^2\, (r^2)^{-1}$.

   f) Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = s$ saling konjugasi.

      Ambil $g = sr^2$ dan $h = s \in D_6$, pilih $x = r^2 \in D_6$ maka

      $g = x\, h\, x^{-1}$

      $sr^2 = r^2\, s\, (r^2)^{-1}$

      $sr^2 = sr\, r$

      $sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = s$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_6$ yang memenuhi $sr = r^2\, sr^2\, (r^2)^{-1}$.

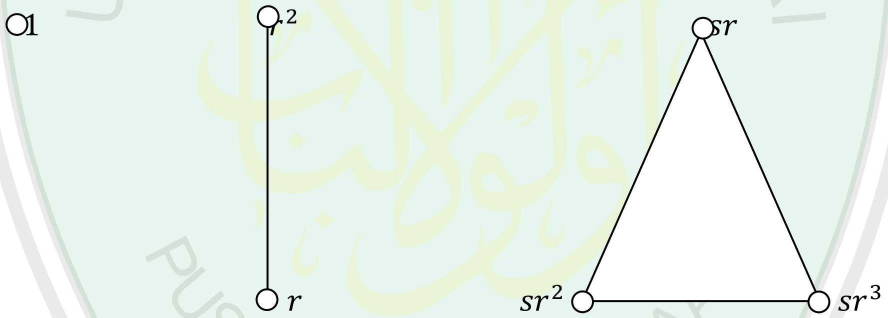
Dari a, b, dan c dapat terbentuk kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, sr^2\}$ di mana $s, sr,$ dan sr^2 saling konjugasi. Dari 1, 2, dan 3 maka kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral-6 (D_6) adalah:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{r, r^2\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$

Dari kelas-kelas konjugasi grup dihedral-6 (D_6) tersebut dapat digambarkan graf konjugasi sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Konjugasi Grup Dihedral-6 (D_6)

Untuk graf konjugasi D_6 dengan graf tersebut menghasilkan matriks *laplace* yaitu sebagai berikut:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *laplace*, maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det $(L - \lambda\, I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Karena $\det(L - \lambda I)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga di atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^6 - 8\lambda^5 + 21\lambda^4 - 18\lambda^3$$

atau

$$\lambda^3(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$$

sehingga, nilai eigennya dapat diperoleh:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_1 = 2, \qquad \lambda_1 = 3$$

Selanjutnya, akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$ disubtitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$ sebanyak 2.

Jadi spektrum *laplace* untuk graf konjugasi $D_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6.1.2 Kelas-Kelas Konjugasi dari Grup Dihedral-10 (D_{10})

Dihedral-10 $(D_{10}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dengan tabel cayley diperoleh sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cauley Grup Dihedral-10 (D_{10})

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	sr	sr^2	sr^3	sr^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	sr	sr^2	sr^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	sr	sr^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	sr
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.2 dapat diketahui kelas-kelas konjugasi dihedral-10 $(D_{10}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dengan $g, h \in D_{10}$, di mana terdapat $x \in D_{10}$, sedemikian hingga $g = x\, h\, x^{-1}$ adalah sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi.

   Ambil $g = 1$ dan $h = 1 \in D_{10}$, pilih $x = 1 \in D_{10}$ maka

   $g = x\, h\, x^{-1}$

   $1 = 1\ 1\ 1^{-1}$

   $1 = 1\ 1$

$1 = 1$

Berdasarkan definisi 3, $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $1 \in D_{10}$ yang memenuhi $1 = 1\,1\,1^{-1}$, sehingga kelas konjugasi [1] adalah $\{1\}$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $g = r$ dan $h = r^4$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r$ dan $h = r^4 \in D_{10}$, pilih $x = sr \in D_{10}$ maka

   $g = x\, h\, x^{-1}$

   $r = sr\, r^4\, sr^{-1}$

   $r = s\, sr$

   $r = r$

   Berdasarkan definisi 3, $g = r$ dan $h = r^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $sr \in D_{10}$ yang memenuhi $r = sr\, r^4\, sr^{-1}$, sehingga terbentuk kelas konjugasi $[r] = \{r, r^4\}$ di mana r dan r^4 saling konjugasi.

3. Akan ditunjukkan bahwa $g = r^2$ dan $h = r^3$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r^2$ dan $h = r^3 \in D_{10}$, pilih $x = s \in D_{10}$ maka

   $g \;\; = x\, h\, x^{-1}$

   $r^2 = s\, r^3\, s^{-1}$

   $r^2 = sr^3\, s$

   $r^2 = r^2$

   Berdasarkan definisi 3, $g = r^2$ dan $h = r^3$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $s \in D_{10}$ yang memenuhi $r^2 = s\, r^3\, s^{-1}$, sehingga terbentuk kelas konjugasi $[r^2] = \{r^2, r^3\}$ di mana r^2 dan r^3 saling konjugasi.

4. Akan ditunjukkan bahwa s, sr, sr^2, sr^3 dan sr^4

   a. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi.

      Ambil $g = s$ dan $h = sr \in D_{10}$, pilih $x = r^3 \in D_{10}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r^3\, sr\, (r^3)^{-1}$

$s = sr^3\, r^2$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^3 \in D_{10}$ yang memenuhi $s = sr^3\, sr\, (r^3)^{-1}$.

b. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi.

Ambil $g = s$ dan $h = sr^2 \in D_{10}$, pilih $x = r \in D_{10}$ maka

$g = x\, h\; x^{-1}$

$s = r\, sr^2\, (r)^{-1}$

$s = sr\, r^4$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{10}$ yang memenuhi $s = r\, sr^2\, (r)^{-1}$.

c. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi.

Ambil $g = s$ dan $h = sr^3 \in D_{10}$, pilih $x = r^4 \in D_{10}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r^4\, sr^3\, (r^4)^{-1}$

$s = sr^4\, r$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{10}$ yang memenuhi $s = r^4\, sr^3\, (r^4)^{-1}$.

d. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2 \in D_{10}$, pilih $x = r^3 \in D_{10}$ maka

$g \ = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r^3\, sr^2\, (r^3)^{-1}$

$sr = sr^4\, r^2$

$sr = sr$

$g \ = c = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^3 \in D_{10}$ yang memenuhi $sr = r^3\, sr^2\, (r^3)^{-1}$.

e. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^3 \in D_{10}$, pilih $x = r \in D_{10}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r\, sr^2\, (r)^{-1}$

$s = sr\, r^4$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{10}$ yang memenuhi $s = r\, sr^2\, (r)^{-1}$.

f. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^4 \in D_{10}$, pilih $x = r^4 \in D_{10}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r^4\, sr^4\, (r^4)^{-1}$

$sr = s\, r$

$sr = sr$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{10}$ yang memenuhi $sr = r^4\, sr^4\, (r^4)^{-1}$.

g. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = sr^3 \in D_{10}$, pilih $x = r^3 \in D_{10}$ maka

$g \quad = x\, h\, x^{-1}$

$sr^2 = r^3\, sr^3\, (r^3)^{-1}$

$sr^2 = s\, r^2$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi, karena x yaitu $r^3 \in D_{10}$ yang memenuhi $sr^2 = r^3\, sr^3\, (r^3)^{-1}$.

h. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = sr^4 \in D_{10}$, pilih $x = r \in D_{10}$ maka

$g \quad = x\, h\, x^{-1}$

$sr^2 = r\, sr^4\, (r)^{-1}$

$sr^2 = sr^3\, r^4$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{10}$ yang memenuhi $sr^2 = r\, sr^4\, (r)^{-1}$.

i. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^3$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^3$ dan $h = sr^4 \in D_{10}$, pilih $x = r^3 \in D_{10}$ maka

$g \quad = x\, h\, x^{-1}$

$sr^3 = r^3\, sr^4\, (r^3)^{-1}$

$sr^3 = sr\, r^2$

$sr^3 = sr^3$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^3$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^3 \in D_{10}$ yang memenuhi $sr^3 = r^3\, sr^4\, (r^3)^{-1}$.

j. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^4$ dan $h = s$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^4$ dan $h = s \in D_{10}$, pilih $x = r^3 \in D_{10}$ maka

$g \quad = x\, h\, x^{-1}$

$sr^4 = r^3\, s\, (r^3)^{-1}$

$sr^4 = sr^2\, r^2$

$sr^4 = sr^4$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^4$ dan $h = s$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^3 \in D_{10}$ yang memenuhi $sr^4 = r^3\, s\, (r^3)^{-1}$.

Dari 1, 2, 3 dan 4 maka kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral-10 (D_{10}) adalah:

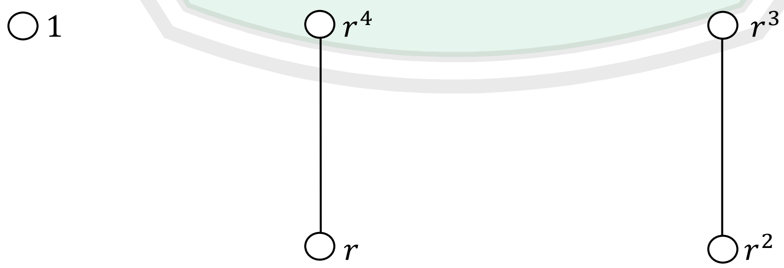
$[1] \quad = \{1\}$

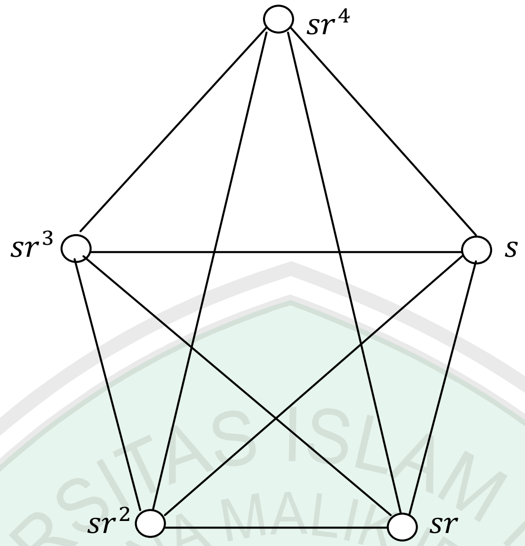
$[r] \quad = \{r, r^4\}$

$[r^2] = \{r^2, r^3\}$

$[s] \quad = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Dari kelas konjugasi grup dihedral-10 (D_{10}) tersebut dapat digambarkan graf konjugasi sebagai berikut:





Gambar 3.2 Graf Konjugasi Grup Dihedral-10 (D_{10})

Untuk graf konjugasi D_{10} dengan graf tersebut menghasilkan matriks *laplace* yaitu sebagai berikut:

$L \quad = D - A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *laplace*, maka akan dicari nilai eigen dan vaktor eigen dari matriks-matrikas tersebut:

Det $(L - \lambda\, I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Karena $\det(L - \lambda I)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga di atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^{10} - 24\lambda^9 + 234\lambda^8 - 1180\lambda^7 + 3225\lambda^6 - 4500\lambda^5 + 2500\lambda^4$$

atau

$$\lambda^4(\lambda-2)^2(\lambda-5)^4$$

Sehingga, nilai eigennya dapat diperoleh:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 5$$

Selanjutnya, akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4-0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4-0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4-0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 4. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4-2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 2. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 5$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4-5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4-5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 5$ sebanyak 4.

Jadi spektrum *laplace* untuk graf konjugasi $D_{10} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

6.1.3 Kelas-Kelas Konjugasi Dari Grup Dihedral-14 (D_{14})

Dihedral-14 $(D_{14}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$.

Dengan tabel cayley diperoleh sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral-14 (D_{14})

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan Tabel 3.3 dapat diketahui kelas konjugasi dihedral-14 $(D_{14}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$ dengan $g, h \in D_{14}$, di mana terdapat $x \in D_{14}$, sedemikian sehingga $g = x\, h\, x^{-1}$ adalah sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi.

   Ambil $g = 1$ dan $h = 1 \in D_{14}$, pilih $x = 1 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$1 = 1\, 1\, 1^{-1}$

$1 = 1\, 1$

$1 = 1$

Berdasarkan definisi 3, $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $1 \in D_{14}$ yang memenuhi $1 = 1\, 1\, 1^{-1}$, sehingga kelas konjugasi [1] adalah $\{1\}$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $g = r$ dan $h = r^6$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r$ dan $h = r^6 \in D_{14}$, pilih $x = s \in D_{14}$ maka

   $g = x\, h\, x^{-1}$

   $r = s\, r^6\, s^{-1}$

   $r = sr^6\, s$

   $r = r$

   Berdasarkan definisi 3, $g = r$ dan $h = r^6$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $s \in D_{14}$ yang memenuhi $r = s\, r^6\, s^{-1}$, maka terbentuk kelas konjugasi $[r] = \{r, r^6\}$ di mana r dan r^6 saling konjugasi.

3. Akan ditunjukkan bahwa $g = r^2$ dan $h = r^5$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r^2$ dan $h = r^5 \in D_{14}$, pilih $x = s \in D_{14}$ maka

   $g\ = x\, h\, x^{-1}$

   $r^2 = s\, r^5\, (s)^{-1}$

   $r^2 = sr^5\, s$

   $r^2 = r^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = r^2$ dan $h = r^5$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $s \in D_{14}$ yang memenuhi $r^2 = s\, r^5\, (s)^{-1}$, maka terbentuk kelas konjugasi $[r^2] = \{r^2, r^5\}$ di mana r^2 dan r^5 saling konjugasi.

4. Akan ditunjukkan bahwa $g = r^3$ dan $h = r^4$ saling konjugasi.

   Ambil $g = r^3$ dan $h = r^4 \in D_{14}$, pilih $x = s \in D_{14}$ maka

   $g \;\; = x\, h\, x^{-1}$

   $r^3 = s\, r^4\, (s)^{-1}$

   $r^3 = sr^4\, s$

   $r^3 = r^3$

   Berdasarkan definisi 3, $g = r^3$ dan $h = r^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $s \in D_{14}$ yang memenuhi $r^3 = s\, r^4\, (s)^{-1}$, maka terbentuk kelas konjugasi $[r^3] = \{r^3, r^4\}$ di mana r^3 dan r^4 saling konjugasi.

5. Akan ditunjukkan bahwa $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$ dan sr^6 saling konjugasi.

   a. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi.

      Ambil $g = s$ dan $h = sr \;\in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

      $g = x\, h\, x^{-1}$

      $s = \; r^4\, sr\, (r^4)^{-1}$

      $s = sr^4\, r^3$

      $s = s$

      Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{14}$ yang memenuhi $s = \; r^4\, sr\, (r^4)^{-1}$.

   b. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi.

      Ambil $g = s$ dan $h = sr^2 \in D_{14}$, pilih $x = r \in D_{14}$ maka

      $g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r\, sr^2\, (r)^{-1}$

$s = sr\, r^6$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi, karena da x yaitu $r \in D_{14}$ yang memenuhi $s = r\, sr^2\, (r)^{-1}$.

c. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi.

Ambil $g = s$ dan $h = sr^3 \in D_{14}$, pilih $x = r^5 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r^5\, sr^3\, (r^5)^{-1}$

$s = sr^5\, r^2$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi, karena x yaitu $r^5 \in D_{14}$ yang memenuhi $s = r^5\, sr^3\, (r^5)^{-1}$.

d. Akan ditunjukkan bahwa $g = s$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = s$ dan $h = sr^4 \in D_{14}$, pilih $x = r^2 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r^2\, sr^4\, (r^2)^{-1}$

$s = sr^2\, r^5$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_{14}$ yang memenuhi $s = r^2\, sr^4\, (r^2)^{-1}$.

e. Akan ditunjukkan bahwa bahwa $g = s$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi.

Ambil $g = s$ dan $h = sr^5 \in D_{14}$, pilih $x = r^6 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$s = r^6\, sr^5\, (r^6)^{-1}$

$s = sr^6\, r$

$s = s$

Berdasarkan definisi 3, $g = s$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^6 \in D_{14}$ yang memenuhi $s = r^6\, sr^5\, (r^6)^{-1}$.

f. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2 \in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r^4\, sr^2\, (r^4)^{-1}$

$sr = sr^5\, r^3$

$sr = sr$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^2$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^3 \in D_{14}$ yang memenuhi$sr = r^4\, sr^2\, (r^4)^{-1}$.

g. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^3 \in D_{14}$, pilih $x = r \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r\, sr^3\, (r)^{-1}$

$sr = sr^2\, r^6$

$sr = sr$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{14}$ yang memenuhi $sr = r\, sr^3\, (r)^{-1}$.

h. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^4 \in D_{14}$, pilih $x = r^5 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r^5\, sr^4\, (r^5)^{-1}$

$sr = sr^6\, r^2$

$sr = sr$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^5 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr = r^5\, sr^4\, (r^5)^{-1}$.

i. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^5 \in D_{14}$, pilih $x = r^2 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r^2\, sr^5\, (r^2)^{-1}$

$sr = sr^3\, r^5$

$sr = sr$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr = r^2\, sr^5\, (r^2)^{-1}$.

j. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^6 \in D_{14}$, pilih $x = r^6 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr = r^6\, sr^6\, (r^6)^{-1}$

$sr = sr^3\, r^5$

$sr = sr$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^6 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr = r^6\, sr^6\, (r^6)^{-1}$.

k. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = sr^3 \in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^2 = r^4\, sr^3\, (r^4)^{-1}$

$sr^2 = sr^6\, r^3$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = sr^3$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^2 = r^4\, sr^3\, (r^4)^{-1}$.

l. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = sr^4 \in D_{14}$, pilih $x = r \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^2 = r\, sr^4\, (r)^{-1}$

$sr^2 = sr^3\, r^6$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^2 = r\, sr^4\, (r)^{-1}$.

m. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = sr^5 \in D_{14}$, pilih $x = r^5 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^2 = r^5\, sr^5\, (r^5)^{-1}$

$sr^2 = s\, r^2$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^5 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^2 = r^5\, sr^5\, (r^5)^{-1}$.

n. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^2$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^2$ dan $h = sr^6 \in D_{14}$, pilih $x = r^2 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^2 = r^2\, sr^6\, (r^2)^{-1}$

$sr^2 = sr^4\, r^5$

$sr^2 = sr^2$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^2$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^2 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^2 = r^2\, sr^6\, (r^2)^{-1}$.

o. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^3$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^3$ dan $h = sr^4 \in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^3 = r^4\, sr^4\, (r^4)^{-1}$

$sr^3 = s\, r^3$

$sr^3 = sr^3$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^3$ dan $h = sr^4$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^3 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^3 = r^4\, sr^4\, (r^4)^{-1}$.

p. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^3$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^3$ dan $h = sr^5 \in D_{14}$, pilih $x = r \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^3 = r\, sr^5\, (r)^{-1}$

$sr^3 = sr^4\, r^6$

$sr^3 = sr^3$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^3$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^3 = r\, sr^5\, (r)^{-1}$.

q. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^3$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^3$ dan $h = sr^6 \in D_{14}$, pilih $x = r^5 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^3 = r^5\, sr^6\, (r^5)^{-1}$

$sr^3 = sr\, r^2$

$sr^3 = sr^3$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^3$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^5 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^3 = r^5 sr^6\, (r^5)^{-1}$.

r. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^4$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^4$ dan $h = sr^5 \in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^4 = r^4\, sr^5\, (r^4)^{-1}$

$sr^4 = sr\, r^3$

$sr^4 = sr^4$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^4$ dan $h = sr^5$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^4 = r^4\, sr^5\, (r^4)^{-1}$.

s. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^4$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^4$ dan $h = sr^6 \in D_{14}$, pilih $x = r \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^4 = r\, sr^6\, (r)^{-1}$

$sr^4 = sr^5\, r^6$

$sr^4 = sr^4$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^4$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^4 = r\, sr^6\, (r)^{-1}$.

t. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^5$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^5$ dan $h = sr^6 \in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

$g = x\, h\, x^{-1}$

$sr^5 = r^4\, sr^6\, (r^4)^{-1}$

$sr^5 = sr^2\, r^3$

$sr^5 = sr^5$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^5$ dan $h = sr^6$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^5 = r^4\, sr^6\, (r^4)^{-1}$.

u. Akan ditunjukkan bahwa $g = sr^6$ dan $h = s$ saling konjugasi.

Ambil $g = sr^6$ dan $h = s \in D_{14}$, pilih $x = r^4 \in D_{14}$ maka

$g \quad = x\, h\, x^{-1}$

$sr^6 = r^4\, s\, (r^4)^{-1}$

$sr^6 = sr^3\, r^3$

$sr^6 = sr^6$

Berdasarkan definisi 3, $g = sr^6$ dan $h = s$ saling konjugasi, karena ada x yaitu $r^4 \in D_{14}$ yang memenuhi $sr^6 = r^4\, s\, (r^4)^{-1}$.

Sehingga terbentuk kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$, di mana $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5,$ dan sr^6 saling konjugasi.

Dari 1, 2, 3, 3 dan 5 maka kelas-kelas konjugasi dari dihedral-14 (D_{14}) adalah:

$[1] \ = \{1\}$

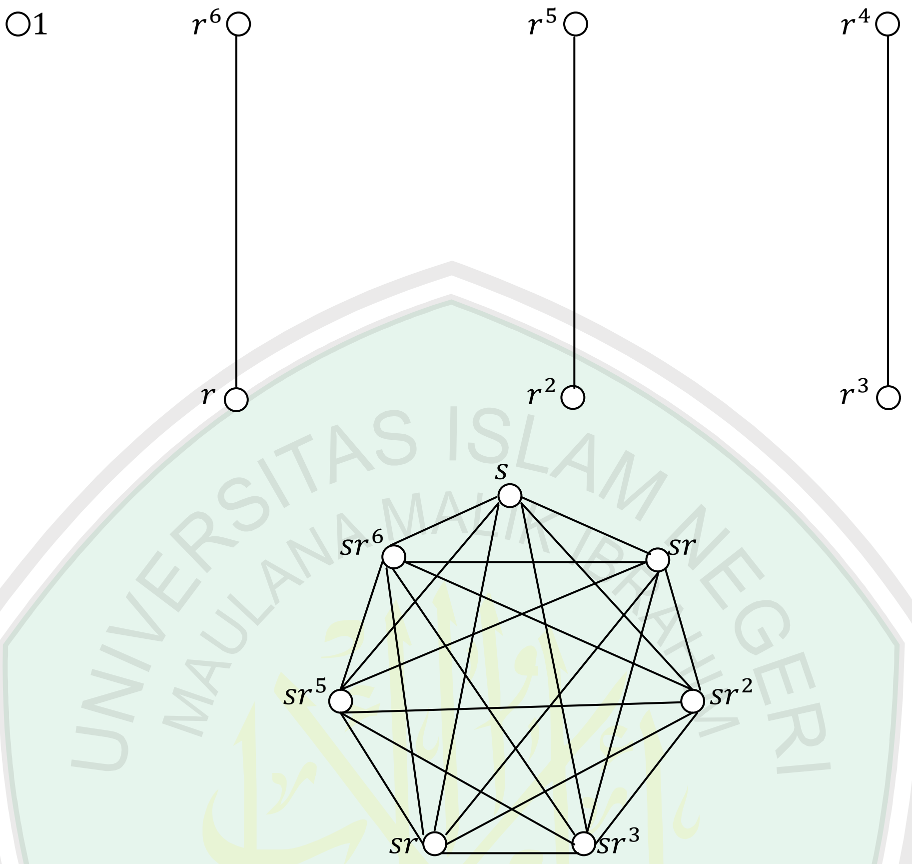
$[r] \ = \{r, r^6\}$

$[r^2] = \{r^2, r^5\}$

$[r^3] = \{r^3, r^4\}$

$[s] \ = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Dari kelas-kelas konjugasi grup dihedral-14 (D_{14}) tersebut dapat digambarkan graf konjugasi sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Konjugasi Grup Dihedral-14 (D_{14})

Untuk graf konjugasi D_{14} dengan graf tersebut menghasilkan matriks *laplace* yaitu sebagai berikut:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&6&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&6&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&6&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&6&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&6&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&6&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *laplace*, maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

$\det(L - \lambda I) = 0$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6
\end{bmatrix}\right.
$$

$$
\left. - \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) = 0
$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= 0$$

Karena $\det(L - \lambda I)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga di atas, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^{14} - 48\lambda^{13} + 999\lambda^{12} - 11782\lambda^{11} + 86331\lambda^{10} - 405132\lambda^{9} + 1209761\lambda^{8} - 2204118\lambda^{7} + 2218524\lambda^{6} - 941192\lambda^{5}$$

atau

$$\lambda^5(\lambda - 2)^3(\lambda - 7)^6$$

Sehingga nilai eigennya dapat diperoleh:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 7$$

Selanjutnya, akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6-0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6-0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6-0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\left(\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6
\end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 5. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1-2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6-2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6-2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6-2 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-2
\end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4
\end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 7$ disubstitusikan ke dalam $\det(L - \lambda I) = 0$ maka akan diperoleh:

$$\left(\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6-7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6-7 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6-7 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-7 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan dengan menggunakan *software maple* 17, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 7$ sebanyak 6.

Jadi spektrum *laplace* untuk graf konjugasi $D_{12} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Tabel 3.4 Pola Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi

No.	Graf Konjugasi	Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi
1.	Graf Konjugasi D_6	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
2.	Graf Konjugasi D_{10}	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
3.	Graf Konjugasi D_{14}	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Dari Tabel 3.4 dapat disimpulkan bahwa bentuk umum polinomial spektrum *laplace* graf konjugasi D_{2n} untuk n ganjil $n \geq 3$ adalah:

$$D_{2n} = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{pmatrix} \qquad , n = 3, 5, 7, \dots \dots$$

Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.1

Spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil adalah:

$$Spec_L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{pmatrix}$$

Bukti:

Missal $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral order $2n$, dengan n ganjil.

Maka 1 hanya berkonjugasi dengan dirinya sendiri

Unsur r saling konjugasi dengan r^{n-1}

Unsur r^2 saling konjugasi dengan r^{n-2}

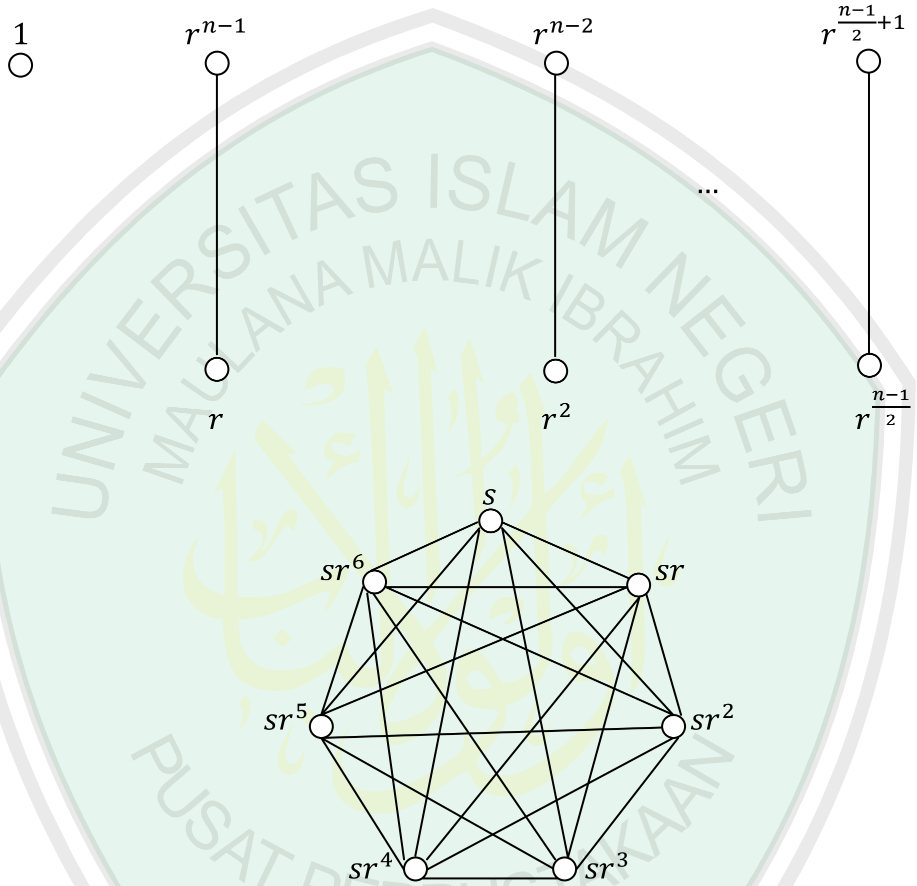
Unsur r^3 saling konjugasi dengan r^{n-3}

$\vdots$

Unsur $r^{\frac{n-1}{2}}$ saling konjugasi dengan $r^{\frac{n-1}{2}+1}$

Unsur sr^i saling berkonjugasi dengan $sr^j, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1$

Sehingga graf konjugasi dari D_{2n} adalah:



Gambar 3.4 Graf Komplit

Sehingga diperoleh untuk matriks derajat

$$
D = \begin{array}{c}
 \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

dan matriks *adjacency*

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

maka diperoleh

$L = (D - A)$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Persamaan karakteristik dari L adalah:

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^{\frac{n+3}{2}}(\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n)^{n-1} = 0$$

Maka nilai eigen dari L adalah:

$$\lambda_1 = n, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 0$$

Untuk $\lambda_1 = n$ setelah disubstitusikan ke $L(D_{2n}) - \lambda_i I$, dan diperoleh matriks eselon baris dengan $n - 1$ baris yang nol. Jadi $\lambda_1 = n$ mempnyai multiplisitas sebanyak $n - 1$. Untuk $\lambda_2 = 2$ setelah disubstitusikan ke $L(D_{2n}) - \lambda_i I$, akan diperoleh matriks eselon baris dengan $\frac{n-1}{2}$ baris yang nol. Untuk $\lambda_2 = 2$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n-1}{2}$. Untuk $\lambda_3 = 0$ setelah disubstitusikan ke $L(D_{2n}) - \lambda_i I$, diperoleh matriks eselon baris dengan n baris yang nol. Untuk $\lambda_3 = 0$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n+3}{2}$.

Jadi,

$$spec_L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{bmatrix}$$

3.2 Peranan Peningkatan Keilmuan Terhadap Penyelesaian Masalah

Al-Quran merupakan kitab suci bagi umat Islam. Selain sebagai kitab suci, al-Quran juga merupakan sumber hukum utama dalam ajaran agama Islam. Al-Quran merupakan sumber dari berbagai macam ilmu pengetahuan. Salah satunya yaitu ilmu matematika yang terdapat dalam beberapa kitab suci al-Quran. Dalam ilmu pengetahuan, terdapat integrasi al-Quran dan matematika salah satunya yaitu surat al-Mujaadillah/58:11.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ
لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ
دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

"Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan." (QS. al-Mujaadillah/58:11).

Allah Swt. berfirman dalam surat al-Mujaadilah/58:11 yang artinya “Hai orang-orang beriman, apabila dikatakan kepadamu, “berlapang-lapanglah dalam majelis” maka lapangkanlah, niscaya Allah Swt. akan meninggikan derajatnya orang-orang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan”.

Menurut tafsir Jalalyn yang berbunyi “(Hai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepada kalian, “berlapang-lapanglah) berluas-luaslah (dalam majelis”) yaitu majelis tempat Nabi Muhammad Saw. berada dalam majelis dzikir sehingga orang-orang yang datang kepada kalian dapat tempat duduk. Menurut suatu qiraat lafal al-majaalis dibaca al-majlis dalam bentuk mufrad (maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untuk kalian) di surga nanti (dan apabila dikatakan, “berdirilah kalian”) untuk melakukan shalat dan hal-hal lainnya yang termasuk amal-amal kebaikan (maka berdirilah) menurut *qiraat* lainnya kedua-duanya dibaca *fansyuzuu* dengan memakai harakat *damah* pada huruf *syin*-Nya (niscaya Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kalian) karena ketaatannya dalam hal tersebut (dan) Dia meninggikan pula (orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat) di surga nanti. (Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kalian kerjakan).

Ayat di atas merupakan tuntunan akhlak yang menyangkut dalam suatu majlis. Allah Swt. berfirman “Hai orang-orang beriman, apabila dikatakan kepada kamu” oleh siapapun “berlapang-lapanglah” yakni berupayalah dengan sungguh-sungguh walau dengan memaksakan diri untuk memberi tempat orang lain dalam majelis-majelis yakni satu tempat. Apabila diminta kepada kamu untuk melakukan itu, maka lapangkanlah tempat itu untuk orang lain dengan suka rela. Jika kamu melakukan hal tersebut, niscaya Allah Swt. akan melapangkan segala sesuatu untuk kamu dalam hidup ini. Dan apabila dikatakan berdirilah kamu ke tempat yang lain atau untuk melakukan sesuatu seperti untuk shalat dan berjihad, maka berdirilah dan bangkitlah Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu wahai yang memperkenankan tuntunan ini dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat kemuliaan di dunia dan akhirat dan Allah Swt. terhadap apa yang kamu kerjakan sekarang dan masa datang Maha Mengetahui.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai keunikan dalam sifat, pemahaman, bahkan mempunyai bahasa sendiri yang membutuhkan keterampilan khusus untuk mengubah bahasa matematika menjadi lebih mudah untuk dipahami. Matematika mempunyai sifat yang luas yang tidak akan pernah selesai dipelajari dan akan menghasilkan suatu penemuan-penemuan baru, teorema-teorema baru, pola-pola baru, dan juga pendapat baru (Wijaya, 2011).

Meskipun sukar untuk menentukan definisi yang tepat tentang matematika, namun pada dasarnya terdapat sifat-sifat yang mudah dikenali pada matematika. Ciri khas matematika yang tidak dimiliki pengetahuan lain adalah (a) merupakan abstraksi dari dunia nyata, (b) menggunakan bahasa simbol, dan (c) menganut pola pikir deduktif.

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Abstraksi secara bahasa berarti proses pengabstrakan. Abstraksi sendiri dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan jalan memusatkan perhatian pada sifat yang umum dari berbagai objek dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Untuk menyatakan hasil abstraksi, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang diguanakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Penggunaan bahasa simbol mempunyai dua keuntungan yaitu sederhana dan universal berarti bahwa ahli matematika di belahan bumi manapun akan dapat memahaminya. Dalam al-Quran dijelaskan

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلۡأَرۡضِ جَمِيعًا مِّنۡهُۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأٓيَٰتٖ لِّقَوۡمٖ يَتَفَكَّرُونَ ١٣

"Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir." (QS. al-Jaatsiyah/45:13).

Menurut tafsir Jalalyn yang berbunyi "(Dan Dia menundukkan untuk kalian apa yang ada di langit) berupa matahari, bulan, bintang-bintang, air hujan dan lain-lainnya (dan apa yang ada di bumi) berupa binatang-binatang, pohon-pohonan, tumbuh-tumbuhan, sungai-sungai dan lain-lainnya. Maksudnya, Dia menciptakan semuanya untuk dimanfaatkan oleh kalian (semuanya), lafal *jamii'an* ini berkedudukan menjadi *Taukid*, atau mengukuhkan makna lafal sebelumnya (dari-Nya) lafal *Minhu* ini menjadi Hal atau kata keterangan keadaan, maksudnya semuanya itu ditundukkan oleh-Nya (Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda kekuasaan dan keesaan Allah Swt. bagi kaum yang berfikir) mengenainya, karena itu lalu mereka beriman. Dalam suatu hadis dikatakan bahwa

إرحم من فى الأرض يرحمك من فى السّماء

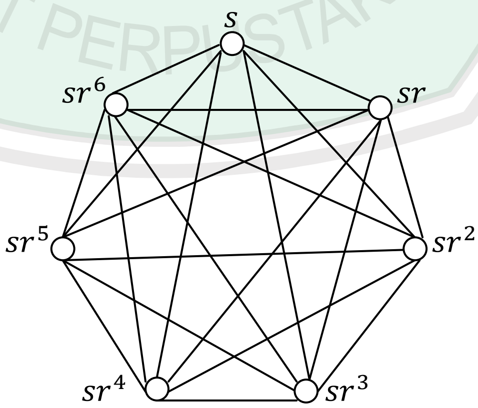
“Sayangilah makhluk yang ada dibumi, niscaya yang ada dilangit akan menyayangimu”. (hadits *shahih,* riwayat ath-thabrani dalam *al-mu’jam al-kabir*). Hadits ini menjelaskan akan keutamaan sifat kasih sayang, yang selayaknya setiap mukmin berhiasi diri dengan akhlak yang mulia ini. Penjelasan hadits ini ada dalam redaksi lain, di mana Rasulullah bersabda: ‘Orang-orang penyayang, pasti disayangi Allah Swt. Maka sayangilah setiap penduduk bumi, niscaya engkau akan di sayangi oleh penghuni langit, yakni para malaikat” (HR Abu Daud).

Apabila Allah Swt. mencintai seorang hamba, Dia akan memanggil Jibril, seraya berkata “Sungguh Aku mencintai fulan, maka cintailah ia”. Jibrilpun bergegas dengan serta merta mencintainya, dan berseru dengan lantang pada penghuni langit “Allah mencintai si fulan, maka cintailah ia..!!!” Penghuni langitpun seketika itupun mencintainya. Setelah itu dibumi, ia pun di cintai manusia”. (HR Muslim).

Abu Hurairah *radhiyallahu ‘anhu* berkata” Rasulullah Saw. memegang tanganku dan bersabda: “Allah Swt. *‘azza wa jalla* menciptakan tanah pada hari sabtu, menciptakan gunung pada hari ahad, menciptakan pepohonan (tumbuhan) pada hari senin, menciptakan yang dibenci (keburukan) pada hari selasa, menciptakan cahaya pada hari rabu, memperkembangbiakkan hewan-hewan pada hari kamis, menciptakan Adam AS setelah asar hari jum’at pada akhir ciptaan, di saat akhir hari jum’at antara asar sampai malam”.

Dalam ilmu matematika terdapat cabang teori graf. Teori graf merupakan cabang ilmu yang mempelajari sifat-sifat graf. Secara informal, graf merupakan himpunan benda-benda yang disebut simpul (*vertex* atau *node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik yang dihubungkan oleh garis-garis atau garis berpanah. Suatu sisi banyak struktur yang dapat direpresentasikan dengan graf dan banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan bantuan graf sendiri. Sebuah struktur graf dapat dikembangkan dengan memberi bobot pada setiap sisi. Pada graf maka pasangan-pasangan ini merupakan pasangan terurut. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang dibutuhkan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

Menurut matematika di dalam surat al-Jaatsiyah ayat 13 dan hadits di atas terdapat kata-kata “Allah Swt. menciptakan semuanya termasuk air hujan, bulan, bintang dan lain-lain itu termasuk komplit. Dan untuk dimanfaatkan secara bersama-sama oleh kita semua termasuk graf. Jadi graf komplit adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*Adjacency*), sehingga graf komplit akan memiliki derajat yang sama seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.5 Graf Komplit

Pada Gambar 3.5 titik-titik yang ada dimisalkan sebagai air hujan, bulan, bintang dan lain-lain itu termasuk komplit dan untuk dimanfaatkan secara bersama-sama oleh semua manusia termasuk graf maka terbentuklah sebuah graf komplit.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang terdapat pada bab III mengenai spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral bilangan ganjil, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil adalah:

$$spec_L(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian mengenai spektrum *laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} pada n ganjil. Penelitian selanjutnya dapat mencari teorema-teorema baru dari berbagai macam spektrum lainnya dan graf selain graf konjugasi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N.N. dan Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Anton, H. & Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Biyikoglu. T., Leydold, J., Stadler, P.F.. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs.* Berlin: Springer.

Brouwer, A.E. & Haemers, W.H.. 2010. *Spectra of Graphs Theory and Aplication*. New York: London Academic Press.

Dummit, D.S. & Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Fatkiyah, L. 2010. *Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: UIN Maliki Malang.

Gazali, W. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Jain, S.K. & Gunawardena, A.D.. 2004. *Linear Algebra an Interactive Approach*. Australia: Thomson Learning.

Kandasamy, V. dan Smarandache, F. 2009. *Groups As Graphs*. Romania: Editura Cuart.

Ron dan David. 2009. *Elementary Linear Algebra*. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Sutarno, H., Priatna, N., dan Nurjanah. 2005. *Matematika Diskrit*. Malang: Universitas Negeri Malang.

Wijaya, B.T. 2011. *Spektrum Detour Graf m-Partisi Komplit*. Skripsi. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

1. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks adjacency graf konjugasi dari grup dihedral-6 (D_6)

```
> restart;
with(linalg);
A := matrix(6, 6, [-lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - lambda, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - lambda, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 2 - lambda, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 2 - lambda, -1, 0, 0, 0, -1, -1, 2 - lambda, ]);
```

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

```
L := det(A);
```

$$\lambda^6 - 8\lambda^5 + 21\lambda^4 - 18\lambda^3$$

```
factor(L);
```

$$\lambda^3 (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$$

```
B := matrix(6, 6, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 2, -1,
  0, 0, 0, -1, -1, 2, ]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
jordan(B);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
eigenvals(B);
```

$$2, 3, 3, 0, 0, 0$$

$C := matrix(6, 6, [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2-2, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 2-2, -1, 0, 0, 0, -1, -1, 2-2,]);$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$jordan(C);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$E := matrix(6, 6, [-3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, -1, 0, 0, 0, 0, -1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1,]);$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$jordan(E);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks adjacency graf konjugasi dari grup dihedral-10 (D_{10})

> *restart*;
with(*linalg*);

A := *matrix*(10, 10, [−lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 − lambda, −1, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 4 − lambda, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, 4 − lambda, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, 4 − lambda, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, 4 − lambda]);

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

L := *det*(A);

$$\lambda^{10} - 24\lambda^9 + 234\lambda^8 - 1180\lambda^7 + 3225\lambda^6 - 4500\lambda^5 + 2500\lambda^4$$

factor(L);

$$\lambda^4 (\lambda - 2)^2 (\lambda - 5)^4$$

B := *matrix*(10, 10, [−0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 − 0, −1, −1 −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 4 − 0, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, 4 − 0, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, 4 − 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, 4 − 0]);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$jordan(B);$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&5&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&5&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5 \end{bmatrix}$$

$eigenvals(B);$

$$2, 2, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 0, 0$$

$C := matrix(10, 10, [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 - 2, -1, -1 -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4 - 2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 4 - 2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 4 - 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 4 - 2]);$

$$\begin{bmatrix} -2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&2&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&2&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&-1&2&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&2 \end{bmatrix}$$

$jordan(C);$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{bmatrix}$$

$E := matrix(10, 10, [-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-5, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-5, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4-5, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4-5, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 4-5, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 4-5, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 4-5]);$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$jordan(E);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks adjacency graf konjugasi dari grup dihedral-14 (D_{14})

restart;
with(*linalg*);

$A := matrix(14, 14, [-\text{lambda}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - \text{lambda}, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - \text{lambda}, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - \text{lambda}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - \text{lambda}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - \text{lambda}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 - \text{lambda}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 - \text{lambda}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 - \text{lambda}, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 - \text{lambda}, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 - \text{lambda}, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 - \text{lambda}, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - \text{lambda}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - \text{lambda}]);$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$L := det(A);$

$$\lambda^{14} - 48\lambda^{13} + 999\lambda^{12} - 11782\lambda^{11} + 86331\lambda^{10} - 405132\lambda^{9} + 1209761\lambda^{8} - 2204118\lambda^{7} + 2218524\lambda^{6} - 941192\lambda^{5}$$

$factor(L);$

$$\lambda^{5}(\lambda - 2)^{3}(\lambda - 7)^{6}$$

$B :=$ *matrix*(14, 14, [−0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 − 0, −1, −1, −1, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 6 − 0, −1, −1, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, 6 − 0, −1, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, 6 − 0, −1, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, 6 − 0, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, −1, 6 − 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, −1, −1, 6 − 0]);

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6
\end{bmatrix}$$

jordan(B);

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}$$

eigenvals(B);

$$2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7$$

$C := matrix(14, 14, [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 - 2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 - 2, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 - 2, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 - 2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 - 2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 2]);$

$$\begin{bmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4
\end{bmatrix}$$

$jordan(C);$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}$$

>

$E := matrix(14, 14, [-7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 - 7, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 - 7, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 - 7, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 - 7, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 - 7, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 7, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 7]);$

$$E := \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

> $jordan(E);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sukris Tri Handayani
NIM : 09610116
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	4 Februari 2016	Konsultasi Bab I	1.
2.	17 Maret 2016	Konsultasi Bab I	2.
3.	22 April 2016	Konsultasi Kajian Agama Bab I	3.
4.	27 Mei 2016	Konsultasi Bab II	4.
5.	30 Mei 2016	Konsultasi Bab III	5.
6.	1 Juni 2016	Konsultasi Bab III	6.
7.	3 Juni 2016	Konsultasi Bab I	7.
8.	6 Juni 201	Konsultasi Bab II	8.
9.	13 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab II	9.
10.	29 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab II	10.
11.	3 Juni 2016	Konsultasi Agama Bab II	11.
12.	08 Juni 2016	ACC Agama Bab I-III	12.
13.	09 Juni 2016	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 09 Juni 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

LAMPIRAN-LAMPIRAN

1. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks adjacency graf konjugasi dari grup dihedral-6 (D_6)

```
> restart;
with(linalg);
A := matrix(6, 6, [-lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - lambda, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - lambda, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 2 - lambda, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 2 - lambda, -1, 0, 0, 0, -1, -1, 2 - lambda, ]);
```

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

```
L := det(A);
```

$$\lambda^6 - 8\lambda^5 + 21\lambda^4 - 18\lambda^3$$

```
factor(L);
```

$$\lambda^3 (\lambda - 2) (\lambda - 3)^2$$

```
B := matrix(6, 6, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 2, -1,
    0, 0, 0, -1, -1, 2, ]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
jordan(B);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
eigenvals(B);
```

$$2, 3, 3, 0, 0, 0$$

$C := matrix(6, 6, [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2-2, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 2-2, -1, 0, 0, 0, -1, -1, 2-2,]);$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$jordan(C);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$E := matrix(6, 6, [-3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, -1, 0, 0, 0, 0, -1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, -1, -1,]);$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$jordan(E);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks adjacency graf konjugasi dari grup dihedral-10 (D_{10})

```
> restart;
with(linalg);

A := matrix(10, 10, [-lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1
   − lambda, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 − lambda, 0,
   0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 − lambda, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4 − lambda, -1, -1, -1, 0, 0,
   0, 0, 0, -1, -1, 4 − lambda, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 4 − lambda, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1,
   -1, -1, 4 − lambda]);
```

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

```
L := det(A);
```

$$\lambda^{10} - 24\lambda^{9} + 234\lambda^{8} - 1180\lambda^{7} + 3225\lambda^{6} - 4500\lambda^{5} + 2500\lambda^{4}$$

```
factor(L);
```

$$\lambda^{4}(\lambda-2)^{2}(\lambda-5)^{4}$$

```
B := matrix(10, 10, [-0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − 0, -1, 0, 0,
   0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 − 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4 − 0, -1, -1
   -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4 − 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 4 − 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1,
   -1, 4 − 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 4 − 0]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

jordan(*B*);

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&5&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&5&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5 \end{bmatrix}$$

eigenvals(*B*);

$$2, 2, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 0, 0$$

$C := matrix(10, 10, [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-2, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4-2, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4-2, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 4-2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 4-2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 4-2]);$

$$\begin{bmatrix} -2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&2&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&2&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&-1&2&-1\\ 0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&2 \end{bmatrix}$$

jordan(*C*);

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{bmatrix}$$

$E := matrix(10, 10, [-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-5, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-5, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4-5, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 4-5, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 4-5, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 4-5, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 4-5]);$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$jordan(E);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks adjacency graf konjugasi dari grup dihedral-14 (D_{14})

restart;
with(*linalg*);

A := *matrix*(14, 14, [-lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 − lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 − lambda, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 − lambda, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 − lambda, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 − lambda, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 − lambda, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 − lambda, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 − lambda]);

[[−λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 1 − λ, 0, 0, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 1 − λ, 0, 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 1 − λ, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, −1, 1 − λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, −1, 0, 0, 1 − λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, −1, 0, 0, 0, 0, 1 − λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 − λ, −1, −1, −1, −1, −1, −1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, 6 − λ, −1, −1, −1, −1, −1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, 6 − λ, −1, −1, −1, −1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, 6 − λ, −1, −1, −1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, 6 − λ, −1, −1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, −1, 6 − λ, −1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, −1, −1, −1, −1, −1, −1, 6 − λ]]

L := *det*(A);

$$\lambda^{14} - 48\lambda^{13} + 999\lambda^{12} - 11782\lambda^{11} + 86331\lambda^{10} - 405132\lambda^{9} + 1209761\lambda^{8} - 2204118\lambda^{7} + 2218524\lambda^{6} - 941192\lambda^{5}$$

factor(L);

$$\lambda^{5}(\lambda-2)^{3}(\lambda-7)^{6}$$

$B := matrix(14, 14, [-0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 - 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 - 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 - 0, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 - 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 - 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 - 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 0]);$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6
\end{bmatrix}$$

$jordan(B);$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}$$

$eigenvals(B);$

$$2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7$$

$$
\begin{aligned}
C := \mathit{matrix}(&14, 14, [-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&0, 0, 1 - 2, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1\\
&- 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 - 2, 0, 0,\\
&0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 - 2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 - 2, -1, -1, -1,\\
&-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 - 2, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 - 2, -1, -1,\\
&-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 - 2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 2, -1,\\
&0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 2]);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4
\end{bmatrix}
$$

$\mathit{jordan}(C);$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
$$

>

$E := matrix(14, 14, [-7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 - 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6 - 7, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 6 - 7, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 6 - 7, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 6 - 7, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 6 - 7, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 7, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 6 - 7]);$

$$E := \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

> $jordan(E);$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$