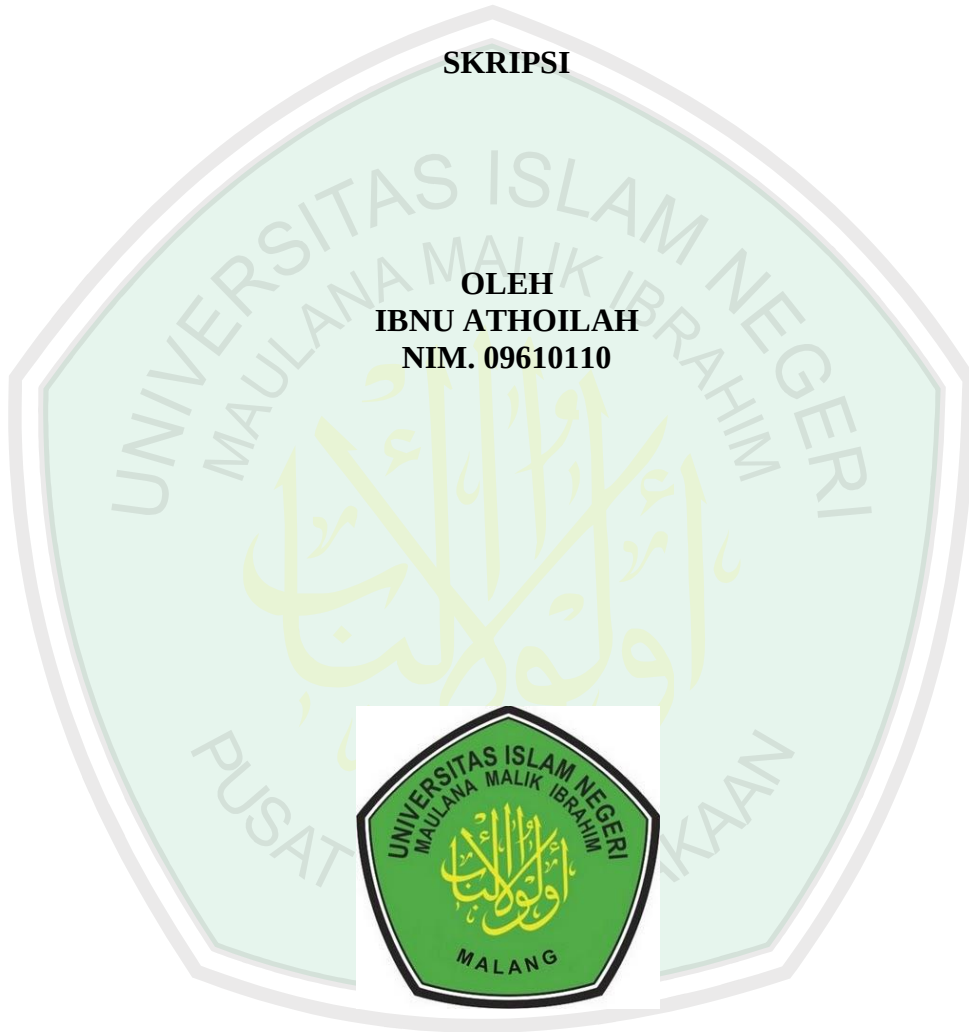


SIFAT-SIFAT RING RICKART

SKRIPSI

**OLEH
IBNU ATHOILAH
NIM. 09610110**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

SIFAT-SIFAT RING RICKART

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Ibnu Athoilah
NIM. 09610110**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

SIFAT-SIFAT RING RICKART

SKRIPSI

Oleh
Ibnu Athoilah
NIM. 09610110

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal 21 Maret 2016

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SIFAT-SIFAT RING RICKART

SKRIPSI

Oleh
Ibnu Athoilah
NIM. 09610110

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 21 April 2016

Penguji Utama : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D

Ketua Penguji : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ibnu Athoilah

NIM : 09610110

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-Sifat Ring Rickart

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Maret 2016
Yang membuat pernyataan,

Ibnu Athoilah
NIM. 09610110

MOTO

Hidup ini keras, butuh perjuangan untuk menjalaninya (Penulis).



PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, Ayah Rosano Lodi dan Ibu Ainur Rochmah, Kakak Fakhria

Itmainati dan Hidayatus Syufyan, Istri Dia Kusumawati, Teman Achmad

Wahyudi, Wahyu Pradana Setya Budi dan Achmad Albern.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah Swt yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi yang berjudul “*Sifat-Sifat Ring Rickart*” ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jaza kumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si dan Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi ini yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Ibu serta kakak penulis yang selalu memberikan do'a dan motivasi yang tiada henti kepada penulis.

7. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika tahun angkatan 2009, terima kasih atas dukungannya serta telah memberikan kenangan yang indah dan pengalaman yang tidak terlupakan.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Semoga Allah Swt senantiasa membalas kebaikan semuanya. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Maret 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
ملخص.....	xiv
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Metode Penelitian.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	5
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Operasi Biner.....	6
2.2 Grup.....	7
2.3 Sifat-sifat Grup	9
2.4 Sub Grup	14
2.5 Sifat-sifat Sub Grup.....	16
2.6 Ring	18
2.7 Sifat-Sifat Ring.....	20
2.8 Sub Ring.....	22
2.9 Ideal.....	24
2.10 Modul atas Ring	30
2.11 Kajian Ilmu Pengetahuan Menurut Al-Quran	31

BAB III PEMBAHASAN

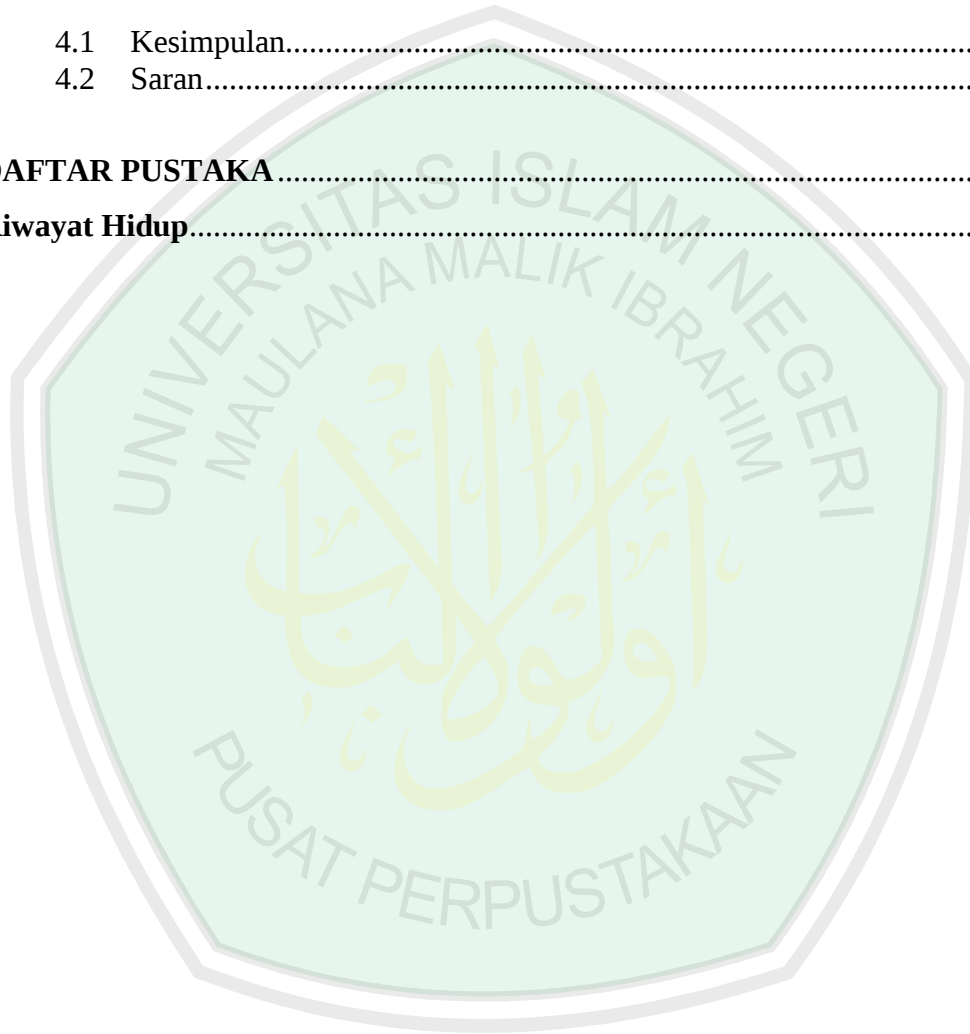
3.1	Ring Rickart	34
3.2	Sifat-sifat Ring Rickart.....	39
3.3	Proses Berpikir dalam Pengembangan Ilmu Pengetahuan	44

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	47
4.2	Saran.....	47

DAFTAR PUSTAKA	48
-----------------------------	----

Riwayat Hidup	50
----------------------------	----



ABSTRAK

Athoilah, Ibnu. 2016. **Sifat-sifat Ring Rickart**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: Ring Rickart, *corner*, *center*, *commutant*

Ring Rickart adalah ring yang annihilator kanan (kiri) setiap elemennya merupakan ideal kanan (kiri) yang dibangun oleh suatu idempoten. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui sifat-sifat ring Rickart serta menganalisa beberapa sifat-sifat ring Rickart. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji definisi-definisi dan teorema-teorema yang terkait dengan ring Rickart. Hasil dari penelitian ini adalah:

1. Jika $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart, $x \in A$, maka didefinisikan $\{x\}^l = A(1 - e)$, $\{x\}^r = (1 - f)A$ dengan e dan f idempoten dari x .
2. Setiap corner dari ring Rickart merupakan ring Rickart.
3. Center dari suatu ring Rickart merupakan ring Rickart.
4. Jika S subset ring $A(-, \cdot)$ maka S' (*commutant* S) merupakan subring di $A(-, \cdot)$.
5. Misalkan $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart, S subset $A(-, \cdot)$, $x \in S$. Jika $\{x\}^r = e \cdot A$ dengan e idempoten maka untuk setiap $s \in S$ berlaku $s \cdot e = e \cdot s \cdot e$.

ABSTRACT

Athoilah, Ibnu. 2016. **Rickart Ring Properties**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim Malang State Islamic University. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keyword: Ring Rickart, corner, center, commutant

Ring Rickart is a ring that right (respectively left) annihilator of each element is a right (respectively left) ideal built by an idempotent. This study aims to determine the properties of the ring Rickart and analyze some of the properties of the ring Rickart. This study was conducted by examining the definitions and theorems related to ring Rickart. The results from this study are:

1. If $A(-, \cdot)$ is a ring Rickart, $x \in A$, then defined $\{x\}^l = A(1 - e)$, $\{x\}^r = (1 - f)A$ with e and f idempotent of x .
2. Every corner of the ring Rickart is a ring Rickart .
3. Center of a ring Rickart is a ring Rickart.
4. If S subset ring $A(-, \cdot)$, then S' (*commutant* S) is a subring in $A(-, \cdot)$.
5. Suppose $A(-, \cdot)$ is ring Rickart, S subset $A(-, \cdot)$, $x \in S$. If $\{x\}^r = e \cdot A$ with e idempotent then for each $s \in S$ applicable $s \cdot e = e \cdot s \cdot e$.

ملخص

أطاع الله، ابن. ٢٠١٦. **Rickart Ring**. أطروحة. قسم الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالنج. المشرف (١) حير الرحمن، ماجستير في العلوم (٢) فخر الرازي، ماجستير في العلوم.

الكلمة المفتاحية: Rickart ring، مركز، قاطر، قمتان.

Rickart ring هو رينج النحلطور اليمنى (اليسرى) فى سائر جزئه الخض اليمنى (اليسرى) يبنى من العنصر. القصد لهذا البحث لمعرفة خصائص من Rickart ring و تحليل بعض صفات Rickart ring. يعمل البحث بمطالعة تعريف و نظريات التي تعلق Rickart ring. الأحاصل من البحث:

١. إذ هو Rickart ring، فيعرف مع ويخذى من.

$$\{x\}^l = A(1 - e), \{x\}^r = (1 - f)A$$

مع f و e هو العنصر من x .

٢. كل Corner من Rickart ring هي Rickart ring.

٣. rCente من Rickart ring هي Rickart ring.

٤. إذ S جزء من رينج A ف S' من جزء A .

Rickart ring، S جزء من $A(-, \cdot)$ ، إذ $\{x\}^r = e \cdot A$ مع e مستقيما مع فعل

لكل $s \in S$ تطبق $s \cdot e = e \cdot s \cdot e$. المثال. $A(-, \cdot)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika mempunyai peran penting dalam sebagian besar kehidupan. Matematika merupakan dasar perkembangan dari berbagai macam ilmu yang lain. Dengan memanfaatkan matematika, suatu masalah dapat dipahami, disederhanakan dan kemudian dipecahkan atau diselesaikan. Semakin berkembangnya zaman, semakin banyak pula ilmu yang berkembang dengan berdasarkan matematika yang selanjutnya digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan di berbagai macam bidang. Catatan dari usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan agar dapat diuraikan ke dalam dunia nyata adalah sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, al-Quran telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat, dan tugas kita sebagai manusia adalah mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam al-Quran hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah Swt. dengan firman-Nya dalam surat al-Kahfi/18:109.

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لَّكَلِمَتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنفَدَ كَلِمَتُ رَبِّي وَلَوْ

جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا ﴿١٠٩﴾

Artinya: “Katakanlah: Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis)

kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)" (QS. al-Kahfi/18: 109).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya, tidak diragukan lagi bahwa al-Quran, dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir (Pasya, 2004:5).

Ada banyak ilmu pengetahuan di alam semesta ini, salah satunya adalah ilmu sains matematika. Menurut Abdul Aziz dan Abdussakir (2006), matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami.

Sedangkan mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma ulul albab, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdussakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah Swt. dalam surat Shaad/38:29, yaitu:

كِتَابٌ أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ مُبَارَكٌ لِيَدَّبَّرُوا آيَاتِهِ وَلِيَتَذَكَّرَ أُولُوا الْأَلْبَابِ ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Ini adalah sebuah kitab yang Kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran"* (QS. Shaad/38:29)

Salah satu cabang ilmu matematika adalah struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak yang paling sederhana. Beberapa bagian dari struktur aljabar yang mengandung operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu adalah grup, ring, *field*, dan modul. Untuk himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan ring.

Menurut Hanifah (2009), ring adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian, di mana terhadap penjumlahan struktur tersebut merupakan grup abelian, terhadap perkalian struktur tersebut merupakan semigrup dan operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan. Suatu operasi biner pada himpunan tak kosong S adalah korespondensi dari pasangan berurut (a, b) dalam $S \times S$ ke c elemen dari S . Elemen c biasanya ditulis dengan $a * b$ atau $a \circ b$ dan masing-masing disebut dengan penjumlahan dan perkalian a, b . Penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat Z merupakan contoh operasi biner pada Z .

Suatu ring disebut ring Rickart apabila annihilator kanan (kiri) dari setiap elemennya merupakan ideal utama kanan (kiri) yang dibangun oleh suatu idempoten (Suparwati, 2005:5). Dari uraian yang ada di atas penulis akan membahas sifat-sifat ring Rickart dengan judul “**Sifat-Sifat Ring Rickart**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat dari ring Rickart?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian ini adalah menjelaskan sifat-sifat dari ring Rickart.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. Bagi Penulis

Diharapkan penulis dapat memahami sifat-sifat dari ring Rickart berdasarkan definisi-definisi dan teorema-teorema yang membangunnya.

b. Bagi Lembaga

Diharapkan penelitian ini dapat dijadikan tambahan materi dalam bidang studi matematika khususnya aljabar serta dapat dijadikan bahan masukan kepada peneliti lain sehingga menemukan masalah-masalah yang berkaitan dengan penelitian ini.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data dan informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini (Sarwono, 2006:26).

Adapun metode penelitian yang digunakan oleh penulis adalah sebagai berikut:

1. Menentukan literatur utama yang dijadikan sebagai acuan dalam penelitian ini yaitu buku “*Baer *-Ring*” karangan Sterling K. Berberian terbitan tahun 1972.
2. Mengumpulkan beberapa literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, dan yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan penulis pada penelitian ini tersusun atas empat bab, yaitu :

Bab I Pendahuluan

Pada bagian pendahuluan ini terdiri dari beberapa subbagian yaitu latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini berisi teori atau konsep yang menjadi acuan dari penelitian ini.

Bab III Pembahasan

Pada bagian ini berisi isi dan hasil penelitian yang berisikan penjelasan ring Rickart dan sifat-sifatnya.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dari penelitian dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Operasi Biner

Definisi 2.1.1

Misal S suatu himpunan tak kosong dan $a, b \in S$. Suatu operasi biner " $*$ " pada himpunan S merupakan pemetaan yang didefinisikan sebagai $*$: $S \times S \rightarrow S$ sehingga $*(a, b) = a * b$ dengan $(a, b) \in S \times S$, dan $a * b \in S$ untuk setiap $a, b \in S$ (Ayres dan Jaisingh, 2004:23).

Dari definisi 2.1.1 suatu operasi " $*$ " pada suatu himpunan tak kosong S dapat dikatakan operasi biner, harus dipenuhi dua kondisi, yaitu:

1. Operasi " $*$ " tertutup di S , yaitu untuk setiap $a, b \in S$ maka $a * b \in S$.
2. Operasi " $*$ " terdefinisi dengan baik pada S , yaitu untuk setiap pasangan berurutan $(a, b) \in S \times S$ dapat dioperasikan dan dipetakan dengan tepat suatu nilai $a * b$.

Contoh:

Diketahui $\mathbb{Z}$ himpunan semua bilangan bulat. Didefinisikan operasi $+$ pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat untuk setiap $a + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan operasi $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa operasi $+$ merupakan operasi yang tertutup. Sesuai dengan sifat bilangan bulat, maka penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga, sehingga $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi, terbukti operasi $+$ merupakan operasi yang tertutup.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik. Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ yaitu:

$$a * b = a + b \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

misal $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dengan $a = c$ dan $b = d$, maka harus ditunjukkan

$$a + b = c + d.$$

Karena diketahui $a = c$ dan $b = d$, maka berlaku $a * b = c * d$, sehingga

$$a + b = c + d$$

Jadi terbukti operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik, dengan demikian terbukti bahwa operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan $a * b = a + b$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Contoh:

Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a * b = \sqrt{a \cdot b}$, akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa jika $a = 1$ dan $b = 2$ maka:

$$a * b = 1 + 2 = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Jadi, operasi $*$ tidak memenuhi kondisi tertutup. Perhatikan juga bahwa jika $a = 1$ dan $b = 1$ maka berakibat $a * b = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1} = \pm 1$, jadi terdapat satu nilai a, b tetapi menghasilkan dua nilai yang berbeda yaitu 1 dan -1 , di mana $1 \neq -1$. Jadi operasi $*$ tidak memenuhi terdefinisi dengan baik, artinya operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan $a * b = \sqrt{a \cdot b}$.

2.2 Grup

Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner

yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup. Sistem aljabar $(G,*)$ dengan himpunan tidak kosong G dan operasi biner $*$. Didefinisikan di G adalah *grupoid*. *Grupoid* juga disebut semigrup jika operasi biner $*$ di G adalah assosiatif. Sedangkan semigrup yang mempunyai elemen identitas di G disebut monoid (Raisinghanian & Aggarwal, 1980:32).

Contoh:

Misalkan himpunan N adalah bilangan asli dengan operasi penjumlahan adalah semigrup, karena operasi biner di N adalah penjumlahan, maka N bersifat assosiatif. Jadi $(N,+)$ adalah semigrup. Tetapi $(N,+)$ bukan monoid, karena operasi penjumlahan tidak mempunyai identitas di N , jadi $(N,+)$ bukan grup.

Definisi 2.2.1

Karena penulis menggunakan simbol $(+)$ untuk operasi penjumlahan $(+)$ dan simbol $(\times)$ untuk operasi perkalian $(\times)$ maka untuk semua operasi penjumlahan dan operasi perkalian digantikan dengan operasi $(*)$ untuk penjumlahan, dan $(\circ)$ untuk perkalian.

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner $*$. Sistem matematika $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$ operasi $*$ bersifat assosiatif di G .
2. G mempunyai unsur identitas terhadap operasi $*$.

Misalkan I unsur di G sedemikian hingga $a * I = I * a, \forall a \in G$ maka I disebut unsur identitas.

- Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$. Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai invers dari a , sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$ sehingga I adalah unsur identitas. (Raisinghania & Aggarwal, 1980:31).

Definisi 2.2.2

Menurut Arifin (2000), sistem matematika $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi:

- Sifat asosiatif. Untuk setiap unsur a, b, c di G , berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- Unsur kesatuan. Terdapat unsur I di G yang memenuhi
$$a * I = I * a = a$$
 untuk semua unsur a di G , unsur I disebut unsur kesatuan.
- Balikan. Untuk setiap unsur a di G terdapat unsur a^{-1} di G yang memenuhi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$. Unsur a^{-1} disebut balikan unsur a .

Definisi 2.2.3

Grup $(G,*)$ dikatakan komutatif (abelian) jika untuk setiap unsur a dan b di G berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000:36).

2.3 Sifat-sifat Grup

Teorema 2.3.1

Unsur identitas dalam suatu grup adalah tunggal (Raisinghania & Aggarwal, 1980:75).

Bukti

Misalkan $(G,*)$ adalah grup

Andaikan I dan h adalah unsur identitas di G , maka $I = I * h = h$

$$\therefore I = h$$

maka berlaku:

- i. $I * h = h * I = h$ I sebagai identitas
- ii. $I * h = h * I = I$ h sebagai identitas

Karena $I * h$ dan $h * I$ adalah unsur tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat $I * h$. Ini berarti bahwa unsur identitas adalah tunggal.

Teorema 2.3.2

Setiap unsur dari suatu grup memiliki invers yang tunggal (Raisinghanian & Anggarwal, 1980:75).

Bukti

Misalkan $(G,*)$ adalah grup

andaikan invers dari $a \in G$ tidak tunggal yaitu

$$a_1^{-1} \text{ dan } a_2^{-1} \text{ dengan } a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$$

Misalkan I adalah unsur identitas di G maka berlaku

$$\begin{aligned} a_1^{-1} &= a_1^{-1} * I \\ &= a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) \\ &= (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} \\ &= I * a_2^{-1} \\ &= a_2^{-1} \end{aligned}$$

Jadi $a_1^{-1} = a_2^{-1}$.

Kontradiksi dengan pengandaian. Ini berarti bahwa setiap unsur di G memiliki invers yang tunggal di G .

Teorema 2.3.3

Invers dari invers suatu grup adalah unsur itu sendiri. Misalkan $(G,*)$ grup dan $a \in G$, maka $(a^{-1})^{-1} = a$ (Raisinghanian & Aggarwal, 1980:75).

Bukti

Misalkan $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$$

i. $a * a^{-1} = I$

$$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = I * (a^{-1})^{-1}$$

$$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$$

$$a * I = (a^{-1})^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

ii. $a^{-1} * a = I$

$$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * I$$

$$((a^{-1}) * a^{-1}) * a = (a^{-1})^{-1}$$

$$I * a = (a^{-1})^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}.$$

Teorema 2.3.4

Dalil kanselasi berlaku pada suatu grup (Raisinghanian & Aggarwal, 1980:76).

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa pada grup berlaku dalil kanselasi kiri maupun kanselasi kanan.

Misalkan $(G,*)$ adalah grup, $\forall a, b \in G$ berlaku:

- i. jika $b * a = c * a$ maka $b = c$ kanselasi kanan
- ii. jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ kanselasi kiri.

Misalkan $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ (a punya invers yaitu a^{-1} di G)

- i. $b * a = c * a$

$$(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$$

$$b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$$

$$b = c$$

- ii. $a * b = a * c$

$$a^{-1}(a * b) = a^{-1} * (a * c)$$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$

$$b = c.$$

Jadi dalil kanselasi berlaku pada sebarang grup.

Teorema 2.3.5

Jika a, b dua unsur dari suatu grup $(G,*)$, maka persamaan $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang tunggal di G (Raisinghania & Aggarwal, 1980:77).

Bukti

1. Pertama akan ditunjukkan bahwa $a * x = b$ mempunyai penyelesaian di G .

$a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ dan $a^{-1} * b \in G$.

Selanjutnya,

$$a * x = b$$

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$$

$$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$$

$$I * x = a^{-1} * b$$

$$x = a^{-1} * b \dots\dots\dots (1)$$

Persamaan (1) disubstitusikan ke persamaan $a * x = b$

$$a * x = b$$

$$a * (a^{-1} * b) = b$$

$$(a * a^{-1}) * b = b$$

$$I * b = b$$

$$b = b.$$

Jadi $a * x = b$ punya selesaian, yaitu $x = a^{-1} * b$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa selesaian tersebut adalah tunggal, andaikan $a * x = b$ memiliki selesaian tidak tunggal yaitu x_1 dan x_2 dengan $x_1 \neq x_2$.

Maka $a * x_1 = b$ dan $a * x_2 = b$

diperoleh $a * x_1 = a * x_2$

$$x_1 = x_2 \quad \text{(berdasarkan teorema 2.3.4).}$$

Kontradiksi dengan pengandaian. Ini berarti $a * x_1 = b$ mempunyai selesaian tunggal.

2. Kedua akan ditunjukkan bahwa $y * a = b$ mempunyai selesaian di G .

$a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G, b^{-1} \in G$ dan $a^{-1} * b \in G$

$$y * a = b$$

$$y * a(a^{-1}) = b * a^{-1}$$

$$y * (a * a^{-1}) = b * a^{-1}$$

$$y * I = b * a^{-1}$$

$$y = b * a^{-1} \dots\dots\dots (2)$$

Persamaan (2) disubstitusikan ke persamaan $y * a = b$

$$y * a = b$$

$$(b * a^{-1}) * a = b$$

$$b * (a^{-1} * a) = b$$

$$b * I = b$$

$$b = b.$$

Jadi $y = b * a^{-1}$ adalah penyelesaian dari $y * a = b$ di G

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa penyelesaian tersebut adalah tunggal, andaikan $y * a = b$ memiliki penyelesaian yaitu $y_1 \neq y_2$ maka,

$$y_1 * a = b \text{ dan } y_2 * a = b$$

diperoleh

$$y_1 * a = y_2 * a$$

$$y_1 = y_2$$

(berdasarkan teorema 2.3.4).

Kontradiksi dengan pengandaian. ini berarti $a * b = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

2.4 Subgrup

Definisi 2.4.1

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup. Himpunan $H \subseteq G$ disebut subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi kedua aksioma berikut:

1. H bukan merupakan himpunan kosong
2. $(H,*)$ merupakan grup

Contoh:

$(\mathbb{C}, \times)$ merupakan suatu grup, dimana $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks tanpa nol dan " $\times$ " operasi perkalian. Misal $H = \{1, -1, i, -i\}$ sub himpunan dari $\mathbb{C}$, karena:

1. H bukan merupakan himpunan kosong.

2. " $\times$ " tertutup di H , yaitu:

$$1 \times (-1) = -1 \in H$$

$$1 \times i = i \in H$$

$$1 \times (-i) = -i \in H$$

$$(-1) \times i = -i \in H$$

$$(-1) \times (-i) = i \in H$$

$$i \times (-i) = 1 \in H.$$

3. 1 merupakan unsur identitas di H terhadap operasi perkalian dan setiap elemen di H mempunyai invers, yaitu untuk $x \in H$ mengakibatkan $x^{-1} \times x = 1 \in H$:

$$(1)^{-1} = 1 \text{ karena } 1 \times 1 = 1$$

$$(-1)^{-1} = -1 \text{ karena } (-1) \times (-1) = 1$$

$$(i)^{-1} = -i \text{ karena } (-i) \times i = 1$$

$$(-i)^{-1} = i \text{ karena } i \times (-i) = 1.$$

Jadi $(H, \times)$ memenuhi kondisi grup, sehingga jelas bahwa $(H, \times)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{C}, \times)$.

2.5 Sifat-Sifat Subgrup

Teorema 2.5.1

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan H subgrup dari G , maka kedua pernyataan berikut berlaku:

1. Elemen identitas $I \in G$ juga merupakan elemen identitas pada H .
2. Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$ dengan a^{-1} merupakan invers elemen a .

Bukti

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan H subgrup dari G dengan I elemen identitas di G .

1. Andaikan terdapat $I_H \in H$, dengan $I_H * a = a * I_H = a$ untuk setiap $a \in H$. Karena $H \subseteq G$, maka untuk setiap $a \in H$ berlaku $a \in G$. Karena G merupakan grup, maka berlaku $I * a = a * I = a$, sehingga diperoleh $a * I_H = a * I$ dan menggunakan teorema kanselasi kiri diperoleh $I_H = I$. Jadi, terbukti bahwa $I \in H$.
2. Karena H merupakan grup terhadap operasi biner " $*$ " dan $I_H = I$, maka untuk setiap $a \in H$ berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I_H$. Sehingga jelas bahwa untuk setiap $a \in H$ terdapat $a^{-1} \in H$.

Teorema 2.5.2

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan $H \subseteq G$. Himpunan H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika $H \neq \emptyset$ dan untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b^{-1} \in H$, dengan b^{-1} merupakan invers elemen b (Dummit dan Foote, 2004:47).

Bukti

Karena H subgrup dari G , untuk setiap $a, b \in H$ maka menurut Teorema 2.5.1 terdapat $b^{-1} \in H$ dan dengan demikian $a * b^{-1} \in H$.

Akan ditunjukkan H merupakan subgrup dari G . Karena $H \subseteq G$ maka sifat asosiatif operasi " $*$ " pada G juga berlaku pada H . Jika dipilih $a = I$, akan diperoleh $a * b^{-1} = I * b^{-1} = b^{-1} \in H$ untuk setiap $b \in H$. Dengan demikian H memuat invers dari setiap elemennya. Jadi, terbukti bahwa H merupakan subgrup dari G .

Teorema 2.5.3

Diketahui $(G, *)$ merupakan grup dan H, K merupakan subgrup-subgrup dari G , maka $H \cap K$ juga merupakan subgrup atas G (Raisinghanian dan Aggarwal, 1980:178).

Bukti

Karena G merupakan grup dan misal I identitas di G . Karena H, K subgrup dari G , maka $I \in H$ dan $I \in K$ sehingga $I \in H \cap K \subseteq G$. Dengan demikian jelas bahwa $H \cap K \neq \emptyset$.

Ambil sebarang $a, b \in H \cap K$, akibatnya $a, b \in H$ dan $a, b \in K$. Karena H merupakan subgrup maka menurut Teorema 2.5.2 berlaku $a * b^{-1} \in H$. Karena K juga merupakan subgrup maka menurut Teorema 2.5.2 juga berlaku $a * b^{-1} \in K$. Akibatnya $a * b^{-1} \in H \cap K$, dan menurut Teorema 2.5.2 berakibat $H \cap K$ merupakan subgrup atas G .

2.6 Ring

Suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem matematika tersebut belumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (Khusniyah, 2007:37).

Definisi 2.6.1

R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $*$ dan $\circ$ (dinotasikan penjumlahan/operasi pertama dan perkalian/ operasi kedua) disebut ring jika memenuhi pernyataan berikut:

i. $(R,*)$ adalah grup tertutup

ii. $(R,*)$ adalah grup abelian

iii. Operasi $\circ$ bersifat asosiatif:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \forall a, b, c \in R$$

iii. Operasi $\circ$ bersifat distributif terhadap $*$ di R : $\forall a, b, c \in R$

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c) \quad (\text{distributif kiri})$$

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \quad (\text{distributif kanan})$$

(Dummit & M.Foot, 1991:225).

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +, \cdot)$ merupakan ring?

Jawab:

i. $(Z, +)$ adalah grup abelian karena:

a) Z tertutup terhadap operasi $(+)$

$$\forall a, b \in Z \text{ berlaku } (a + b) \in Z$$

b) Operasi (+) bersifat asosiatif di Z

$$\forall a, b, c \in Z \text{ berlaku } a + (b + c) = (a + b) + c$$

c) 0 adalah elemen identitas terhadap operasi (+) di Z

$$\forall a \in Z \text{ berlaku } a + 0 = 0 + a = a$$

d) $-a \in X$ dan $a^{-1} = -a, \forall a \in Z$

e) Operasi (+) bersifat komutatif di Z

$$\forall a \in Z \text{ berlaku } a + b = b + a.$$

ii. Operasi (+) bersifat asosiatif di Z

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c, \forall a, b, c \in R.$$

iii. Operasi ($\cdot$) bersifat distributif terhadap operasi (+)

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \forall a, b, c \in Z$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \forall a, b, c \in Z.$$

Teorema 2.6.2

Misalkan R ring. Jika $a^2 = a, \forall a \in R$ maka R merupakan ring komutatif (R disebut ring *Boole*) (Hidayanto & Irawati, 2000:9).

Bukti

Ambil sebarang $a, b \in R$, jika $a^2 = a, \forall a \in R$ maka:

$$(a * b)^2 = a^2 * (a \circ b) * (b \circ a) * b^2 \dots\dots\dots \text{aturan perkalian kuadrat}$$

$$(a * b) = a * (a \circ b) * (b \circ a) * b$$

$$0 = a \circ b * b \circ a$$

$$-(a \circ b) = b \circ a$$

$$(-a) \circ b = b \circ a.$$

Selain itu

$$(a * a)^2 = a^2 * a^2 * a^2 * a^2 \dots\dots\dots \text{aturan perkalian kuadrat}$$

$$(a * a) = a * a * a * a$$

$$0 = a * a$$

$$-a = a.$$

Karena $-a = a$ berarti $(-a) \circ b = a \circ b = b \circ a$. Sehingga terbukti $a \circ b = b \circ a, \forall a, b \in R$. Dapat disimpulkan bahwa R adalah suatu ring komutatif.

Definisi 2.6.3

Suatu ring R disebut ring Regular (ring Von Neumann) apabila untuk setiap x di R terdapat y di R sehingga $x \circ y \circ x = x$.

Definisi ring regular di atas dilatar belakangi oleh sifat *field* yang mempunyai elemen satuan, yaitu terdapat 1 di R sehingga untuk setiap a di R berlaku $a \circ 1 = 1 \circ a = a$. Sehingga,

$$a \circ a^{-1} \circ a = (a \circ a^{-1}) \circ a = 1 \circ a = a \text{ (Goodearl, 1994).}$$

2.7 Sifat-Sifat Ring

Teorema 2.7.1

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring, maka untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

$$\text{i. } I \circ a = a \circ I = I \quad (I = \text{identitas operasi } \circ)$$

$$\text{ii. } a \circ b^{-1} = a^{-1} \circ b = (a \circ b)^{-1}$$

$$\text{iii. } a^{-1} \circ b^{-1} = a \circ b$$

$$\text{iv. } (a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$$

$$\text{v. } a \circ (b \circ c^{-1}) = (a \circ b) \circ (a \circ c)^{-1}$$

$$\text{vi. } (b \circ c^{-1}) \circ a = (a \circ b) \circ (a \circ c)^{-1}$$

$$\text{vii. } i^{-1} \circ a = a^{-1} \quad (i = \text{identitas terhadap operasi kedua } \circ).$$

Bukti

i. $(a \circ I) * (a \circ I) = a \circ (I * I)$ sifat distributif

$$= a \circ I \text{..... sifat identitas}$$

$$(a \circ I) * (a \circ I) = (a \circ I) * I \text{..... sifat identitas}$$

Sehingga diperoleh bahwa $(a \circ I) = I$ hukum kanselasi

Secara analog dapat kita buktikan bahwa $I \circ a = I$

ii. $(a \circ b^{-1}) * (a \circ b) = a \circ (b^{-1} * b)$ sifat distributif

$$= a \circ I \text{..... sifat identitas}$$

$$= I \text{..... sifat (i)}$$

Karena $(a \circ b^{-1}) * (a \circ b) = I$ maka dapat diperoleh bahwa

$$(a \circ b^{-1}) = (a \circ b)^{-1}$$

atau

$$(a \circ b^{-1}) \text{ adalah invers kiri dari } (a \circ b).$$

Selanjutnya akan kita buktikan invers kanannya

Secara analog dapat kita buktikan bahwa $(a^{-1} \circ b) = (a \circ b)^{-1}$

Karena $(a \circ b^{-1}) = (a \circ b)^{-1}$ dan $(a^{-1} \circ b) = (a \circ b)^{-1}$ maka

$$a \circ b^{-1} = a^{-1} \circ b = (a \circ b)^{-1}$$

iii. $a^{-1} \circ b^{-1} = (a \circ b^{-1})^{-1}$ sifat ke (ii)

$$= [(a \circ b)^{-1}]^{-1} \text{..... sifat ke (ii)}$$

$$= (a \circ b) \text{ sifat ke (ii)}$$

iv. Karena $(a^{-1} * b^{-1}) * (a * b) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b)$... sifat komutatif

$$= b^{-1} * [(a^{-1}) * (a * b)].. \text{sifat asosiatif}$$

$$= b^{-1} * [(a^{-1} * a) * b].... \text{sifat asosiatif}$$

$$= b^{-1} * (I * b) \text{ sifat invers}$$

$$= b^{-1} * b \dots\dots\dots \text{sifat identitas}$$

$$= I \dots\dots\dots \text{sifat invers}$$

$$\text{Maka } (a^{-1} \circ b^{-1}) = (a \circ b)^{-1}$$

$$\text{v. } a \circ (b * c^{-1}) = (a \circ b) * (a \circ c^{-1}) \dots\dots\dots \text{sifat distributif}$$

$$= (a \circ b) * (a \circ c)^{-1} \dots\dots\dots \text{sifat ke (ii)}$$

$$\text{vi. } (b * c^{-1}) \circ a = (b \circ a) * (c^{-1} \circ a) \dots\dots\dots \text{sifat distributif}$$

$$= (b \circ a) * (c \circ a)^{-1} \dots\dots\dots \text{sifat ke (ii)}$$

$$\text{vii. } a * (i^{-1} \circ a) = (i \circ a) * (i^{-1} \circ a) \dots\dots\dots \text{sifat identitas operasi } *$$

$$= (i * i^{-1}) \circ a \dots\dots\dots \text{sifat distributif}$$

$$= I \circ a \dots\dots\dots \text{sifat identitas operasi } *$$

$$= I \dots\dots\dots \text{sifat ke (i)}$$

$$\text{Maka } (i^{-1} \circ a) = a^{-1} \dots\dots\dots \text{sifat ke invers}$$

2.8 Subring

Definisi 2.8.1

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring, $S \neq \emptyset$ adalah himpunan bagian dari R ($S \subseteq R$). Bila operasi yang sama dengan $(S, +, \cdot)$ membentuk suatu ring maka S disebut subring dari R .

Definisi 2.8.2

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring, S adalah himpunan bagian dari R yang disebut subring dari R , bila untuk setiap $a, b \in S$, berlaku:

1. $S \neq \emptyset$, Menyatakan bahwa bagian dari ring bukan himpunan kosong.
2. $a - b \in S$, Menyatakan bahwa $(S, +)$ adalah suatu grup komutatif.
3. $a \cdot b \in S$, Menyatakan bahwa $(S, \cdot)$ adalah semigrup.

Sehingga dapat dikatakan bahwa syarat-syarat tersebut telah memenuhi syarat dari suatu ring. Dikarenakan S adalah himpunan bagian dari $R, S \subseteq R$, maka S dapat dikatakan sebagai subring dari R .

Contoh:

Misalkan $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan suatu ring, tunjukkan bahwa $S = \{0,2\}$ adalah subring dari Z_4 .

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $S = \{0,2\}$ memenuhi syarat-syarat dari ring.

1. $S \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $S = \{0,2\}$
2. $a - b \in S$

Misalkan $0, 2 \in S$

$$2 - 0 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

$$0 - 2 = 2$$

Sehingga $0, 2 \in S$

3. $a \cdot b \in S$

Misalkan $0, 2 \in S$

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 2 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

Sehingga $0 \in S$

dari pembuktian di atas syarat 1, 2, dan 3 terpenuhi maka S adalah subring dari Z_4 (Mas'oed, 2013:104-105).

Definisi 2.8.3

Jika A adalah ring dan $e \in A$ idempoten, maka ring $e \cdot A \cdot e$ (dengan elemen satuan e) disebut *corner* dari A .

Definisi 2.8.4

Misalkan R adalah ring. Center dari ring R didefinisikan sebagai berikut:

$$C(R) = \{a \in R \mid ab = ba, \text{ untuk setiap } b \in R\}$$

Definisi 2.8.5

Jika S adalah subset dari ring $A(-, \cdot)$, maka *commutant* S pada ring $A(-, \cdot)$ didefinisikan:

$$S' = \{x \in A \mid x \cdot s = s \cdot x \text{ untuk setiap } s \in S\}$$

(Adkins dan Weintreub, 1992:111).

2.9 Ideal**Definisi 2.9.1**

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dan $(S, +, \cdot)$ adalah subring dari R disebut ideal kiri jika untuk setiap $a \in S$ dan $r \in R$ maka $ra \in S$ (Mas'ood, 2013:106).

Definisi 2.9.2

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dan $(S, +, \cdot)$ adalah subring dari R disebut ideal kanan jika untuk setiap $a \in S$ dan $r \in R$ maka $ar \in S$ (Mas'ood, 2013:106).

Definisi 2.9.3

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dan $(S, +, \cdot)$ adalah subring dari R disebut ideal jika merupakan ideal kiri dan ideal kanana untuk setiap $a \in S$ dan $r \in R$ maka $ra \in S$ dan $ar \in S$ (Mas'ood, 2013:106).

Definisi 2.9.4

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dan $S \neq \emptyset$ merupakan himpunan bagian dari $R (S \subseteq R)$ disebut ideal kiri, bila untuk setiap $a, b \in S$ dan $r \in S$ berlaku:

1. $a - b \in S$
2. $a \cdot b \in S$
3. $ra \in S$

(Mas'ood, 2013:107).

Definisi 2.9.5

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dan $S \neq \emptyset$ merupakan himpunan bagian dari $R (S \subseteq R)$ disebut ideal kanan, bila untuk setiap $a, b \in S$ dan $r \in S$ berlaku:

1. $a - b \in S$
2. $a \cdot b \in S$
3. $ar \in S$

(Mas'ood, 2013:107).

Definisi 2.9.6

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dan $S \neq \emptyset$ merupakan himpunan bagian dari $R (S \subseteq R)$ disebut ideal, bila untuk setiap $a, b \in S$ dan $r \in S$ berlaku:

1. $a - b \in S$

$$2. \ a \cdot b \in S$$

$$3. \ ra \in S \text{ dan } ar \in S$$

(Mas'ood, 2013:107).

Contoh:

Misalkan $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan suatu ring tunjukkan bahwa subring $S = \{0,2\}$ adalah suatu ideal.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa S merupakan suatu ideal, dengan membuktikan bahwa S adalah ideal kanan dan ideal kiri.

Ideal kanan:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot 3 = 2$$

S merupakan ideal kanan dari Z_4 .

Ideal kiri:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$3 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 0$$

$$3 \cdot 2 = 2$$

S merupakan ideal kiri dari Z_4 .

Jadi, S merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari Z_4 sehingga S adalah ideal dari Z_4 .

Definisi 2.9.7

Suatu ring R dengan elemen satuan disebut *division ring* jika di dalam ring R tersebut, setiap elemen yang bukan nol mempunyai invers terhadap perkalian di R . Berdasarkan definisi tersebut maka *field* merupakan *division ring* yang komutatif (Fraleigh, 1994).

Contoh:

$(Q, +, \cdot), (R, +, \cdot), (C, +, \cdot)$ merupakan contoh *division ring* sekaligus merupakan *fields*.

Contoh:

Sebarang *division ring* adalah regular, sebab jika diambil sebarang $x \in R$ maka terdapat $y \in R$ sehingga $x \cdot y = 1$, akibatnya,

$$x \cdot y \cdot x = (x \cdot y) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

Definisi 2.9.8

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, $x \in R$ disebut pembagi nol jika terdapat elemen tak nol y di R sehingga $yx = 0$. Ring komutatif R dengan elemen satuan disebut daerah integral jika R tidak mempunyai pembagi nol, kecuali nol (Bhattacharya dkk, 1977).

Definisi 2.9.9

Misalkan R ring dan $S \subset R, S \neq \emptyset$. Himpunan S disebut sub dari R jika S juga ring terhadap operasi yang sama dengan R (Bhattacharya dan Jain, 1977).

Setiap ring $R(*, \circ)$ paling tidak mempunyai dua subring, yaitu $\{0\}$ dan R yang selanjutnya disebut subring trivial.

Contoh:

1. Himpunan R, Z, C dan Q dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan ring.
2. Jika n di Z , maka himpunan $nZ = \{na | a \in Z\}$ adalah ring dengan operasi penjumlahan dan pergandaan biasa, sehingga nZ merupakan subring dari Z .

Teorema berikut menunjukkan syarat perlu dan cukup agar himpunan bagian dari suatu ring merupakan subring.

Definisi 2.9.10

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan. Ideal M di R disebut ideal maksimal jika memenuhi:

- a) $M \neq R$
- b) Untuk sebarang ideal I berlaku jika $M \subseteq I \subseteq R$ maka $I = M$ atau $I = R$

(Adkins dan Weintreub, 1992:62).

Definisi 2.9.11

Misalkan S subset dari ring R dan $S \neq \emptyset$, himpunan

$r(S) = \{x \in R | sx = 0, \forall s \in S\}$ disebut annihilator kanan dari S dan

$l(S) = \{x \in R | xs = 0, \forall s \in S\}$ disebut annihilator kiri dari S (Adkins, 1992:103).

Dari definisi di atas, jelas bahwa $0 \in r(S)$ dan juga $0 \in l(S)$, sehingga $r(S) \neq \emptyset$ dan $l(S) \neq \emptyset$.

Teorema 2.9.12

Jika S subset dari ring R dan $S \neq \emptyset$, maka $r(S)$ dan $l(S)$ adalah ideal di R .

Bukti

i. Akan dibuktikan bahwa $r(S)$ adalah ideal di R .

Diambil sebarang $k \in R$ dan

$$r_1 \in R \ni sr_1 = 0; \forall s \in S, r_2 \in R \ni sr_2 = 0; \forall s \in S,$$

sehingga,

$$a) \quad r_1 - r_2 \in R \ni s(r_1 - r_2) = sr_1 - sr_2 = 0 - 0.$$

Jadi $r_1 - r_2 \in r(S)$.

$$b) \quad s(kr_1) = k(sr_1) = k \cdot 0 = 0.$$

Jadi $kr_1 \in r(S)$.

Dari sini terbukti bahwa $r(S)$ adalah ideal di R .

ii. Akan dibuktikan bahwa $l(S)$ adalah ideal di R .

Diambil sebarang $k \in R$ dan $r_1, r_2 \in l(S)$, akan diperoleh $r_1s = 0$ dan $r_2s = 0$ sehingga,

$$a) \quad (r_1 - r_2)s = r_1s - r_2s = 0 - 0 = 0.$$

Jadi $r_1 - r_2 \in l(S)$.

$$b) \quad (Kr_1)s = (Kr_2)s = k \cdot 0 = 0$$

Jadi $kr_1 \in l(S)$.

Dari sini terbukti bahwa $l(S)$ adalah ideal di R .

Definisi 2.9.13

Misalkan R ring dengan elemen identitas. i disebut elemen idempoten jika $i^2 = i$ (Adkins dan Weintreub, 1992:98).

Untuk sebarang idempoten $i \circ f$ di R , i dan f dikatakan idempoten orthogonal jika $i \circ f = f \circ i = 0$

Definisi 2.9.14

Misalkan R dan S ring. Fungsi $f: R \rightarrow S$ disebut homomorfisma ring jika:

$$f(a * b) = f(a) * f(b); \forall a, b \in R$$

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b); \forall a, b \in R$$

(Fraleigh, 1998:257).

Homomorfisme f yang bijektif disebut isomorfisme. Sehingga f merupakan isomorfisme dari R ke S .

2.10 Modul atas Ring**Definisi 2.10.1**

Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas. Modul R kiri adalah grup abelian M yang dilengkapi dengan operasi perkalian scalar $\circ: R \times M \rightarrow M$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

Untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ berlaku,

i. $a \circ (m * n) = a \circ m * a \circ n$

ii. $(a * b) \circ m = a \circ m * b \circ m$

iii. $(a \circ b) \circ m = a \circ (b \circ m)$

iv. $1 \circ m = m$.

Secara analog didefinisikan modul R kanan adalah grup abelian M yang dilengkapi dengan pemetaan perkalian skalar $\circ: R \times M \rightarrow M$, yang memenuhi aksioma berikut:

Untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ berlaku,

- a. $(m + n) \times a = m \times a + n \times a$
- b. $m \times (a + b) = m \times a + m \times b$
- c. $m \times (a \times b) = (m \times a) \times b$
- d. $m \times 1 = m$.

Untuk selanjutnya yang dimaksud dengan modul R adalah modul R kanan (Adkins & Weintreub, 1992:107).

Definisi 2.10.2

Diketahui R ring dan M adalah modul R . Himpunan $N \subset M$ dikatakan submodul R dari M jika N adalah modul R dengan operasi yang sama pada M (Adkins & Weintreub, 1992:112).

2.11 Kajian Ilmu Pengetahuan Menurut Al-Quran

Allah menciptakan manusia dan memberi akal kepadanya tidak lain adalah agar manusia berfikir terhadap berbagai kejadian atau fenomena yang terjadi di muka bumi ini sehingga manusia mengenal berbagai macam tanda kebesaran-Nya. Allah SWT menciptakan fitrah yang bersih dan mulia itu lalu melengkapinya dengan bakat dan sarana pemahaman yang baik yang memungkinkan manusia mengetahui kenyataan-kenyataan besar di alam raya ini. Fitrah manusia mukmin mengarah ke alam raya untuk mengungkap rahasia dan tujuan penciptaannya serta berakhir dengan memahami posisi dirinya di alam raya ini dan menentukan

bagaimana ia harus berbuat dan bersikap di dalamnya. Ilmu yang diperoleh manusia semestinya dapat membuahkan penanaman akidah dan pendalaman keimanan yang tulus kepada Allah.

Jika terjadi lompatan kemajuan ilmu dan teknologi melalui penelitian terhadap gejala-gejala alam dan kehidupan, sebenarnya sangat mengherankan kalau orang-orang yang lalai itu hanya berhenti pada batas studi yang bersifat mekanis dan tidak menyeberang untuk menemukan rahasia-rahasia hukum Tuhan serta memahami hikmah di balik ciptaan-Nya. Orang yang melihat langit hanya dari warna yang biru, atau bumi dari tanahnya, ia tidak ubahnya hewan, bahkan lebih rendah dan lebih sesat (Mu'alim dan Kharisma, 2014:7).

Seperti yang difirmankan Allah dalam surat at-Taubah/9: 122, yang berbunyi:

﴿وَمَا كَانَ الْمُؤْمِنُونَ لِيَنفِرُوا كَافَّةً ۚ فَلَوْلَا نَفَرَ مِن كُلِّ فِرْقَةٍ مِّنْهُمْ طَائِفَةٌ لِّيَتَفَقَّهُوا فِي الدِّينِ وَلِيُنذِرُوا قَوْمَهُمْ إِذَا رَجَعُوا إِلَيْهِمْ لَعَلَّهُمْ يَحْذَرُونَ﴾

Artinya: “Tidak sepatutnya bagi mukminin itu pergi semuanya (ke medan perang). mengapa tidak pergi dari tiap-tiap golongan di antara mereka beberapa orang untuk memperdalam pengetahuan mereka tentang agama dan untuk memberi peringatan kepada kaumnya apabila mereka telah kembali kepadanya, supaya mereka itu dapat menjaga dirinya” (QS. at-Taubah/9: 122).

Sebagai makhluk yang diberi akal dan pikiran, manusia dituntut untuk berpikir serta menggali ilmu karena Islam sendiri telah mewajibkan untuk menuntut ilmu pengetahuan. Berbicara tentang ilmu pengetahuan dalam hubungannya dengan al-Quran, ada persepsi bahwa al-Quran itu adalah kitab ilmu pengetahuan. Sekarang ini, di saat semua teknologi sudah canggih, dunia membuktikan dengan banyaknya temuan-temuan terkini yang ternyata semuanya

sudah terdapat dalam al-Quran. Penafsiran al-Quran sendiri seolah tidak pernah selesai, karena setiap saat bisa muncul sesuatu yang baru, sehingga al-Quran terasa selalu segar karena dapat mengikuti perkembangan zaman.



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Ring Rickart

Definisi 3.1.1

Ring Rickart adalah ring yang annihilator kanan (kiri) dari setiap elemennya merupakan ideal kanan (kiri) yang dibangun oleh suatu idempoten (Berberian, 1988:1).

Jika $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart, $x \in A$, maka didefinisikan

$$\{x\}^l = A \cdot (1 - e)$$

$$\{x\}^r = (1 - f) \cdot A$$

dengan e dan f idempoten, untuk setiap subset S dari ring A ,

$$S^l = \{x \in A : x \cdot s = 0 \ (\forall s \in S)\}, S^r = \{x \in A : s \cdot x = 0 \ (\forall s \in S)\},$$

maka:

$$y \cdot x = 0 \Leftrightarrow y \cdot (1 - e) = y \Leftrightarrow y \cdot e = 0$$

$$x \cdot z = 0 \Leftrightarrow (1 - f) \cdot z = z \Leftrightarrow f \cdot z = 0$$

dengan $x^2 = 0 \Leftrightarrow f \cdot e = 0$ dan $(1 - e) \cdot x = 0 = x \cdot (1 - f)$ sehingga

$$e \cdot x = x = x \cdot f.$$

Definisi 3.1.2

Untuk idempoten e dan f dari suatu ring A dengan dalam kasus $e \in f \cdot A \cdot f$ berlaku $e \cdot f = f \cdot e = e$ (Goodearl, 1979:1).

Contoh:

Setiap ring Regular (Von Neumann) adalah ring Rickart.

Bukti

Misalkan $A(-, \cdot)$ suatu ring Regular, maka untuk setiap $x \in A$ terdapat sebarang $y \in A$ sehingga $x = x \cdot y \cdot x$.

Misalkan $e = x \cdot y$ akan diperoleh e idempoten, $x \cdot A = e \cdot A$ dan

$$\{x\}^l = \{x \cdot A\}^l = \{e \cdot A\}^l = A \cdot (1 - e)$$

Secara sama, yaitu:

misalkan $f = y \cdot x$ akan diperoleh f idempoten, $A \cdot x = A \cdot f$, dan

$$\{x\}^r = \{A \cdot x\}^r = \{A \cdot f\}^r = A \cdot (1 - f)A$$

sehingga,

$$\{x\}^{l \cdot r} = [A \cdot (1 - e)]^r = \{1 - e\}^r = e \cdot A = x \cdot A$$

dan

$$\{x\}^{r \cdot l} = [(1 - f) \cdot A]^l = \{1 - f\}^l = A \cdot f = A \cdot x.$$

Dengan kata lain $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart.

Definisi 3.1.3

Misalkan A adalah ring Rickart dan $x \in A$ sehingga:

$$\{x\}^l = A \cdot (1 - e)$$

$$\{x\}^r = (1 - f) \cdot A$$

Dengan e dan f adalah proyeksi, maka:

e dan f tunggal, dan

$$y \cdot x = 0 \Leftrightarrow y \cdot e = 0, x \cdot z = 0 \Leftrightarrow f \cdot z = 0, e \cdot x = x = e \cdot f$$

dapat dituliskan $e = LP(x)$ yang mana disebut proyeksi kiri dari x , dan

$f = RP(x)$ disebut proyeksi kanan dari x . Jadi

$$\{x\}^l = A \cdot (1 - LP(x))$$

$$\{x\}^r = A \cdot (1 - RP(x))A.$$

Teorema 3.1.4

Jika $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart, untuk suatu elemen $x \in A$ dan suatu proyeksi $g \in A$ maka:

$$g \cdot x = x \Leftrightarrow g \geq LP(x).$$

Bukti

Jika $e = LP(x)$, maka $\{x\}^l = A(1 - e)$ sehingga,

$$\begin{aligned} g \cdot x = x &\Leftrightarrow (1 - g) \cdot x = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - g \in A \cdot (1 - e) \\ &\Leftrightarrow 1 - g \leq 1 - e \\ &\Leftrightarrow e \leq g. \end{aligned}$$

Definisi 3.1.5

Untuk idempoten e dan f dari suatu ring A dengan $e \leq f$ dalam kasus $e \in (f \cdot A \cdot f)$ berlaku $e \cdot f = f \cdot e = e$ (Berberian, 1988:1).

Contoh:

Ring komutatif dengan modulo 8, $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, maka untuk $Ann\{0\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, $Ann\{1\} = \{\bar{0}\}$, $Ann\{2\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}$, $Ann\{3\} = \{\bar{0}\}$, $Ann\{4\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, $Ann\{5\} = \{\bar{0}\}$, $Ann\{6\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}$, $Ann\{7\} = \{\bar{0}\}$.

Karena M_8 adalah ring komutatif maka $Ann_l\{x\} = Ann_r\{x\}, x \in M_8$.

Dari contoh di atas dapat ditunjukkan bahwa setiap annihilator merupakan suatu ideal utama yang dibangun dari suatu idempoten. Maka ring M_8 merupakan contoh dari ring Rickart.

Untuk ring yang bukan komutatif dicontohkan ring dengan matrik 2×2 sebagai berikut:

$$M_{2 \times 2}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

Annihilator kiri dari $M_{2 \times 2}(R)$ di atas dapat ditinjau beberapa kasus, yaitu:

1. Jika $a = 0$ dan $b = 0$ maka

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = M_{2 \times 2}(R)$$

2. Jika $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} ca & cb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid ca = 0, d \in R \right\}$$

3. Jika $a = 0$ dan $b \neq 0$ maka

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} ca & cb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid cb = 0, d \in R \right\}$$

4. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} ca & cb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid ca = 0, cb = 0, d \in R \right\}$$

Annihilator kanan dari $M_{2 \times 2}(R)$ di atas dapat ditinjau dari beberapa kasus, yaitu:

1. Jika $a = 0$ dan $b = 0$ maka

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = M_{2 \times 2}(R)$$

2. Jika $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid ac = 0, d \in R \right\}$$

3. Jika $a = 0$ dan $b \neq 0$ maka

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid d \in R \right\}$$

4. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid ac = 0, ad = 0; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c = 0, d = 0; c, d \in R \right\}$$

$$Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Disini terlihat bahwa:

$$Ann_l\{M_{2 \times 2}(R)\} \neq Ann_r\{M_{2 \times 2}(R)\}$$

Hal ini memungkinkan hanya salah satu annihilator saja yang merupakan suatu ideal utama yang dibangun dari suatu idempoten.

3.2 Sifat-sifat Ring Rickart

Ring Rickart memiliki beberapa sifat, yaitu:

1. Corner

Sifat 3.2.1: Setiap *corner* dari ring Rickart merupakan ring Rickart.

Bukti

Diketahui $A(-, \cdot)$ ring Rickart dan $e \in A$ idempoten. Akan ditunjukkan bahwa $e \cdot A \cdot e$ adalah ring Rickart.

Diambil sebarang $S = \{x\} \subset e \cdot A \cdot e$. Annihilator kanan dari S di $e \cdot A \cdot e$ adalah $(e \cdot A \cdot e) \cap S^r$.

Dibentuk $S^r = f \cdot A$ dengan f idempoten. Karena $S \subset e \cdot A \cdot e$ diperoleh $1 - e \in S^r$, dan

$$1 - e = f \cdot (1 - e) = f - f \cdot e$$

Apabila kedua ruas dikalikan dengan e dari kiri, diperoleh

$$0 = e \cdot f - e \cdot f \cdot e$$

sehingga,

$$e \cdot f = e \cdot f \cdot e \in e \cdot A \cdot e.$$

Dibentuk $g = e \cdot f$, dengan g idempoten di $e \cdot A \cdot e$, akan diperoleh

$$g^2 = (e \cdot f)(e \cdot f) = (e \cdot f \cdot e)f = (e \cdot f) \cdot f = e \cdot f = g.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$(e \cdot A \cdot e) \cap S^r = g \cdot e \cdot A \cdot e.$$

Dari $S \cdot g = S \cdot (e \cdot f) = (S \cdot e) \cdot f = S \cdot f = 0$ diperoleh

$$g \cdot e \cdot A \cdot e \subset (e \cdot A \cdot e) \cap S^r \dots\dots\dots(3.1)$$

Sebaliknya, jika diambil sebarang $x \in (e \cdot A \cdot e) \cap S^r$ maka

$$x = f \cdot x = f(e \cdot x) = (f \cdot e) \cdot x = g \cdot x \in g \cdot e \cdot A \cdot e$$

oleh karena itu,

$$(e \cdot A \cdot e) \cap S^r \subset g \cdot e \cdot A \cdot e \dots\dots\dots(3.2)$$

Dari (3. 1) dan (3.2) diperoleh $(e \cdot A \cdot e) \cap S^r = g \cdot e \cdot A \cdot e$

Dengan kata lain $e \cdot A \cdot e$ adalah ring Rickart.

Menurut Definisi 3.2.1 akan diperoleh bahwa setiap corner dari ring Rickart adalah ring Rickart.

Dari sifat di atas, dapat disimpulkan bahwa menunjukkan setiap corner dari ring Rickart adalah ring Rickart ekuivalen dengan menunjukkan bahwa jika A adalah ring Rickart dan $e \in A$ idempoten maka $e \cdot A \cdot e$ adalah ring Rickart.

2. *Center*

Sifat 3.2.2: *Center* dari suatu ring Rickart merupakan ring Rickart.

Bukti

Diambil sebarang ring Rickart $A(-, \cdot)$ dengan *center* $Z(-, \cdot)$ dan $S = \{z\} \subset Z$

Dibentuk $S^r = v \cdot A$ dan $S^l = A \cdot w$, dengan v dan w idempoten.

Jika $S \subset Z$ maka:

$$S^r = S^l$$

sehingga,

$$v \cdot A = A \cdot w$$

Selanjutnya, karena

$$v \in A \cdot w$$

$$w \in v \cdot A$$

maka

$$v = w$$

Karena v dan w idempoten maka:

$$v = v \cdot w$$

dan

$$w = w \cdot v$$

maka

$$S^r = v \cdot A \cdot (1 - v)$$

$$S^l = A \cdot w \cdot (1 - w)$$

karena

$$v = w$$

maka

$$S^l = A \cdot v \cdot (1 - v)$$

karena

$$S^r = S^l = 0$$

maka

$$v \cdot A \cdot (1 - v) = A \cdot v \cdot (1 - v) = 0$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan

$$(1 - v)v \cdot A = 0$$

Oleh karena itu untuk setiap $a \in A$ berlaku

$$v \cdot a(1 - v) = (1 - v)a \cdot v = 0, \quad v \cdot a = v \cdot a \cdot v = a \cdot v, \quad \text{dengan } v \in Z$$

Akibatnya,

$$Z \cap S^r = v \cdot Z.$$

Dengan kata lain $Z(-, \cdot)$ adalah ring Rickart.

3. Commutant

Sifat 3.2.3: Jika S subring $A(-, \cdot)$ maka S' merupakan subring di $A(-, \cdot)$

Bukti

Diambil sebarang $x, y \in S$, akan diperoleh $\{x \in A \mid xs = s \cdot x \text{ untuk setiap } s \in S\}$

dan $\{y \in A \mid y \cdot s = s \cdot y \text{ untuk setiap } s \in S\}$

sehingga,

$$(x - y) \cdot s = x \cdot s - y \cdot s$$

$$= s \cdot x - s \cdot y$$

$$= s \cdot (x - y),$$

jadi

$$x - y \in S'$$

dan

$$(x \cdot y) \cdot s = x \cdot (y \cdot s)$$

$$= x \cdot (s \cdot y)$$

$$= (x \cdot s) \cdot y$$

$$= (s \cdot x) \cdot y$$

$$= x \cdot (x \cdot y)$$

jadi

$$x \cdot y \in S'.$$

Dengan demikian terbukti bahwa S' merupakan subring di $A(-, \cdot)$

Teorema 3.2.4: Jika S subset ring $A(-, \cdot)$ dan $B = S'$ maka B memuat inversnya

($b \in B$ invertible maka $b^{-1} \in B$).

Bukti

Diketahui S subset ring $A(-, \cdot)$ dan $B = S'$. Akan dibuktikan bahwa B memuat inversnya ($b \in B$ invertible maka $b^{-1} \in B$).

Diambil sebarang $b \in B$ invertible.

Sehingga untuk setiap $s \in S$ diperoleh

$$s \cdot b = b \cdot s$$

dan

$$\begin{aligned} b^{-1} \cdot (s \cdot b) \cdot b^{-1} &= b^{-1} \cdot (b \cdot s) \cdot b^{-1} \\ (b^{-1} \cdot s) \cdot (b \cdot b^{-1}) &= (b^{-1} \cdot b) \cdot (s \cdot b^{-1}) \\ (b^{-1} \cdot s) \cdot 1 &= 1 \cdot (s \cdot b^{-1}) \\ b^{-1} \cdot s &= s \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

Dari sini terlihat bahwa $b^{-1} \in S' = B$.

Dengan kata lain B memuat inversenya ($b \in B$ invertible maka $b^{-1} \in B$).

Sifat 3.2.5: Misalkan $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart, S subset $A(-, \cdot)$, $x \in S'$. Jika $\{x\}^r = e \cdot A$ dengan e idempoten maka untuk setiap $s \in S'$ berlaku:

$$s \cdot e = e \cdot s \cdot e$$

Bukti

Diketahui $A(-, \cdot)$ adalah ring Rickart.

Mengingat $\{x\}^r = e \cdot A$ akan diperoleh

$$x \cdot e = 0$$

sehingga untuk setiap $s \in S$ berlaku

$$x \cdot s \cdot e = s \cdot x \cdot e = s \cdot 0 = 0$$

akibatnya,

$s \cdot e \in \{x\}^r = e \cdot A$ dengan e idempoten

sehingga diperoleh bahwa $e \cdot (s \cdot e) = s \cdot e$

3.3 Proses Berpikir dalam Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Ilmu adalah pengetahuan manusia mengenai segala hal yang dapat diindra oleh potensi manusia (penglihatan, pendengaran, perasaan dan keyakinan) melalui akal atau proses berpikir logika. Ini adalah konsep umum barat yang disebut *knowledge*. Pengetahuan yang telah dirumuskan secara sistematis merupakan formula yang disebut ilmu pengetahuan (*science*). Dalam al-Qur'an, keduanya disebut (ilmu). Para sarjana muslim berpandangan bahwa yang dimaksud ilmu itu tidak terbatas pada pengetahuan *knowledge* dan ilmu *science* saja, melainkan justru diawali oleh ilmu Allah yang dirumuskan dalam lauhil mahfudzh yang disampaikan kepada kita melalui al-Qur'an dan as-Sunnah (Qohar, 2003:213).

Seperti yang difirmankan Allah dalam surat al-Alaq/ 96: 1-5, yang berbunyi:

أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ﴿١﴾ خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ ﴿٢﴾ أَلَمْ يَكُنْ عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ﴿٣﴾ الَّذِي عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ ﴿٤﴾

Artinya: Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu Yang menciptakan (1). Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah (2). Bacalah, dan Tuhanmulah Yang Maha Pemurah (3). Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam (4). Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya (5) (QS. al-Alaq/96: 1-5).

Dalam ayat tersebut dapat diketahui perintah Allah SWT kepada manusia untuk menuntut ilmu, dan dijelaskan pula sarana yang digunakan untuk menuntut ilmu yaitu kalam. Mencari ilmu adalah sebuah kewajiban bagi umat manusia dan mengamalkannya juga merupakan ibadah. Semakin tinggi ilmu yang dikuasai, semakin takut pula kepada Allah SWT sehingga dengan sendirinya akan

mendekatkan diri kepada-Nya, aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berpikir.

Ada banyak ilmu pengetahuan di alam semesta ini, salah satunya adalah ilmu matematika, sesuai dengan perkembangan ilmu pengetahuan yang ada ilmu matematika juga berkembang, dimana di dalamnya terdapat beberapa materi yang terus berkembang seperti struktur aljabar.

Struktur aljabar merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak yang paling sederhana. Ada bagian dari struktur aljabar yaitu himpunan tak kosong yang mempunyai operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu adalah grup, ring, *field*, dan modul.

Dengan adanya proses berpikir maka ilmu matematika sekarang ini mejadi lebih berkembang, contohnya ring. Pengembangan ring dengan proses pengembangan ilmu maka ditemukannya ring Rickart. Jadi, sesuai dengan ayat tersebut adanya pengembangan suatu ilmu pengetahuan dilalui dengan proses berfikir dan pendalaman materi, sehingga kita sebagai manusia harus selalu berfikir agar ilmu pengetahuan selalu berkembang.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian yang telah dibahas pada BAB III, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika $A(-, \cdot)$ adalah ring rickart, $x \in A$, maka didefinisikan

$$\{x\}^l = A(1 - e), \quad \{x\}^r = (1 - f)A$$

dengan e dan f idempoten dari x .

6. Setiap corner dari ring rickart merupakan ring rickart.
7. Center dari suatu ring rickart merupakan ring rickart.
8. Jika S subset ring $A(-, \cdot)$ maka S' (*commutant* S) merupakan subring di $A(-, \cdot)$.
9. Misalkan $A(-, \cdot)$ adalah ring rickart, S subset A , $x \in S$. Jika $\{x\}^r = e \cdot A$ dengan e idempoten maka untuk setiap $s \in S$ berlaku $s \cdot e = e \cdot s \cdot e$.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya diharapkan pembaca dapat mengembangkan sifat-sifat dari ring Rickart, yang berhubungan dengan ekuivalensi pada ring Baer.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Adkins, W.A dan Weintreub, S.H. 1992. *"Algebra An Approach via Module Theory"*, New York: Springer-Verlag.
- Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.
- Asyuur, I. 2006. *at-Tahrir wat Tanwir*. Bairut: Lebanon
- Ayres, F dan Jaisingh, L.R. 2004. *Thoery and Problems of Abstract Algebra 2nd edition*. New York: McGraw-Hill Publishing Company.
- Aziz, A dan Abdussakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Berberian, S.K. 1988. *Baer *-Ring*. Texas: Spring.
- Bhattacharya, P.B, Jainn, S.K, and Nagpaul, S.R. 1977. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University Press.
- Dummit, D.S dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall International, Inc.
- Fraleigh, J.B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra, 6th edition*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Goodearl, K.R. 1979. *Von Neumann Regular Rings*. London: Pitman.
- Hanifah. 2009. *Ekuivalensi Ring Rickart dan Ring Baer Beserta * Ringnya*. Semarang.

Hidayanto, E dan Irawati, S. 2000. *Struktur Aljabar II*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Kaplansky. 1968. *Rings of Operators*. New York: Benjamin.

Khusniyah. 2007. *Kajian Homomorfisme Module atas Ring Komutatif*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Mas'ood, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia.

Mu'alim, A dan Kharisma, A. D. 2014. *Tafsir Ayat-Ayat tentang Ilmu Pengetahuan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Palembang: UIN Raden Fatah Palembang.

Pasya, A.F. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an Menggali Ilmu Pengetahuan dari Al-Qur'an*. Solo: Tiga Serangkai.

Qohar Masjoery. 2003. *Pendidikan Agama Islam*. Jakarta: Gunadarma.

Rahman, A. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Sarwono, J. 2006. *Metode Penelitian Kuantitatif dan Kualitatif*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Suparwati, T. 2005. *Ekuivalensi Idempoten Pada Ring Rickart dan Ring Baer*. Tesis tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Sekolah Pascasarjana Universitas Gajah Mada.