PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER ORDE-4 MENGGUNAKAN JARINGAN *RADIAL BASIS FUNCTION*

SKRIPSI

OLEH
AVIEF RAGIL ARTABERI
NIM. 09610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER ORDE-4 MENGGUNAKAN JARINGAN *RADIAL BASIS FUNCTION*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Avief Ragil Artaberi
NIM. 09610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER ORDE-4 MENGGUNAKAN JARINGAN *RADIAL BASIS FUNCTION*

SKRIPSI

Oleh
Avief Ragil Artaberi
NIM. 09610071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal, 14 Januari 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si NIP. 19810502 200501 1 004	Ach. Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER ORDE-4 MENGGUNAKAN JARINGAN *RADIAL BASIS FUNCTION*

SKRIPSI

Oleh
Avief Ragil Artaberi
NIM. 09610071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Januari 2016

Penguji Utama	:	Abdul Aziz, M.Si	--
Ketua Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	--
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	--
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	--

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Avief Ragil Artaberi

NIM : 09610071

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde-4 Menggunakan Jaringan *Radial Basis Function*.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil pikiran atau tulisan orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Januari 2016
Yang membuat pernyataan,

Avief Ragil Artaberi
NIM. 09610071

MOTO

"Kegagalan terjadi bila kita menyerah" (Lessing, Philosof German)

PERSEMBAHAN

Karya tulis ini dipersembahkan untuk:

Bapak Sugiarto dan Ibu Tjutjiati
serta keluarga besar penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang sangat sabar dalam mengarahkan penulis untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.
6. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dosen wali.
7. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen matematika yang telah

memberikan banyak pengetahuan tentang ilmu matematika kepada penulis dan seluruh staf serta karyawan.

8. Bapak Sugiarto dan Ibu Tjutjiati yang selalu memberikan semangat dan doa kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika yang telah memberikan waktu dan semangat kepada penulis.
10. Semua pihak yang turut membantu selesainya skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Artaberi, Avief Ragil. 2016. **Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde-4 Menggunakan Jaringan *Radial Basis Function*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Solusi Numerik, Persamaan Diferensial Biasa Linier, Jaringan RBF.

Solusi analitik persamaan diferensial biasa linier secara umum sulit diperoleh dan dibutuhkan metode numerik untuk mendapatkan solusinya. Tidak semua metode numerik menghasilkan solusi yang baik seperti jaringan RBF. Untuk mendapatkan solusi numerik dengan jaringan RBF, fungsi dan fungsi-fungsi turunan dari persamaan diferensial biasa linier diaproksimasi dengan fungsi basis *multiquadrics*. Kemudian diperoleh nilai bobot yang akan digunakan untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa linier. Aproksimasi dengan jaringan RBF terdiri dari dua macam, yaitu metode langsung dan metode tak langsung. Hasil perbandingan dan analisis *error* dengan menggunakan $\Delta x = 1$ dan $\Delta x = 0{,}1$ menunjukkan bahwa metode tak langsung memperoleh solusi yang lebih akurat. Untuk peneliti selanjutnya dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa non linier.

ABSTRACT

Artaberi, Avief Ragil. 2016. **Numerical Solution of Fourth Order Linear Ordinary Differential Equation using Radial Basis Function Networks.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Numerical Solution, Linear Ordinary Equation, Radial Basis Function Networks.

Analytic solution of linear ordinary differential equations is generally difficult to obtain and should be used a numerical method to solve. Not all numerical methods produce a good solution as RBF network. To obtain numerical solutions with a network of RBF, function and functions derived from linear ordinary differential equations approximated by multiquadrics basis function, then gained weight value that will be used to obtain the numerical solution of linear ordinary differential equations. Approximation using RBF network consists of two kinds, namely the direct method and indirect methods. The comparison and analysis of error using $\Delta x = 1$ and $\Delta x = 0.1$ indicates that the indirect method of obtaining a more accurate solution. For further research the solution of nonlinear ordinary differential equations can be determined.

ملخص

ارتابعري، افيف رغيل. ٢٠١٦. الهل العردي لعاد للان التفاصنلية الغطية علي الرنبة اللربعة با ستفرام صلريقة شبكة Radial Basis Function. البعث العامفي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. ال جامعة المكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشر ف (١)محمد جمهوري الما جستير. (٢) احمد نصح الد ين يلما جستير.

الكلمة الرئيسية: الحل العددي، المعادلات التفاضلية الغملية العادية، الشبكة RBF

الحل التحليلي للمعادلات التفاضلية العادية الخطية صعب لحصول علة ويستغرق طريقة عددية لإيجاد حلة، ليست كل الطرق العددية تنتج إلي صل جية عن شبكة RBF. للحصول على الحلول العددية مع شبكة RBF، الرالةودلكتة المستمدة من المعادلات التفاضلية العادية الخطية يقترب أساس بدالة multiquadrics، ثم اكتسبت قيمة الوزن التي سيتم استخدامها للحصول على الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية الخطية. تقريب باستغرام شبكة RBF يتكون من نوعين، هما الطريقة المباشرة والطريقة غير. مباشرة مقارنة وتحليل الخطأ باستخدام $\Delta x = 1$ و$\Delta x = 0{,}1$ يشير إلى أن الطريقة غير المباشر من الحصول على حل أكثر دقة. لمزيد من البحث يمكن أن تحل المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mai-Duy (2004:3) menyebutkan bahwa solusi analitik dari persamaan diferensial biasa dengan orde-4 secara umum sulit diperoleh dan diperlukan metode numerik untuk menyelesaikannya, seperti metode Euler dan metode Runge-kutta. Kedua metode tersebut menghasilkan solusi numerik yang buruk, karena dapat menyebabkan akumulasi kesalahan yang sangat besar. Hal ini disebabkan karena banyaknya penumpukan kesalahan pada setiap iterasi. Seperti yang dijelaskan oleh Munir (2008:23) tentang ketidakstabilan metode numerik, yaitu semakin banyak iterasi yang diperlukan, semakin banyak pula *error* (kesalahan) hasil perhitungan numeriknya. Pada dasarnya kedua metode tersebut hanya dapat digunakan untuk memperoleh solusi numerik persamaan diferensial orde satu, dan dari kedua metode tersebut metode Runge-kutta menghasilkan solusi numerik yang lebih teliti dibandingkan dengan metode Euler. Untuk persamaan diferensial dengan orde yang lebih tinggi harus diubah menjadi bentuk sistem persamaan linier yang lebih rumit. Oleh karena itu untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa secara numerik harus digunakan metode numerik yang baik seperti jaringan fungsi radial basis (*radial basis function networks*), karena tidak menyebabkan akumulasi kesalahan yang sangat besar. Selanjutnya *radial basis function networks* akan disebut sebagai jaringan RBF.

Jaringan RBF berhasil ditemukan karena adanya peran ilmuwan yang mengembangkan metode numerik yang sudah ada. Hal ini menunjukkan betapa luar biasa perkembangan akal dan pikiran manusia sesuai dengan firman Allah Swt dalam al-Quran surat al-Shaad ayat ke-29 yaitu:

كِتَٰبٌ أَنزَلْنَٰهُ إِلَيْكَ مُبَٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٩﴾

"Ini adalah sebuah kitab yang Kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatnya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran".

Ayat di atas menjelaskan "(Ini adalah kitab) menjadi *khabar* dari *mubtada* yang tidak disebutkan, yakni, Ini adalah kitab (yang Kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan). Asal lafal *Yaddabbaruu* adalah *Yatadabbaruu*, kemudian huruf Ta diidghamkan kepada huruf Dal sehingga jadilah *Yaddabbaruu* (ayat-ayatnya) maksudnya supaya mereka memperhatikan makna-makna yang terkandung di dalamnya, lalu mereka beriman karenanya (dan supaya mendapat pelajaran) mendapat nasihat (orang-orang yang mempunyai pikiran) yaitu yang berakal" (Hidayat, 2010). Dengan demikian, maka harapan penulis adalah dapat mempermudah pembaca dalam memahami untuk menyelesaikan permasalahan matematis serta dapat menemukan metode yang lebih mudah dan sederhana dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dengan latar belakang yang telah dijelaskan dapat diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa linier orde-4 menggunakan jaringan RBF metode langsung dan metode tak langsung?

2. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa linier orde-4 untuk jaringan RBF metode langsung dan metode tak langsung?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini mempunyai tujuan sebagai berikut:

1. Mendapatkan penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa linier orde-4 dengan menggunakan jaringan RBF metode langsung dan metode tak langsung.
2. Mendapatkan hasil perbandingan penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa linier orde-4 untuk jaringan RBF metode langsung dan metode tak langsung.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai tambahan referensi untuk penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa orde-4, khususnya menggunakan jaringan RBF.

1.5 Batasan Masalah

Persamaan diferensial biasa yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan diferensial biasa linier orde-4 yang telah diselesaikan oleh Mai-Duy (2004:16), yaitu

$$2x^5 = x^4\, y'''' - 4x^3\, y''' + x^2\,(12 - x^2\,)y'' + 2x(x^2 - 12)y'$$
$$+2(12 - x^2\ \,)y$$

pada interval $1 < x < 11$ dengan kondisi batas untuk y dan y' adalah sebagai berikut:

$$y(1) = 1 + exp(1) + exp(-1)$$
$$y(11) = 11 + (11)^2 - (11)^3 + 11\,exp(11) + 11\,exp(-11)$$
$$y'(1) = 2\,exp(1)$$
$$y'\,(11) = 1 + 2(11) - 3(11) + 12\,exp(11) - 10\,exp(-11)$$

1.6 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan adalah penelitian melalui pendekatan kepustakaan, yaitu penelitian yang memaparkan argumentasi penalaran keilmuan berdasarkan hasil dari kajian literatur dan hasil pemikiran yang diperoleh sesuai dengan permasalahan yang akan dikaji. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian ini di antaranya:

1. Melakukan diskritisasi persamaan diferensial linier orde-4 beserta kondisi batas dari masalah yang akan di selesaikan dengan menggunakan jaringan RBF.
2. Menentukan persamaan matriks dari sistem persamaan linier yang dihasilkan dari diskritisasi persamaan diferensial menggunakan jaringan RBF.
3. Menentukan koefisien bobot dengan cara menyelesaikan sistem persamaan linier dari matriks yang telah dihasilkan dengan menggunakan metode invers.

4. Menggunakan koefisien bobot yang telah diperoleh untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial biasa dengan cara mensubstitusikan koefisien bobot tersebut pada fungsi aktivasi jaringan RBF.
5. Menghitung analisis *error* dari solusi numerik jaringan RBF dari persamaan diferensial biasa linier orde-4 yang akan diselesaikan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam sistematika penulisan penelitian ini dibagi menjadi 4 bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagaimana berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menjelaskan beberapa konsep (teori-teori) yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu tentang persamaan diferensial biasa linier, jaringan RBF, aproksimasi dengan jaringan RBF yang dibagi menjadi jaringan RBF metode langsung dan jaringan RBF metode tak langsung. Subbab berikutnya dilanjutkan dengan metode *invers* dan analisis *error*, dan penyelesaian numerik dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini menjelaskan tentang proses penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa linier orde-4 menggunakan jaringan RBF yang dibagi menjadi enam subbab antara lain diskritisasi yang dibagi menjadi dua anak subbab, yaitu jaringan RBF metode langsung dan jaringan RBF metode tak langsung. Subbab berikutnya adalah simulasi dan interpetasi hasil numerik jaingan RBF yang dibagi menjadi tiga anak subbab, yaitu simulasi numerik $\Delta x = 1$, simulasi numerik $\Delta x = 0{,}1$ dan hasil perbandingan. Terakhir adalah subbab kajian penyelesaian numerik dalam Islam.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Linier

Bronson dan Costa (2009:53) menyebutkan bahwa suatu persamaan diferensial dikatakan linier jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan fungsi-fungsi turunannya. Dengan kata lain semua koefisiennya adalah fungsi dari variabel-variabel bebasnya, seperti yang ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$2x^5 = x^4\, y'''' - 4x^3\, y''' + x^2\,(12 - x^2\,)y'' + 2x(x^2 - 12)y' + 2(12 - x^2\,)y$$

dimana x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas. Sedangkan untuk mengetahui apakah persamaan tersebut linier, Johnson (2012:64) menyebutkan bahwa suatu persamaan diferensial biasa disebut linier jika memenuhi dua aturan berikut:

1. $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$
2. $\mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f)$

dimana $\mathcal{L}$ adalah operator diferensial untuk sembarang fungsi f, g dan c adalah suatu konstata yang tidak sama dengan nol. Dengan mengunakan kedua aturan tersebut dapat dibuktikan persamaan tersebut linier, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f+g) &= x^4(f+g)'''' - 4x^3(f+g)''' + x^2(12-x^2)(f+g)'' \\ &\quad +2x(x^2-12)(f+g)' + 2(12-x^2)(f+g) \\ &= x^4f'''' + x^4g'''' - 4x^3f''' - 4x^3g''' + x^2(12-x^2)f'' \\ &\quad +x^2(12-x^2)g + 2x(x^2-12)f' + 2x(x^2-12)g' \\ &\quad +2(12-x^2)f + 2(2-x^2)g\end{aligned}$$

$$= [x^4 f'''' - 4x^3 f''' + x^2(12 - x^2)f'' + 2x(x^2 - 12)f'$$

$$+2(12 - x^2)f + [x^4 g'''' - 4x^3 g''' + x^2(12 - x^2)g''$$

$$+2x(x^2 - 12)g' + 2(12 - x^2)g]$$

$$= \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(cf) = \frac{x^4 d^4}{dx^4}(cf)$$

$$= x^4 \frac{d^4 c}{dx^4}\frac{d^4 f}{dx^4}$$

$$= x^4 f''''$$

$$= c\mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}(cf) = -\frac{4x^3 d^3}{dx^3}(cf)$$

$$= -4x^3 \frac{d^3 c}{dx^3}\frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$= x^3 f'''$$

$$= c\mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}(cf) = x^2 \frac{(12 - x^2)d^2}{dx^2}(cf)$$

$$= x^2(12 - x^2)\frac{d^2 c}{dx^2}\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$= x^2(12 - x^2)f''$$

$$= c\mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}(cf) = 2x(x^2-12)\frac{d}{dx}(cf)$$

$$= \; 2x(x^2-12)\frac{dc}{dx}\frac{df}{dx}$$

$$= 2x(x^2-12)f'$$

$$= c\mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}(cf) = 2(12-x^2)(cf)$$

$$= \; 2(12-x^2)cf$$

$$= 2(12-x^2)f$$

$$= c\mathcal{L}(f).$$

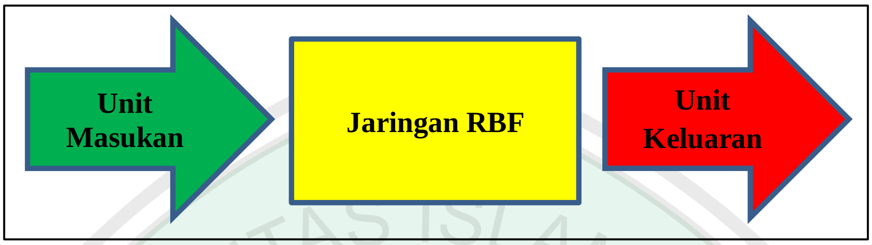
Dari pembuktian tersebut dapat diketahui bahwa persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial biasa linier.

Persamaan diferensial linier juga diklasifikasikan berdasarkan orde tertinggi dari turunan yang terkandung dan untuk setiap persamaan diferensial yang telah diklasifikasikan berdasarkan orde. Persamaan diferensial tersebut juga dapat diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial linier homogen dan persamaan diferensial linier tak homogen. Pada persamaan tersebut orde tertinggi untuk turunannya adalah empat dan merupakan persamaan diferensial linier tak homogen.

2.2 Jaringan RBF

Yani (2005:2) menyebutkan bahwa jaringan RBF merupakan salah satu jenis dari Jaringan saraf tiruan yang memiliki mekanisme kerja seperti kerja otak manusia. Secara sederhana fungsi otak manusia adalah menyimpan, belajar dan mengambil kembali pengetahuan yang tersimpan dalam sel saraf atau neuron

(Kusumadewi, 2016). Dari penjelasan tersebut jaringan RBF digambarkan sebagai fungsi antara unit masukan dan unit keluaran dan bebas model matematis yang secara sederhana dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Jaringan Saraf Tiruan sebagai Fungsi

2.3 Aproksimasi dengan Jaringan RBF

Mai-Duy dan Tran-Cong (2002:199) menjelaskan bahwa aproksimasi jaringan RBF menyatakan pemetaan antara ruang berdimensi-n pada ruang berdimensi-1 $f: R^n \rightarrow R^1$ dan terdiri dari sebuah himpunan bobot $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ dan sebuah himpunan fungsi basis $\{\phi(x,c)\}$, dimana $\phi_j(x,c) = \sqrt{(x-c)^2 + a^2}$. Misalkan sebuah fungsi 1-variabel $f(x)$ yang akan diaproksimasi dengan jaringan RBF, maka aproksimasi fungsi $f(x)$ dengan jaringan RBF dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_j) \tag{2.1}$$

dimana x adalah *input*, c_j adalah titik *collocation*, $j = 1,2, \ldots, m$ dengan m adalah banyaknya titik target pelatihan.

Dalam kasus penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa, jaringan RBF memiliki dua metode untuk mendapatkan solusi numerik yaitu metode langsung dan metode tak langsung. Kedua metode tersebut menggunakan cara yang berbeda dalam mengaproksimasi fungsi dan fungsi-fungsi turunan dari persamaan diferensial biasa. Metode langsung berdasarkan penurunan langsung dari fungsi basis dan metode tak langsung berdasarkan pengintegralan dari fungsi basis. Adapun fungsi basis yang paling banyak digunakan adalah:

1. *Multiquadrics*

$$\phi(x, c_j) = \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \tag{2.2}$$

2. *Inverse Multiquadrics*

$$\phi(x, c_j) = \frac{1}{\sqrt{(x - c_j)^2 + a^2}} \tag{2.3}$$

3. *Gaussian*

$$\phi(x, c_j) = \exp\left(-\frac{(x - c_j)^2}{a^2}\right) \tag{2.4}$$

dimana a adalah varian dari c, dengan $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ $a \neq 0$ dan r adalah jarak *euclid* dari setiap titik pusat (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2002:199). Dari ketiga fungsi basis yang diketahui, fungsi basis *multiquadric* memiliki keakuratan paling baik. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan digunakan fungsi basis *multiquadric* untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier orde-4. Untuk membuktikan keakuratan tersebut akan dibandingkan hasil numerik dari ketiga fungsi basis di atas dalam mengaproksimasi turunan pertama untuk persamaan berikut:

$$f(x) = x^2 + x + 0{,}5, \tag{2.5}$$

pada interval $-3 \leq x \leq 2$, dan diketahui turunan pertamanya adalah

$$f'(x) = 2x + 1 \tag{2.6}$$

Untuk mengaproksimasi persamaan (2.6) menggunakan jaringan RBF adalah dengan cara mengubah bentuk persamaan (2.5) seperti pada persamaan

(2.1), dengan menggunakan salah satu dari ketiga fungsi basis di atas lalu membandingkan hasil simulasi numeriknya. Langkah pertama dalam mengaproksimasi persamaan (2.5) adalah dengan menurunkan langsung fungsi basis seperti berikut:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_i) \tag{2.7}$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_x(x, c_j). \tag{2.8}$$

Misalkan $\phi(x, c_j)$ pada persamaan (2.7) adalah fungsi basis *multiquadrics*, maka

$$\phi(x, c_j) = \left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\phi(x, c_j)}{dx} = \frac{1}{2}\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \times \left(2.x^{2-1} - 1.2x^{1-1}c_j + 0.x^{0-1}c_j^2\right)$$

$$= \frac{x - c_j}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Karena $\frac{d\phi(x,c_j)}{dx} = \phi_x(x, c_j)$, sehingga dapat ditulis

$$\phi_x(x, c_j) = \frac{x - c_j}{\sqrt{(x - c_j)^2 + a^2}}. \tag{2.9}$$

Untuk fungsi basis *invers multiquadrics* adalah

$$\phi(x, c_j) = \left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\phi(x, c_j)}{dx} = -\frac{1}{2}\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}$$

$$\times \left(2.x^{2-1} - 1.2x^{1-1}c_j + 0.x^{0-1}c_j^2\right)$$

$$= -\frac{x - c_j}{\left(\left(x - c_j\right)^2 + a^2\right)^{1.5}}$$

sehingga

$$\phi_x\left(x, c_j\right) = -\frac{x - c_j}{\left(\left(x - c_j\right)^2 + a^2\right)^{1.5}} \tag{2.10}$$

dan untuk fungsi basis *gaussian* adalah

$$\phi\left(x, c_j\right) = exp\left(-\frac{\left(x - c_j\right)^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{d\phi\left(x, c_j\right)}{dx} = exp\left(-\frac{\left(x - c_j\right)^2}{a^2}\right)$$

$$\times\left(-\left(\frac{a^2.\left(2x - 2c_j + 0\right) - \left(\left(x - c_j\right)^2.0.x^{0-1}.a^2\right)}{a^4}\right)\right)$$

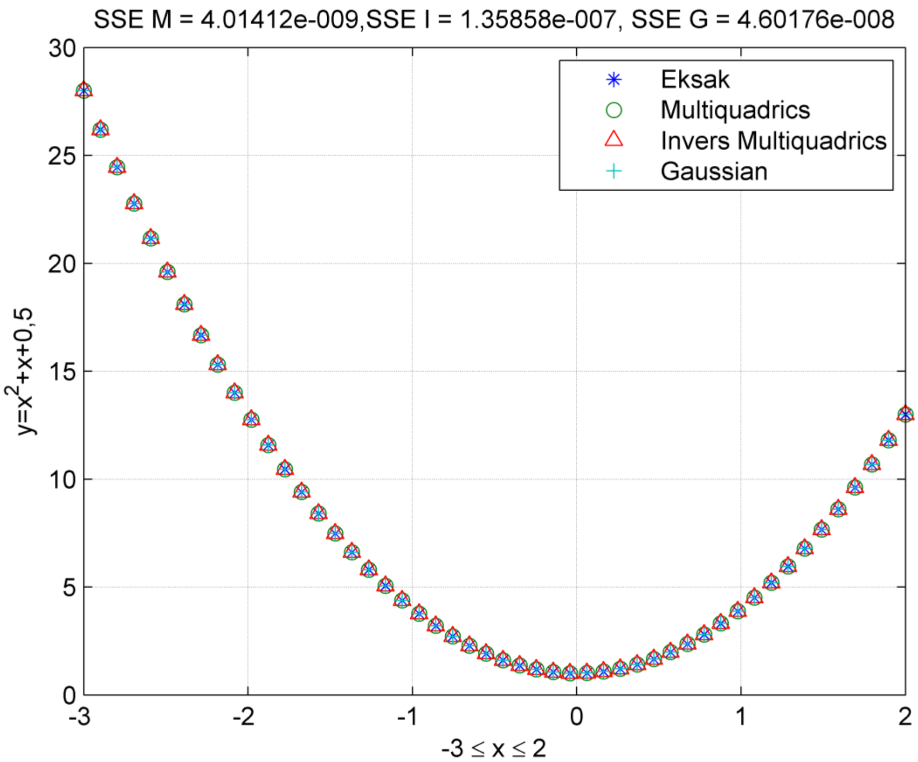
$$= exp\left(-\frac{\left(x - c_j\right)^2}{a^2}\right) - \frac{\left(2x - 2c_j\right)}{a^2}$$

$$= -\frac{2\left(x - c_j\right)}{a^2}\exp\left(-\frac{2\left(x - c_j\right)}{a^2}\right)$$

sehingga

$$\phi_x\left(x, c_j\right) = -\frac{2\left(x - c_j\right)}{a^2}\exp\left(-\frac{2\left(x - c_j\right)}{a^2}\right). \tag{2.11}$$

Untuk menunjukkan keakuratan fungsi *multiquadrics* dibandingkan dengan fungsi basis lainnya, akan dilakukan sebuah percobaan numerik dengan menggunakan 50 iterasi untuk persamaan (2.5) sebagai berikut:



Gambar 2.2 Perbandingan Hasil Numerik *Multiquadrics*, *Invers Multiquadrics* dan *Gaussian*

Pada Gambar 2.2 hasil simulasi numerik untuk persamaan (2.5) menunjukkan bahwa fungsi basis *multiuadrics* memperoleh hasil yang lebih akurat yaitu dengan *error* sebesar $4{,}0141 \times 10^{-9}$, sedangkan kedua fungsi lainnya menghasilkan *error* sebesar $1{,}3586 \times 10^{-7}$ untuk fungsi basis *invers multiquadrics* dan $4{,}6018 \times 10^{-8}$ untuk fungsi *gaussian*. Dari hasil perbandingan tersebut maka fungsi basis yang digunakan dalam penelitian ini adalah fungsi basis *multiquadric*.

2.3.1 Jaringan RBF Metode Langsung

Pada metode langsung, aproksimasi dilakukan dengan cara menurunkan secara parsial fungsi basis sesuai dengan order dari persamaan diferensial biasa yang diberikan. Hasil aproksimasi dari fungsi turunan dapat diperoleh dengan mengalikan fungsi basis yang diturunkan dengan koefisien bobot w.

Pada sebarang RBF dimana fungsi basisnya tetap dan koefisien bobotnya dapat menyesuaikan, fungsi turunan dihitung dengan jaringan yang merupakan kombinasi linier dari fungsi tetap (fungsi turunan dari RBF), maka fungsi turunan pertama dari fungsi aproksimasi $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= f_x(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{d\phi(x, c_j)}{dx} \end{aligned} \tag{2.15}$$

dimana $\frac{d\phi}{dx}$ merupakan fungsi basis yang cocok untuk fungsi turunan $f_x(x_1, x_2, \dots, x_m)$, yang terdiri dari fungsi-fungsi turunan basis asal ϕ yang terdiferensial secara kontinu (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2002:201).

Untuk mendapatkan turunan parsial dari fungsi persamaan diferensial orde-4 dapat dilakukan proses turunan pada fungsi basis dari jaringan RBF. Misalkan sebuah fungsi $f(x)$ akan diaproksimasi sampai fungsi turunan keempat dengan jaringan RBF, maka

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \, \phi(x, c_j), \tag{2.16}$$

dimana $\phi(x, c_j)$ adalah sebarang fungsi basis. Untuk fungsi turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, \phi(x, c_j)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_x(x, c_j) \tag{2.17}$$

dengan $\phi_x(x, c_j)$ adalah fungsi yang diperoleh dengan cara menurunkan fungsi basis terhadap x. Untuk fungsi turunan keduanya adalah

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, \phi_x(x, c_j)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xx}(x, c_j) \tag{2.18}$$

dengan $\phi_{xx}(x, c_j)$ adalah fungsi yang diperoleh dengan cara menurunkan $\phi_x(x, c_j)$ terhadap x. Untuk fungsi turunan ketiganya adalah

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, \phi_{xx}(x, c_j)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xxx}(x, c_j) \tag{2.19}$$

dengan $\phi_{xxx}(x, c_j)$ adalah fungsi yang diperoleh dengan cara menurunkan $\phi_{xxx}(x, c_j)$ terhadap x. Untuk fungsi turunan keempatnya adalah

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, \phi_{xxx}(x, c_j)\right) \tag{2.20}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xxxx}(x, c_j)$$

dengan $\phi_{xxxx}(x, c_j)$ adalah fungsi yang diperoleh dengan cara menurunkan $\phi_{xxx}(x, c_j)$ terhadap x. Berdasarkan percobaan numerik yang telah dilakukan untuk persamaan (2.5) pada penulisan ini akan digunakan fungsi basis *multiquadric*. Berikut adalah fungsi-fungsi turunan dari fungsi basis *multiquadrics* sampai order ke-4 dengan fungsi basis *multiquadrics* $\phi(x, c_j) = \left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Fungsi turunan pertamanya adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\phi(x, c_j)}{dx} = \frac{1}{2}\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2.\,x^{2-1} - 1.2x^{1-1}c_j + 0.\,x^{0-1}c_j^2\right)$$

$$= \frac{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x - c_j)}{2}$$

$$= \frac{(x - c_j)}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

untuk $\frac{d\phi(x,c_j)}{dx} = \phi_x(x, c_j)$ sehingga

$$\phi_x(x, c_j) = \frac{(x - c_j)}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.21}$$

Fungsi turunan kedua, ketiga dan keempat diperoleh dengan menurunkan persamaan (2.21) menggunakan aturan hasil bagi, yaitu sama dengan penyebut kali turunan pembilang dikurangi pembilang kali turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebutnya (Purcell dan Varberg, 1987:128).

Misalkan

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

maka

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{h(x).\frac{dg(x)}{dx} - g(x).\frac{dh(x)}{dx}}{h(x)^2}$$

Untuk fungsi turunan keduanya diperoleh seperti berikut, misalkan $g(x) = (x - c_j)$ dan $h(x) = \left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sehingga

$$\frac{dg(x)}{dx} = 1$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{(x - c_j)}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

maka

$$\frac{d^2\phi(x, c_j)}{dx^2} = \frac{h(x).\frac{dg(x)}{dx} - g(x).\frac{dh(x)}{dx}}{h(x)^2}$$

$$= \frac{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}.1 - (x - c_j).\frac{(x - c_j)}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)} - \frac{-(x - c_j)^2}{\left((x - c_j)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)-\left(x-c_j\right)^2}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dan dapat ditulis menjadi

$$\phi_{xx}\left(x,c_j\right) = \frac{a^2}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2.22)$$

Untuk fungsi turunan ketiganya diperoleh seperti berikut:

misalkan

$$g(x) = a^2$$

dan

$$h(x) = \left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

sehingga

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = 3.\left(x-c_j\right)\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

maka

$$\frac{d^3\phi\left(x,c_j\right)}{dx^3} = \frac{h(x).\frac{dg(x)}{dx} - g(x).\frac{dh(x)}{dx}}{h(x)^2}$$

$$= \frac{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}.0 - a^2.3.\left(x-c_j\right)\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{-3a(x-c_j)\left((x-c_j)^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left((x-c_j)^2+a^2\right)^3}$$

$$= \frac{-3a(x-c_j)}{\left((x-c_j)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

dan dapat ditulis menjadi

$$\phi_{xxx}(x,c_j) = \frac{-3a(x-c_j)}{\left((x-c_j)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \quad (2.23)$$

Untuk fungsi turunan keempatnya diperoleh seperti berikut:

misalkan

$$g(x) = -3a(x-c_j)$$

dan

$$h(x) = \left((x-c_j)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}$$

sehingga

$$\frac{dg(x)}{dx} = -3a^2$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = 5.(x-c_j)\left((x-c_j)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

maka

$$\frac{d^4\phi(x,c_j)}{dx^4} = \frac{h(x).\frac{dg(x)}{dx} - g(x).\frac{dh(x)}{dx}}{h(x)^2}$$

$$= \frac{\left((xc_j)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}.(-3a^2)}{\left(\left((x-c_j)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}\right)^2}$$

$$-\frac{\left(-3a\left(x-c_j\right).5.\left(x-c_j\right)\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{-3a\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}+15a^2\left(x-c_j\right)^2\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^5}$$

$$=\frac{15a^2\left(x-c_j\right)^2\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-3a\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^5}$$

$$=\frac{3a^2\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}.\left(5\left(x-c_j\right)^2-\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)\right)}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{5-\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3a^2\left((5-1)\left(x-c_j\right)^2-a^2\right)}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\frac{3a^2\left(4\left(x-c_j\right)^2-a^2\right)}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

dan dapat ditulis menjadi

$$\phi_{xxxx}(x,c_j)=\frac{3a^2\left(4\left(x-c_j\right)^2-a^2\right)}{\left(\left(x-c_j\right)^2+a^2\right)^{\frac{7}{2}}}. \tag{2.24}$$

2.3.2 Jaringan RBF Metode Tak Langsung

Pada metode tak langsung, aproksimasi dilakukan dengan cara mengintegralkan secara parsial fungsi basis sesuai dengan order dari persamaan diferensial biasa yang diberikan dan dimulai dari fungsi turunan tertinggi sampai dengan fungsi asal itu sendiri. Mai-Duy (2004:9) menyebutkan bahwa pada metode tak langsung, persamaan diferensial biasa orde-4 diaproksimasi sebagai berikut:

misalkan fungsi $f(x)$ akan diaproksimasi sampai fungsi turunan keempat, maka

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_j), \tag{2.25}$$

dimana $\phi(x, c_j)$ adalah sebarang fungsi basis, w adalah koefisien bobot yang harus dicari nilainya, dan c adalah titik *collocation* dengan $j = 1,2, \dots, m$. Untuk fungsi turunan ketiga diaproksimasi dengan

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \int \phi(x, c_j)\, dx$$

$$= w_1 \int \phi(x, c_1)\, dx + w_2 \int \phi(x, c_2)\, dx + \cdots + w_m \int \phi(x, c_m)\, dx$$

misalkan

$$\int \phi(x, c_j)\, dx = H_1(x, c_j) + k_j,$$

dengan $H_1(x, c_j)$ adalah fungsi basis baru yang diperoleh dari pengintegralan fungsi $\phi(x, c_j)$, dan k_j adalah konstanta hasil pengintegralan sehingga

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \int \phi(x, c_j)\, dx = \sum_{j=1}^{m} w_j \left[H_1(x, c_j) + k_j\right]$$

$$= w_1[H_1(x, c_1) + k_1] + w_2[H_1(x, c_2) + k_2] + \cdots$$

$$+w_m[H_1(x,c_m)+k_m]$$

$$=\sum_{j=1}^{m} w_j H_1(x,c_j)+\sum_{j=1}^{m} w_j k_j,$$

misalkan

$$A_1=\sum_{j=1}^{m} w_j k_j$$

maka aproksimasi fungsi turunan ketiga adalah

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\approx\sum_{j=1}^{m} w_j H_1(x,c_j)+A_1. \tag{2.26}$$

Untuk fungsi turunan pertamanya diaproksimasi dengan

$$\frac{df(x)}{dx}\approx\sum_{j=1}^{m} w_j\int H_2(x,c_j)dx+\int A_2dx+\int A_1xdx$$

$$=w_1\int H_2(x,c_1)dx+w_2\int H_2(x,c_2)dx+\cdots$$

$$+w_m\int H_2(x,c_m)dx+\int A_2dx+\int A_1xdx$$

misalkan

$$\int H_2(x,c_j)\,dx=H_3(x,c_j)+k_j$$

sehingga

$$\frac{df(x)}{dx}=w_1[H_3(x,c_1)+k_1]+w_2[H_3(x,c_2)+k_2]+\cdots$$

$$+w_m[H_3(x,c_m)+k_m]+A_2x+\frac{1}{2}A_1x^2$$

$$=\sum_{j=1}^{m} w_j H_3(x,c_j)+\sum_{j=1}^{m} w_j k_j+A_2x+\frac{1}{2}A_1x^2$$

misalkan

$$A_3 = \sum_{j=1}^{m} w_j k_j$$

maka aproksimasi fungsi turunan pertama adalah

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{m} w_j H_3(x, c_j) + A_3 + A_2 x + \frac{1}{2} A_1 x^2. \tag{2.28}$$

Untuk fungsi asal $f(x)$ diaproksimasi dengan

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \int H_3(x, c_1)\, dx + \int A_3 dx + \int A_2 x dx + \int \frac{1}{2} A_1 x^2 dx$$

$$= w_1 \int H_3(x, c_1) dx + w_2 \int H_3(x, c_2) dx + \cdots$$

$$+ w_m \int H_3(x, c_m) dx + \int A_3 dx + \int A_2 x dx + \int \frac{1}{2} A_1 x^2 dx$$

misalkan

$$\int H_3(x, c_j)\, dx = H_4(x, c_j) + k_j$$

sehingga

$$f(x) = w_1[H_4(x, c_1) + k_1] + w_2[H_4(x, c_2) + k_2] + \cdots$$

$$+ w_m[H_4(x, c_m) + k_m] + A_3 x + \frac{1}{2} A_2 x^2 + \frac{1}{6} A_1 x^3$$

$$= \sum_{j=1}^{m} w_j H_4(x, c_j) + \sum_{j=1}^{m} w_j k_j + A_3 x + \frac{1}{2} A_2 x^2 + \frac{1}{6} A_1 x^3$$

misalkan

$$A_4 = \sum_{j=1}^{m} w_j k_j$$

maka

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j H_4(x, c_j) + A_4 + A_3 x + \frac{1}{2} A_2 x^2 + \frac{1}{6} A_1 x^3. \qquad (2.29)$$

Adapun integral dari fungsi basis *multiquadrics* sampai order ke-4 adalah sebagai berikut:

$$H_1(x, c_j) = \frac{(x - c_j)}{2} A + \frac{a^2}{2} B \qquad (2.30)$$

$$H_2(x, c_j) = \left(-\frac{a^2}{3} + \frac{(x - c_j)^2}{6} \right) A + \frac{a^2 (x - c_j)}{2} B \qquad (2.31)$$

$$H_3(x, c_j) = \left(\frac{-13a^2 (x - c_j)}{48} + \frac{(x - c_j)^3}{24} \right) A + \left(-\frac{a^4}{16} + \frac{a^2 (x - c_j)^2}{4} \right) B \qquad (2.32)$$

$$H_4(x, c_j) = \left(\frac{a^4}{45} - \frac{83a^2 (x - c_j)^2}{720} + \frac{(x - c_j)^4}{120} \right) A + \left(\frac{-3a^4 (x - c_j)}{48} + \frac{4a^2 (x - c_j)^3}{48} \right) B \qquad (2.33)$$

dimana $A = \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2}$ dan $B = ln\left((x - c_j) + \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \right)$.

2.4 Metode *Invers*

Mai-Duy dan Tran-Cong (2002:200) menyebutkan bahwa aproksimasi dengan menggunakan jaringan RBF menghasilkan bentuk linier yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks. Misalkan $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^T$ persamaan (2.1) dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} f(x_1) &= w_1\phi(x_1, c_1) + w_2\phi(x_1, c_2) + \cdots + w_m\phi(x_1, c_m) \\ f(x_2) &= w_1\phi(x_2, c_1) + w_2\phi(x_2, c_2) + \cdots + w_m\phi(x_2, c_m) \\ &\vdots \\ f(x_m) &= w_1\phi(x_m, c_1) + w_2\phi(x_m, c_2) + \cdots + w_m\phi(x_m, c_m) \end{aligned} \tag{2.34}$$

atau

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, c_1) & \phi(x_1, c_2) & \cdots & \phi(x_1, c_m) \\ \phi(x_2, c_1) & \phi(x_2, c_2) & \cdots & \phi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(x_m, c_1) & \phi(x_m, c_2) & \cdots & \phi(x_m, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

yang dapat ditulis sebagai

$$A_{m\times 1} = B_{m\times m} \times W_{m\times 1} \qquad 2.36$$

dimana

$$A^T_{m\times 1} = [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)],$$

$$B_{m\times m} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, c_1) & \phi(x_1, c_2) & \cdots & \phi(x_1, c_m) \\ \phi(x_2, c_1) & \phi(x_2, c_2) & \cdots & \phi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(x_m, c_1) & \phi(x_m, c_2) & \cdots & \phi(x_m, c_m) \end{bmatrix}$$

dan

$$W^T_{m\times 1} = [w_1, w_2, \ldots, w_m].$$

Untuk memperoleh nilai dari matriks W dapat digunakan metode *invers* sehingga persamaan (2.35) diubah menjadi

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1, c_1) & \phi(x_1, c_2) & \cdots & \phi(x_1, c_m) \\ \phi(x_2, c_1) & \phi(x_2, c_2) & \cdots & \phi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(x_m, c_1) & \phi(x_m, c_2) & \cdots & \phi(x_m, c_m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

yang dapat ditulis sebagai

$$W_{m\times 1} = B^{-1}_{m\times m} \times A_{m\times 1}$$

dimana B^{-1} adalah *invers* dari B. Matriks B disebut mempunyai *invers* jika dikatakan *invertible* yaitu merupakan matriks bujur sangkar dan determinannya tidak sama dengan nol (Anton & Rorres, 2005:69). Dengan menggunakan koefisien bobot w yang diperoleh ke dalam persamaan (2.1) solusi numerik dari persamaan diferensial biasa menggunakan jaringan RBF dapat diperoleh.

2.5 Analisis *Error*

Dalam sub-bab ini akan menjelaskan tentang analisis *error*, yaitu dengan membandingkan *error* mutlak dengan nilai solusi eksak. Mai-Duy & Tran-Cong (2002:219) menyebutkan bahwa untuk menentukan *error* adalah dengan menghitung selisih kuadrat (*sum square error*) antara fungsi aproksimasi jaringan RBF dengan fungsi asalnya. Misalkan $\hat{f}(x)$ adalah fungsi aproksimasi jaringan RBF dan $f(x)$ adalah fungsi aslinya, maka diperoleh

$$e = f(x) - \hat{f}(x), \tag{2.38}$$

sehingga *error* mutlaknya diperoleh dengan cara memutlakkan e tanpa memperhitungkan *error* negatif maupun positif atau dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$|e| = \left|f(x) - \hat{f}(x)\right| \tag{2.39}$$

$$SSE = \left(f(x) - \hat{f}(x)\right)^2 \tag{2.40}$$

untuk sejumlah titik m dapat dihitung *error* rata-rata menggunakan

$$\overline{SSE} = \frac{\left(f(x) - \hat{f}(x)\right)^2}{m}. \tag{2.41}$$

2.6 Penyelesaian Numerik dalam Islam

Berkembangnya ilmu dan teknologi sekarang ini tidak pernah lepas dari berbagai pengalaman yang telah dialami oleh manusia, berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari telah dihadapi oleh manusia dengan berbagai macam cara penyelesaian. Begitu juga dalam matematika, suatu persamaan dapat diselesaikan dengan berbagai cara. Munir (2008:43) menyebutkan bahwa secara umum suatu persamaan terdapat dua solusi yaitu solusi analitik dan solusi numerik atau yang biasa disebut sebagai solusi hampiran. Sehingga dapat diketahui bahwasannya setiap permasalahan selalu ada solusinya meskipun harus melalui proses yang sulit. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt dalam al-Quran surat al-Insyiroh ayat 5 dan 6 yaitu:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٦﴾

"karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan".

Penjelasan ayat di atas menurut Tafsir Jalalain 5 (karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu) atau kesukaran itu (ada kelapangan) yakni kemudahan. 6. (Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kelapangan) Nabi Muhammad Saw. banyak sekali mengalami kesulitan dan hambatan dari orang-orang kafir, kemudian beliau mendapatkan kelapangan dan kemudahan, yaitu setelah beliau mengalami kemenangan atas mereka (Hidayat, 2010).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai bidang ilmu lainnya, dan akan menjadi pemecah atau solusi dari pangkal ilmu tersebut. Dengan berkembangnya ilmu matematika segala permasalahan akan lebih mudah dimengerti seperi metode numerik yang menjadi solusi untuk menyelesaikan pesamaan diferensial biasa yang tidak mudah untuk diselesaikan secara analitik. Meskipun ada banyak metode numerik untuk digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial, tapi tidak semua metode numerik dalam matematika mampu mendekati solusi analitiknya dengan baik sehingga harus digunakan salah satu yang hasilnya lebih teliti. Metoe numerik yang baik adalah metode yang dapat menghasilkan *error* sekecil mungkin dengan proses yang cepat, karena ketelitian suatu meode numerik dapat diukur melalui *error* yang dihasilkan, sedangkan kemudahan proses komputasi dapat dilihat dari waktu yang diperlukan.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan dijelaskan tentang cara penyelesaian persamaan diferensial biasa linier orde-4 dengan jaringan RBF yang persamaannya telah ditunjukkan pada bab sebelumnya yaitu

$$2x^5 = x^4 y'''' - 4x^3 y''' + x^2(12 - x^3)y'' + 2x(x^2 - 12)y' \\ +2(12 - x^2)y \tag{3.1}$$

pada interval $1 < x < 11$, yang memenuhi kondisi batas berikut:

$$y(1) = 1 + \exp(1) + \exp(-1) \tag{3.2}$$

$$y'(1) = 2\exp(1) \tag{3.3}$$

$$y(11) = -1199 + 11\exp(11) + 11\exp(-11) \tag{3.4}$$

$$y'(11) = -10 + 12\exp(11) - 10\exp(-11) \tag{3.5}$$

Pembahasan dibagi ke dalam subbab, yaitu diskritisasi, aproksimasi jaringan RBF yang dibagi menjadi dua, yaitu metode langsung dan metode tak langsung dan dilanjutkan dengan subbab simulasi numerik jaringan RBF, analisis *error* dan kajian penyelesaian numerik dalam Islam.

3.1 Diskritisasi

Mendiskritisasi domain dengan cara membagi domain ke dalam beberapa bagian yang lebih kecil. Hal ini dapat dilakukan dengan membagi daerah x menjadi beberapa bagian yang lebih kecil sehingga dapat diketahui jarak antara x yang satu dengan yang x yang berikutnya yang kemudian disebut sebagai Δx. Pada pembahasan ini domainnya adalah $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

3.1.1 Metode Langsung

Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya tentang aproksimasi dengan jaringan RBF metode langsung, fungsi dan fungsi-fungsi turunan yang dicari pada persamaan (3.1) beserta kondisi batas yang diberikan akan diganti dengan fungsi dan fungsi-fungsi turunan basis. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) dan (2.21) ke dalam persamaan (3.1) untuk fungsi dan fungsi-fungsi turunannya seperti berikut:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_j)$$

$$y'(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_x(x, c_j)$$

$$y''(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xx}(x, c_j)$$

$$y'''(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xxx}(x, c_j)$$

$$y''''(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xxxx}(x, c_j)$$

diperoleh

$$\begin{aligned} 2x^5 = {} & x^4 \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xxxx}(x, c_j) - 4x^3 \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xxx}(x, c_j) \\ & + x^2(12 - x^2) \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_{xx}(x, c_j) + 2x(x^2 - 12) \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_x(x, c_j) \\ & + 2(12 - x^2) \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_j) \end{aligned} \tag{3.6}$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \left(x^4\phi_{xxxx}(x,c_j) - 4x^3\phi_{xxx}(x,c_j) + x^2(12-x^2)\phi_{xx}(x,c_j)\right.$$

$$\left. + 2x(x^2-12)\phi_x(x,c_j) + 2(12-x^2)\phi(x,c_j)\right) = 2x^5. \qquad (3.7)$$

Misalkan

$$L(x,c_j) = x^4\phi_{xxxx}(x,c_j) - 4x^3\phi_{xxx}(x,c_j) + x^2(12-x^2)\phi_{xx}(x,c_j)$$

$$+2x(x^2-12)\phi_x(x,c_j) + 2(12-x^2)\phi(x,c_j) \qquad (3.8)$$

sehingga persamaan (3.7) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{j=1}^{m} w_j L(x,c_j) = 2x^5. \qquad (3.9)$$

Untuk domain $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, maka persamaan (3.9) dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} 2x_1^5 &= w_1L(x_1,c_1) + w_2L(x_1,c_2) + \cdots + w_mL(x_1,c_m) \\ 2x_2^5 &= w_1L(x_2,c_1) + w_2L(x_2,c_2) + \cdots + w_mL(x_2,c_m) \\ &\vdots \\ 2x_m^5 &= w_1L(x_m,c_1) + w_2L(x_m,c_2) + \cdots + w_mL(x_m,c_m) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.10) membentuk sistem persamaan linier dengan variabel yang tidak diketahui berupa w dan dapat ditulis ke dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 2x_1^5 \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ 2x_m^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(x_1,c_1) & L(x_1,c_2) & \cdots & L(x_1,c_m) \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_1,c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L(x_m,c_1) & L(x_m,c_2) & \cdots & L(x_m,c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

yang dapat ditulis sebagai

$$A_{m\times 1} = B_{m\times m} \times W_{m\times 1} \qquad (3.12)$$

dimana

$$A = [2x_1^5, 2x_2^5, \dots, 2x_m^5]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} L(x_1, c_1) & L(x_1, c_2) & \cdots & L(x_1, c_m) \\ L(x_2, c_1) & L(x_2, c_2) & \cdots & L(x_1, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L(x_m, c_1) & L(x_m, c_2) & \cdots & L(x_m, c_m) \end{bmatrix},$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T.$$

Setelah diperoleh bentuk matriks seperti persamaan (3.11) selanjutnya adalah memasukkan satu-persatu kondisi batas yang diberikan. Kondisi batas yang pertama yaitu persamaan (3.2) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$1 + \exp(1) + \exp(-1) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi\left(1, c_j\right) \tag{3.13}$$

yang dijabarkan menjadi

$$1 + \exp(1) + \exp(-1) = w_1\phi(1, c_1) + w_2\phi(1, c_2) + \cdots + w_m\phi(1, c_m)$$

dan disubstitusikan ke dalam baris pertama pada persamaan (3.11) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 + \exp(1) + \exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ 2x_m^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1, c_1) & \phi(1, c_2) & \cdots & \phi(1, c_m) \\ L(x_2, c_1) & L(x_2, c_2) & \cdots & L(x_1, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L(x_m, c_1) & L(x_m, c_2) & \cdots & L(x_m, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Kondisi batas kedua yaitu persamaan (3.4) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$-1199 + 11\exp(11) + 11\exp(-11) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi\left(11, c_j\right) \tag{3.14}$$

yang dijabarkan menjadi

$$-1199 + 11\exp(11) + 11\exp(-11) = w_1\phi(11, c_1) + w_2\phi(11, c_2) + \cdots$$
$$+ w_m\phi(11, c_m)$$

dan disubstitusikan ke dalam baris ke-m pada persamaan (3.11) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1+\exp(1)+\exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199+11\exp(11)+11\exp(-11) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi(1,c_1) & \phi(1,c_2) & \cdots & \phi(1,c_m) \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_1,c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(x_m,c_1) & \phi(x_m,c_2) & \cdots & \phi(x_m,c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Kondisi batas ketiga yaitu persamaan (3.3) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$2\exp(1) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_x(1, c_j) \tag{3.15}$$

yang dijabarkan menjadi

$$2\exp(1) = w_1\phi_x(1,c_1) + w_2\phi_x(1,c_2) + \cdots + w_m\phi_x(1,c_m)$$

dan disubstitusikan ke dalam baris ke-$m+1$ pada persamaan (3.11) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1+\exp(1)+\exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199+11\exp(11)+11\exp(-11) \\ 2\exp(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi(1,c_1) & \phi(1,c_2) & \cdots & \phi(1,c_m) \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_1,c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(11,c_1) & \phi(11,c_2) & \cdots & \phi(11,c_m) \\ \phi_x(1,c_1) & \phi_x(1,c_2) & \cdots & \phi_x(1,c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Kondisi batas keempat adalah persamaan(3.5) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$-10 + 12\exp(11) + 10\exp(-11) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_x(11, c_j) \tag{3.16}$$

yang dijabarkan menjadi

$$-10 + 12\exp(11) + 10\exp(-11) = w_1\phi_x(11, c_1) + w_2\phi_x(11, c_2) + \cdots$$
$$+ w_m\phi_x(11, c_m)$$

dan disubstitusikan ke dalam baris ke-$m+2$ pada persamaan (3.11) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 + \exp(1) + \exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199 + 11\exp(11) + 11\exp(-11) \\ 2\exp(1) \\ -10 + 12\exp(11) + 10\exp(-11) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \phi(1, c_1) & \phi(1, c_2) & \cdots & \phi(1, c_m) \\ L(x_2, c_1) & L(x_2, c_2) & \cdots & L(x_1, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(11, c_1) & \phi(11, c_2) & \cdots & \phi(11, c_m) \\ \phi_x(1, c_1) & \phi_x(1, c_2) & \cdots & \phi_x(1, c_m) \\ \phi_x(11, c_1) & \phi_x(11, c_2) & \cdots & \phi_x(11, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Setelah semua kondisi batas dimasukan diperoleh bentuk baru untuk persamaan (3.11) seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 + \exp(1) + \exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199 + 11\exp(11) + 11\exp(-11) \\ 2\exp(1) \\ -10 + 12\exp(11) + 10\exp(-11) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \phi(1, c_1) & \phi(1, c_2) & \cdots & \phi(1, c_m) & \phi(1, c_{m+1}) & \phi(1, c_{m+2}) \\ L(x_2, c_1) & L(x_2, c_2) & \cdots & L(x_1, c_m) & L(x_1, c_{m+1}) & L(x_1, c_{m+2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(11, c_1) & \phi(11, c_2) & \cdots & \phi(11, c_m) & \phi(11, c_{m+1}) & \phi(11, c_{m+2}) \\ \phi_x(1, c_1) & \phi_x(1, c_2) & \cdots & \phi_x(1, c_m) & \phi_x(1, c_{m+1}) & \phi_x(1, c_{m+2}) \\ \phi_x(11, c_1) & \phi_x(11, c_2) & \cdots & \phi_x(11, c_m) & \phi_x(11, c_{m+1}) & \phi_x(11, c_{m+2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \\ w_{m+2} \end{bmatrix}.$$

yang dapat ditulis sebagai

$$A_{(m+2)\times 1} = B_{(m+2)\times(m+2)} \times W_{(m+2)\times 1} \tag{3.17}$$

dan selanjutnya koefisien nilai bobot w dapat dicari dengan menggunakan metode *invers*.

Untuk menggunakan metode *invers* harus dipastikan bahwa matriks B telah memenuhi syarat *invertible* yaitu merupakan matriks bujursangkar dan determinannya tidak sama dengan nol. Pada penelitian ini diperoleh determinan untuk matriks B sebesar $-1{,}2261e-029$ untuk percobaan numerik menggunakan $\Delta x = 1$ dan $7{,}9471e-171$ untuk percobaan numerik menggunakan $\Delta x = 0{,}1$ sehingga koefisien bobot w dapat diperoleh dengan metode *invers* berikut:

$$W_{(m+2)\times 1} = B^{-1}_{(m+2)\times(m+2)} \times A_{(m+2)\times 1}. \tag{3.18}$$

Koefisien nilai bobot w yang telah diperoleh akan digunakan pada persamaan (2.1) untuk mendapatkan solusi numerik persamaan (3.1).

3.1.2 Metode Tak Langsung

Metode tak langsung mengubah fungsi asli dan fungsi-fungsi turunan asli dengan cara menjumlahkan fungsi-fungsi basis yang digunakan. Berkebalikan dengan metode langsung fungsi basis diintegralkan sesuai dengan orde tertinggi fungsi pada persamaan diferensial biasa yang akan diselesaikan. Dengan menggunakan persamaan (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) dan (2.29) ke dalam persamaan (3.1) untuk fungsi dan fungsi-fungsi turunannya seperti berikut:

$$y''''(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi\left(x, c_j\right)$$

$$y'''(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_1\left(x, c_j\right) + A_1$$

$$y''(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_2\left(x, c_j\right) + A_1 x + A_2$$

$$y'(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_3(x, c_j) + \frac{1}{2} A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_4(x, c_j) + \frac{1}{6} A_1 x^3 + \frac{1}{2} A_2 x^2 + A_3 x + A_4$$

diperoleh

$$\begin{aligned} 2x^5 = {} & x^4 \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(x, c_j) - 4x^3 \left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, H_1(x, c_j) + A_1 \right) \\ & + x^2(12 - x^2) \left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, H_2(x, c_j) + A_1 x + A_2 \right) \\ & + 2x(x^2 - 12) \left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, H_3(x, c_j) + \frac{1}{2} A_1 x^2 + A_2 x + A_3 \right) \\ & + 2(12 - x^2) \left(\sum_{j=1}^{m} w_j\, H_4(x, c_j) + \frac{1}{6} A_1 x^3 + \frac{1}{2} A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} w_j & \left(x^4 \phi(x, c_j) - 4x^3 H_1(x, c_j) + x^2(12 - x^2) H_2(x, c_j) \right. \\ & \left. + 2x(x^2 - 12) H_3(x, c_j) + 2(12 - x^2) H_4(x, c_j) \right) \\ & + \left(-4x^3 + 12x^3 - x^5 + x^5 - 12x^3 + 4x^3 - \frac{1}{3} x^5 \right) A_1 \\ & + (12x^2 - x^4 + 2x^4 - 24x^2 + 12x^2 - x^4) A_2 \\ & + (2x^3 - 24x + 24x - 2x^3) A_3 + (24 - 2x^2) A_4 = 2x^5 \end{aligned}$$

diperoleh

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \left(x^4\phi(x,c_j) - 4x^3H_1(x,c_j) + x^2(12-x^2)H_2(x,c_j)\right.$$
$$\left. + 2x(x^2-12)H_3(x,c_j) + 2(12-x^2)H_4(x,c_j)\right)$$
$$-\frac{1}{3}A_1x^5 + (0)A_2 + (0)A_3 + (24-2x^2)A_4 = 2x^5. \qquad (3.20)$$

Misalkan

$$L(x,c_j) = x^4\phi(x,c_j) - 4x^3H_1(x,c_j) + x^2(12-x^2)H_2(x,c_j)$$
$$+2x(x^2-12)H_3(x,c_j) + 2(12-x^2)H_4(x,c_j) \qquad (3.21)$$

sehingga persamaan (3.20) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{j=1}^{m} w_jL(x,c_j) - \frac{1}{3}A_1x^5 + (0)A_2 + (0)A_3 + (24-2x^2)A_4 = 2x^5. \qquad (3.22)$$

Untuk domain $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, maka persamaan (3.22) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$2x_1^5 = w_1L(x_1,c_1) + w_2L(x_1,c_2) + \cdots + w_mL(x_1,c_m) - \frac{1}{3}A_1{x_1}^5$$
$$+(0)A_2 + (0)A_3 + (24-2{x_1}^2)A_4$$
$$2x_2^5 = w_1L(x_2,c_1) + w_2L(x_2,c_2) + \cdots + w_mL(x_2,c_m) - \frac{1}{3}A_1{x_2}^5$$
$$+(0)A_2 + (0)A_3 + (24-2{x_2}^2)A_4 \qquad (3.23)$$
$$\vdots$$
$$2x_m^5 = w_1L(x_m,c_1) + w_2L(x_m,c_2) + \cdots + w_mL(x_m,c_m) - \frac{1}{3}A_1x_m^5$$
$$+(0)A_2 + (0)A_3 + (24-2x_m^5)A_4.$$

Persamaan (3.23) membentuk matriks dengan variabel yang tidak diketahui berupa w, A_1 dan A_4 dan dapat ditulis ke dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 2x_1^5 \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ 2x_m^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(x_1,c_1) & L(x_1,c_2) & \cdots & L(x_1,c_m) & -\frac{1}{3}x_1^5 & (24-2{x_1}^2) \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_2,c_m) & -\frac{1}{3}x_2^5 & (24-2{x_2}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L(x_m,c_1) & L(x_m,c_2) & \cdots & L(x_m,c_m) & -\frac{1}{3}x_m^5 & (24-2{x_m}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ A_1 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

yang dapat ditulis sebagai

$$A_{m\times 1} = B_{m\times(m+2)} \times W_{(m+2)\times 1} \quad (3.25)$$

dimana

$$A = [2x_1^5, 2x_2^5, \dots, 2x_m^5]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} L(x_1,c_1) & L(x_1,c_2) & \cdots & L(x_1,c_m) & -\frac{1}{3}x_1^5 & (24-2{x_1}^2) \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_2,c_m) & -\frac{1}{3}x_2^5 & (24-2{x_2}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L(x_m,c_1) & L(x_m,c_2) & \cdots & L(x_m,c_m) & -\frac{1}{3}x_m^5 & (24-2{x_m}^2) \end{bmatrix},$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_m, A_1, A_4]^T.$$

$$1 + \exp(1) + \exp(-1) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_4(1, c_j) + \frac{1}{6}A_1 + A_4 \quad (3.26)$$

yang dijabarkan menjadi

$$1 + \exp(1) + \exp(-1) = w_1 H_4(1, c_1) + w_2 H_4(1, c_2) + \cdots$$

$$+ w_m H_4(1, c_m) + \frac{1}{6}A_1 + A_4$$

dan disubstitusikan ke dalam baris pertama pada persamaan (3.24) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1+\exp(1)+\exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ 2x_m^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_4(1,c_1) & H_4(1,c_2) & \cdots & H_4(1,c_m) & \frac{1}{6}A_1 & 1 \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_2,c_m) & -\frac{1}{3}x_2^5 & (24-2{x_2}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L(x_m,c_1) & L(x_m,c_2) & \cdots & L(x_m,c_m) & -\frac{1}{3}x_m^5 & (24-2{x_m}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ A_1 \\ A_4 \end{bmatrix}.$$

Kondisi batas kedua adalah persamaan (3.4) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$-1199+11\exp(11)+11\exp(-11) = \sum_{j=1}^{m} w_j H_4(11,c_j) + \frac{1331}{6}A_1 + A_4 \tag{3.27}$$

yang dijabarkan menjadi

$$-1199+11\exp(11)+11\exp(-11) = w_1H_4(11,c_1)+w_2H_4(11,c_2)+\cdots +w_mH_4(11,c_m)+\frac{1331}{6}A_1+A_4$$

dan disubstitusikan ke dalam baris m pada persamaan (3.24) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1+\exp(1)+\exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199+11\exp(11)+11\exp(-11) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_4(1,c_1) & H_4(1,c_2) & \cdots & H_4(1,c_m) & \frac{1}{6}A_1 & 1 \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_2,c_m) & -\frac{1}{3}x_2^5 & (24-2{x_2}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_4(11,c_1) & H_4(11,c_2) & \cdots & H_4(11,c_m) & \frac{1331}{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ A_1 \\ A_4 \end{bmatrix}.$$

Kondisi batas ketiga adalah persamaan (3.3) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$2\exp(1) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_3(1, c_j) + \frac{1}{2}A_1 \tag{3.28}$$

yang dijabarkan menjadi

$$2\exp(1) = w_1 H_3(1, c_1) + w_2 H_3(1, c_2) + \cdots + w_m H_3(1, c_m) + \frac{1}{2}A_1$$

dan disubstitusikan ke dalam baris $m+1$ pada persamaan (3.24) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1+\exp(1)+\exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199 + 11\exp(11) + 11\exp(-11) \\ 2\exp(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_4(1,c_1) & H_4(1,c_2) & \cdots & H_4(1,c_m) & \frac{1}{6}A_1 & 1 \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_2,c_m) & -\frac{1}{3}x_2^5 & (24-2{x_2}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_4(11,c_1) & H_4(11,c_2) & \cdots & H_4(11,c_m) & \frac{1331}{6} & 1 \\ H_3(1,c_1) & H_3(1,c_2) & \cdots & H_3(1,c_m) & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ A_1 \\ A_4 \end{bmatrix}.$$

Kondisi batas keempat adalah persamaan (3.5) dan diubah ke dalam bentuk basisnya sebagai

$$-10 + 12\exp(11) + 10\exp(-11) = \sum_{j=1}^{m} w_j\, H_3(11, c_j) + \frac{121}{2}A_1 \tag{3.29}$$

yang dijabarkan menjadi

$$-10 + 12\exp(11) + 10\exp(-11) = w_1 H_3(11, c_1) + w_2 H_3(11, c_2) + \cdots$$
$$+ w_m H_3(11, c_m) + \frac{121}{2}A_1$$

dan disubstitusikan ke dalam baris $m+2$ pada persamaan (3.24) sehingga

$$\begin{bmatrix} 1+\exp(1)+\exp(-1) \\ 2x_2^5 \\ \vdots \\ -1199+11\exp(11)+11\exp(-11) \\ 2\exp(1) \\ -10+12\exp(11)+10\exp(-11) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_4(1,c_1) & H_4(1,c_2) & \cdots & H_4(1,c_m) & \frac{1}{6}A_1 & 1 \\ L(x_2,c_1) & L(x_2,c_2) & \cdots & L(x_2,c_m) & -\frac{1}{3}x_2^5 & (24-2{x_2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_4(11,c_1) & H_4(11,c_2) & \cdots & H_4(11,c_m) & \frac{1331}{6} & 1 \\ H_3(1,c_1) & H_3(1,c_2) & \cdots & H_3(1,c_m) & \frac{1}{2} & 0 \\ H_3(11,c_1) & H_3(11,c_2) & \cdots & H_3(11,c_m) & \frac{121}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ A_1 \\ A_4 \end{bmatrix}.$$

Setelah semua kondisi batas dimasukan dan diperoleh bentuk matriks seperti di atas yang dapat ditulis sebagai

$$A_{(m+2)\times 1} = B_{(m+2)\times(m+2)} \times W_{(m+2)\times 1} \qquad (3.30)$$

dan selanjutnya koefisien nilai bobot w dapat dicari dengan menggunakan metode *invers*. Untuk menggunakan metode *invers* harus dipastikan bahwa matriks B telah memenuhi syarat *invertible* yaitu merupakan matriks bujursangkar dan determinannya tidak sama dengan nol. Pada penelitian ini diperoleh determinan untuk matriks B sebesar 0,20773 untuk percobaan numerik menggunakan $\Delta x = 1$ dan $-2{,}9653e - 115$ untuk percobaan numerik menggunakan $\Delta x = 0{,}1$ sehingga koefisien bobot w dapat diperoleh dengan metode *invers* berikut:

$$W_{(m+2)\times 1} = B^{-1}_{(m+2)\times(m+2)} \times A_{(m+2)\times 1}. \qquad (3.18)$$

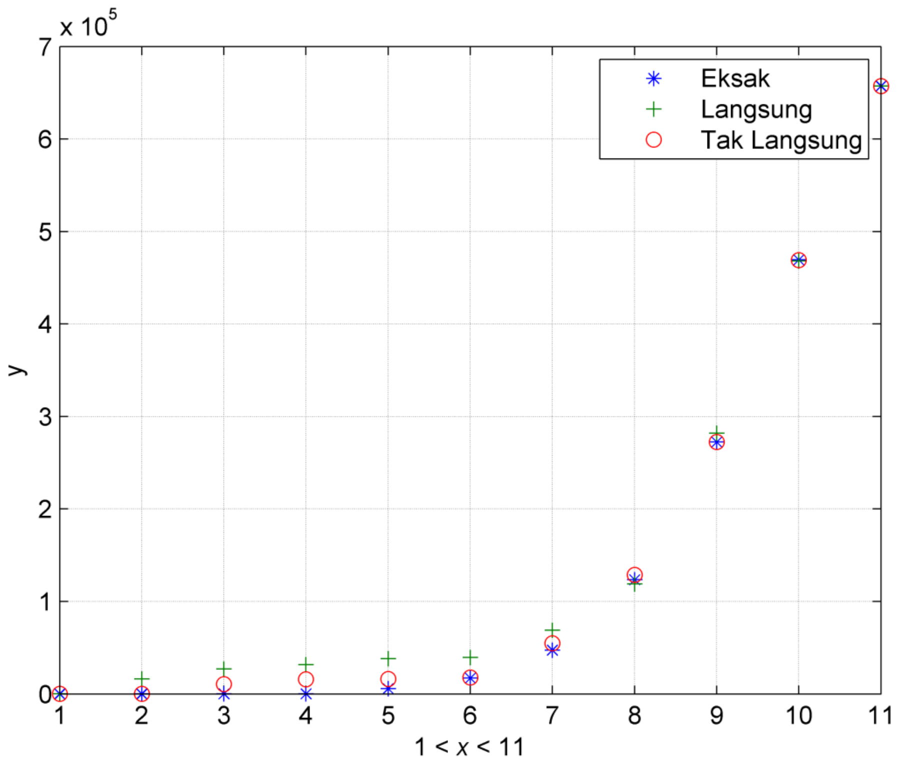
Koefisien nilai bobot w yang telah diperoleh akan digunakan pada persamaan (2.1) untuk mendapatkan solusi numerik persamaan (3.1).

3.2 Simulasi dan Interpetasi Hasil Numerik Jaringan RBF

Pada penelitian ini percobaan numerik dengan jaringan RBF untuk persamaan (3.1) dilakukan dengan menggunakan dua Δx yang berbeda, yaitu $\Delta x = 1$ dan $\Delta x = 0{,}1$ sehingga dilakukan perhitungan numerik sebanyak 10 dan 101 titik iterasi.

3.2.1 Metode Langsung

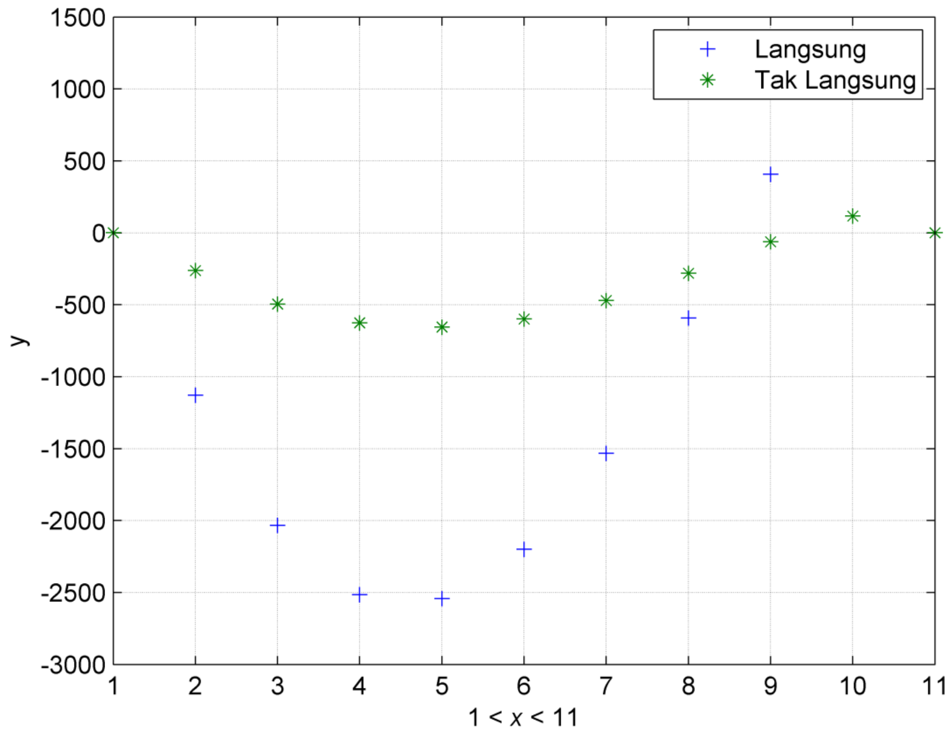
Pada Gambar 3.1 berikut ini dapat dilihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan jaringan RBF metode langsung dan tak langsung dengan $\Delta x = 1$.



Gambar 3.1 Grafik Solusi Eksak dan Solusi Numerik Jaringan RBF dengan $\Delta x = 1$

Berikutnya adalah selisih *error* yang dihasilkan dengan menggunakan jaringan RBF metode langsung dan metode tak langsung untuk $\Delta x = 1$

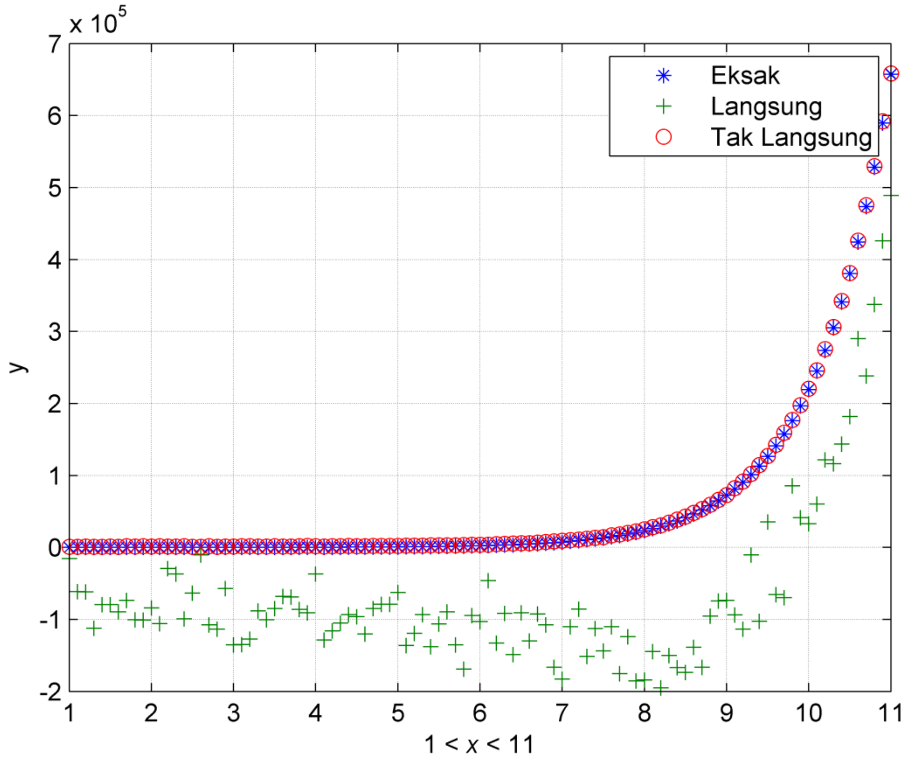
menunjukkan metode langsung memberikan hasil *error* yang lebih kecil dibandingkan *error* yang dihasilkan metode tak langsung yang dapat dilihat pada Gambar 3.2, selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 4 untuk tabel hasil aproksimasi dan selisih *error*.



Gambar 3.2 Grafik *Error* (SSE) Solusi Numerik Jaringan RBF dengan $\Delta x = 1$

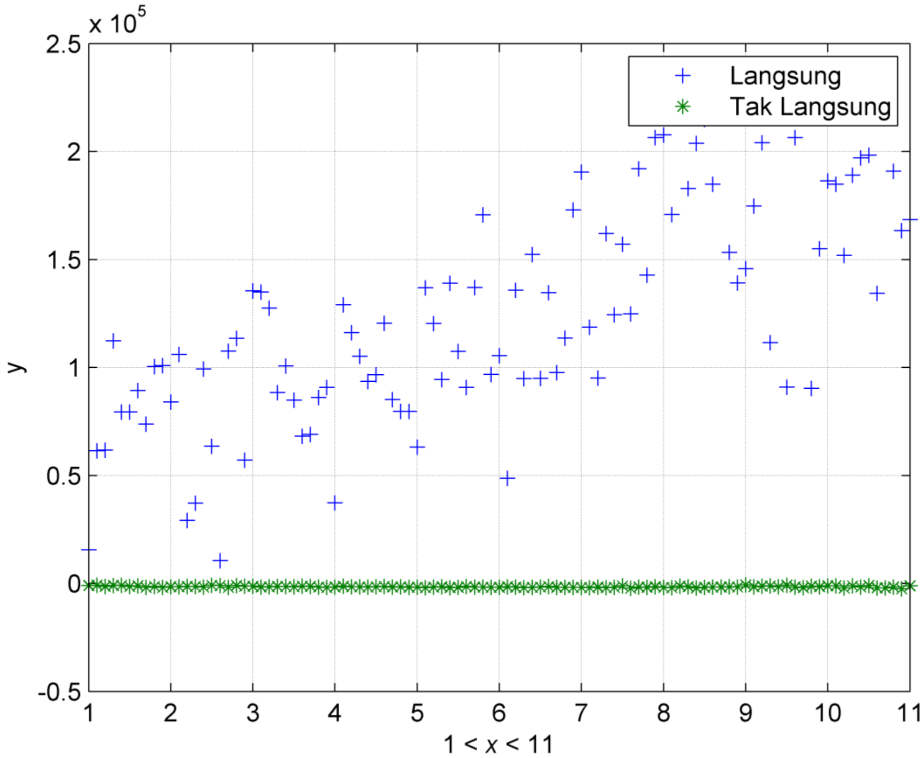
3.2.2 Metode Tak Langsung

Pada Gambar 3.3 berikut ini dapat dilihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan jaringan RBF metode langsung dan tak langsung untuk $\Delta x = 0{,}1$ menunjukkan jaringan RBF metode tak langsung memberikan hasil yang hampir menyamai solusi eksaknya.



Gambar 3.3 Grafik Solusi Eksak dan Solusi Numerik Jaringan RBF dengan $\Delta x = 0{,}1$

Berikutnya adalah selisih *error* yang dihasilkan dengan menggunakan jaringan RBF metode langsung dan metode tak langsung untuk $\Delta x = 1$ menunjukkan metode tak langsung memberikan hasil *error* yang lebih kecil dibandingkan *error* yang dihasilkan metode langsung yang dapat dilihat pada Gambar 3.4, selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5 untuk tabel hasil aproksimasi dan selisih *error*.



Gambar 3.4 Grafik *Error* (SSE) Solusi Numerik Jaringan RBF dengan $\Delta x = 0{,}1$

3.2.3 Hasil Perbandingan

Perbandingan keakuratan hasil numerik antara jaringan RBF metode langsung dengan jaringan RBF metode tak langsung dapat dihitung dengan menggunakan *sum square error* (SSE). Untuk $\Delta x = 1$ jaringan RBF metode langsung menghasilkan SSE sebesar $27397519{,}858608$ sedangkan jaringan RBF metode langsung menghasilkan SSE sebesar $1810244{,}12877041$. Untuk $\Delta x = 0{,}1$ jaringan RBF metode langsung menghasilkan SSE sebesar $1880970746360{,}89$ sedangkan jaringan RBF metode tak langsung menghasilkan SSE sebesar $256431884{,}824037$. Dari hasil SSE jaringan RBF metode tak langsung menghasilkan *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan jaringan RBF metode langsung.

Berikutnya adalah membandingkan rata-rata SSE yang dihasilkan dari kedua metode tesebut untuk mengetahui keakuratan yang dihasilkan jika titiknya semakin banyak yaitu $\Delta x = 1$ dengan 11 titik dan $\Delta x = 0{,}1$ dengan 101 titik. Dari hasil perhitungan diperoleh rata-rata SSE untuk jaringan RBF metode langsung dengan $\Delta x = 1$ sebesar $2490683{,}62350982$ dan $\Delta x = 0{,}1$ sebesar $18623472736{,}2465$. Sedangkan hasil perhitungan rata-rata SSE jaringan RBF metode tak langsung dengan $\Delta x = 1$ adalah sebesar $164567{,}648070037$ dan $\Delta x = 0{,}1$ sebesar $2538929{,}55271324$. Secara lebih detil perbedaan hasil *sum square error* dari dua metode yang digunakan untuk penyelesaian persamaan (3.1) dapat dilihat pada lembar lampiran 5 dan 6.

Dari hasil simulasi numerik yang telah dilakukan dapat diperoleh perbandingan keakuratan antara jaringan RBF metode langsung dan tak langsung dengan menggunakan *sum square error* (SSE). Untuk simulasi dengan $\Delta x = 1$ jaringan RBF metode tak langsung meghasilkan solusi yang lebih baik daripada jaringan RBF metode langsung dengan selisih *error* yang lebih kecil

Perbandingan antara solusi numerik dari jaringan RBF dengan solusi eksak dari persamaan (3.1) dapat dilihat pada gambar (3.3) yang menggunakan iterasi sebanyak 11 titik. Grafik tersebut menunjukkan solusi numerik jaringan RBF menghasilkan solusi yang baik.

3.3 Kajian Penyelesaian Numerik dalam Islam

Pada pembahasan bab sebelumnya diterangkan dalam surat al-Insyiroh ayat 5 dan 6, bahwa “karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”. Agar manusia tidak selalu merasa dirimya susah, karena dibalik rasa susah atau kesulitan itu pasti ada kemudahan bagi dirinya kelak. Sehingga menjadi insan yang selalu bersyukur kepada-Nya. Seperti halnya dalam penyelesaiaan numerik, mempunyai solusi atau alternatif penyelesaiaan yang juga merupakan salah satu solusi dari ciptaan Allah Swt. Dalam setiap masalah atau kesulitan sesudah itu ada kemudahan setelahnya, maka selayaknya sebagai manusia kita harus pandai menempatkan diri, sesuai dalam firman Allah surat al-Baqarah ayat 286 yang berbunyi seperti berikut:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ إِن نَّسِينَآ أَوْ أَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ إِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُۥ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِۦ ۖ وَٱعْفُ عَنَّا وَٱغْفِرْ لَنَا وَٱرْحَمْنَآ ۚ أَنتَ مَوْلَىٰنَا فَٱنصُرْنَا عَلَى ٱلْقَوْمِ ٱلْكَٰفِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau hukum Kami jika Kami lupa atau Kami tersalah. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau bebankan kepada Kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan Kami, janganlah Engkau pikulkan kepada Kami apa yang tak sanggup Kami memikulnya. beri ma'aflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong Kami, Maka tolonglah Kami terhadap kaum yang kafir."

Dalam ayat di atas menerangkan bahwa Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Jadi ketika manusia diberi amanah menjadi seorang khalifah di bumi maka sesuatu yang menjadi kewajibannya yang menyangkut tentang kekuasaannya sesuai dengan kesanggupannya, karena maha adil, bijaksana dan maha segalanya.

Kewajiban sebagai manusia yang satu dengan manusia yang lainnya pasti ada masalah yang tidak dapat dipecahkan sendiri, sehingga saling membutuhkan solusi kepada yang lainnya. Seperti halnya solusi numerik yang membutuhkan metode Euler, Range-kutta dan metode-metode yang lain. Kewajiban manusia satu dengan manusia yang lainnya akan terjadi sikap saling tolong menolong. Sebagaimana telah disebutkan dalam al-Quran dalam surat aL-Maidah ayat 2 sebagai berikut:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ لَا تُحِلُّواْ شَعَٰٓئِرَ ٱللَّهِ وَلَا ٱلشَّهۡرَ ٱلۡحَرَامَ وَلَا ٱلۡهَدۡيَ وَلَا ٱلۡقَلَٰٓئِدَ وَلَآ
ءَآمِّينَ ٱلۡبَيۡتَ ٱلۡحَرَامَ يَبۡتَغُونَ فَضۡلٗا مِّن رَّبِّهِمۡ وَرِضۡوَٰنٗاۚ وَإِذَا حَلَلۡتُمۡ فَٱصۡطَادُواْۚ وَلَا
يَجۡرِمَنَّكُمۡ شَنَـَٔانُ قَوۡمٍ أَن صَدُّوكُمۡ عَنِ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِ أَن تَعۡتَدُواْۘ وَتَعَاوَنُواْ
عَلَى ٱلۡبِرِّ وَٱلتَّقۡوَىٰۖ وَلَا تَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡإِثۡمِ وَٱلۡعُدۡوَٰنِۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ
ٱلۡعِقَابِ ٢

"Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. dan bertakwalah kamu kepada Allah, Sesungguhnya Allah Amat berat siksa-Nya".

Dengan pemecahan solusi atas masalah yang timbul sikap saling tolong menolong antara individu manusia yang satu dengan yang lainnya, maka akan memunculkan sikap sosial kemasyarakatan yang kuat. Sebagaimana telah disebutkan dalam al-Quran surat pada surat al-Hujaraat ayat ke-9 berikut:

وَإِن طَآئِفَتَانِ مِنَ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ ٱقۡتَتَلُواْ فَأَصۡلِحُواْ بَيۡنَهُمَاۖ فَإِنۢ بَغَتۡ إِحۡدَىٰهُمَا عَلَى
ٱلۡأُخۡرَىٰ فَقَٰتِلُواْ ٱلَّتِي تَبۡغِي حَتَّىٰ تَفِيٓءَ إِلَىٰٓ أَمۡرِ ٱللَّهِۚ فَإِن فَآءَتۡ فَأَصۡلِحُواْ بَيۡنَهُمَا
بِٱلۡعَدۡلِ وَأَقۡسِطُوٓاْۖ إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلۡمُقۡسِطِينَ ٩

"Dan kalau ada dua golongan dari mereka yang beriman itu berperang hendaklah kamu damaikan antara keduanya! tapi kalau yang satu melanggar Perjanjian terhadap yang lain, hendaklah yang melanggar Perjanjian itu kamu perangi sampai surut kembali pada perintah Allah. kalau Dia telah surut,

damaikanlah antara keduanya menurut keadilan, dan hendaklah kamu Berlaku adil; Sesungguhnya Allah mencintai orang-orang yang Berlaku adil".

Dalam kandungan ayat di atas telah jelas bahwa dengan adanya sikap sosial kemasyarakatan yang kuat, maka akan timbul kehidupan yang damai, sejahtera, aman dan sentosa diantara individu manusia atau kelompok manusia tanpa memandang tingkat ekonomi, ras, suku, budaya bahkan agama yang biasa disebut juga dengan pluralisme dalam kehidupan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan diferensial linier orde-4 menggunakan jaringan RBF metode langsung mengaproksimasi fungsi asal dan fungsi-fungsi turunannya dengan menurunkan secara parsial fungsi basis sesuai dengan ordernya, sedangkan pada metode tak langsung mengaproksimasi fungsi asal dan fungsi-fungsi turunannya dengan proses pengintegralan fungsi basis.
2. Analisis numerik menggunakan jaringan RBF berdasarkan *sum square error* (SSE) menunjukkan bahwa jaringan RBF metode tak langsung menghasilkan solusi numerik yang lebih baik dibandingkan dengan jaringan RBF metode langsung.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, skripsi ini dapat dikembangkan untuk persamaan diferensial biasa non-linier.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. 2005. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Anonymous. 2016. *Jaringan Saraf Tiruan*, (https://id.wikipedia.org /wiki/Jaringan_saraf_ tiruan), diakses 14 Januari 2016.

Bronson, R. & Costa, G. 2009. *Schaum's Easy Outlines of Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Hidayat, D. 2015. Tafsir Jalalain. *Jalaluddin Asy-Syuthi*, 2 (1). (Online), (http://myface-online.blogspot.com**),** di akses 15 Juni 2015.

Johnson, R.S. 2012. *Integrations and Differential Equations*. Newcastle: Ventus Publishing, Inc.

Kusumadewi, S. 2003. *Kecerdasan Buatan.* Karya Ilmiah tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Islam Indonesia.

Mai-Duy, N. 2004. Solving High Order Ordinary Differential Equations with Radial Basis Function Networks. *International Journal Numeric Mathematical Enginering,* 04 (1): 1-53.

Mai-Duy, N. & Tran-Chong, T. 2002. Approximation of Function and its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modelling,* 27 (03): 197-220.

Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Purcell, E.J & Varberg, D. 1987. *Calculus with Analytic Geometry*, *Jilid I.* Terjemahan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Yani, E. 2005. Pengantar Jaringan Syaraf Tiruan. *Materi Kuliah*, (Online), 1 (1): 1-15, (http://www.materikuliah.com), diakses 25 Oktober 2015.

LAMPIRAN 1

Program simulasi numerik pesamaan (3.1) menggunakan jaringan RBF dengan

$\Delta x = 1$

```
clear;
clf;
clc;

%Domain
x = linspace(1,11,11);
m = length(x);
c = linspace(1,11,m+2);
n = length(c);
a = var(c);

%Solusi eksak dan turunan pertama
 y = @(x) x+x.^2-x.^3+x.*exp(x)+x.*exp(-x);
yx = @(x) 1+2*x-3*x.^2+exp(x)+x.*exp(x)+exp(-x)-x.*exp(-x);

%Fungsi dan Turunan Fungsi RBF
mq = mq(x,c,a);
mqx = mqx(x,c,a);
mqxx = mqxx(x,c,a);
mqxxx = mqxxx(x,c,a);
mqxxxx = mqxxxx(x,c,a);

%Aproksimasi PDB dengan Jaringan RBF Metode Langsung


for j = 1:m;
   C(j,:)              =              x(j)^4*mqxxxx(j,:)-4*x(j)^3*mqxxx(j,:)+x(j)^2*(12-
x(j)^2)*mqxx(j,:)+...
   2*x(j)*(x(j).^2-12)*mqx(j,:)+2*(12-x(j)^2)*mq(j,:);
end

A = [mq(1,:);mq(end,:);mqx(1,:);mqx(end,:);C(2:end-1,:)];
B = [y(x(1));y(x(end));yx(x(1));yx(x(end));(2*x(2:end-1).^5)'];

w = A\B;
Y = mq*w;

sse = sum( (Y'-y(x)).^2 );
title(['sse = ' num2str(sse,'%10.5e\n')])

%Domain
xi  = linspace(1,11,11);
```

```
xti = xi';
mi  = length(xi);
ci  = linspace(1,11,m-2);
ni  = length(ci);
ai  = var(ci);

%Solusi eksak dan turunan pertama
 yi = @(xi) xi+xi.^2-x.^3+xi.*exp(xi)+xi.*exp(-xi);
yxi = @(xi) 1+2*xi-3*xi.^2+exp(xi)+xi.*exp(xi)+exp(-xi)-xi.*exp(-xi);

%Fungsi dan Integral Fungsi RBF
H0 = H0(xi,ci,ai);
H1 = H1(xi,ci,ai);
H2 = H2(xi,ci,ai);
H3 = H3(xi,ci,ai);
H4 = H4(xi,ci,ai);

%Aproksimasi PDB dengan Jaringan RBF Metode Tak Langsung
I = ones(mi,1);
O = zeros(mi,1);
A0 = [H0 O O O O];
A1 = [H1 I O O O];
A2 = [H2 xti I O O ];
A3 = [H3 0.5*xti.^2 xti I O];
A4 = [H4 (1/6)*xti.^3 0.5*xti.^2 xti I];

for j = 1:m;
    Ci(j,:) = xi(j)^4*A0(j,:)-4*xi(j)^3*A1(j,:)+xi(j)^2*(12-xi(j)^2)*A2(j,:)+...
    2*xi(j)*(xi(j).^2-12)*A3(j,:)+2*(12-xi(j)^2)*A4(j,:);
end
A = [A4(1,:);Ci(2:end-1,:);A4(end,:);A3(1,:);A3(end,:)];
B = [y(xi(1));(2*xi(2:end-1).^5)';y(xi(end));yxi(xi(1));yxi(xi(end))];

wi = A\B;
Yi = A4*wi;


error = (sum(yi(xi)'-Yi))/m;

SL = y(x)'-Y;
SSL = (y(x)'-Y).^2;
sumSSL = sum((y(x)'-Y).^2)/m;

ST = y(x)'-Yi;
SST = (y(x)'-Yi).^2;
sumSST = sum((y(x)'-Yi).^2)/m;
```

```
figure(1), grafik = plot(x,y(x),'*',x,Y,'+',xi,Yi,'o')
grid on
legend('Eksak','Langsung','Tak Langsung')

ssei = (sum((Yi'-yi(xi)).^2))/m ;
title(['sse rata-rata Langsung = ' num2str(sumSSL,'%10.5e\n'),'sse rata-rata Tak
Langsung = ' num2str(sumSST,'%10.5e\n')])

figure(2), selisih = plot(x,SL,'*',xi,ST,'.')
grid on
legend('Langsung','Tak Langsung')

{'Solusi Eksak','Solusi Metode Langsung';[y(x)'],[Y]}
```

LAMPIRAN 2

Program simulasi numerik pesamaan (3.1) menggunakan jaringan RBF dengan $\Delta x = 0,1$

```
clear;
clf;
clc;

%Domain
x = linspace(1,11,101);
m = length(x);
c = linspace(1,11,m+2);
n = length(c);
a = var(c);

%Solusi eksak dan turunan pertama
 y = @(x) x+x.^2-x.^3+x.*exp(x)+x.*exp(-x);
yx = @(x) 1+2*x-3*x.^2+exp(x)+x.*exp(x)+exp(-x)-x.*exp(-x);

%Fungsi dan Turunan Fungsi RBF
mq = mq(x,c,a);
mqx = mqx(x,c,a);
mqxx = mqxx(x,c,a);
mqxxx = mqxxx(x,c,a);
mqxxxx = mqxxxx(x,c,a);

%Aproksimasi PDB dengan Jaringan RBF Metode Langsung


for j = 1:m;
   C(j,:) = x(j)^4*mqxxxx(j,:)-4*x(j)^3*mqxxx(j,:)+x(j)^2*(12-x(j)^2)*mqxx(j,:)+...
   2*x(j)*(x(j).^2-12)*mqx(j,:)+2*(12-x(j)^2)*mq(j,:);
end

A = [mq(1,:);mq(end,:);mqx(1,:);mqx(end,:);C(2:end-1,:)];
B = [y(x(1));y(x(end));yx(x(1));yx(x(end));(2*x(2:end-1).^5)'];

w = A\B;
Y = mq*w;

sse = sum( (Y'-y(x)).^2 );
title(['sse = ' num2str(sse,'%10.5e\n')])

%Domain
xi  = linspace(1,11,101);
```

```
xti = xi';
mi  = length(xi);
ci  = linspace(1,11,m-2);
ni  = length(ci);
ai  = var(ci);

%Solusi eksak dan turunan pertama
 yi = @(xi) xi+xi.^2-x.^3+xi.*exp(xi)+xi.*exp(-xi);
yxi = @(xi) 1+2*xi-3*xi.^2+exp(xi)+xi.*exp(xi)+exp(-xi)-xi.*exp(-xi);

%Fungsi dan Integral Fungsi RBF
H0 = H0(xi,ci,ai);
H1 = H1(xi,ci,ai);
H2 = H2(xi,ci,ai);
H3 = H3(xi,ci,ai);
H4 = H4(xi,ci,ai);

%Aproksimasi PDB dengan Jaringan RBF Metode Tak Langsung
I = ones(mi,1);
O = zeros(mi,1);
A0 = [H0 O O O O];
A1 = [H1 I O O O];
A2 = [H2 xti I O O ];
A3 = [H3 0.5*xti.^2 xti I O];
A4 = [H4 (1/6)*xti.^3 0.5*xti.^2 xti I];

for j = 1:m;
   Ci(j,:) = xi(j)^4*A0(j,:)-4*xi(j)^3*A1(j,:)+xi(j)^2*(12-xi(j)^2)*A2(j,:)+...
   2*xi(j)*(xi(j).^2-12)*A3(j,:)+2*(12-xi(j)^2)*A4(j,:);
end
A = [A4(1,:);Ci(2:end-1,:);A4(end,:);A3(1,:);A3(end,:)];
B = [y(xi(1));(2*xi(2:end-1).^5)';y(xi(end));yxi(xi(1));yxi(xi(end))];

wi = A\B;
Yi = A4*wi;

error = (sum(yi(xi)'-Yi))/m;

SL = y(x)'-Y;
SSL = (y(x)'-Y).^2;
sumSSL = sum((y(x)'-Y).^2)/m;

ST = y(x)'-Yi;
SST = (y(x)'-Yi).^2;
sumSST = sum((y(x)'-Yi).^2)/m;


figure(1), grafik = plot(x,y(x),'*',x,Y,'+',xi,Yi,'o')
```

```
grid on
legend('Eksak','Langsung','Tak Langsung')

ssei = (sum((Yi'-yi(xi)).^2))/m ;
title(['sse rata-rata Langsung = ' num2str(sumSSL,'%10.5e\n'),'sse rata-rata Tak Langsung = ' num2str(sumSST,'%10.5e\n')])

figure(2), selisih = plot(x,SL,'*',xi,ST,'.')
grid on
legend('Langsung','Tak Langsung')

{'Solusi Eksak','Solusi Metode Langsung';[y(x)'],[Y]}
```

LAMPIRAN 3

Program fungsi asal dan tungsi turunan pertama sampai fungsi turunan keempat untuk jaringan RBF metode langsung.

1. Fungsi Asal

```
function Q = mq(x,c,a)

m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
      Q(i,j)=sqrt(((x(i)-c(j)).^2)+a.^2);
   end
end
```

2. Turunan pertama

```
function Qx = mqx(x,c,a)

m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
      Qx(i,j)=(x(i)-c(j))./sqrt((x(i)-
c(j)).^2+a.^2);
   end
end
```

3. Turunan kedua

```
function Qxx = mqxx(x,c,a)

m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
      Qxx(i,j)=a.^2./(sqrt((x(i)-
c(j)).^2+a.^2)).^3;
   end
end
```

4. Turunan ketiga

```
function Qxxx = mqxxx(x,c,a)

m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
       Qxxx(i,j)=3*a^2*(c(j)-x(i))./sqrt((x(i)-
c(j)).^2+a^2).^5;
   end
end
```

5. Turunan keempat

```
function Qxxxx = mqxxxx(x,c,a)

m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
       Qxxxx(i,j)=-3*a^2*(a^2-
4*c(j).^2+8*c(j).*x(i)-4*x(i).^2)./sqrt((x(i)-
c(j)).^2+a^2).^7;
   end
end
```

LAMPIRAN 4

Program fungsi asal dan tungsi integral pertama sampai fungsi integral keempat untuk jaringan RBF metode langsung.

1. Fungsi Asal

```
function Qxxxx = H0(x,c,a)

m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
    for j=1:n
        Qxxxx(i,j)=((x(i)-c(j))^2+a^2)^0.5;
    end
end
```

2. Turunan pertama

```
function Qxxx = H1(x,c,a)

k=0;
m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
    for j=1:n
        Qxxx(i,j)= 0.5*(x(i)-c(j))*( (x(i)-
c(j))^2+a^2 )^0.5 +...0.5*a^2*log((x(i)-c(j))+((x(i)-
c(j))^2+a^2)^0.5)+k;
    end
end
```

3. Turunan kedua

```
function Qxx = H2(x,c,a)

k=0;
m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
    for j=1:n
        Qxx(i,j)= ( -a^2/3 + (x(i)-c(j))^2/6
)*((x(i)-c(j))^2+a^2)^0.5 +...
                ( a^2*(x(i)-c(j))/2 )*log((x(i)-
```

```
c(j))+((x(i)-c(j))^2+a^2)^0.5)+k*x(i)+k;
  end
end
```

4. Turunan ketiga

```
function Qx = H3(x,c,a)

k=0;
m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
       Qx(i,j)=( -13*a^2*(x(i)-c(j))/48 + (x(i)-
c(j))^3/24 )*((x(i)-
c(j))^2+a^2)^0.5 +...
            ( -a^4/16 + a^2*(x(i)-c(j))^2/4 )*log(
(x(i)-c(j))+ ((x(i)-
c(j))^2+a^2)^0.5)+0.5*k*x(i)^2*k+k*x(i)+k;
   end
end
```

5. Turunan keempat

```
function Q = H4(x,c,a)

k=0;
m  = length(x);
n  = length(c);

for i=1:m
   for j=1:n
       Q(i,j)= ( a^4/45-83*a^2*(x(i)-
c(j))^2/720+(x(i)-c(j))^4/120 )*((x(i)-
c(j))^2+a^2)^0.5 +...
              ( -3*a^4*(x(i)-c(j))/48+4*a^2*(x(i)-
c(j))^3/48 )*log((x(i)-c(j))+((x(i)-
c(j))^2+a^2)^0.5)+1/6*k*x(i)^3+0.5*k*x(i)^2+k*x(i)+k;
   end
end
```

LAMPIRAN 4

Tabel hasil simulasi numerik penyelesaian persamaan diferensial linier orde-4 menggunakan jaringan RBF untuk $\Delta x = 1$

x	Solusi Eksak $y(x)$	Metode Langsung $\hat{y}(x)$	Metode tak Langsung $\hat{y}(x)$
1	4,08616126963049	3,96386718750000	3,14160156250000
2	13,0487827643345	1140,68164062500	275,705688476563
3	45,4059719746666	2079,00878906250	540,666137695313
4	174,465862688132	2688,85351562500	799,322875976563
5	647,099485247878	3189,47460937500	1301,54699707031
6	2246,58763346947	4446,78125000000	2845,61499023438
7	7389,43849217297	8921,88574218750	7860,37060546875
8	23407,6665800349	24000,0498046875	23689,1024169922
9	72288,7564588667	71880,9111328125	72351,1611328125
10	219374,658402066	218150,687500000	219258,414062500
11	657416,559050895	657416,373046875	657416,290161133

Tabel perbandingan selisih *error*

Titik	*error* Metode Langsung $e = y(x) - \hat{y}(x)$	*error* Metode tak Langsung $e = y(x) - \hat{y}(x)$
1	0,122294082130487	0,944559707130487
2	-1127,63285786067	-262,656905712228
3	-2033,60281708783	-495,260165720646
4	-2514,38765293687	-624,857013288431

5	-2542,37512412712	-654,447511822434
6	-2200,19361653053	-599,027356764905
7	-1532,44725001453	-470,932113295781
8	-592,383224652651	-281,435836957338
9	407,845326054186	-62,4046739458136
10	1223,97090206647	116,244339566474
11	0,186004019691609	0,268889761879109

Tabel perbandingan SSE

Titik	SSE Metode Langsung $e = \left(y(x) - \hat{y}(x)\right)^2$	SSE Metode tak Langsung $e = \left(y(x) - \hat{y}(x)\right)^2$
1	0,0149558425241384	0,892193040334432
2	1271555,86212701	68988,6501183222
3	4135540,41766757	245282,631749642
4	6322145,26924137	390446,287055738
5	6463671,27178040	428301,545730575
6	4840851,95022169	358833,774152748
7	2348394,57407710	221777,055333230
8	350917,884849873	79206,1303238775
9	166337,809984246	3894,34333028330
10	1498104,76910542	13512,7464812457
11	0,0345974953414364	0,0723017040434039
Σ	27397519,858608	1810244,12877041

Rata-rata jumlah kuadrat *error* untuk metode langsung

$$SSE\ rata-rata = \frac{\left(y(x) - \hat{y}(x)\right)^2}{banyak\ titik}$$

$$= \frac{27397519{,}858608}{11}$$

$$= 2490683{,}62350982$$

Rata-rata jumlah kuadrat *error* untuk metode tak langsung

$$SSE\ rata-rata = \frac{\left(y(x) - \hat{y}(x)\right)^2}{banyak\ titik}$$

$$= \frac{1810244{,}12877041}{11}$$

$$= 164567{,}648070037$$

LAMPIRAN 5

Tabel hasil simulasi numerik penyelesaian persamaan diferensial linier orde-4 menggunakan jaringan RBF untuk $\Delta x = 0{,}1$

x	Solusi Eksak $y(x)$	Metode Langsung $\hat{y}(x)$	Metode tak Langsung $\hat{y}(x)$
1	4,08616126963049	-15616	929,125
1,1	4,64974081840897	-61440	832,081542968750
1,2	5,25757336157850	-61696	1374,77197265625
1,3	5,91737699884924	-112384	943,447753906250
1,4	6,63851570310079	-79360	868,359130859375
1,5	7,43222884572974	-79360	1455,75805664063
1,6	8,31188630782363	-89344	1091,89501953125
1,7	9,29327255682589	-73728	1875,02124023438
1,8	10,3949034347422	-100352	1423,38745117188
1,9	11,6383798168536	-100864	1835,24536132813
2	13,0487827643345	-83968	1496,84497070313
2,1	14,6551153157233	-105984	1610,43847656250
2,2	16,4907966471522	-29184	1394,27587890625
2,3	18,5942149866363	-37120	1474,60913085938
2,4	21,0093464014344	-99328	1709,68872070313
2,5	23,7864473983184	-63488	869,765869140625
2,6	26,9828301943617	-10496	1053,09155273438
2,7	30,6637305415540	-107520	1861,91674804688

2,8	34,9032791344223	-113408	978,492431640625
2,9	39,7855889095485	-57088	1333,07006835938
3	45,4059719746666	-135424	1375,90014648438
3,1	51,8723014998891	-134912	1669,23413085938
3,2	59,3065356834807	-127488	1623,32275390625
3,3	67,8464228905951	-88320	1416,41723632813
3,4	77,6474092790150	-100608	1482,76831054688
3,5	88,8847726974012	-84736	1680,62744140625
3,6	101,756009398051	-68096	1356,24560546875
3,7	116,483503180190	-68864	1487,87377929688
3,8	133,317510007597	-86016	1805,76293945313
3,9	152,539494966206	-90624	2008,16381835938
4	174,465862688132	-37120	1825,32836914063
4,1	199,452127118331	-128768	1531,50659179688
4,2	227,897571794532	-115968	1784,94995117188
4,3	260,250457712014	-104960	1803,90966796875
4,4	297,013842421433	-93184	2022,63647460938
4,5	338,752081336770	-96256	1883,38159179688
4,6	386,098090397321	-120064	1788,39599609375
4,7	439,761458327358	-84736	2107,93090820313
4,8	500,537506875763	-79104	2060,23706054688
4,9	569,317408713232	-79104	2367,56567382813
5	647,099485247878	-62464	2368,16748046875

5,1	735,001820636983	-136192	2696,29418945313
5,2	834,276343885774	-119552	2546,19604492188
5,3	946,324548314103	-93440	2468,12524414063
5,4	1072,71503703970	-137984	2996,33105468750
5,5	1215,20310469612	-106240	2974,08178710938
5,6	1375,75258962327	-89344	2820,58105468750
5,7	1556,56025751535	-135424	3193,12622070313
5,8	1760,08300729348	-168960	3452,95336914063
5,9	1989,06822312987	-94720	3830,31323242188
6	2246,58763346947	-103168	4031,45678710938
6,1	2536,07507899644	-46080	4046,63549804688
6,2	2861,36863724813	-132864	4614,10034179688
6,3	3226,75760251345	-91648	5184,10180664063
6,4	3637,03487634788	-148736	5462,89086914063
6,5	4097,55538714311	-90880	5820,71948242188
6,6	4614,30122742607	-130048	6043,83862304688
6,7	5193,95427573229	-92416	6950,49780273438
6,8	5843,97715689384	-107776	7614,94995117188
6,9	6572,70349139414	-166400	8407,44506835938
7	7389,43849217297	-183040	9266,23413085938
7,1	8304,57108714225	-110336	10273,5688476563
7,2	9329,69887905763	-85760	10999,6994628906
7,3	10477,7674028002	-151552	12454,8774414063

7,4	11763,2253052403	-112640	13633,3542480469
7,5	13202,1972565532	-143872	14393,3803710938
7,6	14812,6766062222	-110080	17105,2070312500
7,7	16614,7400243008	-175360	18251,0849609375
7,8	18630,7866214039	-124160	20425,2651367188
7,9	20885,8043221952	-185600	22381,9990234375
8	23407,6665800349	-184320	25227,5380859375
8,1	26227,4628684661	-144640	28228,1323242188
8,2	29379,8667722846	-195072	30586,0334472656
8,3	32903,5459314149	-150016	34399,4921875000
8,4	36841,6185695643	-166912	38918,7587890625
8,5	41242,1618720238	-173568	43042,0864257813
8,6	46158,7780690314	-138752	47907,7248535156
8,7	51651,2247394674	-166656	53309,9250488281
8,8	57786,1165816965	-95488	59394,9375000000
8,9	64637,7067123498	-74496	66309,0146484375
9	72288,7564588667	-73472	72966,4064941406
9,1	80831,5036178497	-93952	82345,3645019531
9,2	90368,7402700064	-113664	91600,1394042969
9,3	101015,012486182	-10496	102172,982421875
9,4	112897,955641646	-102656	114450,144287109
9,5	126159,780592880	35328	126961,877197266
9,6	140958,927679738	-65536	142606,430908203

9,7	157471,907415199	-69888	159402,057128906
9,8	175895,348836145	85504	177143,005615234
9,9	196448,278835209	41472	197959,529541016
10	219374,658402066	33024	220429,878173828
10,1	244946,204601428	60160	246028,303710938
10,2	273465,530336972	121600	275621,056640625
10,3	305269,637531203	116224	306394,387451172
10,4	340733,803330708	143616	342414,548583984
10,5	380275,903368722	182016	381219,789550781
10,6	424361,221031393	290048	426412,362792969
10,7	473507,797135418	238080	475578,518554688
10,8	528292,380493238	337408	529952,507080078
10,9	589357,046585211	425984	591888,581542969
11	657416,559050895	488960	658524,991699219

Tabel perbandingan selisih *error*

Titik	Metode Langsung $\hat{y}(x)$	Metode tak Langsung $\hat{y}(x)$
1	15620,0861612696	-925,038838730370
2	61444,6497408184	-827,431802150341
3	61701,2575733616	-1369,51439929467
4	112389,917376999	-937,530376907401
5	79366,6385157031	-861,720615156274

6	79367,4322288457	-1448,32582779490
7	89352,3118863078	-1083,58313322343
8	73737,2932725568	-1865,72796767755
9	100362,394903435	-1412,99254773713
10	100875,638379817	-1823,60698151127
11	83981,0487827643	-1483,79618793879
12	105998,655115316	-1595,78336124678
13	29200,4907966472	-1377,78508225910
14	37138,5942149866	-1456,01491587274
15	99349,0093464014	-1688,67937430169
16	63511,7864473983	-845,979421742307
17	10522,9828301944	-1026,10872254001
18	107550,663730542	-1831,25301750532
19	113442,903279134	-943,589152506203
20	57127,7855889096	-1293,28447944983
21	135469,405971975	-1330,49417450971
22	134963,872301500	-1617,36182935949
23	127547,306535683	-1564,01621822277
24	88387,8464228906	-1348,57081343753
25	100685,647409279	-1405,12090126786
26	84824,8847726974	-1591,74266870885
27	68197,7560093981	-1254,48959607070
28	68980,4835031802	-1371,39027611669

29	86149,3175100076	-1672,44542944553
30	90776,5394949662	-1855,62432339317
31	37294,4658626881	-1650,86250645249
32	128967,452127118	-1332,05446467854
33	116195,897571795	-1557,05237937734
34	105220,250457712	-1543,65921025674
35	93481,0138424214	-1725,62263218794
36	96594,7520813368	-1544,62951046010
37	120450,098090397	-1402,29790569643
38	85175,7614583274	-1668,16944987577
39	79604,5375068758	-1559,69955367111
40	79673,3174087132	-1798,24826511489
41	63111,0994852479	-1721,06799522087
42	136927,001820637	-1961,29236881614
43	120386,276343886	-1711,91970103610
44	94386,3245483141	-1521,80069582652
45	139056,715037040	-1923,61601764780
46	107455,203104696	-1758,87868241325
47	90719,7525896233	-1444,82846506423
48	136980,560257515	-1636,56596318777
49	170720,083007294	-1692,87036184714
50	96709,0682231299	-1841,24500929200
51	105414,587633469	-1784,86915363990

52	48616,0750789964	-1510,56041905043
53	135725,368637248	-1752,73170454874
54	94874,7576025135	-1957,34420412718
55	152373,034876348	-1825,85599279275
56	94977,5553871431	-1723,16409527877
57	134662,301227426	-1429,53739562081
58	97609,9542757323	-1756,54352700209
59	113619,977156894	-1770,97279427803
60	172972,703491394	-1834,74157696523
61	190429,438492173	-1876,79563868641
62	118640,571087142	-1968,99776051400
63	95089,6988790576	-1670,00058383299
64	162029,767402800	-1977,11003860601
65	124403,225305240	-1870,12894280658
66	157074,197256553	-1191,18311454050
67	124892,676606222	-2292,53042502782
68	191974,740024301	-1636,34493663668
69	142790,786621404	-1794,47851531483
70	206485,804322195	-1496,19470124230
71	207727,666580035	-1819,87150590265
72	170867,462868466	-2000,66945575262
73	224451,866772285	-1206,16667498107
74	182919,545931415	-1495,94625608514

75	203753,618569564	-2077,14021949816
76	214810,161872024	-1799,92455375748
77	184910,778069031	-1748,94678448419
78	218307,224739467	-1658,70030936071
79	153274,116581697	-1608,82091830351
80	139133,706712350	-1671,30793608769
81	145760,756458867	-677,650035273939
82	174783,503617850	-1513,86088410344
83	204032,740270006	-1231,39913429043
84	111511,012486182	-1157,96993569336
85	215553,955641646	-1552,18864546347
86	90831,7805928802	-802,096604385457
87	206494,927679738	-1647,50322846547
88	227359,907415199	-1930,14971370678
89	90391,3488361452	-1247,65677908916
90	154976,278835209	-1511,25070580631
91	186350,658402066	-1055,21977176165
92	184786,204601428	-1082,09910950935
93	151865,530336972	-2155,52630365285
94	189045,637531203	-1124,74991996924
95	197117,803330708	-1680,74525327596
96	198259,903368722	-943,886182058894
97	134313,221031393	-2051,14176157583

98	235427,797135418	-2070,72141926986
99	190884,380493238	-1660,12658684060
100	163373,046585211	-2531,53495775757
101	168456,559050895	-1108,43264832406

Tabel perbandingan SSE

Titik	SSE Metode Langsung $e = (y(x) - \hat{y}(x))^2$	SSE Metode tak Langsung $e = (y(x) - \hat{y}(x))^2$
1	243987091,685487	855696,853159631
2	3775444981,77186	684643,387209761
3	3807045186,13431	1875569,68987544
4	12631493528,0086	878963,207624133
5	6299063309,28229	742562,418585308
6	6299189298,60042	2097647,70345777
7	7983835639,42803	1174152,40660630
8	5437188419,16305	3480940,84937420
9	10072610310,7530	1996547,93996067
10	10175894418,5356	3325542,42301665
11	7052816554,65304	2201651,12734169
12	11235714886,2556	2546524,53603206
13	852668662,765075	1898291,73289571
14	1379275180,26544	2119979,43524390
15	9870225658,11136	2851638,02919195

16	4033747017,73993	715681,182011448
17	110733167,644565	1052899,11047270
18	11567145268,8800	3353487,61412234
19	12869292304,3990	890360,488727374
20	3263583886,29242	1672584,74478581
21	18351959954,3997	1770214,74840427
22	18215246826,6156	2615859,28706906
23	16268315404,5076	2446146,73086385
24	7812411395,27649	1818643,23885556
25	10137599594,2257	1974364,74717980
26	7195261076,70139	2533644,72338837
27	4650933924,71739	1573744,14664963
28	4758307104,33252	1880711,28942740
29	7421704907,44010	2797073,71447324
30	8240380122,68116	3443341,62956836
31	1390877183,98321	2725347,01521061
32	16632603708,1606	1774369,09687004
33	13501486612,5150	2424412,11212465
34	11071301106,3836	2382883,75741045
35	8738699949,00699	2977773,46871924
36	9330546129,65492	2385880,32458422
37	14508226129,9863	1966439,41632059
38	7254910340,00588	2782789,31349882

39	6336882391,68359	2432662,69772187
40	6347837506,90957	3233696,82298872
41	3983010878,23685	2962075,04417359
42	18749003827,5887	3846667,75597643
43	14492855531,9464	2930669,06279553
44	8908778261,73968	2315877,35781809
45	19336769996,8925	3700298,58335118
46	11546620674,2715	3093654,21944778
47	8230073509,92246	2087529,29345987
48	18763673888,4628	2678348,15186473
49	29145346742,0172	2865810,06202047
50	9352643876,58599	3390183,18424271
51	11112235285,9344	3185757,89561523
52	2363522756,08662	2281792,77960182
53	18421375691,7169	3072068,42813034
54	9001219630,13568	3831196,33343025
55	23217541757,4287	3333750,10641720
56	9020736027,31784	2969294,49925790
57	18133935371,8660	2043577,16547832
58	9527703173,71055	3085445,16225293
59	12909499209,1331	3136344,63807294
60	29919556153,1218	3366276,65424487
61	36263371044,4443	3522361,86939232

62	14075585107,8833	3876952,18090916
63	9042050832,90985	2788901,95000254
64	26253645524,6055	3908964,10475666
65	15476162466,3464	3497382,26272287
66	24672303443,7906	1418917,21236641
67	15598180669,8664	5255695,74967821
68	36854300807,3979	2677624,75165651
69	20389208743,9593	3220153,14192650
70	42636387386,5839	2238598,58402554
71	43150783462,7861	3311932,29799638
72	29195689867,1067	4002678,27118150
73	50378640497,5634	1454838,04783489
74	33459560283,7550	2237855,20109514
75	41515537080,1915	4314511,49145688
76	46143405643,4851	3239728,39921905
77	34191995846,0946	3058814,85495757
78	47658044373,4483	2751286,71627332
79	23492954813,8995	2588304,74717094
80	19358188343,5182	2793270,21722969
81	21246198123,4611	459209,570306770
82	30549273136,9309	2291774,77641846
83	41629359102,0879	1516343,82793123
84	12434705905,6934	1340894,37196968

85	46463507792,7607	2409289,59110571
86	8250412365,67312	643358,962766680
87	42640155157,4601	2714266,88780416
88	51692527499,8481	3725477,91732236
89	8170595944,41769	1556647,43840713
90	24017647001,6085	2283878,69580006
91	34726567886,8837	1113488,76671671
92	34145941411,0009	1170938,48280093
93	23063139304,5298	4646293,64573931
94	35738253069,5789	1265062,38247081
95	38855428389,9238	2824904,60640968
96	39306989283,7751	890921,124681715
97	18040041343,8278	4207182,52608038
98	55426247664,0354	4287887,19622298
99	36436846716,2871	2756020,28433504
100	26690752350,5336	6408669,24234862
101	28377612287,2676	1228622,93587069
Σ	1880970746360,89	256431884,824037

Rata-rata jumlah kuadrat *error* untuk metode langsung

$$SSE\ rata-rata = \frac{\left(y(x) - \hat{y}(x)\right)^2}{banyak\ titik}$$

$$= \frac{1880970746360,89}{101}$$

$$= 18623472736,2465$$

Rata-rata jumlah kuadrat *error* untuk metode tak langsung

$$SSE\ rata-rata = \frac{\left(y(x) - \hat{y}(x)\right)^2}{banyak\ titik}$$

$$= \frac{256431884,824037}{101}$$

$$= 2538929,55271324$$