EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

OLEH
ANING ROYATUL KHURIYAH
NIM. 09610036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Aning Royatul Khuriyah
NIM. 09610036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh
Aning Royatul Khuriyah
NIM. 09610036

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Mei 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh
Aning Royatul Khuriyah
NIM. 09610036

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 10 Juni 2016

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aning Royatul Khuriyah

NIM : 09610036

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Lebesgue.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 Juni 2016
Yang membuat pernyataan,

Aning Royatul Khuriyah
NIM. 09610036

MOTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk

Ayahanda H. Nur Ali dan ibunda Hj. Masluchah, serta adik penulis Egi Dia Nafisatul Nafiroh yang kata-katanya selalu memberi semangat yang berarti bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kepada Allah berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi membimbing, mengarahkan, menasihati serta memberi motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dan berbagi ilmu kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen terima kasih atas ilmu dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis.
7. Ayah, ibu dan saudara-saudara penulis yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, doa, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Semua teman–teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009, UKM Jhepret Club Fotografi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan keluarga ikatan alumni KUWAT dan KUMAT. Terima kasih atas semua pengalaman, motivasi, serta doanya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam penyelesaian skripsi ini baik moril maupun materiil, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak dan semoga Allah membalas kebaikan mereka semua.

Wassalamu'alaikum Wrarohmatullahi Wabarokatuh

Malang, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR SIMBOL

Istilah-istilah yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\in$	= Elemen
$\subset$	= Subset dari
$\subseteq$	= Subset dari sama dengan
$\notin$	= Bukan elemen
$\leq$	= Kurang dari sama dengan
$\geq$	= Lebih dari sama dengan
$\forall$	= Untuk setiap
inf	= Infimum
sup	= Supermum
U	= Upper
L	= Lower
[ ]	= Interval tertutup
( )	= Interval terbuka
E	= Himpunan terukur
$<$	= Kurang dari
$>$	= Lebih dari
$\cap$	= Irisan
$\cup$	= Gabungan
x_n atau f_n	= Barisan (Sampai ke-n)
$\mathbb{R}$	= Himpunan Bilangan Riil
$\mathbb{N}$	= Himpunan Bilangan Asli
δ	= Delta
ε	= Epsilon
μ	= Fungsi Terukur
μ^*	= Ukuran Atas
μ_*	= Ukuran Bawah
$\| \ \|$	= Harga Mutlak
lim	= Limit
$\sum$	= Sigma
$\int$	= Integral
∞	= Tak terhingga
$\emptyset$	= Himpunan Kosong
$\Vert \ \Vert$	= Norm (Panjang)

ABSTRAK

Khuriyah, Aning Royatul. 2016. **Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Lebesgue**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Integral Riemann, Integral Lebesgue, Terintegral Riemann dan Terintegral Lebesgue.

Pada Tahun 1875-1941 Henry Leon lebesgue matematikawan Perancis memodifikasi integral Riemann dengan terlebih dahulu mendefinisikan jumlah Lebesgue atas dan Lebesgue bawah, selanjutnya mendefinisikan integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah. Keduanya memiliki ekuivalen. Suatu fungsi dikatakan terintegral Riemann jika dan hanya jika terintegral Lebesgue, jika nilai-nilai integral dari keduanaya ada.

Karena ekuivalen maka sifat integral Riemann yakni ketunggalan nilai, kelineran, kekonvergenan seragam dan Cauchy juga berlaku pada integral Lebesgue. Adapun sifat-sifatnya adalah:

1. $\left|S(f,Q)-A\right|<\varepsilon$
2. $(L)\int_E \big(f(x)+g(x)\big)dx=(L)\int_E f(x)dx+(L)\int_E g(x)dx$
3. $(L)\int_E \alpha f(x)dx=\alpha(L)\int_E f(x)dx$
4. $(L)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b f_n$
5. $\left|S(f,Q_1)-S(f,Q_2)\right|<\varepsilon$

ABSTRACT

Khuriyah, Aning Royatul. 2016. **Riemann Integral and Lebesgue Integral Equivalence**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors : (1) Hairur Rahman, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Keywords: Riemann Integral, Lebesgue Integral, Riemann Integrable and Lebesgue Integrable.

In 1875-1941 a French mathematician Henry Leon Lebesgue modified the Riemann integral by defining the Lebesgue upper and lower sum and then defined the upper Lebesgue integral and lower Lebesgue integral. Both integral are equivalent. A function is said to be Riemann integrable if and only if it was Lebesgue integrable, and if the values of both exist.

Since both are equivalent, Riemann integral properties namely uniqueness, linearity, uniform convergences and Cauchy also applies on Lebesgue integral. Its characteristics are:

1. $\left|S(f,Q)-A\right|<\varepsilon$
2. $(L)\int_E \left(f(x)+g(x)\right)dx=(L)\int_E f(x)\,dx+(L)\int_E g(x)\,dx$
3. $(L)\int_E \alpha f(x)dx=\alpha(L)\int_E f(x)\,dx$
4. $(L)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b f_n$
5. $\left|S(f,Q_1)-S(f,Q_2)\right|<\varepsilon$

ملخص

الحرية ، انيج راية.**٢٠١٦. مساواة تكامل Riemann و تكامل Lebesgue**. بعث جامي. شعبة الرياضيات،كلية العلوم والتكنولجيا، الجا معة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج .المشرف: (١) خير الرحمن، ماجستير (٢) عبد العزيز، ماجستير.

الكلمات الرايسة: تكامل Riemann، تكامل Lebesgue، متكامل Riemann، متكامل Lebesgue.

هنري ليون Lebesgue في عام ١٨٧٥-١٩٤١ فرنسي تعديل تكامل Riemann من خلا تحديد العلوي و السفلي مبلغ تعريفها وقتها العلوي من تكامل Lebesgue العلوي و تكامل Lebesgue السفلي. كلا مساواة تكامل. قال وظيفة أن يكون تكامل Riemann إذا وفقط إذا كان تكامل Lebesgue، و في حا لة وجود قيم عل حدسواء.

منذ كلاهما مساواة، تكامل Riemann خصائص وهي التفرد، الخطي، التقارب موحدة و ينطبق كوشي أيضا عل تكامل Lebesgue.كما خصائصه هي:

١. $\left|S(f,Q)-A\right|<\varepsilon$

٢. $(L)\int_E \left(f(x)+g(x)\right)dx=(L)\int_E f(x)\,dx+(L)\int_E g(x)\,dx$

٣. $(L)\int_E \alpha f(x)dx=\alpha(L)\int_E f(x)\,dx$

٤. $(L)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b f_n$

٥. $\left|S(f,Q_1)-S(f,Q_2)\right|<\varepsilon$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam adalah catatan dari usaha manusia secara kontinyu untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan untuk dapat diuraikan ke dalam dunia nyata. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, al-Quran telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Tidak diragukan lagi bahwa al-Quran dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir.

Pentingnya menuntut ilmu pengetahuan, baik ilmu agama maupun ilmu matematika secara umum wajib dalam segala hal. Dalam al-Quran juga dijelaskan bahwa mencari ilmu wajib hukumnya bagi manusia untuk persaingan teknologi modern, tepatnya dijelaskan dalam al-Quran surat al-Mujaadilah/58:11 yang berbunyi:

ۡ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

"Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"(QS. al-Mujaadilah/58:11).

Sebagai sarana ilmiah, matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang tidak hanya terdapat satu keilmuan saja di dalamnya. Akan tetapi masih terdapat ilmu-ilmu lain yang menjadi sarana keilmuan bagi disiplin ilmu lain. Untuk mengetahui semua itu kita sebagai pelajar berkewajiban untuk mempelajari berbagai ilmu sedalam-dalamnya. Matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai *Queen Of Science*, dan mempunyai cabang keilmuan seperti ilmu analisis maupun ilmu terapan.

Selain analisis dalam matematika kita juga mengenal ilmu Kalkulus yang merupakan ilmu dasar matematika. Kalkulus (Bahasa Latin *calculus* yang artinya "batu kecil") adalah cabang ilmu matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret tak terhingga. Kalkulus mempunyai aplikasi yang luas dalam bidang sains dan teknik. Kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Pada periode zaman kuno beberapa pemikiran tentang integral kalkulus telah muncul, namun tidak dikembangkan dengan baik dan sistematis.

Salah satu ilmu matematika yang termasuk di dalam cabang ilmu analisis adalah integral. Seperti ilmu-ilmu yang lain di dalam matematika, teori integral merupakan ilmu deduktif dan masih tetap berkembang seperti ilmu-ilmu lainnya, baik dari segi teori maupun pemakaiannya.

Integral ditemukan menyusul ditemukannya masalah dalam diferensiasi di mana matematikawan harus berpikir bagaimana menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensiasi. Proses pencarian nilai dari sebuah integral dinamakan pengintegralan (*integration*). Lambang dari integral adalah "$\int$".

Teorema fundamental kalkulus menyatakan bahwa turunan dan integral adalah dua operasi yang saling berlawanan. Teorema ini menghubungkan nilai dari anti derivatif dengan integral tertentu, karena lebih mudah menghitung sebuah anti derivatif daripada mengaplikasikan definisi dari integral. Teorema ini memberikan cara yang praktis dalam menghitung integral tertentu, yakni jika sebuah fungsi f adalah kontinyu pada interval $[a,b]$ jika F adalah fungsi turunannya adalah pada interval (a,b) maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Konsep integral Riemann dan integral Lebesgue diperkenalkan oleh Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) dan Henri Leon Lebesgue (1875-1944) juga dalam studi analisis. Contoh lainnya, bilangan ordinal dan kardinal tak hingga dikembangkan oleh G. Cantor (1845-1918) dalam upayanya memecahkan suatu masalah analisis riil Jones (1993).

Seorang matematikawan yaitu Riemann (1826-1866) menemukan pertama kali bentuk konstruktif yang kemudian dikenal dengan integral Riemann. Setiap fungsi kontinyu f pada $[a,b]$ dijamin terintegral Riemann. Kenyataan menunjukkan bahwa masih terdapat banyak fungsi yang tidak terintegral secara Riemann. Salah satu fungsi yang tidak terintegral secara Riemann adalah fungsi Dirichle $f:[0,1] > \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1; x \ rasional \\ 0; x \ irasional \end{cases}$$

Berkat ide matematikawan Perancis yaitu Henry Leon Lebesgue (1875-1941), ia berhasil menyusun tipe integral untuk mengatasi permasalahan yang muncul, yaitu banyaknya fungsi yang tidak terintegral secara Riemann. Integral yang dibangun Lebesgue banyak mendasarkan pada teori ukuran. Dengan konsep integral Lebesgue ini maka dapat ditunjukkan bahwa fungsi Dirichlet tersebut terintegral secara Lebesgue.

Menurut Lee (1989:1), integral dapat didefinisikan melalui dua cara yaitu secara konstruktif dan deskriptif. Baik integral Riemann ataupun integral Lebesgue dapat didefinisikan melalui dua cara tersebut. Definisi integral Riemann secara konstruktif disajikan dalam bentuk limit dari suatu jumlahan. Definisi ini dikenal dengan integral Riemann sebagai limit jumlah yang kemudian dapat digunakan untuk membuktikan sifat-sifat yang berlaku pada integral Riemann. Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk membahas integral Lebesgue melalui limit jumlah sebagaimana halnya pada integral konstruktif Riemann. Akan tetapi, pembahasan sedikit berbeda karena partisi yang dibangun adalah pada daerah hasil (*range*) fungsi. Selanjutnya bentuk integral ini dikenal dengan integral Lebesgue sebagai limit jumlah.

Adapun tentang sesuatu yang mempunyai nilai yang sama tersebut dijelaskan juga dalam al-Quran dalam surat an-Nisa/4:32 tentang kesetaraan antara laki-laki dan perempuan yang hampir sama konsepnya dengan integral Riemann dan integral Lebesgue. Meski pada dasarnya perempuan dikatakan sama dengan laki-laki tapi tetap laki-lakilah yang bisa menjadi pemimpin, Allah menjelaskan dalam al-Quran surat an-Nisa/4:32 yang berbunyi:

وَلَا تَتَمَنَّوْاْ مَا فَضَّلَ ٱللَّهُ بِهِۦ بَعْضَكُمْ عَلَىٰ بَعْضٍۚ لِّلرِّجَالِ نَصِيبٌ مِّمَّا ٱكْتَسَبُواْۖ وَلِلنِّسَآءِ نَصِيبٌ
مِّمَّا ٱكْتَسَبْنَۚ وَسْـَٔلُواْ ٱللَّهَ مِن فَضْلِهِۦٓۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ بِكُلِّ شَىْءٍ عَلِيمًا ﴿٣٢﴾

“*Dan janganlah kamu iri hati terhadap apa yang dikaruniakan Allah kepada sebahagian kamu lebih banyak dari sebahagian yang lain. (karena) bagi orang laki-laki ada bahagian dari pada apa yang mereka usahakan, dan bagi Para wanita (pun) ada bahagian dari apa yang mereka usahakan, dan mohonlah* *kepada Allah sebagian dari karunia-Nya. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui segala sesuatu” (Q.S. an-Nisa/4:32).*

Ayat di atas memberikan dorongan bahwa perempuan juga dapat berkarir dan mencapai prestasi sama dengan kaum laki-laki, hal tersebut bergantung pada usaha dan dorongan dari masing-masing. Demikian juga dengan integral Lebesgue, meski mempunyai kesamaan dengan integral Riemann, tapi tetaplah integral Riemann yang menjadi acuan karena integral Lebesgue merupakan perluasan dari integral Riemann.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis ingin mengkaji lebih dalam permasalahan ini dan membahasnya dengan judul “*Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Lebesgue*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bukti sifat-sifat integral Lebesgue?
2. Bagaimana bukti ekuivalensi integral Riemann dan integral Lebesgue?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Untuk membuktikan sifat-sifat integral Lebesgue.
2. Untuk membuktikan ekuivalensi integral Riemann dan integral Lebesgue.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah dapat mengetahui tentang hal-hal yang berkaitan dengan integral Lebesgue, sifat-sifat intrgral Lebesgue dan ekuivalensi integral Riemann dan integral Lebesgue.

1.5 Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, permasalahan hanya dibatasi pada interval $[a,b]$, di mana a=0 dan b=1.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan oleh penulis dalam menyusun penelitian ini adalah metode kajian pustaka, yaitu deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber bacaan, buku-buku referensi atau hasil penelitian lain) untuk menunjang penelitian.

Adapun langkah-langkah dalam penulisan penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah, sebelum penulis memulai kegiatannya, penulis membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan data dan informasi dengan cara membaca dan memahami Riemann maupun beberapa literatur yang berkaitan dengan integral baik itu Lebesgue. Di antara buku yang digunakan penulis adalah Pengantar Analisis Real, Kalkulus dan Geometri Analitis serta buku lain yang menunjang penulisan penelitian ini.

3. Membuktikan sifat-sifat integral Riemann dan sifat-sifat integral Lebesgue dengan menggunakan teorema yang telah ada kemudian menjelaskan dan melengkapi bukti tersebut. Langkah selanjutnya yaitu membuktikan ekuivalensi dari integral Riemann dan integral Lebesgue.
4. Membuat kesimpulan, yang merupakan gambaran langkah dari pembahasan atas apa yang sedang ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas latar belakang yang menceritakan dasar pemikiran dan alasan penulis mengangkat permasalahan, rumusan masalah yang menyatakan secara singkat dan sederhana permasalahan yang akan dibahas, tujuan dan manfaat penulisan, serta sistematika penulisan yang menjabarkan struktur penulisan dari awal hingga akhir.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang konsep dasar dan teorema-teorema yang mendukung pembahasan integrasi antara ekuivalensi integral Riemann dan integral Lebesgue, serta beberapa teorema dan beberapa pembahasan contoh yang digunakan sebagai acuan maupun pembanding dalam pembahasan dan konsep matematika dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas proses terjadinya sifat-sifat integral Riemann dan sifat-sifat integral Lebesgue serta ekuivalensi antara integral Riemann dan integral Lebesgue, serta konsep ekuivalensi dalam al-Quran.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran-saran sebagai tidak lanjut bagi pembaca yang ingin mengembangkan pembahasan tentang ekuivalensi integral Riemann dan integral Lebesgue.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sifat Kelengkapan pada $\mathbb{R}$

Sifat kelengkapan himpunan bilangan $\mathbb{R}$ akan menjamin keberadaan unsur-unsur pada $\mathbb{R}$ terhadap hipotesis tertentu. Sistem bilangan-bilangan rasional $\mathbb{Q}$ memenuhi sifat-sifat aljabar dan sifat urutan bilangan, tetapi diketahui bahwa tidak dapat dinyatakan sabagai suatu bilangan rasional, maka tidak termuat pada $\mathbb{Q}$ jika bilangan irrasional yang termuat pada $\mathbb{Q}$. Untuk menunjukkan hal tersebut diperlukan sifat tambahan, sifat kelengkapan (sifat supremum), adalah sifat-sifat istimewa dari $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1 (Batas Atas dan Batas Bawah)

Misalkan E adalah himpunan bagian di $\mathbb{R}$, maka:

1. E disebut terbatas (*bounded*) jika terbatas di atas dan terbatas di bawah.
2. E disebut terbatas di atas (*bounded above*) jika terdapat $v \in \mathbb{R}$ sehingga $x \leq v$ untuk semua $x \in E$ dan v disebut batas atas (*upper bounded*) untuk E.
3. E disebut terbatas di bawah (*bounded below*) jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ sehingga $u \leq x$ untuk semua $x \in E$ dan u disebut batas bawah (*lower bound*) untuk E

(Bartle dan Sherbert, 1982:47)

Contoh 2.1

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Himpunan A terbatas di atas karena $a \leq 6$ untuk semua $a \in A$ Himpunan A juga terbatas di bawah karena $0 \leq a$, untuk semua $a \in A$ Semua bilangan riil $v \leq 6$ merupakan batas atas untuk A dan

semua bilangan riil $u \leq 1$ merupakan batas bawah untuk A. Jadi himpunan A adalah terbatas.

2. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ terbatas di bawah dan 1 merupakan batas bawah, tetapi tidak terbatas di atas. Jika diberikan $v \in \mathbb{R}$ maka terdapat $n \in \mathbb{R}$ sehingga $n > v$.

Definisi 2.2 (Supremum)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \phi$ dan terbatas di atas, $v \in \mathbb{R}$ disebut batas atas terkecil (supremum) dari E, jika

1) $u \leq x$, untuk semua $x \in E$

2) $v \leq s$ untuk semua s batas atas dari E

Definisi di atas menyatakan bahwa agar $v \in \mathbb{R}$ menjadi supremum dari E, (1) v haruslah batas atas dari E, dan (2) v selalu kurang dari batas atas yang lain di E.

(Rahman, 2008:47)

Definisi 2.3 (Infimum)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \phi$ dan terbatas di bawah, $u \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah terbesar (infimum) dari E, jika

1) $u \leq x$, untuk semua $x \in E$

2) $s \leq u$ untuk semua s batas bawah dari E

Definisi di atas menyatakan bahwa agar $u \in \mathbb{R}$ menjadi supremum dari E, maka (1) u haruslah batas atas dari E, dan (2) u selalu kurang dari batas atas di E.

(Rahman, 2008:41)

Contoh 2.2

1. Himpunan $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$, terbatas di atas oleh sebarang bilangan riil $v\geq 1$ dan terbatas di bawah oleh sebarang bilangan riil $u\leq 0$ batas atas terkecil (supremum) adalah 1 dan batas bawah terbesar (infimum) adalah 0.
2. Himpunan kosong yaitu ϕ terbatas di atas dan terbatas di bawah oleh semua bilangan $x\in\mathbb{R}$ Dengan demikian, ϕ tidak mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar.

Berikut ini diberikan contoh himpunan yang terbatas dan himpunan yang tak terbatas.

Contoh 2.2

Himpunan $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 5\}$ terbatas di atas, dan himpunan $\{x\in\mathbb{R} \mid x>2\}$ terbatas di bawah. Misalkan $A=\{\frac{1}{2} \mid n\in\mathbb{N}\}$, A adalah himpunan terbatas. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}=\{1,23,\ldots\}$, $\mathbb{N}$ adalah himpunan tak terbatas, walupum himpunan tersebut terbatas di bawah.

2.2 Barisan dan Limit

Definisi 2.4 (Barisan)

Barisan bilangan riil adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ ke himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

(Rahman, 2008:54)

Contoh 2.3

Barisan $X = (2, 4, 6, 8, 19, ..., 2n, ...)$ menyatakan barisan bilangan asli genap. Sedangkan salah satu rumus umumnya adalah $X = (2n \mid n \in \mathbb{N})$. Barisan $Y = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ menyatakan barisan yang salah satu rumus umumnya adalah

$$X = (\frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N}).$$

Sering kali, rumus umum suatu barisan dinyatakan secara rekursif, yaitu ditetapkan unsur x_1 dan rumus untuk $x_{n+1} (n \geq 1)$ setelah x_n diketahui, sebagai contoh barisan bilangan bulat genap positif dapat dinyatakan dengan rumus

$$x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 2, (n \geq 1)$$

atau dengan rumus

$$x_1 = 2, x_{n+1} = x_1 + x_n, (n \geq 1).$$

Definisi 2.5 (Barisan Konvergen)

Misalkan $X = (x_n)$ adalah bilangan riil. Suatu bilangan riil x dikatakan limit dari X, jika untuk masing-masing lingkungan V dari x terdapat suatu bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota V. Jika x adalah limit dari X, maka dikatakan X konvergen ke x (atau X mempunyai limit x). Jika suatu barisan mempunyai limit, maka barisan dikatakan konvergen. Jika tidak mempunyai limit, barisan itu dikatakan divergen. Jika barisan bilangan riil $X = (x_n)$ mempunyai limit $x \in \mathbb{R}$, maka sering ditulis

$$x = \lim X, \qquad x = \lim(x_n), \quad \text{atau} \quad x = \lim(x_n).$$

Sering kali digunakan simbol $x_n \to x$ untuk menyatakan $X = (x_n)$ konvergen ke x. Dengan demikian dapat dinyatakan

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall V(x) \exists K \in \mathbb{N} \ni x_n \in V(x), n \geq K.$$

Teorema 2.1

Limit suatu barisan (jika ada) adalah tunggal.

Bukti:

Misalkan $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = M$, andaikan $L \neq M_i$ tanpa mengurangi keumuman pembuktian, misalkan $L = M$. Ambillah $\varepsilon = L - \frac{M}{2}$ maka ada bilangan asli $\mathbb{N}_1$ dan $\mathbb{N}_2$ sehingga $|a_n - L| < \frac{L-M}{2}$ bila $n > \mathbb{N}_1$ dan $|a_n - M| < \frac{L-M}{2}$ bila $n > \mathbb{N}_1$. Ambillah $\mathbb{N} = maks\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2\}$.

$$\frac{L+M}{2} = L - \frac{L-M}{2} < a_n < L - \frac{L-M}{2}$$

dan

$$M - \frac{L-M}{2} < a_n < M + \frac{L-M}{2} = \frac{L+M}{2}$$

Hal ini mustahil, Jadi pengandaian $L \neq M_i$ salah sehingga terbuktilah $L = M$.

(Hutahean, 1994:22)

Teorema 2.2 (Ketunggalan Limit)

Barisan bilangan riil dapat memiliki paling banyak satu limit.

Bukti:

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil, andaikan X mempunyai lebih dari satu limit. Misalkan x' dan x'' adalah limit dari X, dengan $x' \neq x''$.

Misalkan V' lingkungan dari x' dan V'' adalah lingkungan dari x'', dengan $V' \cap V'' = \phi$. Karena x' limit dari X maka ada bilangan asli K' sehingga jika $n \geq K'$ maka $x_n \in V'$. Karena x'' limit dari X maka ada bilangan asli K'' sehingga jika $n \geq K''$ maka $x_n \in V''$. Pilih $K = \sup\{K', K''\}$ .maka $K \geq K'$ sehingga $x_k \in V'$ dan $K \geq K''$ sehingga $x_k \in V''$, berarti $x_k \in V' \cap V''$. Hal ini kontradiksi dengan $V' \cap V'' = \phi$. Berarti pengandaian salah, terbukti bahwa X tidak lebih mempunyai dari satu limit.

(Rahman, 2008:59-61)

Teorema 2.3

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan riil dan $x \in \mathbb{R}$, peryataan berikut ini adalah ekuivalen.

a. X konvergen ke x'.

b. Untuk setiap V_ε lingkungan ε dari x' terdapat asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota V_ε.

c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$.

Bukti:

$(a \Rightarrow b)$ Diketahui X konvergen ke x. Ambil sebarang V_ε lingkungan ε dari x karena V_ε adalah lingkungan dari x, maka terdepat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka x_n adalah anggota V. Karena V_ε

sebarang lingkungan $-\varepsilon$ dari x terbukti bahwa untuk setiap V_ε lingkungan$-\varepsilon$ dari x terdapat bilangan asli asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka x_n adalah anggota V_ε.

$(b \Rightarrow c)$ Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, misalkan V_ε adalah lingkungan$-\varepsilon$ dari x. Berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka $x_n \in V_\varepsilon$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

$(c \Rightarrow d)$ Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka $x_n \in V_\varepsilon$. Karena $x_n \in V_\varepsilon$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Karena $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$.

$(d \Rightarrow a)$ Misalkan V sebarang lingkungan dari x. Sesuai definisi lingkungan, berarti ada $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V$. Karena $\varepsilon > 0$, berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$, berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Berarti bahwa untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Jadi $x_n \in V_\varepsilon$. Karena $V_\varepsilon = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V$, berarti $n \geq K$, maka $x_n \in V_\varepsilon$. Berarti untuk V sebarang lingkungan dari x terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka $x_n \in V_\varepsilon$. Karena V diambil sebarang berarti untuk setiap lingkungan V dari x terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota V. Sesuai definisi berarti X konvergen ke x.

Contoh 2.4

Tunjukkan bahwa barisan $X = \left(1+(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\right)$ tidak konvergen ke 0.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa X tidak konvergen ke 0, maka perlu ditemukan suatu $\varepsilon > 0$ tetapi tidak ada K, sehingga berlaku $|x_n - 0| < \varepsilon$, jika $n \geq K$. Pilih $\varepsilon = 1 > 0$, berapapun nilai K dipilih, maka akan ada n bilangan asli genap dengan $n \geq K$. Karena n genap, maka $x_n = 2$. Hal ini berarti bahwa

$$|x_n - 0| = |2 - 0| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Hal ini berarti bahwa 0 bukan limit dari Z.

Teorema 2.4

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan riil. X dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil $M > 0$ sedemikan hinggga $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan definisi maka barisan $X = (x_n)$ terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ terbatas.

Contoh 2.5

Misalkan $X = ((-1)^n \mid n \in \mathbb{N}) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$. Maka X terbatas sebab ada bilangan riil 2 sehingga

$$|(-1)^n| \leq 2, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Misalkan $Y = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ...)$. Y terbatas karena ada bilangan riil 1 sehingga

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 2, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.5

Barisan bilangan riil yang konvergen adalah terbatas.

Bukti:

Misalkan $X = (x_n | n \in \mathbb{N})$ adalah barisan bilangan riil dan $\lim x_n = x$, pilih $\varepsilon = 1$. Maka ada $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < 1$. Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh $|x_n| \leq |x| + 1$ untuk semua $n \geq K$, pilih $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, ..., |x_{K-1}|, |x| + 1\}$. Maka diperoleh bahwa $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Terbukti jika X konvergen maka X terbatas.

Teorema 2.6

Jika (x_n) konvergen, maka (x_n) terbatas.

Bukti:

Ambil sebarang (x_n) konvergen ke L, pilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_n - L| < 1.$$

Akibatnya, untuk $n \geq \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Pilih $K = maks|x_1|, \ldots, |x_n|, 1 + |L|\}$, maka jelas bahwa $|x_n| \leq K$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Ini menunjukkan bahwa (x_n) terbatas.

Kekonvergenan barisan (x_n) ditentukan oleh pola suku-suku yang sudah jauh berada di ujung. Walaupun pada awalnya suku-suku barisan berfluktuasi cukup besar namun bila pada akhirnya suku-suku ini mengumpul di sekitar titik tertentu maka barisan ini tetap konvergen.

(Gunawan, 2011:75)

Teorema 2.7

Jika $X = (x_n) \to x, Y = (y_n) \to y$ dan $c \in \mathbb{R}$ maka:

i. $X \pm Y \to x \pm y$

ii. $X \cdot Y \to xy$

iii. $cX = cx$

Bukti:

i. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $X = (x_n) \to x$ maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\frac{|x_n - x| < \varepsilon}{2}.$$

Karena $Y = (y_n) \to y,$ maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku

$$\frac{|y_n - y| < \varepsilon}{2}.$$

Pilih $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ maka akibatnya untuk $n \geq n_0$ berlaku

$$|x_n - y_n - (x - y)| = |(x_n - x) - (y_n - y)|$$

$$\leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0,$ maka $(x_n - y_n)$ konvergen ke $x + y.$ Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $x_n - y_n$ konvergen ke $x - y$ terbukti bahwa $X \pm Y \to x \pm y.$

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n \cdot y_n - x \cdot y|.$ Diketahui

$$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y)|$$

$$\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n - xy|$$

$$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|.$$

Karena $(x_n) \to x$ maka (x_n) terbatas, akibatnya terdapat $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1,$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dinamakan $M = \max\{M, |y|\}.$ Diambil sebarang $\varepsilon > 0,$ karena $(x_n) \to x$ maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \leq K_1$ berlaku

$$\frac{|x_n - x| < \varepsilon}{2M}.$$

Karena $(y_n) \to y$ maka terdapat $K_2 \in \mathbb{N}.$ Sedemikian hingga untuk setiap $n \leq K_2$ berlaku

$$\frac{|y_n - y| < \varepsilon}{2M}.$$

Dinamakan $K = \text{maks}\{K_1, K_2\}$ maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$$

$$< M.\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}.M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n \cdot y_n - x \cdot y| < \varepsilon.$ Dengan kata lain terbukti bahwa $X \cdot Y \to xy.$

iii. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $(x_n) \to x$ maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$ Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |cx_n - x| &= |cx_n - x + x_n - x| \\ &\leq |x_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= |x_n||c-1| + |x_n - x|. \end{aligned}$$

Karena $(x_n) \to x$ maka (x_n) terbatas, yaitu terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ akibatnya

$$|x_n||c-1| + |x_n - x| < M\,|c-1| + \frac{\varepsilon}{2} = \left(M\,|c-1|\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|C_{nx} - 1| < \varepsilon$ dengan kata lain terbukti bahwa $cX = cx.$

(Riyanto, 2008:45-47)

2.3 Konsep Limit

Definisi 2.6 (Limit Fungsi)

Diketahui fungsi $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan a titik limit himpunan A. Jika ada bilangan $l \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ dan $0 < |x-a| < \delta$, maka berlaku

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Pertidaksamaan $0 < |x-a|$ menunjukkan bahwa $x \neq a$, sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon(l)$. Sehingga diperoleh $|f(x) - l| < \varepsilon$, biasa dituliskan dengan

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Jika l adalah limit fungsi dari fungsi f di c maka dapat dikatakan f konvergen ke l di c. Ditulis $l = \lim_{x \to c} f(x)$ atau $l = \lim_{x \to a} f$.

(Bartle dan Sherbert, 2000:98)

Contoh 2.6.

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x \to 4}(3x-7) = 5$. Andaikan ε bilangan positif sebarang, maka dihasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |(3x-7)-5| < \varepsilon.$$

Pandang ketaksamaan di sebelah kanan

$$|(3x-7)-5| < \delta \Rightarrow |3x-12| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3(x-4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3||x-4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Purcell dan Verberg, 1987:81)

Teorema 2.8

Diberikan $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan α titik limit A. Jika $f(x)$ mempunyai limit untuk $x \to a$, maka limitnya tunggal

Bukti:

Ambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan andaikan $f(x)$ mempunyai limit K dan L dengan $K \neq L$ untuk $x \to a$. Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang ditunjuk dapat dipilih bilangan $r_1 > 0$ dan bilangan $r_2 > 0$. Sehingga berlaku

$$|f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x-a| < r_1$ dan $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{3}$. Untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x-a| < r_2$. Selanjutnya dengan mengambil bilangan $r = \min\{r_1, r_2\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} |K - L| &= |K + f(x) - f(x) - L| \\ &\leq |f(x) - L| + |K + f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x-a| < r$, dengan kata lain diperoleh $K = L$, suatu kontradiksi. Jadi yang benar limit $f(x)$ untuk $x \to a$ adalah tunggal.

(Rahman, 2008:105-106)

Contoh 2.6

Akan ditunjukkan bahwa $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}|x|}{x}$ tidak ada.

Penyelesaian:

$$|x| = \begin{cases} x, x>0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1 \\ -x, x<0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

Karena nilai limitnya tidak tunggal, maka $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}|x|}{x}$ tidak ada.

Teorema 2.9

Misalkan $\lim\limits_{\mathrm{x\to a}} f(x) = K,\ \lim\limits_{\mathrm{x\to a}} \mathrm{g}(x) = L$ berlaku:

1. $\lim\limits_{x\to a}(af)(x) = \alpha.\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha K$ untuk α sebarang konstanta α.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = K+L.$

3. $\lim\limits_{x\to a}(f.g)|(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x) = K.L.$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{K}{L}, jika\, L \neq 0.$

Bukti:

1. Diambil sebarang barisan bilangan nyata $\{x_n\}$ yang konvergen ke α. Oleh karena itu diperoleh barisan $\{f(x_n)\}$ dan barisan $\{f(x_n)\}$ berturut-turut konvergen ke K dan L, maka

$$\lim_{x\to a} f(x_n) = L, \lim_{x\to a} g(x_n) = L$$

selanjutnya diperoleh

$$\lim_{x\to a}(af)(x)=\alpha.\lim_{x\to a} f(x)=\alpha.K.$$

2. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x_n)$

$$=\lim_{x\to\infty}\{f(x_n)+g(x_n)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty} f(x_n)+\lim_{x\to\infty} g(x_n)$$

$$=K+L.$$

3. $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(fg)(x)$

$$=\lim_{x\to\infty} f(x_n)+\lim_{x\to\infty} g(x_n)$$

$$=K.L.$$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_n)$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

$$=\frac{K}{L}, \text{ asalkan } L\neq 0.$$

(Bartle dan Sherbert, 2000:101)

2.4 Konsep Kontinyu

Definisi 2.7 (Fungsi kontinyu)

f dikatakan kontiyu pada x_0 jika $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ atau bisa dikatakan untuk $\varepsilon>0$ maka ada $\delta>0$ sehingga $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ di mana $|x-x_0|<\delta.$

Dari definisi di atas maka dapat dikatakan terdapat tiga syarat agar kontinyu terpenuhi, yaitu:

1. $f(x)$ ada atau terdefinisikan

2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ada, dan

3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Contoh 2.7

Diberikan fungsi

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \text{untuk } x \neq 1 \\ A \text{untuk } x = 1 \end{cases}$$

Cari $\lim_{x \to 1} g(x)$ dan tentukan A agar fungsi g kontinyu di 1, maka $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$ Menurut yang diketahui $1 \in A$ dan $g(1) = A$ oleh karena itu agar fungsi g kontinu di 1, harus berlaku

$$A = g(1) = \lim_{x \to 1} g(x) = 2.$$

Lebih lanjut, untuk $x \neq 1$ rumus fungsi g dapat disederhanakan menjadi $g(x) = x + 1$ dan dengan rumus ini mudah diperlihatkan bahwa fungsi g kontiyu di setiap titik $x \neq 1.$ Digabung dengan hasil di atas, yaitu dengan mengambil $A = 2$ maka fungsi g kontinyu pada $\mathbb{R}$.

Teorema 2.10

Jika *f* kontinyu pada $[a, b]$, maka *f* terintegralkan pada $[a, b]$.

Bukti:

Fungsi yang kontinyu pada $[a,b]$ pasti kontinyu seragam pada $[a,b]$. Karena itu diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $x, y \in [a,b]$ dengan $|x-y| < \varepsilon$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Selanjutnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $\frac{n < b-a}{\delta}$ tinjau partisi $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dengan $x_i = \frac{a+ib-a}{\delta}, i = 0,1,\ldots,n$ (interval $[a,b]$ terbagi menjadi $n,$ sub interval sama panjang). Setiap sub interval $[x_{i-1}, x_i]$, f mencapai nilai maksimum M_i dan minimum m_i maka

$$f(u_i) = M_i \text{ dan } f(v_i) = m_i$$

hal ini diperoleh

$$M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

akibatnya

$$0 \le U(f, Q_n) - U(f, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i - m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} . \frac{b-a}{\delta} = \varepsilon.$$

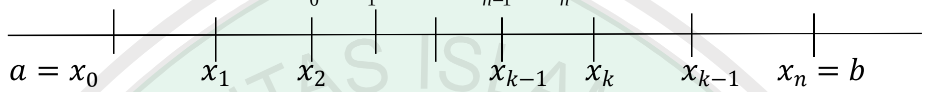
Kemudian disimpulkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \left[U(f, Q_n) - U(f, Q_n) \right] = 0$ dan karena f terintegralkan pada $[a,b]$.

(Gunawan, 2000:113-114)

2.5 Integral Reimann

Misalkan $f: I \to \mathbb{R}$ terbatas dan $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partisi dari I pada selang $[a,b]$, suatu himpunan berhingga $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ sedemikian hingga,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Gambar 2.1 Partisi pada $[a,b]$

Norma partisi Q yang dinyatakan dengan $\|Q\|$ nilai terbesar di antara bilangan $(x_i - x_{i-1}), i = 1,2,..n.$ Kemudian didefinisikan

$$\|Q\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ldots.$$

Jika Q adalah partisi seperti yang tampak pada gambar di atas, maka jika Riemann pada fungsi definisi jumlah $f: I \to \mathbb{R}$

$$S(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

(Bartle dan Sherbert, 2000:194-195)

Definisi 2.8 (Partisi Penghalus)

Diberikan interval tertutup $[a,b]$, partisi Q disebut penghalus *(refinement)* partisi Q pada $[a,b]$ jika $Q \subseteq Q$.

Untuk suatu interval $[a,b]$ tak berhingga banyak partisi yang dapat dibuat. Koleksi semua partisi pada interval $[a,b]$ dinotasikan dengan $Q[a,b]$.

Contoh 2.8

Diberikan interval $I = [a,b]$. Berikut ini adalah beberapa partisi pada I :

$$Q_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, 1\right\}, Q_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}, Q_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}, Q_4 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} 1\right\}$$

$$Q_4 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1\right\}, Q_5 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{4}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

Dapat dihitung bahwa $Q_1 = \frac{3}{4}, Q_2 = \frac{1}{2}, Q_3 = \frac{1}{4}$

Q_5 merupakan penghalus dari Q_3 sebab $Q_3 \subseteq Q_5$ tetapi Q_5 bukan penghalus Q_2 maupun Q_4 sebab $Q_2 \not\subset Q_5$ dan $Q_4 \not\subset Q_5$ partisi Q_3, Q_4 dan Q_5 disebut partisi seragam.

(Thobirin, 2008)

Lemma

Jika $Q_1,\ Q_2 \in \mathbb{R}[a,b]$ dengan $Q_1 \subseteq Q_2$ maka berlaku $\|Q_2\| \leq \|Q_1\|$.

Bukti:

Diberikan $Q_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\}$ partisi pada $[a,b]$. $\|Q_1\| = \sup\{\Delta x_i \,|\, i = 1, 2, ..., n\} = \sup\{x_{i-1} \,|\, i = 1, 2, ..., n\}$. Diketahui $Q_1 \subseteq Q_2$ atau Q_2 penghalus dari Q_1, maka Q_2 dapat dinyatakan sebagai

$$Q_2 = \{a = x_{10}, x_{11}, ..., x_{1k_1}, x_1 = x_{20}, x_{21}, ..., x_{2k_n}, ..., x_{n-1} = x_{n0}, x_{n1}, ..., x_{nkn}, ..., x_n = b; \zeta_{11}, \zeta_{12}, ..., \zeta_{1k_1}, ..., \zeta_{2k_2}, ..., \zeta_{n1}, \zeta_{n2}, ..., \zeta_{nk_n}\}$$

maka $\|Q_2\| = \sup\{\{x_{ij} - x_{i(j-1)} \,|\, i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., k_i\} \cup \{x_i - x_{ik_i} \,|\, i = 1, 2, ..., n\}\}$.

Dapat dipahami bahwa $x_{ij} - x_{i(j-1)} \leq x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., n_i$ dan $x_i - x_{in_i} \leq x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n.$

Oleh karena itu

$$\sup\{\{x_{ij} - x_{i(j-1)} \,|\, i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n_i\} \cup \{x_i - x_{in_i} \,|\, i = 1, 2, ..., n\}\}$$

$$\leq \{x_i - x_{i-1} \,|\, i = 1, 2, ..., n\}$$

Jadi $\|Q_2\| \leq \|Q_1\|$.

(Thobirin, 2008:32)

Definisi 2.9 (Jumlah Riemann Atas dan Jumlah Riemann Bawah)

Misalkan A partisi Q dari $[a,b]$ adalah terbatas f pada $[a,b]$ disusun berdasarkan konsep partisi $Q = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$,

$$a < m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ dan } b < M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Sub interval sehingga jumlah integral Riemann atas dari f dengan partisi Q adalah

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

Sedangkan jumlah integral Riemann bawah adalah

$$U(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Jika Q adalah sebarang partisi pada $[a,b]$ dan Q adalah partisi penghalusan dari partisi Q pada $[a,b]$, maka berlaku $U(f,Q) \leq U(f,Q)$ dan $L(f,Q) \leq L(f,Q)$.

Integral Riemann bawah fungsi f dinotasikan dengan $I = \sup\{U(f,Q); Q \in \pi[a,b]\}$ dan integral Riemann atas dinotasikan dengan $J = \inf\{L(f,Q); Q \in \pi[a,b]\}$. Untuk setiap fungsi terbatas berlaku

$$L(f,Q) \leq I \leq J \leq U(f,Q).$$

Selanjutnya fungsi terbatas pada f dikatakan terintegral Riemann jika $I = J$.

(Gunawan, 2000:96)

Definisi 2.10 (Integral Riemann Atas dan Integral Riemann Bawah)

misalkan fungsi riil adalah terbatas yang didefinisikan pada selang tertutup $[a,b]$. Untuk setiap partisi Q pada $[a,b]$ dibentuk jumlah atas

$$U=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

dan jumlah bawah

$$L=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

dengan

$$M_i=\sup f(x) \text{ dan } m_i=\inf f(x) \qquad i=1,2,3,\ldots\ldots,n$$

dan

$$x_{i-1}\le x\le x_n$$

maka dibentuk

$$(R)\int_a^{\overline{b}} f(x)dx=\inf U(Q,f)$$

Disebut integral Riemann atas fungsi f pada $[a,b]$ dan

$$(R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\sup L(Q,f)$$

dan disebut integral Riemann bawah fungsi f pada $[a,b]$ infimum dan supremum diambil meliputi semua partisi Q pada $[a,b]$. Jika nilai integral atas dan integral bawah sama. Maka dikatakan bahwa f dapat terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan dinyatakan Riemann fungsi f pada $[a,b]$ dan dinyatakan dengan pada $f\in[a,b]$. Nilai yang sama ini dinamakan integral Riemann fungsi f pada $[a,b]$ dan ditulis

$$(R)\int_a^b f(x)dx$$

jadi

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^{\underline{b}} f(x)dx = (R)\int_{\overline{a}}^{b} f(x)dx.$$

(Rahman, 2008:176)

Definisi 2.11 (Integral Riemann)

Diberikan interval tertutup, fungsi bernilai riil $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann jika terdapat bilangan riil A sehingga untuk setiap bilangan riil $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dengan sifat $Q = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $\|Q\| < \delta$ berlaku

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(M_1)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

atau

$$|S(f,Q) - A| < \varepsilon.$$

Bilangan riil A pada definisi di atas disebut nilai integral Riemann fungsi f pada interval $[a,b]$ dan ditulis

$$A = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Selanjutnya untuk memudahkan penulisan, koleksi semua fungsi yang Riemann pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $R[a,b]$. Jadi jika $f:[a,b]\to R.$ terintegral dikatakan terintegral Riemann cukup ditulis dengan $f \in R[a,b]$.

Definisi integral Riemann di atas juga dapat pula dinyatakan sebagai limit dengan persamaan berikut:

$$\lim_{Q\to 0} S(f,Q) = A.$$

(Hutahean, 1989:13)

Contoh 2.9

Misal $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi yang mengambil nilai 1 pada setiap titik. Riemann pada interval $[0,1]$ akan mempunyai nilai 1. Dan integral Riemann, maka jumlah Riemannya akan bernilai satu.

Definisi 2.12 (Integral Sebagai Limit)

Diberikan fungsi f riil dan terbatas pada selang $[a,b]$ untuk setiap partisi $Q=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ pada $[a,b]$ dibentuk jumlah

$$S(f,Q)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Di mana t_i titik sebarang pada subselang tertutup $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n.$ Bilangan riil A disebut limit $S(f,Q)$ untuk norma $\|Q\|<0$ dan ditulis $\lim_{\|Q\|\to 0} S(f,Q)=A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan dan sebarang pengambilan titik $t_i\in[x_{i-1},x_i]$, terdapat $\delta>0$ sedemikian untuk semua partisi Q pada $[a,b]$, dengan $|Q|<\delta$ berlaku

$$|S(f,Q)-A|<\varepsilon.$$

(Rahman, 2008:164)

Contoh 2.10

Perlihatkan bahwa fungsi $f(x) = x, 0 \leq x \leq 1$ terintegral Riemann pada $[0,1]$. Ambilah $Q_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ maka $m_i = \frac{i-1}{n}, M_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \ldots, n.$

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} . \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$U(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} . \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Karena $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{Q : Q \in Q[a,b]\}$ maka

$$\frac{1}{2} = \sup_{Q \in q[a,b]} L(Q_n, f) \leq \sup_{Q \in q[a,b]} L(f,Q) \leq \inf U(f,Q) \leq \inf U(f,Q_n) = \frac{1}{2},$$

sehingga

$$\int_a^1 f(x)dx = \frac{1}{2} = \int_a^1 f(x)dx.$$

Ini berarti fungsi $f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 1$ terintegral Riemann pada $[0,1]$ dan $\int_a^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$

(Hutahean, 1989:37)

Teorema 2.11

Misalkan f terbatas pada I, dan terdapat suatu bilangan $A \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi Q dari I sedemikian hingga untuk sebarang partisi $Q \supseteq Q_\varepsilon$ dan sebarang jumlah Riemann $S(f,Q)$ berlaku

$$|S(f,Q) - A| < \varepsilon,$$

maka I terintegralkan pada I dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = A.$$

Bukti:

Dengan menggunakan teorema sebelumnya yakni $\left|S(f,Q)-\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Bahwa pada definisi sebelumnya integral Riemann dapat pula dinyatakan sebagai limit dengan $\lim_{\|Q\|\to 0} S(f,Q) = A$ maka

$$\left|A-\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon \text{ sehingga } \int_a^b f(x)\,dx = A.$$

Jadi teorema terbukti.

(Hutahean, 1989:13).

Contoh 2.11

Buktikan bahwa $\int_0^1 f(x)\,dx$ ada, di mana

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{\sin x}{x}$ adalah kontinyu untuk dan $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right] = 1 = f(0)$. Sehingga f adalah kontinyu pada $[0,1]$ dan f terintegral Riemann pada $[0,1]$. Sehingga $\int_0^1 f(x)\,dx$ ada.

Teorema 2.12

f terintegral pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu partisi dari $Q_\varepsilon\,[a,b]$ sedemikian hingga

$$U(f,Q_\varepsilon)-L(f,Q_\varepsilon)<\varepsilon.$$

Bukti:

Misalkan f terintegralkan pada $[a,b]$. Ambil sebarang $\varepsilon>0$ dari definisi supremum terdapat suatu partisi Q_1 dari $[a,b]$ sehingga

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q_1,f).$$

Dari definisi infimum terdapat pula suatu partisi Q_2 dari $[a,b]$ sehingga

$$U(Q_2,f)-U(f)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sekarang misalkan $Q_\varepsilon=Q_1\cup Q_2$ maka Q_ε merupakan perhalusan Q_1 dan Q_2 akibatnya

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(f,Q_1)\le L(P_\varepsilon,f)\le U(f,Q_\varepsilon)\le U(f,Q_\varepsilon)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sebaliknya misalkan untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat suatu partisi Q_ε dari $[a,b]$ sedemikian hingga

$$U(f,Q_\varepsilon)-L(f,Q_\varepsilon)<\varepsilon.$$

Maka, untuk setiap $\varepsilon>0$ berlaku

$$0\le U(f)-L(f)\le U(f,Q_\varepsilon)-L(f,Q_\varepsilon)-L(f,Q_\varepsilon)<\varepsilon$$

Dari sini disimpulkan bahwa $U(f)=L(f)$ atau f terintegralkan pada $[a,b]$.

(Gunawan, 2000:111-112)

2.6 Sifat-Sifat Dasar Integral Riemann

Bagian ini membahas sifat-sifat dasar integral Riemann, di antaranya ketunggalan nilai integral, kelinieran fungsi, keterbatasan, kekonvergenan dan Cauchy.

Teorema 2.13

Jika $f \in \mathbb{R}[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal.

Bukti:

Diketahui $f \in \mathbb{R}[a,b]$ akan dibuktikan $A_1 = A_2$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Misalkan A_1 dan A_2 keduanya nilai integral Riemann fungsi f.

A_1 nilai integral fungsi *f* pada $[a,b]$, maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi $Q = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q_1\| < \delta_1$ berlaku

$$\left|S(f, Q_1) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A_2 nilai integral fungsi *f* pada $[a,b]$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi $Q = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q_2\| < \delta_2$ berlaku

$$\left|S(f, Q_2) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akibatnya jika Q sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q\| < \delta$ berlaku $\|Q\| < \delta_1$ dan $\|Q\| < \delta_2$. Akibatnya

$$\left|S(f, Q_1) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left|S\left(f,Q_2\right)-A_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Lebih lanjut

$$\begin{aligned}\left|A_1-A_2\right| &= \left|A_1-S\left(f;Q\right)+S\left(f;Q\right)-A_2\right| \\ &\le \left|A-S\left(f;Q\right)\right|+\left|S\left(f;Q\right)-A_2\right| \\ &\le \left|S\left(f;Q\right)-A_1\right|+\left|S\left(f;Q\right)-A_2\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Karena ε sebarang bilangan positif maka dapat disimpulkan $A_1 = A_2$.

(Thobirin, 2008)

Teorema berikut ini menyatakan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral Riemann, yaitu $R[a,b]$ adalah ruang linier.

Teorema 2.14

Jika $f,g\in R[a,b]$ dan α sebarang bilangan riil, maka:

a. $(f+g)\in R[a,b]$ dan $(R)\int_a^b (f+g)(x)\,dx=(R)\int_a^b f(x)\,dx+(R)\int_a^b g(x)\,dx.$

b. $\alpha f\in R[a,b]$ dan $(R)\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx=\alpha(R)\int_a^b f(x)\,dx.$

Bukti:

a. Diketahui $f,g\in R[a,b]$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon>0$. Karena $f\in R[a,b]$ maka terdapat $A_1=(R)\int_a^b f(x)\,dx$ dan $\delta_1>0$ sehingga untuk setiap partisi Q_1 pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q_1\|<\delta_1$ berlaku

$$\left|S\left(f,Q_1\right)-A_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $g\in R[a,b]$ maka terapat $A_2=(R)\int_a^b f\left(x\right)dx$ dan $\delta_2>0$ sehingga untuk setiap partisi Q_2 pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q_2\|<\delta_2$ berlaku

$$\left|S\left(f;Q_1\right)-A_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, akibatnya jika Q sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q\|<\delta$ berlaku $\|Q\|<\delta_1$ dan $\|Q\|<\delta_2$. Akibatnya

$$\begin{aligned}\left|S\left(Q_1;f+g\right)-\left(A_1+A_2\right)\right| &= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n}\left(f+g\right)\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)-\left(A_1+A_2\right)\right|\\ &= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n}\left\{f\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)+g\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right\}-\left(A_1+A_2\right)\right|\\ &= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n}f\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)+(Q)\sum_{i=1}^{n}g\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)-\left(A_1+A_2\right)\right|\\ &\le \left|(Q)\sum_{i=1}^{n}f\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)-A_1\right|+\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}g\left(\zeta_1\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)-A_2\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Terbukti $\left(f+g\right)\in R[a,b]$ dan

$$\left(R\right)\int_a^b\left(f+g\right)\left(x\right)dx=A_1+A_2=(R)\int_a^b f\left(x\right)dx+(R)\int_a^b g\left(x\right)dx.$$

b. Diketahui $f\in R[a,b]$, dan diberikan sebarang bilangan $\varepsilon>0$ dan α merupakan kostanta. Karena $f\in R[a,b]$ maka terapat $A=(R)\int_a^b f\left(x\right)dx$

dan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi Q pada $[a,b]$ dengan sifat berlaku $\|Q\| < \delta$ berlaku

$$\left|S\left(f,Q_1\right)-A\right|<\varepsilon .$$

Jika setiap partisi Q pada $[a,b]$ dengan sifat berlaku $\|Q\| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned}\left|S\left(f,Q_1\right)-A\right| &= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon \\ &= \left|(Q)\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Karena α merupakan konstanta maka dapat kita keluarkan sehingga

$$\begin{aligned}\left|S\left(f,Q_1\right)-A\right| &= \alpha\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon \\ &= \alpha\left|S\left(f;Q_1\right)-A\right|<\varepsilon \\ &= \alpha(R)\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Terbukti $(\alpha f)\in R[a,b]$ dan $(R)\int_a^b(\alpha f)(x)\,dx=\alpha(R)\int_a^b f(x)\,dx.$

(Thobirin, 2008:24)

Teorema 2.15 (Kekonvergenan Seragam)

Diketahui fungsi $n\in\mathbb{N}$ dengan f_n terintegral Riemann pada $[a,b]$ untuk setiap n. Jika barisan fungsi f_n konvergen seragam ke fungsi f pada $[a,b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a,b]$, dan

$$(R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_a^b f_n.$$

Bukti:

$f:[a,b]\rightarrow R,\ f_n$ dengan $n\in\mathbb{N}$ terintegral Riemann ke suatu nilai *a* pada $[a,b],$ jika $\forall\varepsilon>0\ni\delta>0$ sehingga untuk partisi Q pada $[a,b]$ dengan $Q<\delta.$

artinya

$$\|f_n\|<\delta_1\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}f_n(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\|f\|<\delta_2\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil δ terbesar

$$\begin{aligned}|S(f_n,Q)-S(f,Q)|&=\left|\sum_{i=1}^{n}f_n(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A+A-\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})\right|\\&\leq\left|\sum_{i=1}^{n}f_n(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|+\left|A-\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})\right|\\&\leq\left|\sum_{i=1}^{n}f_n(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_1)(x_i-x_{i-1})-A\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$S(f,Q)\rightarrow S(f_n,Q).$

$S(f,Q)=\sum_{n\rightarrow a}^{\infty}S(f_n,Q).$

Teorema 2.16 (Cauchy Integral Riemann)

Menurut Thobirin (2008:25) $f\in\mathbb{R}[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga untuk setiap dua partisi pada $[a,b]$ $Q_1=\{a=x_0,x_1,x_2,...,x_n=b;\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$ dan

$Q_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ dengan sifat $\|Q_1\| < \delta$ dan $\|Q_2\| < \delta$ berlaku

$$\left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right|.$$

Bukti:

Syarat Perlu

Diketahui $f \in R[a,b]$ diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat $A = R\int_a^b f(x)dx$ dan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $Q_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $\|Q_1\| < \delta$ berlaku

$$\left| Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jika $Q_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ juga sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan $\|Q_2\| < \delta$ berlaku

$$\left| Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diperoleh

$$\left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$= \left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - A + A \right|$$

$$\leq \left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - A \right| + \left| A - Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$= \left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - A \right| + \left| Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - A \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Syarat Cukup

Jika diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap dua partisi pada $[a,b]$ $Q_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ dan $Q_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ dengan sifat $\|Q_1\| < \delta$ dan $\|Q_2\| < \delta$ berlaku

$$\left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon \quad .$$

Akan ditunjukkan $f \in R[a,b]$.

Dibentuk barisan (ε_n) dengan $\varepsilon_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yang monoton turun dan konvergen ke 0. Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \leq n_1$ berlaku

$$n \geq n_2.$$

Berdasarkan yang diketahui, maka setiap ε_n terdapat bilangan $\delta_n^{'} > 0$ sehingga untuk setiap $Q_{n1} = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ dan $Q_{n2} = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ dua partisi pada $[a,b]$ dengan $\|Q_{n1}\| < \delta_n^{'}$ dan $\|Q_{n2}\| < \delta_n^{'}$ berlaku

$$\left| Q_{n1} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_{n2} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon_n.$$

Selanjutnya didefinisikan

$$s_n = (Q_n)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

untuk setiap bilangan $n \in \mathbb{N}.$.

Dibentuk barisan bilangan riil positif δ_n dengan $\delta_1(\xi) = \delta_1^*$ dan

$\delta_2(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2^*(\xi)\}$

$\delta_n(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi), ..., \delta_{n-1}(\xi), \delta_n^*\}$ $n = 3, 4, 5, ..$ (*)

Selanjutnya diambil bilangan asli m dan n dengan $m \geq n_1$ dan $n \geq n_1$. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $m \geq n$, maka berdasarkan persamaan (*) berlaku

$$\delta_m \leq \delta_n.$$

Ambil sebarang partisi $Q_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ dan $Q_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ dengan sifat $\|Q_1\| < \delta_n$ dan $\|Q_2\| < \delta_n$ sehingga diperoleh

$$|s_n - s_m| = \left| Q_1 \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon_n$$

dan karena

$$|\varepsilon_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

maka diperoleh:

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jadi (s_n) merupakan barisan Cauchy dalam R, oleh karenanya (s_n) barisan konvergen. Misalkan konvergen ke $s \in R$, berarti terdapat bilangan asli n_2 dengan $n \geq n_2$ sehingga berlaku

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dipilih bilangan asli $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$. Jika $Q = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan $\|Q\| < \delta_{n_0}$, diperoleh:

$$\left| Q\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - s \right|$$

$$= \left| Q\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_{n_0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right| + \left| Q_{n_0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - s \right|$$

$$\leq \left| Q\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - Q_{n_0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) \right| + \left| Q_{n_0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - s \right|$$

$$< \varepsilon_{n_0} + |s_{n_0} - s|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti $f \in R[a,b]$

2.6 Integral Lebesgue

Pada perinsip integral Lebesgue dibangun atas teori ukuran. Integral Riemaan dari suatu fungsi terbatas f pada $[a,b]$ disusun berdasarkan atas konsep partisi $Q = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$. Menurut Lifton (2004), bahwa penyusunan integral Lebesgue sebagai limit jumlah atau disebut definisi tipe

Riemann untuk integral Lebesgue dari suatu fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E disusun berdasarkan konsep partisi $Q=\{a=y_0, y,\ldots, y_n=b\}$ pada interval $[a,b]$. Dengan ketentuan $a=\inf\{f(x); x\in E\}$ dan $b>\sup\{f(x); x\in E\}$ di mana nilai b cukup dekat dengan nilai $\sup\{f(x); x\in E\}$. Penyususnan partisi Q pada $[a,b]$ bisa juga diambil dengan ketentuan $a>\inf\{f(x); x\in E\}$ dan $b\geq\sup\{f(x); x\in E\}$. Notasi $\pi[a,b]$ adalah himpunan semua partisi Q pada $[a,b]$. Selanjutnya untuk setiap $i=1,2,3,\ldots,n$ dikontruksikan himpunan-himpunan $E_i=\{x; y_{i-1}\leq f(x)<y_i\}$, karena f terukur maka E_i juga terukur. Dibentuk jumlahan-jumlahan,

$$L(f,Q)=\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}m(E_i) \text{ dan } U(f,Q)=\sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i)$$

dengan $m(E_i)$ adalah ukuran Lebesgue himpunan E_i. Jika Q adalah sebarang partisi pada $[a,b]$ dan P adalah partisi penghalusan dari partisi Q pada $[a,b]$, maka berlaku

$$L(f,P)\leq L(f,Q) \text{ dan } U(f,P)\leq U(f,Q).$$

Integral Lebesgue bahwa fungsi f dan E dinotasikan dengan $I=\sup\{L(f,Q); Q\in\pi[a,b]\}$ dan integral Lebesgue atas fungsi f pada dinotasikan dengan $J=\inf\{U(f,Q); Q\in\pi[a,b]\}$. Untuk setiap fungsi terbatas dan terukur f berlaku

$$L(f,Q)\leq I\leq J\leq U(f,Q)$$

selanjutnya dan terukur f dikatakan terintegral Lebesgue pada E jika $I=J$.

Definisi 2.13 (Limit Jumlah pada Integral Lebesgue)

Fungsi f terbatas dan terukur pada E dikatakan terintegral Lebesgue pada E, dinotasikan $f \in L(E)$, jika nilai $I = J$.

Di lain pihak menurut Lifton (1969), untuk setiap fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E dan untuk setiap partisi $Q = \{a = y_0, y, \ldots, y_n = b\}$ pada interval $[a,b]$ diambil sebarang titik $y_i^n = [y_{(i-1)}, y_i]; i = 1, 2, 3, \ldots., n$ dan dua bentuk jumlahan

$$S(f, Q) = \sum_{i=1}^{n} y_i^n m(E_i).$$

Jika nilai

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i^n m(E_i) \text{ ada (berhingga).}$$

Maka fungsi f dikatakan terintegral Lebesgue sebagai limit jumlah pada E dengan notasi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i^n m(E_i) = (L)\int_E f(x)\,dx.$$

(Maknawi, 2009:41)

Definisi 2.14 (Integral Lebesgue)

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E. Fungsi f dikatakan Lebesgue ke nilai A pada E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $Q = \{a = y_0, y, \ldots, y_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $Q = maks\{y_i - y_{i-1}; i = 1, 2, 3, \ldots, n\} < \delta$ berakibat

$$\left|S(f, Q) - A\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} y_i^n m(E_i) - A\right| < \varepsilon.$$

(Maknawi, 2009:41)

Teorema 2.13

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan terukur E fungsi f terintegral Lebesgue pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $Q - \{a - y_0, y_1, \ldots, y_n - b\}$ pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon.$$

Bukti:

Syarat Perlu

Diketahui $f \in L(E)$, terdapat bilangan I dan J sehingga $I = J$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ dengan menggunakan sifat supremum dan infirmum, terdapat partisi Q_1 dan Q_2 pada $[a,b]$ sehingga

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < L(f,Q) \leq I = J \leq U(f,Q) < J + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Diambil partisi $Q = Q_1 \cup Q_2$ pada $[a,b]$, maka berlaku

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < L(f,Q_1) \leq L(f,Q) \leq I = J \leq (f,Q) \leq U(f,Q) < J + \frac{1}{2}\varepsilon$$

dan berakibat

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \left(J + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - (I - \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Syarat Cukup

Diketahui untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi Q pada $[a,b]$ sehingga

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon.$$

Karena selalu berlaku $L(f,Q) \leq I \leq J \leq U(f,Q)$, maka diperoleh

$$J - I \leq U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon .$$

Karena diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka berlaku $I = J$. Dengan demikian, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi f terintegral Lebesgue pada E. Jadi teorema terbukti bahwa

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \varepsilon$$

(Maknawi, 2009:42)

Definisi 2.15 (Fungsi Terukur)

Fungsi bernilai riil f yang didefinisikan pada himpunan terukur E disebut terukur Lebesgue atau lebih sederhananya disebut terukur E jika himpunan terukur untuk semua bilangan riil c.

Keempat pernyataan berikut ekuivalen:

1. Untuk setiap c, himpunan $E(f < c)$ terukur.
2. Untuk setiap c, himpunan $E(f \geq c)$ terukur.
3. Untuk setiap c, himpunan $E(f > c)$ terukur.
4. Untuk setiap c, himpunan $E(f \leq c)$ terukur.

Bukti:

1 →Karena $E(f \geq c) = (E(f < c))^c$, dan $E(f < c)$ terukur

maka $E(f \geq c) = (E(f < c))^c$ terukur.

2 →Karena $E(f > c) = \cup_{n=1}^{\infty} E(f \geq c + \frac{1}{n})$, dan $E(f \geq c + \frac{1}{n})$ terukur

maka $E(f > c) = \cup_{n=1}^{\infty} E(f \geq c + \frac{1}{n})$ terukur.

3 →Karena $E(f \leq c) = (E(f < c))^c$, dan $E(f > c)$ terukur, maka $E(f \leq c)$ terukur.

4 →Karena $E(f < c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f \geq c - \frac{1}{n})$, dan $E(f \geq c - \frac{1}{n})$ terukur

$n = 1,2,3, \ldots,$ maka $E(f < c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f \geq c - \frac{1}{n})$ terukur.

Definisi 2.16 (Himpunan Terukur)

Misalkan E_i himpunan terukur, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, a_i bilangan riil yang diketahui $(i = 1,2,3, \ldots, n)$. Fungsi $f : \bigcap_{i=1}^{n} E_i \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{Ei}(x)$ dinamakan fungsi sederahana.

Definisi 2.17 (Ukuran)

Ukuran selang terbuka (a,b) dinyatakan dengan $\mu((a,b))$ atau dengan $\mu[(a,b)]$ dan didefinisikan dengan

$$\mu(a,b) = b - a.$$

Ukuran selang terbuka (a,∞) atau $(-\infty,b)$ atau $(-\infty,\infty)$ didefinisikan sebagai

$$\mu(a,\infty) = \mu(-\infty,b) = \mu(-\infty,\infty) = \infty.$$

Definisi 2.18 (Himpunan Terukur)

Himpunan *E* dikatakan terukur, jika $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. Jika *E* terukur, maka ukuran *E*. Dinyatakan $\mu(E)$ dan di definisikan sebagai $\mu(E) = \mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Ukuran lebesgue adalah suatu fungsi himpunan bernilai riil. Dalam barisan bilangan riil suatu barisan adalah konvergen jika limit dan jika dan hanya jika infimumnya sama dengan limit supermumnya, maka pada barisan himpunan pun bahwa suatu barisan himpunan adalah konvergen jika dan hanya jika limit inferiornya dama dengan limit superiornya.

2.8 Konsep Matematika dalam Al-Quran

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya dapat dilihat dalam al-Quran. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar mengerti arti kebesaran Allah (Rahman, 2007:1).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dalam al-Quran surat al-Qamar/54:49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*" *(Q.S. al-Qomar/54:49).*

Demikian juga dalam al-Quran surat al-Furqan/25:2 yang berbunyi:

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ
كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. al-Furqan/25:2).

Matematika merupakan suatu ilmu yang mengkaji tentang cara berhitung dan mengukur sesuatu dengan angka, simbol, atau jumlah. Pokok kajiannya meliputi aljabar, logika, geometri, analisis, statistika, dan lain-lain. Matematika tidak lepas dari kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Peranannya sangat dibutuhkan, karena matematika itu sendiri sering disebut *Queen of Science* yang artinya setiap cabang ilmu pengetahuan banyak yang berkaitan dengan matematika demi memudahkan dalam mempelajari ilmu tersebut.

Berbicara ilmu pengetahuan, al-Quran telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari dunia ini (Rahman, 1992:12). Tidak diragukan lagi bahwa al-Quran dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu, Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir.

Dalam al-Quran diberikan sebuah motivasi untuk mempelajari matematika sebagaimana yang ada dalam surat Yunus/10:5 yang berbunyi:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ
وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْءَايَٰتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾

"Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui"(QS. Yunus/10:5).

Dari ayat di atas tampaklah bahwa Allah memberikan dorongan untuk mempelajari ilmu perhitungan yaitu matematika. Maka dari itu sangat rugi jikalau kecermerlangan dan kedahsyatan otak yang diberikan oleh Allah tidak diasah untuk mampu berhitung. Sebuah keberuntungan bagi seseorang yang suka terhadap ilmu hitung-menghitung ini.

Salah satu contohnya seperti yang terkandung dalam surat al-Baqarah /01:261 sebagai berikut:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمۡوَٰلَهُمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتۡ سَبۡعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ سُنۢبُلَةٖ مِّاْئَةُ حَبَّةٖۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ٢٦١

"Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui" (Q.S. al-Baqarah/01:261).

Pada surat al-Baqarah/01:261 tersebut, nampak jelas bahwa Allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematika. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan

$$y = 700x$$

dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdussakir, 2007:81). Sebenarnya sejak dahulu dalam al-Quran telah terkandung konsep-konsep matematika, hanya saja orang-orang yang berilmulah yang dapat mengambil pelajaran dari padanya.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1. Sifat-Sifat Integral Lebesgue.

Sifat-sifat dasar integral Riemann yaitu ketunggalan nilai integral, kelinieran, kekonvergenan seragam, dan Cauchy berlaku pula pada integral Lebesgue.

3.1.1 Ketunggalan Nilai Integral

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya yakni pada teorema 2.13 bahwa integral Riemann mempunyai nilai yang tunggal yakni $A_1 = A_2$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pada integral Lebesgue juga berlaku demikian.

Menurut definisi integral Lebesgue yakni:

Diberikan fungsi terbatas dengan terukur f pada himpuna n terukur E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $Q = \{a = y_0, y, \ldots, y_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|Q\| = maks\{y_i - y_{i-1}; i = 1, 2, 3, \ldots, n\} < \delta$ berakibat

$$\left|S(f,Q) - A\right| < \varepsilon.$$

Untuk membuktikan bahwa integral Lebesgue mempunyai nilai tunggal dimisalkan $A \neq B$. Andaikan $\left|S(f,Q) - A\right| < \varepsilon$ dan $\left|S(f,Q) - B\right| < \varepsilon$ dengan $A \neq B$ untuk setiap A terdapat $\delta_1 > 0$ untuk setiap partisi $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ dengan $\|Q\| < \delta$ sehingga untuk setiap $\|Q_1\| < \delta_1$ berlaku

$$\left|S(Q; f) - \mathrm{A}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demikian juga berlaku pada B pada nilai integral fungsi f pada $[a,b]$ yaitu

$$\left|S(Q;f)-\mathrm{B}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dipilih $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ menggunkan ketaksamaan segitiga maka untuk

$\|Q\|<\delta$

$$\begin{aligned}
|A-B| &= \left|A-S(Q;f)+S(Q;f)-B\right| \\
&\le \left|A-S(Q;f)\right|+\left|S(Q;f)-B\right| \\
&\le \left|S(Q;f)-A\right|+\left|S(Q;f)-B\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$|A-B|<\varepsilon$$

$$|A-B|=0$$

$$A=B$$

Sehingga permisalan salah karena dari hasil diatas di dapat bahwa $A=B$. Jadi terbukti bahwa pada integral Lebesgue juga berlaku sifat ketunggalan nilai integral.

3.1.2. Kelinieran Fungsi Integral Lebesgue.

Pada integral Riemann telah dibuktikan pada teorema 2.14 sifat-sifat dasar integral Riemann berlaku sifat kelinieran fungsi. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pada integral Lebesgue juga berlaku demikian. Adapun sifat kelinieran integral Lebesgue adalah sebagai berikut:

Teorema

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f dan g pada himpunan terukur E. f dan g terintegral Lebesgue pada E dan α adalah sebarang bilangan riil maka $f+g$ dan αf terintegral Lebesgue dan berlaku:

a. $(L)\int_E \left(f(x)+g(x)\right) dx=(L)\int_E f(x)\,dx+(L)\int_E g(x)\,dx$

b. $(L)\int_E \alpha f(x)dx=\alpha(L)\int_E f(x)\,dx$

Bukti:

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon>0$

a. Karena f dan g terintegral Lebesgue pada E. Andaikan $(L)\int_E f(x)\,dx=A$ dan $(L)\int_E f(x)\,dx=B$ maka terdapat $\delta_1>0$ sehingga untuk setiap partisi Q_f pada $[a_f,b_f]$ dengan $a_f=\inf\{f(x);x\in E\}$ dan $b_f>\inf\{f(x);x\in E\}$ dengan $\|Q_f\|<\delta_1$

$$\left|S(f,Q)-A\right|<\frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$$

dan terdapat $\delta_2>0$ sehingga untuk setiap partisi Q_g pada $[a_g,b_g]$ dengan $a_g=\inf\{g(x);x\in E\}$ dan $b_g>\inf\{g(x);x\in E\}$ dengan $\|g\|<\delta_2$

$$\left|S(g,Q)-B\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dipilih $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ menggunkan ketaksamaan segitiga maka untuk $\|Q\|<\delta$ berlaku

$$\left|S(f+g)Q-(A+B)\right|=\left|S(Q,f+g)-(A+B)\right|$$

$$\leq\left|S(f,Q)-A\right|+\left|S(g,Q)-B\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Berati $f+g$ terintegral Lebesgue pada E dan berlaku $(L)\int_E\left(f(x)+g(x)\right)dx=A+B=(L)\int_E f(x)\,dx+(L)\int_E g(x)\,dx.$

b. Demikian juga berlaku untuk setiap partisi Q_f pada $[a_f,b_f]$ dengan $\|Q_f\|<\delta_2$ maka

$$\left|S(\alpha,Q)-\alpha A\right|=|\alpha|\left|S(f,Q)-A\right|$$

$$<|\alpha|\frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}<\varepsilon$$

Berarti αf terintegral Lebesgue pada E dan berlaku $(L)\int_E\alpha f(x)\,dx=\alpha A=\alpha(L)\int_E f(x)\,dx.$

Jadi teorema terbukti.

3.1.3 Kekonvergenan Seragam Integral Lebesgue

Pada integral Riemann telah dibuktikan pada teorema 2.15 sifat-sifat dasar integral Reimann berlaku sifat kekonvergenan seragam. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pada integral Lebesgue juga berlaku demikian. Adapun sifat kekonvergenan seragam integral Lebesgue adalah sebagai berikut:

Diketahui fungsi dengan f_n terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ untuk setiap n, jika barisan fungsi f hampir dimana-mana pada $[a,b]$, maka f terintegral Lebesgue pada $[a,b]$, dan

$$(L)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b f_n \,.$$

Bukti:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f_n dengan $n\in\mathbb{N}$ terintegral Lebesgue ke suatu nilai a pada $[a,b]$, jika $\forall\,\varepsilon>0 \ni \delta>0$ sehingga untuk partisi Q pada $[a,b]$ dengan $\|Q\|<\delta$ artinya

$$\|f_n\| < \delta_1 \Rightarrow \left|S(f_n,Q)-A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\|f\| < \delta_2 \Rightarrow \left|S(f,Q)-A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil δ terbesar

$$\begin{aligned}\left|S(f_n,Q)-S(f,Q)\right| &= \left|S(f_n,Q)-A+A-S(f,Q)\right| \\ &\le \left|S(f_n,Q)-A\right|+\left|A-S(f,Q)\right| \\ &\le \left|S(f_n,Q)-A\right|+\left|S(f,Q)-A\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

$$S(f,Q)\to S(f_n,Q)$$

$$S(f,Q)=\sum_{n\to a}^{\infty} S(f_n,Q)$$

ini berarti

$$(L)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_a^b f_n \,.$$

3.1.4 Cauchy pada Integral Lebesgue

Pada integral Riemann telah dibuktikan pada teorema 2.16 sifat-sifat dasar integral Riemann berlaku sifat Cauchy. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pada integral Lebesgue juga berlaku demikian. Adapun sifat Cauchy integral Lebesgue pada E.

Diberikan fungsi terbatas dan terukur f pada himpunan E. Fungsi f terintegral Lebesgue pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi Q_1 dan Q_2 pada $[a,b]$ dengan $\|Q_1\|$ dan $\|Q_2\|$ berlaku

$$\left|S(f,Q_1)-S(f,Q_2)\right|<\varepsilon.$$

Bukti:

Syarat perlu

Diketahui f terintegral Lebesgue pada E. Misalkan f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap partisi Q_1 dan Q_2 pada $[a,b]$ dengan $\|Q_1\| < \delta$ dan $\|Q_2\| < \delta$ berlaku

$$\|Q_1\| < \delta \text{berlaku} \left|S(f,Q_1)-A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

demikian juga pada partisi Q_2 pada $[a,b]$ yaitu

$$\|Q_2\| < \delta \text{berlaku} \left|S(f,Q_2)-A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga berakibat

$$|S(f,Q_1)-S(f,Q_2)|=|S(f,Q_1)-A-S(f,Q_2)-A|$$

$$\leq |S(f,Q_1)-A|+|S(f,Q_2)-A|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Syarat Cukup

Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga untuk setiap partisi Q_1 dan Q_2 pada $[a,b]$ dengan $\|Q_1\|<\delta$ dan $\|Q_2\|<\delta$ berlaku

$$|S(f,Q_1)-S(f,Q_2)|<\varepsilon.$$

Diambil bilangan $\varepsilon>0$ tetap dan dimisalkan $\pi_\delta[a,b]$ adalah koleksi semua partisi Q pada $[a,b]$ dengan norma yang lebih kecil dari δ. Untuk suatu partisi $Q_0\in\pi_\delta[a,b]$ tetap dan sebarang $Q\in\pi_\delta[a,b]$ berlaku

$$|S(f,Q_0)-S(f,Q)|<\varepsilon$$

dengan kata lain berlaku

$$S(f,Q_0)-\delta<S(f,Q)<S(f,Q_0)+\delta.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa himpunan $S(f)=\{S(f,Q):Q\in\pi_\delta[a,b]\}$ tak hingga terbatas, maka himpunan $S(f)$ mempunyai paling sedikit satu limit, yang dimisalkan $A.$

Jadi untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat partisi $Q_1\in\pi_\delta[a,b]$ sehingga $(R)\int_a^b f(x)dx\leq(L)\int_a^b fd\mu\leq(L)\int_a^b fd\mu\leq(R)\int_a^b f(x)dx.$ Dengan demikian, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E.

3.2 Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Lebesgue

Teorema

Diberikan fungsi terbatas f terintegral Riemann kesuatu nilai A pada $[a,b]$, ditulis $f \in \mathbb{R} \to [a,b]$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi Q pada $[a,b]$ berakibat $\left|S(f,Q) - A\right| < \varepsilon$ jika dan hanya jika fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ partisi $Q = \{a = y_0, y, \ldots, y_n = b\}$ pada $[a,b]$ dan $Q = maks\{y_i - y_{i-1}; i = 1,2,3,\ldots,n\} < \delta$ berakibat

$$\left|S(f,Q) - A\right| < \varepsilon.$$

Bukti**:**

Diketahui fungsi f terbatas disusun berdasarkan konsep partisi $Q = \{a = x_0, x, \ldots, x_n = b\}$ pada interval $[a,b]$. Dengan ketentuan $a = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ dan $b > \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ di mana nilai b cukup dekat dengan nilai $\sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Namun sebaliknya, penyusunan partisis Q pada $[a,b]$ bisa juga diambil dengan ketentuan $a < \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ dan $b \geq \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$.

Notasi $\pi[a,b]$ adalah himpunan semua partisi Q pada $[a,b]$. Selanjutnya untuk setiap $i = 1,2,3,\ldots,n$ membentuk jumlahan-jumlahan,

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \text{ dan } U(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Jika Q adalah sebarang partisi pada $[a,b]$ dan P adalah partisi penghalusan dari partisi Q pada $[a,b]$, maka berlaku $L(f,P) \leq L(f,Q)$ dan $U(f,P) \leq U(f,Q)$.

Integral Riemann bahwa fungsi f dinotasikan degan $I = \sup\{L(f,Q); Q \in \pi[a,b]\}$, dan integral Riemann atas fungsi f dinotasikan dengan $J = \inf\{U(f,Q); Q \in \pi[a,b]\}$. Untuk setiap fungsi terbatas berlaku $L(f,Q) \leq I \leq J \leq U(f,Q)$ maka terdapat bilangan I dan J maka nilai $\sup\{L(f,Q); Q \in \pi[a,b]\} - I - J - \inf\{U(f,Q); Q \in \pi[a,b]\}$.

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat supremum dan infimum, maka terdapat partisi Q_1 dan Q_2 pada $[a,b]$ dengan $\|Q_1\| < \delta_1$ dan $\|Q_2\| < \delta_2$ sehingga

$$I - \varepsilon < L(f,Q_1) \leq I = J \leq U(f,Q_2) < J + \varepsilon.$$

Dibentuk partisi $Q = Q_1 \cup Q_2$ pada $[a,b]$ dan didefinisikan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ maka $\|Q\| < \delta$ dan berlaku

$$L(f,Q_1) \leq L(f,Q) \leq S(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,Q_2)$$

Sehingga akan berlaku $I - \varepsilon \leq S(f,Q) \leq J + \varepsilon$ karena nilai $I = J$ atau akan berlaku $A - \varepsilon \leq S(f,Q) \leq A + \varepsilon$ karena nilai A maka

$$|S(f,Q) - A| < \varepsilon$$

atau

$$\left| S(f,Q) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Bahwa integral Riemann dapat pula dinyatakan sebagai limit dengan $\lim_{\|Q\|\to 0} S(f,Q) = A$ maka

$$\left| A - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon \text{ sehingga } \int_a^b f(x)\,dx = A.$$

Jadi definisi tipe Riemann sebagai limit jumlah juga sama menurut definisi integral Lebesgue yaitu

$$\left| S(f,Q) - A \right| < \varepsilon.$$

Syarat Cukup

Diketahui fungsi f terintegral Lebesgue ke nilai A pada E, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $Q = \{a = y_1, y_2, ..., y_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|Q\| = maks\{y_i - y_{i-1} i = 1,2,3,...,n\} < \delta$ berakibat

$$|S(f,Q) - A| = \left| \sum_{i=1}^{n} y_i^n m(E_i) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ atau}$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} y_i^n m(E_i) - A < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Hal ini berlaku untuk sebarang $y_i^n \in [y_{i-1}, y_i]$. Jadi, jika diambil $y_i^n \in [y_{i-1}, y_i]$ dengan $y_i^n = y_{i-1}, y_i$ maka berlaku

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

dan jika diambil $y_i^n \in [y_{i-1}, y_i]$ dengan $y_i^n = y_i$ maka berlaku

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diperoleh

$$U(f,Q)-L(f,Q)<(A+\frac{\varepsilon}{2})-(A-\frac{\varepsilon}{2})=\varepsilon.$$

Dengan demikian, untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ dan untuk setiap partisi $Q=\{a=y_1,y_2,...,y_n=b\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|Q\|=maks\{y_i-y_{i-1}i=1,2,3,...,n\}<\delta$ berlaku

$$U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$$

Karena selalu berlaku $L(f,Q)\leq A\leq U(f,Q)$, maka diperoleh

$$A\leq U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$$

$$A\leq S(f,Q)<\varepsilon$$

$$|S(f,Q)-A|<\varepsilon\,.$$

Karena bilangan $\varepsilon>0$ sebarang, maka *A* fungsi f terintegral Lebesgue pada *A*.

Menurut definisi integral Riemann yaitu $\left|S\left(f,Q\right)-A\right|<\varepsilon.$

Contoh**:**

Diketahui $f(x)=x^2, x\in[0,1]$, maka akan dihitung $\int_0^1 fd\mu$

a) Terintegral Riemann

b) Terintegral Lebesgue

Penyelesaian:

a. Terintegral Riemann

Ambillah $Q_n=(x_0,x_1,x_2,...,x_n)$. dengan $x_i-x_{i-1}=(\frac{1-0}{n})$ untuk $i=1,2,3,...,n$ maka

$$m_i = \inf_{x \in [x_i - x_{i-1}]} f(x) = (\frac{i-1}{n})^2$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i - x_{i-1}]} = (\frac{i}{n})^2$$

Sehingga

$$U(f, Q_n) - L(f, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(\frac{i}{n})^2 - (\frac{k-1}{n})^2]$$

$$= \frac{[\sum_{i=1}^{n} (2i+1)]}{(n^3)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n}{n^3}$$

karena itu

$$\lim_{n \to \infty} [U(f, Q_n) - L(f, Q_n)] = 0.$$

Dengan demikian

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{k}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

b. Terintegral Lebesgue

$$f[(0,1)]=[0,1].$$

Selang $[0,1]$ menjadi n selang bagian oleh titik-titik $y_1, y_2, y_3, y_4, ..., y_n$ maka

$m_i = y_{i-1}, M_i = y_i, E_i = (y_{i-1} - y_i)$

$y_i = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, 3, ...n),\ \mu = x_i - x_{i-1}$, sehingga

$$\int_0^1 fd\mu = \lim_{maks\mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(E_i)$$

$$= \lim_{maks\mu(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_0^{\overline{1}} f(x)dx$$

dan

$$\int_{\underline{0}}^1 fd\mu = \lim_{maks\mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(E_i)$$

$$= \lim_{maks\mu(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})[0,1]$$

$$\int_0^{\overline{1}} f(x)d\mu = \int_{\underline{0}}^1 f(x)d\mu = \int_0^1 f(x)d\mu = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Karena f kontinyu, maka f terintegral Riemann pada $[0,1]$

$$\int_0^{\overline{1}} f(x)dx = \int_{\underline{0}}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

sehingga

$$\int_0^{\overline{1}} f(x)d\mu = \int_{\underline{0}}^1 f(x)d\mu = \int_0^1 f(x)d\mu$$

dan ini berarti f terintegral Lebesgue pada $[0,1]$.

Contoh:

Misalkan $I=[0,1]$ dan $f:I\to\mathbb{R}$ dengan $f(x)=\sqrt{x}$.

a. Terintegral Riemann

b. Terintegral Lebesgue

Penyelesaian:

a. Terintegral Riemann

Fungsi $f(x)=\sqrt{x}$ terintegral pada $[0,1]$. Misalkan Q_n merupakan partisi dari $I=[0,1]$, yaitu

$$Q_n=(0,\frac{1}{n^2},\frac{4}{n^2},\frac{9}{n^2},\ldots,\frac{(n-1)}{n^2},\frac{n^2}{n^2},1).$$

Infimum dan supremum dari f pada subinterval $[\frac{(i-1)^2}{n^2},\frac{i^2}{n^2}]$ adalah

$$m_i=\sqrt{\frac{(i-1)^2}{n^2}}=\frac{i-1}{n}$$

$$M_i=\sqrt{\frac{i^2}{n^2}}=\frac{i}{n}$$

Jika diambil $x_i-x_{i-1}=(\frac{2i-1}{n^2})$ untuk $i=1,2,3,\ldots,n$

Sehingga didapat

$$L(f,Q_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}(\frac{2i-1}{n^2})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{n^3}i^2-\frac{3}{n^3}i-\frac{1}{n^3})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^3} i^2 - \frac{3}{n^3} i - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n^3} i - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} n$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{3}{2n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

dan

$$U(f, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \left(\frac{2i-1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^3} i^2 - \frac{i}{n^3} i\right)$$

$$= \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{3}{2n} - \frac{3}{2n^2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

Karena itu

$$\lim(U(f,Q_n)-L(f,Q))=\lim((\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2})-(\frac{2}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}))$$

$$=\lim\frac{2}{2n}$$

$$=\lim\frac{1}{n}$$

$$=0$$

Dengan demikian

$$\int_0^1\sqrt{x}dx=\lim U(f,Q_n)$$

$$=\lim(\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2})$$

$$=\frac{2}{3}$$

b. Terintegral Lebesgue

Selang $[0,1]$ menjadi n selang bagian oleh titik-titik $y_1,y_2,y_3,y_4,....,y_n$ maka

$m_i=y_{i-1},M_i=y_i,E_i=(y_{i-1}-y_i)$

$y_i=f(x_i)$ $\quad (i=1,2,3,...n),\ \mu=x_i-x_{i-1},$

sehingga

$$\int_0^1 fd\mu=\lim_{maks\mu(E_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}M_i\mu(E_i)$$

$$=\lim_{maks\mu(x_i-x_{i-1})\to 0}\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

dan

$$\int_{\overline{0}}^{1} fd\mu = \lim_{maks\mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(E_i)$$

$$= \lim_{maks\mu(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})[0,1]$$

$$\int_{0}^{\underline{1}} f(x)d\mu = \int_{\overline{0}}^{1} f(x)d\mu = \int_{0}^{1} f(x)d\mu = \int_{0}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

Karena f kontinyu, maka f terintegral Riemann pada $[0,1]$

$$\int_{0}^{\underline{1}} f(x)dx = \int_{\overline{0}}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

sehingga

$$\int_{0}^{\underline{1}} f(x)d\mu = \int_{\overline{0}}^{1} f(x)d\mu = \int_{0}^{1} f(x)d\mu$$

dan ini berarti f terintegral Lebesgue pada $[0,1]$.

3.3 Konsep Ekuivalensi dalam Al-Quran

Ekuivalensi mempunyai arti setara atau mempunyai nilai yang sama. Meski keduanya berbeda, tapi mempunyai nilai yang sama. Untuk kaitan integrasi agama dan kajian skripsi ini penulis mengaitkan integrasinya dengan kesetaraan antara laki-laki dan perempuan. Pada dasarnya laki-laki dan perempuan memang berbeda, tapi keduanya mempunyai nilai yang sama dalam beberapa hal. Konsep ini sama dengan konsep ekuivalensi integral Riemann dan integral Lebesgue. Dalam Islam terutama dalam al-Quran banyak menjelaskan tentang kesetaraan atau sesuatu yang berbeda, tapi pada akhirnya bernilai sama.

Nilai-nilai tersebut antara lain nilai kemanusiaan, keadilan, kemerdekaan, kesetaraan dan sebagainya. Berkaitan dengan nilai keadilan dan kesetaraan. Islam tidak pernah mentolerir adanya perbedaan atau perlakuan diskriminasi diantara umat manusia.

Banyak ayat al-Quran yang telah menunjukkan bahwa laki-laki dan perempuan adalah sama-sama semartabat sebagai manusia, terutama secara spiritual. Begitu pula, banyak hadist yang menunjukkan kesamaan harkat laki-laki dan perempuan. Dalam pandangan agama Islam, segala sesuatu diciptakan Allah dengan kodrat-Nya, sebagaimana dalam al-Quran:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"(QS. Al-Qomar/54:49).*

Ada beberapa hal yang mencakup kesetaraan antara laki-laki dan perempuan antara lain: dalam hal penciptaan, al-Quran tidak membedakan perempuan dan laki-laki dalam konteks penciptaan dan proses selanjutnya sebagai manusia. Dalam pandangan al-Quran, Allah menciptakan semuanya (perempuan dan laki-laki) adalah "untuk satu tujuan" seperti yang tertulis dalam firman Allah:

وَمَا خَلَقْنَا السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا إِلَّا بِالْحَقِّ ۗ وَإِنَّ السَّاعَةَ لَآتِيَةٌ ۖ فَاصْفَحِ الصَّفْحَ الْجَمِيلَ ﴿٨٥﴾

"*Dan tidaklah Kami ciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya, melainkan dengan benar. dan Sesungguhnya saat (kiamat) itu pasti akan datang, Maka maafkanlah (mereka) dengan cara yang baik" (QS. al-Hijr/15:85).*

Dalam surat lain juga disebutkan tentang penciptaan laki-laki dan perempuan yang menyatakan tidak ada perbedaan. Seperti yang termaktub dalam surat al-Isro/17:70:

وَلَقَدۡ كَرَّمۡنَا بَنِيٓ ءَادَمَ وَحَمَلۡنَٰهُمۡ فِي ٱلۡبَرِّ وَٱلۡبَحۡرِ وَرَزَقۡنَٰهُم مِّنَ ٱلطَّيِّبَٰتِ وَفَضَّلۡنَٰهُمۡ عَلَىٰ
كَثِيرٖ مِّمَّنۡ خَلَقۡنَا تَفۡضِيلٗا ٧٠

”Dan Sesungguhnya telah Kami muliakan anak-anak Adam, Kami angkut mereka di daratan dan di lautan, Kami beri mereka rezki dari yang baik-baik dan Kami lebihkan mereka dengan kelebihan yang sempurna atas kebanyakan makhluk yang telah Kami ciptakan” (Q.S. al-Isro/17:70).

Adapun tentang kedudukan laki-laki dan perempuan, Allah menjelaskan dalam beberapa surat dalam al-Quran antara lain surat ali-Imran/3: 195:

فَٱسۡتَجَابَ لَهُمۡ رَبُّهُمۡ أَنِّي لَآ أُضِيعُ عَمَلَ عَٰمِلٖ مِّنكُم مِّن ذَكَرٍ أَوۡ أُنثَىٰۖ بَعۡضُكُم مِّنۢ بَعۡضٖۖ
فَٱلَّذِينَ هَاجَرُواْ وَأُخۡرِجُواْ مِن دِيَٰرِهِمۡ وَأُوذُواْ فِي سَبِيلِي وَقَٰتَلُواْ وَقُتِلُواْ لَأُكَفِّرَنَّ عَنۡهُمۡ سَيِّـَٔاتِهِمۡ
وَلَأُدۡخِلَنَّهُمۡ جَنَّٰتٖ تَجۡرِي مِن تَحۡتِهَا ٱلۡأَنۡهَٰرُ ثَوَابٗا مِّنۡ عِندِ ٱللَّهِۚ وَٱللَّهُ عِندَهُۥ حُسۡنُ ٱلثَّوَابِ ١٩٥

”Maka Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman): "Sesungguhnya aku tidak menyia-nyiakan amal orang-orang yang beramal di antara kamu, baik laki-laki atau perempuan, (karena) sebagian kamu adalah turunan dari sebagian yang lain. Maka orang-orang yang berhijrah, yang diusir dari kampung halamannya, yang disakiti pada jalan-Ku, yang berperang dan yang dibunuh, pastilah akan Ku-hapuskan kesalahan-kesalahan mereka dan pastilah aku masukkan mereka ke dalam surga yang mengalir sungai-sungai di bawahnya, sebagai pahala di sisi Allah. dan Allah pada sisi-Nya pahala yang baik"(Q.S. ali-Imron/3:195).

Ayat-ayat tersebut memuat bahwa Allah secara khusus menunjuk baik kepada perempuan maupun lelaki, untuk menegakkan nilai-nilai Islam dengan beriman, bertaqwa dan beramal. Allah juga memberikan peran dan tanggung jawab yang sama antara lelaki dan perempuan dalam menjalankan kehidupan spiritualnya. Dan Allah pun memberikan sanksi yang sama terhadap perempuan dan lelaki untuk semua kesalahan yang dilakukannya. Jadi pada intinya kedudukan dan derajat antara lelaki dan perempuan di “mata” Allah adalah sama, dan yang membuatnya tidak sama hanyalah keimanan dan ketaqwaannya.

Dalam hal perolehan pahala beribadah, Allah berfirman pada surat al-Dzariyat/51:56:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

“Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku” (Q.S. al-Dzariyat/51:56).

Dalam kapasitas sebagai hamba tidak ada perbedaan antara laki-laki dan perempuan. Keduanya mempunyai potensi dan peluang yang sama untuk menjadi hamba ideal. Hamba ideal dalam al-Quran biasa diistilahkan sebagai orang-orang yang bertaqwa, dan untuk mencapai derajat taqwa ini tidak dikenal adanya perbedaan jenis kelamin, suku bangsa atau kelompok etnis tertentu sebagaimana disebutkan dalam surat al-Hujurat/49:13.

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

”Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal” (Q.S. al-Hujurat/49:13).

Dari kutipan ayat di atas jelas bahwa Allah memberikan peluang yang seluas-luasnya bagi perempuan untuk menjalankan tugas-tugasnya asalkan masih dalam batas-batas yang tidak keluar dari ayat tersebut.

Menurut ajaran al-Quran, pengabdian kepada Allah tidak bisa dipisahkan dari pengabdian kepada umat manusia, dalam istilah Islam, orang-orang yang beriman kepada Allah harus menghormasti *Haqqullah* (hak-hak Allah) dan *Haqul*

'Ibad (hak-hak makhluk). Pemenuhan kewajiban kepada Tuhan dan manusia merupakan hakekat kesalehan. Laki-laki dan perempuan sama-sama diseru oleh Allah agar berbuat kebajikan dan akan diberi pahala yang sama untuk kesalehan mereka. Hal ini dinyatakan dengan jelas dalam sejumlah ayat al-Quran seperti berikut:

فَٱسۡتَجَابَ لَهُمۡ رَبُّهُمۡ أَنِّي لَآ أُضِيعُ عَمَلَ عَٰمِلٖ مِّنكُم مِّن ذَكَرٍ أَوۡ أُنثَىٰۖ بَعۡضُكُم مِّنۢ بَعۡضٖۖ
فَٱلَّذِينَ هَاجَرُواْ وَأُخۡرِجُواْ مِن دِيَٰرِهِمۡ وَأُوذُواْ فِي سَبِيلِي وَقَٰتَلُواْ وَقُتِلُواْ لَأُكَفِّرَنَّ عَنۡهُمۡ سَيِّـَٔاتِهِمۡ
وَلَأُدۡخِلَنَّهُمۡ جَنَّٰتٖ تَجۡرِي مِن تَحۡتِهَا ٱلۡأَنۡهَٰرُ ثَوَابٗا مِّنۡ عِندِ ٱللَّهِۚ وَٱللَّهُ عِندَهُۥ حُسۡنُ ٱلثَّوَابِ ١٩٥

"Maka Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman): "Sesungguhnya aku tidak menyia-nyiakan amal orang-orang yang beramal di antara kamu, baik laki-laki atau perempuan, (karena) sebagian kamu adalah turunan dari sebagian yang lain. Maka orang-orang yang berhijrah, yang diusir dari kampung halamannya, yang disakiti pada jalan-Ku, yang berperang dan yang dibunuh, pastilah akan Ku-hapuskan kesalahan-kesalahan mereka dan pastilah aku masukkan mereka ke dalam surga yang mengalir sungai-sungai di bawahnya, sebagai pahala di sisi Allah. dan Allah pada sisi-Nya pahala yang baik"(QS. ali-Imron/3:195).

وَٱلۡمُؤۡمِنُونَ وَٱلۡمُؤۡمِنَٰتُ بَعۡضُهُمۡ أَوۡلِيَآءُ بَعۡضٖۚ يَأۡمُرُونَ بِٱلۡمَعۡرُوفِ وَيَنۡهَوۡنَ عَنِ ٱلۡمُنكَرِ
وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَيُؤۡتُونَ ٱلزَّكَوٰةَ وَيُطِيعُونَ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥٓۚ أُوْلَٰٓئِكَ سَيَرۡحَمُهُمُ ٱللَّهُۗ إِنَّ
ٱللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٞ ٧١

"Dan orang-orang yang beriman, lelaki dan perempuan, sebahagian mereka (adalah) menjadi penolong bagi sebahagian yang lain. mereka menyuruh (mengerjakan) yang ma'ruf, mencegah dari yang munkar, mendirikan shalat, menunaikan zakat dan mereka taat pada Allah dan Rasul-Nya. mereka itu akan diberi rahmat oleh Allah; Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana"(QS. at-Taubah/9:71).

Ayat-ayat di atas mengisyaratkan konsep kesetaraan laki-laki dan perempuan yang ideal dan memberikan ketegasan bahwa prestasi individu, baik dalam bidang spiritual maupun urusan karir profesional, tidak mesti dimonopoli oleh salah satu jenis kelamin saja.

Dalam hal pendidikan mengenai kesetaraan antara laki-laki dan perempuan, Allah menjelaskan dalam al-Quran surat al-Mujadillah/58:11 yakni:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا۟ فِى ٱلْمَجَٰلِسِ فَٱفْسَحُوا۟ يَفْسَحِ ٱللَّهُ لَكُمْ ۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُوا۟ فَٱنشُزُوا۟ يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍ ۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

”Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan” (QS. al- Mujadillah/58:11).

Dari ayat tersebut, kita bisa memahami bahwa orang yang berilmu punya posisi yang berbeda dengan orang yang tidak berilmu. Ayat-ayat tersebut juga merupakan pendorong bagi umat Islam untuk selalu berusaha meningkatkan kualitas keilmuannya.

Dari ayat tersebut juga dapat kita pahami bahwa menuntut ilmu juga diwajibkan atas laki-laki dan perempuan, karena dalam ayat tersebut tidak dijelaskan tentang kewajiban pada salah satu pihak. Dalam hal berprestasi Islam juga tidak membeda-bedakan antara laki-laki dan perempuan. Semuanya bisa berprestasi dalam segala hal. Ketiganya mengisyaratkan konsep kesetaraan gender yang ideal dan memberikan ketegasan bahwa prestasi individual, baik dalam bidang spiritual maupun karier profesional, tidak mesti didominasi oleh satu jenis kelamin saja.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab III, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Sifat yang berlaku pada integral Riemann terbukti juga berlaku pada Integral Lebesgue karena keduanya mempunyai ekuivalensi. Sifatnya yaitu: ketunggalan nilai integral, kelinieran, kekonvergenan seragam, dan Cauchy.
2. Telah dibuktikan bahwa antara integral Riemann dan integral Lebesgue terdapat ekuvalensi.

4.2 Saran

Bagi pembaca yang ingin melanjutkan skripsi ini maka penulis menyarankan tidak hanya menggunakan integral Lebesgue saja serta pada interval $[a,b]$ karena banyak integral lain yang merupakan generalisasi dari integral Riemann.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 1982. *Introduction Analysis to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction Analysis to Real Analysis (Third Edition)*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Enrique, A.A. 1987. *The Lebesgue Integral as a Riemann Integral*. USA: 693-706

Gunawan, H. 2000. *The Space Of Summable Sequences And Its Natural n-norm.* Jurnal Analisis: 1-13.

Hutahean, E. 1989. *Analisis Real II.* Jakarta: Karunika Jakarta Universitas Terbuka.

Lee, P.A. 2000. *Integral: An Easy Approach after kurzweil and Henstock*. Cambrindge:University Press.

Lifton, J. 2004. Measure Theory and Lebesgue Integration Swarthmore College Maathematics.

Maknawi, D. 2009. *Definisi Tipe Riemann untuk Integral Lebesgue*. Jurnal Matematika UNS: 37-47.

Purcel, E.J dan Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis*. Jakarta: PT. Airlangga.

Rahman, A. 1992. *Al-Quran Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Ringka Cipta.

Rahman, H. 2008. *Pengantar Analisis Real*. Malang: UIN Malang Press.

Riyanto, Z. 2008. *Pengantar Analisis I*. http:///zaki.math.web, diakses 1November 2013.

Thobirin, H. 2008. *Pengantar Analisis Real*. /aris_thobirin/files/2008/12/bab-v.pdf, diakses 1 November 2013.

RIWAYAT HIDUP

Aning Royatul Khuriyah, lahir di kota Mojokerto pada tanggal 18 Oktober 1990, bisa dipanggil Aning. Alamat di Malang Jl. Raya Candi 6 D Kel. Karang Basuki Kec. Sukun, dan alamat asal Pacet Utara RT 02 RW 04 Kec. Pacet Kab. Mojokerto. Anak sulung dari Bapak H. Nur Ali dan Ibu Hj. Masluchah, memiliki adik bernama Egi Dia Nafisatul Nafiroh dan Livia Mayda Fasicha.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Darussalam Pacet, dan lulus pada tahun 2003. Setelah itu melanjutkan pendidikan di MTs Pacet dan lulus pada tahun 2006. Kemudian melanjutkan pendidikan SMA A Wahid Hasyim dan lulus tahun 2009. Selanjutnya pada tahun 2009 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika Fakultas SAINTEK (Sains dan Teknologi).

Dalam masa perkuliahan, saya pernah belajar Bahasa Arab selama 1 tahun di PKPBA mulai semester pertama dan kedua, kemudian pernah mengikuti MAPABA PMII dan PKD PMII di Rayon Galileo. Setelah itu pernah belajar Bahasa Inggris selama 1 tahun di PKPBI. Mulai akhir semester penulis mengikuti UKM Jhepret Club Fotografi di kampus Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, dan menjadi Guru Matematika di SMP Walisongo Pacet mulai tahun 2014 sampai saat ini.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aning Royatul Khuriyah
NIM : 09610036
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Lebesgue
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 Juli 2013	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	25 Oktober 2013	Revisi Bab III	2.
3.	27 Januari 2014	Konsultasi Bab III	3.
4.	10 Februari 2014	Konsultasi Agama Bab I & II	4.
5.	12 Februari 2014	Revisi Agama Bab I dan II	5.
6.	6 November 2015	Revisi Bab I	6.
7.	27 November 2015	Konsultasi I dan II	7.
8.	8 Januari 2016	Revisi Bab II	8.
9.	29 Januari 2016	Konsultasi Bab III	9.
10.	19 Februari 2016	Revisi Bab III	10.
11.	4 Maret 2016	Konsultasi Bab III	11.
12.	10 Mei 2016	Revisi Bab III	12.
13.	18 Mei	ACC Bab III dan Bab IV	13.
14.	30 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab I, II, III dan Bab IV	14.
15.	01 Juni 2016	ACC Kajian Agama	15.
16.	01 Juni 2016	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 01 Juni 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001