STUDI EFEK GRAVITASI PARTIKEL FERMION DAN BOSON DALAM RUANGWAKTU MELENGKUNG

SKRIPSI

Oleh :
DIAN EKO PAMBUDI
17640028

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

STUDI EFEK GRAVITASI PARTIKEL FERMION DAN BOSON DALAM RUANGWAKTU MELENGKUNG

SKRIPSI

Diajukan Kepada :

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
DIAN EKO PAMBUDI
NIM.1764028

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2022

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI EFEK GRAVITASI PARTIKEL FERMION DAN BOSON DALAM RUANGWAKTU MELENGKUNG

SKRIPSI

Oleh:
Dian Eko Pambudi
NIM.1764028

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Pada tanggal: 7 Januari 2022

Pembimbing I	Pembimbing II
Arista Romadani, M.Sc.	Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19900905 201903 1 018	NIP. 19650504 19903 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI EFEK GRAVITASI PARTIKEL FERMION DAN BOSON DALAM RUANGWAKTU MELENGKUNG

SKRIPSI

Oleh :
Dian Eko Pambudi
NIM.1764028

Telah Dipertahankan Di Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 24 Januari 2022

Ketua	Dr. Erna Hastuti, M.Si. NIP.19811119 20081 2 009	
Anggota I	Muhammad Taufiqi, M.Si	
Anggota II	Arista Romadani, M.Sc. NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota III	Drs. Abdul Basid, M.Si. NIP. 19650504 199003 1 003	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika

Dr. Imam Tazi, M. Si
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Dian Eko Pambudi

NIM : 17640028

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Studi Efek Gravitasi Partikel Fermion Dan Boson Dalam Ruangwaktu Melengkung

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam makalah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut

Malang, 7 Januari 2022

Yang Membuat Pernyataan



Dian Eko Pambudi

NIM. 17640028

MOTTO

“Niat ingsun pados ilmu kerono ngalab ridhone gusti Allah”

(Saya niat mencari ilmu karena mengharapkan ridho dari Allah SWT)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan segala Puji Syukur kedapa Allah SWT dzat yang maha mengetahui serta memberikan limpahan nikmat iman dan akal kepada penulis. Penulis mempersembahkan karya sederhana ini kepada kedua orang tua penulis cintai,

Bapak Santoso dan Ibu Suhartatik Eko Wati

Beliau yang paling berjasa atas segala hal yang telah diberikan kepada penulis. Semoga membawa keberkahan kepada orang tua dan bapak ibu guru penulis yang mendidik sampai saat ini.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah serta kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam penulis panjatkan kepada Rasulullah SAW yang telah menuntun manusia dari zaman kegelapan hingga zaman terang-benderang. Skripsi yang telah penulis susun berjudul **"Studi Efek Gravitasi Partikel Fermion dan Boson Dalam Ruangwaktu Melengkung"**

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya dukungan dan bantuan dari pihak-pihak yang terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya penulis ucapkan kepada :

1. Prof. H. Muhammad Zainuddin M.A selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Arista Romadani, M.Sc selaku dosen pembimbing Fisika Teori yang telah membantu dan membimbing dengan baik dalam proses penyelesaian skripsi ini.
5. Erika Rani, M.Si., selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran mengenai Fisika Teori serta memberi motivasi belajar yang sangat menginspirasi.
6. Seluruh dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik dan membimbing dengan baik.
7. Teristimewa kedua orang tua penulis Bapak Santoso dan Ibu Suhartatik Eko Wati yang telah mendukung sepenuhnya serta limpahan kasih sayang yang tak terhingga.
8. KH M. Baidowi Muslich pengasuh Pondok Pesantren Anwarul Huda yang penulis hormati dan takdimi yang telah mengajarkan nilai-nilai kehidupan dan akhlak yang baik

9. Teman-teman fisika angkatan 2017 yang telah membantu dan memberi dukungan dalam penulisan skripsi ini.
10. Serta semua pihak yang telah membantu dalam menyusun skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT membalas semua bantuan dengan kebaikan yang berlimpah baik di dunia maupun di akhirat. Penulis berharap semoga skripsi ini sedikit banyak memberi manfaat bagi pembaca dan penulis terutama dibidang fisika teori. Penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang bersifat konstruktif agar tulisan ini menjadi lebih baik lagi.

Malang, 7 Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

COVER i
HALAMAN JUDUL. ii
HALAMAN PERSETUJUAN iii
HALAMAN PENGESAHAN iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN v
MOTTO vi
HALAMAN PERSEMBAHAN vii
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR TABEL xiii
DAFTAR LAMPIRAN xiv
ABSTRAK xv
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian. 5
1.4 Manfaat Penelitian. 5
1.5 Batasan Masalah. 5
BAB II PARTIKEL 6
2.1 Partikel Boson 6
2.2 Persamaan Klein Gordon 7
2.3 Partikel Fermion 10
2.4 Persamaan Dirac 10
2.5 Interferometer Neutron 12
2.6 Partikel Dalam Kajian Islam 14
BAB III RUANGWAKTU 18
3.1 Vektor 18
3.2 Tensor 22
3.3 Geometry Riemannian 23
3.4 Tensor Metrik 24
3.5 Simbol Christoffel 25
3.6 Persamaan Geodesik 30
3.7 Turunan Kovarian 31
3.8 Geometry Kerr 32
3.9 Gravitasi Dalam Kajian Islam. 34
BAB IV PERSAMAAN DIRAC DAN KLEIN GORDON DI RUANGWAKTU KERR 37
4.1 Persamaan Dirac 37
4.1.1 Ruangwaktu Kerr 37

4.1.2 Turunan Kovarian 46
4.1.3 Penghubung 51
4.1.4 Rersamaan Dirac di Ruangwaktu Kerr 57
4.1.5 Persamaan Jenis Schrödinger 60
4.1.6 Hamiltonian Non-Relativitas 64
4.1.7 Efek Gravitasi Pada Interferometer Neutron 66
4.2 Persamaan Klein Gordon 79
4.2.1 Persamaan Klein Gordon di Ruangwaktu Kerr 79
4.2.2 Efek Gravitasi Pada Interferometer Neutron 85
PENUTUP 95
5.1 Kesimpulan 95
5.2 Saran 95
DAFTAR PUSTAKA 96
LAMPIRAN 98

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Interferometer Neutron. 13
Gambar 3.1 Simulasi Perpindahan Dua Vektor 27
Gambar 4.1 Skema lintasan Interferometer Neutron 67
Gambar 4.2 Skema lintasan Interferometer Neutron 87

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Nilai Pergeseran Fase Persamaan Dirac. 79
Tabel 4.2 Nilai Pergeseran Fase Persamaan Klein Gordon 94

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A Komponen Simbol Christoffel 97
Lampiran B Komponen Spin Koneksi 102
Lampiran C Hamiltonian Non-Relativitas 110
Lampiran D Kuantitas Canoncial 114

ABSTRAK

Eko, Dian. 2022. **Studi Efek Gravitasi Partikel Fermion dan Boson dalam Ruangwaktu Melengkung.** Skripsi Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Drs. Abdul Basid, M.Si.

Kata Kunci: Persamaan Dirac, Persamaan Klein Gordon, Geometry Kerr, Interferometer Neutron.

Pada penelitian ini mengganti ruangwaktu datar pada persamaan Dirac dan persamaan Klein Gordon dengan ruangwaktu Kerr. Ruangwaktu Kerr menggambarkan efek gravitasi yang mempengaruhi partikel Fermion dan Boson. Efek Gravitasi dideteksi menggunakan interferometer neutron. Pada persamaan Dirac efek gravitasi hanya muncul pada Hamiltonian H_1, H_5, H_6. Pada persamaan Klein Gordon efek gravitasi muncul dari Hamiltonian H_1 saja. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa persamaan Dirac memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan persamaan Klein Gordon jika dilihat dari nilai pergeseran fasenya.

ABSTRACT

Eko, Dian. 2022. **Study of the Gravitational Effects of Fermion and Boson Particles in Curved Spacetime**. Thesis Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Supervisor: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Drs. Abdul Basid, M.Si.

Keywords: Dirac Equation, Klein Gordon Equation, Kerr Geometry, Neutron Interferometer.

In this study, we replace the flat spacetime in the Dirac equation and the Klein Gordon equation with the Kerr spacetime. Kerr spacetime describes the effects of gravity on Fermino and Boson particles. The effect of gravity is detected using a neutron interferometer. In the Dirac equation, the gravitational effect only appears on the Hamiltonian H_1, H_5, H_6. In the Klein-Gordon equation, the gravitational effect arises from the Hamiltonian H_1 only. From the calculation results, it is found that the Dirac equation has better accuracy than the Klein Gordon equation when viewed from the value of the phase shift.

الملخص

إيكو ، ديان. ٢٠٢٢. دراسة آثار الجاذبية لجزيئات الفرميون والبوزونات في الزمكان المنحني. قسم الفيزياء بكلية العلوم والتكنولوجيا مولانا مالك إبراهيم الدولة الإسلامية الثاني د.عبد (II) .أريستا روماندايني ماجستير (I) :جامعة مالانج. المشرف الباسيدماجستير،

الكلمات المفتاحية: معادلة ديراك ، معادلة كلاين جوردون ، هندسة كير ، مقياس التداخل النيوتروني.

في هذه الدراسة ، نستبدل الزمكان المسطح في معادلة ديراك ومعادلة كلاين جوردون تم .بوزون و فيرميون تأثيرات الجاذبية على جزيئات كر الزمكان بزمكان كير. يصف الكشف عن تأثير الجاذبية باستخدام مقياس التداخل النيوتروني. في معادلة ديراك ، يظهر في معادلة كلاين-جوردون ، ينشأ تأثير H_1, H_5, H_6 هاميلتوني تأثير الجاذبية فقط على فقط. من نتائج الحساب ، وجد أن معادلة ديراك لديها دقة H_1 الجاذبية من هاملتونيان أفضل من معادلة كلاين جوردون عند النظر إليها من قيمة انزياح الطور.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu persamaan yang menggabungkan prinsip relativitas dan kuantum adalah persamaan Dirac dan persamaan Klein Gordon yang berupa persamaan gelombang relativitas. Persamaan Dirac diturunkan oleh Paul Dirac pada tahun 1928. Persamaan Dirac diturunkan dari persamaan Schrödinger yang berupa persamaan diferensial parsial dari fungsi gelombang. Persamaan Dirac dapat menjelaskan pergerakan partikel dengan spin ½ seperti partikel elektron, proton, neutrino, muon, quark dan anti partikelnya. Persamaan Klein Gordon diturunkan oleh Oskar Klein dan Walter Gordon pada tahun 1926. Persamaan ini dapat menjelaskan pergerakan partikel spin bulat seperti partikel photon, gluon, phonon, boson W dan boson Z(Griffiths, 2004).

Kajian mengenai partikel yang mewakili struktur terkecil telah termaktub di dalam Al Quran Surat Saba ayat 3 yang berbunyi:

وَقَالَ الَّذِيْنَ كَفَرُوْا لَا تَأْتِيْنَا السَّاعَةُ ۗ قُلْ بَلٰى وَرَبِّيْ لَتَأْتِيَنَّكُمْ ۙ عٰلِمِ الْغَيْبِ ۚ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ فِى السَّمٰوٰتِ وَلَا فِى الْاَرْضِ وَلَآ اَصْغَرُ مِنْ ذٰلِكَ وَلَآ اَكْبَرُ اِلَّا فِيْ كِتٰبٍ مُّبِيْنٍ ۙ

Artinya: *"Dan orang-orang yang kafir berkata, "Hari kiamat itu tidak akan datang kepada kami." Katakanlah, "Pasti datang, demi Tuhanku yang mengetahui yang gaib, kiamat itu pasti akan datang kepadamu. Tidak ada yang tersembunyi bagi-Nya sekalipun seberat zarrah baik yang di langit maupun yang di bumi, yang lebih kecil dari itu atau yang lebih besar, semuanya (tertulis) dalam Kitab yang jelas (Lauh Mahfuzh)".* (QS. Saba [34]: 3)

Kebanyakan ulama menafsirkan kata "dzarrah" sebagai suatu benda yang berukuran sangat kecil seukuran anak semut bahkan seukuran dengan debu halus. Hal ini mengisyaratkan bahwa terdapat materi yang sangat kecil yang telah di

tuliskan di dalam Al Quran. Kemudian pada frase “mitsqalu dzarrah” yang diartikan “seberat atom”. Secara tidak langsung ayat ini telah menjelaskan bahwa terdapat materi yang lebih kecil massanya dari atom. Setelah berkembangnya ilmu pengetahuan terungkaplah maksud dari ayat ini yang menjelaskan bahwa sesuatu yang lebih kecil dari atom adalah partikel. Partikel memiliki struktur yang lebih kecil jika dibandingkan dengan atom. Sains modern mulai mencari lebih jauh mengenai partikel. (Shihab, 2017).

Pendekatan mekanika kuantum lebih banyak dilakukan dengan eksperimen teori. Namun setelah berkembangnya teknologi memungkinkan eksperimen di dalam laboratorium dan mencoba menginterpretasi mekanika kuantum. Hal ini akan menjadi menarik jika menghubungkan gravitasi dan mekanika kuantum. Maka dalam hal ini pengembangan interferometer neutron memiliki peran yang berpengaruh. Meskipun belum memiliki penggabungan yang fundamental antara mekanika kuantum dan gravitasi. Maka perlu dilakukan pengamatan efek gravitasi pada mekanika kuantum.

Penelitian yang dilakukan Overhauser dan Colella (1974) mengusulkan sebuah eksperimen untuk menguji efek medan gravitasi dari bumi pada pergeseran fase. Eksperimen ini berhasil dilakukan dengan menggunakan interferometer neutron. Berdasarkan eksperimen yang telah dilakukan menghasilkan perbedaan fase pada potensial gravitasi menghasilkan nilai yang sama dengan prediksi teori dengan kesalahan 1% tanpa membedakan masa inersial dari massa gravitasi neutron. Hasil ini mendukung kebenaran dari prinsip ekuivalen pada level kuantum. Pendekatan interferometer atomik akan meningkatkan akurasi sebuah pengukuran, eksperimen Colella-Overhauser-Werner yang menggunakan interferometer kuantum

menghasilkan sensitivitas $10^{-2}g$ dimana g adalah percepatan gravitasi bumi. (Overhauser & Colella, 1974a).

Efek gravitasi yang diterapkan pada interferometer kuantum akan menghasilkan fenomena gangguan. Fenomena gangguan berbeda secara fundamental di fisika klasik maupun di fisika kuantum. Gangguan kuantum memiliki dampak besar pada pergeseran fase karena pengamatan pergeseran fase menyediakan informasi pada medan eksternal yang merusak fungsi gelombang dari partikel. Pentingnya pergeseran fase dengan menghadirkan potensial elektromagnetik yang disarankan oleh Ahanrov dan Bohn pada gangguan kuantum yang kemudian dibuktikan oleh eksperimen (Vishveshwara, 1970).

Penelitian yang menunjukkan keberadaan efek yang lain disebabkan oleh rotasi dari bumi dan telah dideteksi oleh Dresden dan Yang (1979). Efek ini serupa dengan efek Sagnac di interferometer kuantum. Dengan pendekatan teori telah diturunkan jenis efek yang lain seperti analogi optic (Dresden & Yang, 1979), pendekatan relativitas eikonal, pendekatan WKB (Colella dkk., 1975), efek doppler dari perpindahan media (Werner dkk., 1979) dan analogi efek Aharnovon-Bohn efek . Anandan dan Chiao mengusulkan antena radiasi gravitasi yang menggunakan efek Sagnac. Deteksi dari gravitasi tidak hanya menyatakan pembuktian dari relativitas umum. Tapi juga membuka pemahaman baru terhadap pengamatan astronomi.

Efek pergeseran fase telah diturunkan dengan menggunakan berbagai pendekatan. Penelitian dilakukan oleh Anandan (1977) menghitung pergeseran fase yang disebabkan oleh gravitasi dan rotasi pada gangguan kuantum dengan menggunakan medan schwarzschild (Anandan, 1977). Hal yang serupa juga dilakukan oleh Dresden dan Yang (1979) namun dengan pendekatan berbeda.

Penelitian tersebut menghitung pergeseran fase yang disebabkan oleh rotasi neutron /interferometer optic yang diturunkan dari efek Doppler yang disebabkan perpindahan sumber dan perpindahan refleksi kristal (Dresden & Yang, 1979). Penurunan pergeseran fase mekanika kuantum juga dilakukan oleh Sakurai (1980) dengan dipengaruhi oleh rotasi bumi (Sakurai, 1980). Sedangkan penelitian oleh Wajima dkk (1997) menggunakan persamaan Schrödinger yang diturunkan pada partikel spin bulat dan partikel spin setengah. Penelitian ini menghasilkan efek gravitasi dari bumi yang berotasi pada interferometer kuantum (Wajima dkk., 1997).

Efek gravitasi yang diterapkan pada interferometer neutron dapat dilakukan dengan menggunakan dua jenis persamaan yang berbeda. Pada penelitian ini akan dilakukan studi efek gravitasi pada interferometer neutron dengan menggunakan persamaan Dirac yang mewakili partikel fermion serta menggunakan persamaan Klein Gordon untuk partikel Boson. Maka akan dicari persamaan yang mewakili efek gravitasi pada partikel fermion dan Boson. Persamaan ini akan diterapkan pada interferometer neutron untuk mengetahui pengaruh efek gravitasi pada pergeseran fase. Penelitian ini menggunakan Geometry Kerr yang akan mewakili efek gravitasi bumi serta rotasinya. Kedua efek gangguan ini menggunakan dua persamaan yang berbeda maka akan dianalisis perbedaanya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, berikut rumusan masalah dalam penelitian ini:

1. Bagaimana bentuk persamaan Klein Gordon dan persamaan Dirac di dalam ruangwaktu Kerr?

2. Bagaimana pengaruh efek gravitasi terhadap interferometer neutron dengan menggunakan persamaan Klein Gordon dan persamaan Dirac?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1 Memperoleh persamaan Klein Gordon dan persamaan Dirac di dalam ruangwaktu Kerr

2 Memperoleh pengaruh efek gravitasi terhadap interferometer neutron dengan menggunakan persamaan Klein Gordon dan persamaan Dirac

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat kepada masyarakat terutama di bidang fisika teori dan dapat digunakan sebagai referensi untuk melakukan penelitian selanjutnya di bidang fisika kuantum relativistic

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dikaji hanya dalam ruangwaktu Kerr dengan menggunakan persamaan Dirac dan Klein Gordon. Setiap penggunaan persamaan Dirac mewakili partikel fermion dengan spin setengah dan setiap penggunaan persamaan Klein Gordon mewakili partikel Boson dengan spin bulat. Pembuktian efek gravitasi menggunakan interferometer neutron yang diletakkan di bumi.

BAB II
PARTIKEL

Alam semesta tersusun dari jutaan materi yang sangat kecil. Objek ini tidak memiliki struktur lagi atau tidak tersusun dari objek yang lebih kecil maka objek ini disebut dengan partikel elementer. Kumpulan partikel dikelompokan ke dalam model standar (Standard Model) yaitu teori yang menjelaskan interaksi antar partikel. Mekanika kuantum membagi partikel menjadi dua bagian berdasarkan spin intrinsiknya yaitu partikel Fermion dan partikel Boson. Spin intrinsik yaitu sifat dari partikel seperti interaksi saat partikel berotasi namun sebenarnya tidak seperti itu. Spin dibagi menjadi spin bulat (partikel Boson) dan spin setengah (partikel Fermion).

2.1 Partikel Boson

Partikel Boson adalah partikel yang mengikuti statistik Bose-Einstein yang tidak memenuhi larangan Pauli. Nama Boson diberikan oleh Paul Dirac sebagai penghargaan kepada fisikawan India yaitu Satyendra Nath Bose. Partikel boson merupakan partikel pembawa seperti foton, W, boson Z dan Gluon. Termasuk beberapa partikel komposit seperti meson.

Partikel boson tidak memenuhi larangan Pauli maka tidak ada batasan jumlah boson yang menempati suatu keadaan kuantum. Seperti helium yang didinginkan agar menjadi superfluida. Partikel boson memiliki spin bulat (s = 0, 1, 2, 3, 4 dst). Partikel Boson juga disebut sebagai partikel pembawa gaya dari satu partikel ke partikel lainnya. Partikel ini menjadi perekat antar materi. Ketika suhu dinaikan atau diturunkan maka akan terjadi perubahan pada partikel Boson. Di dalam teori Standar Model boson terbagi menjadi lima jenis yang dikelompokkan berdasarkan

sifat elementer yaitu foton (c), gluon (g), boson ($W^{\pm}$), boson z, dan boson higgs (H°). Terdapat boson graviton (G) sebagai pembawa gaya gravitasi namun sejauh ini masih belum bisa dimasukkan kedalam teori Standar Model.

Dikarenakan partikel Boson tidak memenuhi larangan Pauli maka ketika dua partikel boson ditukar fungsi gelombang sistem tidak akan berubah. Medan kuantum dari boson adalah medan Bosonic yang memenuhi hubungan pertukaran kanonik. Partikel spin bulat tidak dapat menjadi partikel spin setengah (fermion) menurut teori medan kuantum relativitas dengan menggunakan teorema spin-statistik hal ini juga berlaku sebaliknya pada partikel fermion.

2.2 Persamaan Klein Gordon

Terdapat fungsi gelombang N yang menggambarkan partikel tanpa interaksi. Fungsi gelombang ini dapat ditulis dengan bentuk perkalian fungsi gelombang

$$\psi(1,2,3,\dots) = c\psi_A(1)\psi_B(2)\psi_C(3)\dots, \tag{2.1}$$

jika ditinjau hanya tiga partikel identik yang tak terbedakan maka

$$|\psi(2,1,3)|^2 = |\psi(1,2,3)|^2 \tag{2.2}$$

akan memiliki dua solusi yaitu

$$\psi(2,1,3) = +\psi(1,2,3) \tag{2.3}$$

$$\psi(2,1,3) = -\psi(1,2,3) \tag{2.4}$$

dua solusi diatas jika diterapkan pada dua partikel yang identik tak terbedakan dalam keadaan yang sama

$$\psi(1,2) = c\psi_A(1)\psi_A(1)\psi_A(2) \tag{2.5}$$

maka akan memiliki dua kondisi yang berbeda yaitu

$$c_1\psi_A(1)\psi_A(2) = +c\psi_A(1)\psi_A(1)\psi_A(2), \text{untuk nilai } c_1 \tag{2.6}$$

$$c_2\psi_A(1)\psi_A(2) = -c\psi_A(1)\psi_A(1)\psi_A(2), \text{untuk nilai } c_2 = 0 \qquad (2.7)$$

Partikel Boson tidak mematuhi larangan Pauli maka partikel ini memenuhi kondisi pertama. Partikel Boson memiliki fungsi gelombang simetri pada pertukaran antara partikel identik. Partikel Boson memiliki spin bulat yaitu 0,1,2,3 dan seterusnya. Interaksi pada partikel Boson digambarkan oleh persamaan Klein Gordon. Penurunan persamaannya dimulai dari persamaan mekanika kuantum non relativistik dengan menghubungkan momentum dan energi menurut fisika klasik

$$\frac{p^2}{2m} + V = E \qquad (2.8)$$

bentuk momentum dan energi di dalam kuantum berupa

$$p \to \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad E \to \frac{i\hbar\partial}{\partial t} \qquad (2.9)$$

ketika diaplikasikan ke dalam fungsi gelombang menghasilkan persamaan Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (2.10)$$

Persamaan Klein-Gordon dapat dihasilkan dengan cara yang sama tapi dimulai dengan momentum dan energi relativitas $E = \gamma m_0 c^2,\ P = \gamma m_0 v$

$$E^2 - p^2 = \gamma^2 {m_0}^2 c^2 - \gamma^2 {m_0}^2 v^2$$

$$= \gamma^2 {m_0}^2 c^4 (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$E^2 - p^2 = {m_0}^2 c^4 \qquad (2.11)$$

jika momentum dan energi diubah ke dalam vektor 4 maka

$$\boldsymbol{\eta^\mu} = \frac{dx}{d\tau} \quad \eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} \qquad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\eta^\mu} = \gamma\left(c, v_x, v_y, v_z\right) \qquad (2.13)$$

dengan mengubah bentuk momentum

$$p = mc$$

$$= \frac{mc^2}{c}$$

$$p = \frac{E}{c} \tag{2.14}$$

Jika nilai $\boldsymbol{\eta^{\mu}} = \boldsymbol{\eta_{\mu}}$ dan $p = m\boldsymbol{\eta^{\mu}}$ maka

$$\boldsymbol{p^{\mu}p_{\mu}} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - {p_x}^2 - {p_y}^2 - {p_z}^2$$

$$= \frac{E^2}{c^2} - p^2 \tag{2.15}$$

Maka persamaan (2.11) menjadi

$$\boldsymbol{p^{\mu}p_{\mu}} - {m_0}^2c^2 = 0 \tag{2.16}$$

jika persamaan diubah ke dalam notasi vektor empat

$$\boldsymbol{p_{\mu}} \rightarrow i\hbar\partial_{\mu} \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{\partial_{\mu}} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{2.18}$$

ketika dijabarkan

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.19}$$

Operator persamaan (2.17) dan (2.18) dimasukkan ke persamaan (2.9) akan menghasilkan persamaan Kelin-Gordon dengan menambahkan fungsi gelombang ψ

$$-\hbar^2\boldsymbol{\partial^{\mu}\partial_{\mu}} - m^2c^2 = 0 \tag{2.20}$$

atau

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\psi = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi = 0 \tag{2.21}$$

2.3 Partikel Fermion

Partikel Fermion memenuhi Larangan Pauli dan mematuhi distribusi Fermi Dirac. Partikel Fermion memiliki fungsi gelombang anti simetri pada pertukaran partikel identik dan sesuai dengan kondisi yang kedua. Partikel Fermion memiliki spin setengah yaitu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ dan seterusnya. Fermion terdiri dari partikel elementer seperti elektron dan parikel komposit seperti proton.

Larangan Pauli hanya mengizinkan satu fermion menempati satu keadaan kuantum pada waktu tertentu. Maka harus terdapat satu bagian dari fermion yang berbeda seperti spinya meskipun Fermin memiliki distribusi probabilitas spasial yang sama. Fermion saling berinteraksi dengan interaksi lemah. Namun terdapat beberapa kondisi ekstrim fermion menjadi superfluiditas dan superkonduktivitas.(Weiner, 2013)

Teori Standard Model membagi fermion menjadi dua jenis yaitu quark dan lepton yang masing masing terbagi menjadi 6 bagian lagi. Quark terdiri dari up, down, stranger, charm, bottom, dan top sedangkan Lepton terdiri dari elektron, elektron neutrino, muon neutrino, tauon, dan taun neutrino. Fermion juga dapat kelompokan secara matematis menjadi tiga bagian yaitu Weyl fermion, Fermion Dirac, dan Majorana fermion.

2.4 Persamaan Dirac

Interaksi pada partikel Fermion digambarkan oleh persamaan Dirac. Penurunan persamaannya dimulai dari persamaan Klein Gordon. Jika hanya p^0 saja yang dimasukkan kedalam persamaan (2.21) maka akan lebih mudah menentukan faktor dari persamaan orde diatas

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) \tag{2.22}$$

maka nilai faktor dari persamaan diatas adalah

$$(p^0 + mc) = 0 \quad \text{atau} \quad (p^0 - mc) = 0$$

namun akan berbeda hasilnya jika komponen p^μ dimasukkan

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \tag{2.23}$$

Dimana β^κ dan γ^λ adalah koefisien delapan untuk menentukan † . jika bagian kanan dari persamaan 2.23 dikalikan maka diperoleh nilai

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\lambda)p_\kappa - m^2c^2) \tag{2.24}$$

maka untuk menyelesaikan persamaan diatas terlebih dahulu harus dicari nilai β^κ dan $\gamma^{\kappa\lambda}$

$$(p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$$

$$(\gamma^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (\gamma^0)^2(p^0)^2 + (\gamma^1)^2(p^1)^2$$

$$+(\gamma^2)^2(p^2)^2 + (\gamma^3)^2(p^3)^2$$

$$+(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)p_0p_1 + (\gamma^0\gamma^2$$

$$+ \gamma^2\gamma^0)p_0p_2$$

$$+(\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)p_0p_3 + (\gamma^1\gamma^2$$

$$+ \gamma^2\gamma^1)p_1p_2$$

$$+(\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)p_1p_3 + (\gamma^2\gamma^3$$

$$+ \gamma^3\gamma^2)p_2p_3$$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \text{ dan } (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = i$$

$$\gamma^u\gamma^v + \gamma^v\gamma^u = 0, \quad \text{untuk } u \neq v$$

$$\gamma^u\gamma^v = 2g^{uv} \tag{2.25}$$

Bentuk dari tensor g^{uv} adalah tensor matriks Minkowski

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

dengan mengunakan kaidah Bjorken dan Drell yaitu

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

dimana σ^i $(i = 1,2,3)$ adalah bentuk matriks pauli. Hubungan relativitas antara energi dan momentum memiliki faktor

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad (2.28)$$

jika hasil dari persamaan diatas nol maka nilai salah satu faktornya juga bernilai nol

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - mc\right) = 0 \quad (2.22)$$

jika di substitusi operator $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ dan fungsi gelombang ψ pada persamaan 2.22 maka didapatkan bentuk persamaan Dirac

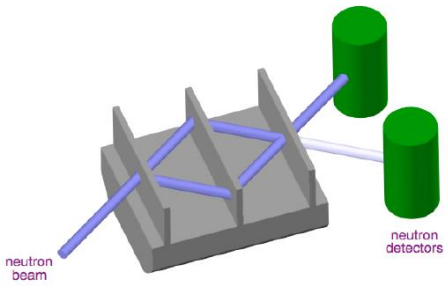
$$i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad (2.23)$$

2.5 Interferometer Neutron

Interferometer neutron merupakan jenis interferometer yang memiliki kemampuan untuk mendifraksi neutron. Alat ini dapat menentukan sifat gelombang dan fenomena terkait lainya agar dapat diteliti. Interferometer neutron bekerja berkebalikan dengan interferometer sinar-x. Alat ini dapat digunakan untuk menentukan efek mekanika kuantum dari fungsi gelombang neutron, pengaruh rotasi bumi pada sistem kuantum, studi efek Aharonov-Bohm, dan pencitraan fase neutron (Rauch dkk., 1974).

Interferometer neutron secara khusus terbuat dari kristal tunggal yang cukup besar terbuat dari silikon. Berukuran 10 cm sampai 30 cm diameternya dan 20 cm

sampai 60 cm panjangnya. Interferometer terdiri dari tiga lapisan silikon yang disusun dengan sempurna di atas sebuah alas. Neutron akan mengenai lapisan pertama oleh difraksi dari kisi kristal. Kemudian sinar akan dipisahkan menjadi dua bagian yang akan menuju pada lapisan kedua. Pada lapisan ketiga sinar akan digabung lagi menjadi satu bagian. Penggabungan ini memiliki dua kemungkinan saling mengkonstruksi atau saling merusak (Rauch dkk., 1974).



Gambar 2.1 Interferometer Neutron
(Sumber Gambar: https://images.app.goo.gl/jMKtyJV3s2yqCbJu8)

Interferometer Neutron juga digunakan untuk mendeteksi pengaruh gravitasi. Pengaruh gravitasi yang dideteksi ternyata dapat mempengaruhi pergeseran fase dari gelombang. Dengan menggunakan Hamiltonian non-relativitas akan dihitung pergeseran fasenya. Penelitian yang dilakukan oleh kokichi pada tahun 1998 menggunakan interferometer sebagai alat pendeteksi efek gravitasi pada persamaan Dirac di ruangwaktu Kerr. Kemudian dilakukan analisis pada masing-masing Hamiltonian dari persamaan Dirac (Kokichi, 1998). Penelitian serupa juga dilakukan oleh Kuroiwa dkk pada tahun 1993 juga menggunakan interferometer sebagai alat pendeteksi gravitasi. Namun penelitian ini menggunakan persamaan Klein Gordon di ruangwaktu Kerr. Kemudian dilakukan analisis pada masing-masing Hamiltonian dari persamaan Klein Gordon (Kuroiwa dkk., 1993).

2.6 Partikel Dalam Kajian Islam

Alam semesta tersusun oleh materi. Sedangkan materi sendiri memiliki susunan yang sangat kecil yang disebut dengan atom. Atom dalam Bahasa Yunani berarti tidak dapat dipotong. Atom terdiri dari inti atom dan bagian awan elektron yang mengelilingi inti. Inti atom tersusun oleh dua bagian yang lebih kecil yaitu proton bermuatan positif dan neutron bermuatan netral. Awan elektron mengandung lapisan energi yang disebut orbital. Pada bagian ini terjadi proses pemancaran dan penyerapan energi jika terjadi perpindahan antar orbital.

Berkembangnya zaman susunan terkecil dari materi tidak lagi disebut sebagai atom karena di dalam inti atom terdapat bagian yang lebih kecil yaitu proton dan neutron. Inti atom memiliki diameter $10^{-15}\ m$. Antara nukleon terikat oleh gaya tarik menarik potensial yang disebut dengan gaya kuat residu. Proton dan neutron merupakan partikel Fermion yang berbeda. Karena mematuhi prinsip larangan Pauli yang melarang adanya partikel Fermion berada pada atom yang sama diwaktu yang sama. Untuk mengubah jumlah susunan inti menggunakan fusi nuklir dan fisi nuklir. Fusi nuklir adalah proses penambahan partikel di dalam inti sedangkan fisi nuklir adalah proses pemecahan inti nuklir menjadi struktur yang lebih kecil.

Berkembangnya teknologi di bidang akselerator partikel menyebabkan ditemukannya banyak sekali partikel dari resonansi proton dan neutron yang disebut dengan quark. Missal proton tersusun dari dua up quar dan satu down quark sedangkan neutron tersusun dari satu up quark dan dua down quak. Sedangkan elektron tidak memiliki susunan yang lebih kecil maka disebut sebagai partikel fundamental seperti halnya quark. Antara quark terikat oleh gaya yang sangat kuat. Kumpulan elektron, up quark dan down quark dijadikan satu menjadi teori model standar *(Standard Model)*. Standar model menjelaskan interaksi partikel yang

menggunakan tiga dari empat gaya fundamental yang ada yaitu gaya elektromagnetik, gaya kuat dan gaya lemah. Namun tidak memasukkan gaya gravitasi dikarenakan sangat kecil nilainya.

Pembahasan struktur terkecil sebagai penyusun materi dari alam semesta sudah dijelaskan di dalam Al Quran. Seperti di dalam kandungan surat Al Zalzalah ayat 7.(Shihab, 2017)

فَمَنْ يَّعْمَلْ مِثْقَا لَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَّرَهٗ

"*Maka barangsiapa mengerjakan kebaikan seberat zarrah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya*" QS. Al Zalzalah [99]

Di dalam ayat ini terdapat kata dzarrah yang berarti benda yang sangat halus atau bisa dimisalkan seperti debu. Debu adalah benda yang memiliki massa sangat kecil. Meskipun sangat kecil dan sulit untuk dilihat secara langsung menggunakan mata namun keberadaanya diyakini ada. Semakin berkembangnya zaman dan semakin berkembang ilmu pengetahuan di bidang fisika maka ditemukanlah struktur terkecil dari materi yang disebut dengan atom. Istilah dzarrah di dalam ayat ini dapat ditafsirkan sebagai atom dan sebagai pembuktian kebenaran Al Quran.(Sabarni, 2019).

Di dalam ayat yang lain muncul kata dzarrah seperti pada surah An- nisa' ayat 40 :

اِنَّ اللّٰهَ لَا يَظْلِمُ مِثْقَا لَ ذَرَّةٍ ۚ وَاِ نْ تَكُ حَسَنَةً يُّضٰعِفْهَا وَيُؤْتِ مِنْ لَّدُنْهُ اَجْرًا عَظِيْمًا

*"Sungguh, Allah tidak akan menzalimi seseorang walaupun sebesar dzarrah, dan jika ada kebajikan (sekecil dzarrah), niscaya Allah akan melipatgandakannya dan memberikan pahala yang besar dari sisi-Nya" (*QS. An Nissa'[4]:40*)*

Ayat yang berarti *walaupun sebesar zarrah* ditafsirkan seperti binatang semut yang sangat kecil. Meskipun sangat kecil tidak akan pernah mengurangi maupun

menambahkan kebaikan yang dilakukan manusia. Niscaya Allah akan melipat gandakannya dari 10 sampai lebih dari 700 kali lipat. Allah akan melipat gandakan pahala seorang mukmin bahkan tak dapat diperkirakan oleh seorang sampai berapa kali lipat pahala yang akan didapatkan. Makna kata dzarrah di sini menunjukkan bahwa terdapat sesuatu yang sangat besar. Maka hal ini sama dengan energi di dalam atom yang sangat besar. Untuk massa satu atom dengan nilai c adalah kelajuan cahaya memiliki energi yang dapat dilepas sebesar 981 MeV. (Al-Mahalli & As-Suyuthi, 2018)

Kata dzarrah juga ditafsirkan sebagai partikel di dalam surah Saba ayat 3 yang berbunyi:

وَقَا لَ الَّذِيْنَ كَفَرُوْا لَا تَأْتِيْنَا السَّا عَةُ ۗ قُلْ بَلٰى وَرَبِّيْ لَـتَأْتِيَنَّكُمْ ۙ عٰلِمِ الْغَيْبِ ۚ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَا لُ ذَرَّةٍ فِى السَّمٰوٰتِ وَلَا فِى الْاَ رْضِ وَلَاۤ اَصْغَرُ مِنْ ذٰلِكَ وَلَاۤ اَكْبَرُ اِلَّا فِيْ كِتٰبٍ مُّبِيْنٍ ۙ

"Dan orang-orang yang kafir berkata, "Hari Kiamat itu tidak akan datang kepada kami." Katakanlah, "Pasti datang, demi Tuhanku yang mengetahui yang gaib, Kiamat itu pasti akan datang kepadamu. Tidak ada yang tersembunyi bagi-Nya sekalipun seberat zarrah baik yang di langit maupun yang di bumi, yang lebih kecil dari itu atau yang lebih besar, semuanya (tertulis) dalam Kitab yang jelas (Lauh Mahfuzh)" (QS Saba [34]:3)

Dalam arti Bahasa arab kata "dzarrah" menunjukkan benda yang sangat kecil. Sedangkan frase kata "mitsqalu dzarrah" berarti seberat atom. Arti kata ini menunjukkan adanya suatu benda yang lebih kecil dan lebih ringan dari atom. Maka di fisika dikenal dengan partikel yang memiliki struktur lebih kecil dari atom seperti partikel elektron, proton, dan neutron. Ayat ini secara tidak langsung menunjukkan keberadaan partikel namun membutuhkan waktu bertahun tahun untuk memahami makna dari ayat ini. Dibutuhkan perkembangan teknologi untuk mengungkap keberadaan partikel yang akhirnya dapat membuktikan kebenaran dari isi ayat ini.

Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan para peneliti mulai mengungkap struktur dari partikel. Mulai dari gaya yang bekerja sampai interaksinya (Shihab, 2017).

BAB III
RUANGWAKTU

3.1 Vektor

Vektor merupakan besaran yang memiliki nilai dan arah. Biasanya vektor diberi tanda arah diatasnya yang menunjukkan arah dari besaran tersebut. Vektor juga menggambarkan perpindahan dari satu titik ke titik lainya. Vektor juga didefinisikan sebagai elemen dari ruang vektor. Di dalam ruang vektor ($\boldsymbol{R}^n$) dengan dimensi n, vektor memiliki n koordinat atau memiliki n elemen. Setiap elemen vektor mewakili arah tertentu bersifat independen dan dikenal dengan basis (Gautama, 2016).

Di dalam ruang vektor yang sama, vektor basis dapat dikombinasikan secara linier satu dengan lainnya dan kombinasi ini tidak terbatas. Misalnya terdapat komponen vektor sembarang $\boldsymbol{v}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3, \ldots, \boldsymbol{v}^n$ atau $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots \boldsymbol{v}_n$. Dalam koordinat kartesian ($\boldsymbol{R}^3$), vektor basisnya berupa vektor satuan $e_n = e_1, e_2, e_3 = \hat{e}_n$ maka dapat ditulis (Gautama, 2016).

$$e_1 = \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

maka vektor sembarang v dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{3}} A^n \, e_n = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \equiv (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3) \tag{3.2}$$

Suatu vektor tidak akan berubah jika sistem koordinatnya dirubah. Misalnya terdapat posisi sebuah titik di dalam koordinat K kemudian dapat diubah ke

koordinat bola $\widetilde{K}$ yang memiliki komponen $\widetilde{\boldsymbol{x}}^n = \widetilde{\boldsymbol{x}}^1, \widetilde{\boldsymbol{x}}^2, \widetilde{\boldsymbol{x}}^3$. Hubungan transformasi koordinat ini adalah (Gautama, 2016).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.3}$$

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{3.4}$$

$$y = \ r \sin\theta \cos\phi \tag{3.5}$$

$$y = \ r \sin\theta \cos\phi \tag{3.6}$$

$$z = r\, cos\theta \tag{3.7}$$

Koordinat $\widetilde{K}$ adalah koordinat bola yang memiliki komponen $\widetilde{\boldsymbol{x}}^n = r\,, \theta, \phi$. Maka perubahan koordinat menjadi (Gautama, 2016).

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \tag{3.8}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \tag{3.9}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi \tag{3.10}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$dx^n = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n}\, d\tilde{x}^n \tag{3.11}$$

ditulis kembali menjadi

$$dx^n = \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n}\, d\tilde{x}^n \tag{3.12}$$

dx merupakan sebuah vektor perpindahan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $X^n = dx^n$ dan $\tilde{X}^n = d\tilde{x}^n$. Maka persamaan diatas dapat diganti menjadi

$$X^n = \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^m}\, d\tilde{X}^m \tag{3.13}$$

Jika ditulis dalam bentuk vektor basis menjadi

$$e^n = \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^m}\, d\tilde{e}^m \tag{3.14}$$

Sebuah vektor gradien memiliki komponen $\frac{\partial}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^1}\ \frac{\partial}{\partial x^2}\ \frac{\partial}{\partial x^3}$. Jika vektor ini ditransformasikan ke dalam koordinat bola menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{z}^n}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}^n}$$

ketiga persamaan diatas dapat diringkas menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x^m} = \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \tag{3.15}$$

Jika $\partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x^m}$ dan $\partial_n \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}$ persamaan diatas menjadi $\partial_m = \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^m}\partial_n$. Bentuk vektor yang komponennya bertransformasi seperti persamaan diatas disebut vektor kovarian (kovektor). Jika vektor basisnya berubah maka vektor basis juga merupakan vektor kovarian. Dari persamaan dapat ditulis dalam bentuk notasi matriks menjadi

$$X^n = \Lambda^n_m \tilde{X}^m \tag{3.16}$$

Matriks transformasi Λ^n_m dari koordinat kartesian ke koordinat bola dapat ditulis eksplisit menjadi

$$\Lambda^n_m = \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

jika $\tilde{X}^m$ dalam bentuk koordinat kartesian maka matriks transformasinya menjadi

$$\Lambda_m^n = \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

maka bentuk transformasi koordinat kartesian ke koordinat bola berbentuk

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \mathrm{r}\cos\theta\cos\phi & -\mathrm{r}\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \mathrm{r}\cos\theta\sin\phi & -\mathrm{r}\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Perpindahan sebuah titik dapat dinyatakan dalam bentuk elemen garis dl yang merupakan generalisasi Pythagoras

$$ds^2 = dx.dx = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = (dx^m)^T(dx^m) = (dx \quad dy \quad dz) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

jika transformasi diatas diubah kedalam bentuk elemen garis maka

$$ds^2 = \left(\tilde{X}^m\right)^T(X^m) = \left(\Lambda_n^m\tilde{X}^m\right)^T(\Lambda_n^m\tilde{X}^m)$$

$$ds^2 = \left[\left(\Lambda_n^m\tilde{X}^m\right)^T(\Lambda_n^m\tilde{X}^m)^{TT}\right]^T$$

$$ds^2 = \left(\tilde{X}^m\right)^T(\Lambda_n^m)^T\Lambda_n^m\tilde{X}^m \tag{3.21}$$

jika nilai $(\Lambda_n^m)^T\Lambda_n^m = (\Lambda_m^n)^T\Lambda_n^m$ persamaan diatas menjadi

$$\Lambda_m^n\Lambda_n^m \equiv g_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

maka notasi bentuk perpindahannya menjadi

$$ds^2 = \left(\tilde{X}^n\right)^T g_n^n\,\tilde{X}^n = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\; d\phi^2 \tag{3.23}$$

3.2 Tensor

Pemilihan koordinat tidak akan mempengaruhi hukum fisika yang menghubungkan besaran fisis. Bentuk persamaannya akan sama di semua sistem koordinat. Jika sebuah persamaan berbentuk tetap setelah di transformasikan maka persamaan ini bersifat kovarian. Digunakanlah sistem operasi tensor untuk memahami sistem fisis ini. Tensor adalah perpanjangan dari vektor sedangkan vektor adalah perpanjangan dari besaran skalar. Tensor dapat menyatakan sebuah objek dengan sama meskipun berada di kerangkan acuan yang diubah-ubah. Meskipun nilai komponen tensor berubah namun kaedah-kaedah tetap tidak berubah.(Anugraha, 2011).

Terdapat sebuah vektor kontravarian $V = e_\mu V^\mu$ dan $V = e_v W^v$ jika dilakukan operasi perkalian maka

$$V \otimes W = V^\mu W^v e_\mu \otimes e_v \tag{3.24}$$

menghasilkan produk perkalian tensor

$$\boldsymbol{A} = A^{\mu v} e_\mu \otimes e_v \tag{3.25}$$

jika ditulis dalam bentuk matriks

$$A^{\mu v} = \begin{pmatrix} V^0W^1 & V^0W^1 & V^0W^2 & V^0W^3 \\ V^1W^0 & V^1W^1 & V^1W^2 & V^1W^3 \\ V^2W^0 & V^2W^1 & V^2W^2 & V^2W^3 \\ V^3W^0 & V^3W^1 & V^3W^2 & V^3W^3 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

perkalian ini juga dapat diterapkan pada vektor kovarian $V = e^\mu V_\mu$ dan$W = e^v\, W_v$

$$\boldsymbol{B} = B_{uv} e^\mu \otimes e^v \tag{3.27}$$

Nilai **A** dan **B** merupakan tensor yang memiliki komponen $A^{\mu v}$ dan B_{uv}. Perkalian antara komponen memenuhi sifat komutatif $A^{\mu v} B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} A^{\mu v}$ tetapi

untuk perkalian antara tensor tidak memenuhi sifat komutatif $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$ atau salah satunya sama dengan nol.(Gautama, 2016).

Jika masing masing tensor ini dilakukan aturan transformasi maka $A^{\mu v}$ dan B_{uv} memenuhi transformasi :

$$A^{\mu v} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{v}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \tilde{A}^{\alpha\beta} \tag{3.28}$$

$$A_{\mu v} = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{v}} \tilde{B}_{\alpha\beta} \tag{3.29}$$

Tensor $A^{\mu v}$ dan B_{uv} karena memiliki dua indeks maka tensor ini tergolong sebagai tensor rank-2 jika indeksnya diperumum maka disebut tensor rank-N. Jika kedua tensor digabung maka menjadi tensor rank 2 campuran A_{v}^{μ} (Gautama, 2016).

3.3 Geometry Riemannian

Bentuk Geometry dapat dibagi menjadi dua jenis yaitu Geometry datar (Euklidesa) dan Geometry lengkung. Geometry lengkung dapat dibagi menjadi tiga jenis. Geometry lengkung 1 D berupa garis yang melengkung, Geometry lengkung 2 D berbentuk seperti permukaan bola, dan Geometry 3D dapat diperoleh dari generalisasi Geometry 2D.

Manifold merupakan generalisasi dari ruang datar. Manifold dilambang dengan $\mathcal{M}^n$ yang memiliki dimensi ke-n. Geometry Riemannian adalah Geometry yang diterapkan pada Geometry datar atau manifold mulus. Manifold berdimensi ($\mathcal{M}^n$), n akan teramati seperti Geometry datar $\boldsymbol{R}^n$ (Euklidesa) jika pengamatan diperbesar. Namun sebaliknya jika diamati menjauh Geometry akan kembali melengkung.

Contoh bentuk persamaan garis pada ruang datar yang memiliki tiga dimensi ruang dan satu dimensi waktu adalah (Anugraha, 2011).

$$ds^2 \equiv -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.30}$$

adapun bentuk persamaan garis pada ruang melengkung yang memiliki tiga koordinat ruang dan satu koordinat waktu yaitu:

$$ds^2 \equiv -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dx^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{3.31}$$

3.4 Tensor Matriks

Terdapat sebuah elemen garis dengan tiga koordinat ruang dan satu koordinat waktu

$$ds^2 \equiv c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.32}$$

jika elemen garis ini diperumum dengan notasi

$$ds^2 = dx.dx = \left(\boldsymbol{e}_\mu dx^\mu\right).(\boldsymbol{e}_v dx^v) \tag{3.33}$$

digunakan sebuah tensor matriks yang memenuhi sifat simetri $\boldsymbol{g}_{\mu v} = \boldsymbol{g}_{v\mu}$

$$\boldsymbol{g}_{\mu v} = \boldsymbol{e}_\mu.\boldsymbol{e}_v \tag{3.34}$$

maka persamaan menjadi

$$ds^2 = \boldsymbol{g}_{\mu v} dx^\mu dx^v \tag{3.35}$$

Bentuk tensor matriks pada ruangwaktu minkowski yang dinotasikan dengan $\eta_{\mu v}$. Tensor matriks ini memiliki komponen ruangwaktu yang memiliki tanda berbeda maka manifold ini disebut manifold Pseudo-Riemannian. Ruangwaktu 4 D juga disebut sebagai manifold Lorentzian karena diperoleh dari syarat transformasi Lorentz.

$$\eta_{\mu v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Sebuah vektor perpindahan $\boldsymbol{A} = A^i e_i$ diperluas ke dalam koordinat ruangwaktu maka dinotasikan menjadi

$$A_V = A^\mu (e_\mu \cdot e_v) = g_{\mu v} A^\mu \tag{3.37}$$

terjadi perubahan vektor kontravarian A^μ menjadi vektor kovarian A_V.

Perubahan seperti ini dapat diterapkan pada tensor dengan rank yang lebih tinggi.

$$A_\beta g^{\alpha\beta} = (A^v g_{\beta v}) g^{\alpha\beta} = A^\alpha \tag{3.38}$$

oleh karena itu tensor matriks memenuhi prinsip delta Kronecker dengan bentuk matriks 4x4

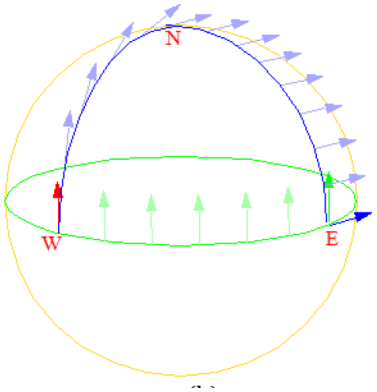
$$g_{\beta v} g^{\alpha\beta} = \delta_v^\alpha \equiv \begin{matrix} 1 & ,\alpha = v \\ 0 & ,\alpha \neq v \end{matrix}$$

Geometry ruangwaktu akan bernilai jika tensor matriksnya memenuhi matriks pada persamaan (3.36) maka sistem koordinat ini tidak bersifat kekal karena dapat ditransformasikan ke dalam berbagai koordinat. Matriks yang sama juga akan memiliki informasi Geometry yang sama pula. Bentuk Geometry ruangwaktu akan menentukan bentuk tensor matriksnya (Gautama, 2016).

3.5 Simbol Christoffel

Pergeseran paralel adalah perpindahan suatu vektor dari titik awal menuju titik akhir yang keduanya bersifat paralel sepanjang lintasan yang dilalui. Perpindahan dengan lintasan yang berbeda akan memiliki hasil yang berbeda pula. Terdapat sebuah vektor yang berpindah melalui dua lintasan berbeda. Tapi dimulai dan diakhiri dititik yang sama. Vektor berpindah dari titik W menuju titik E. Pada perpindahan pertama melalui lintasan ekuator (garis warna hijau) menghasilkan

posisi yang sama dengan posisi awal. Sedangkan pada perpindahan kedua lintasan biru menghasilkan posisi yang berbeda dengan posisi awal.



Gambar 3.1 Simulasi Perpindahan Dua Vektor
(Sumber Gambar: Anugraha, R. (2011). *Teori Relativitas Rinto anugraha.pdf*. Jurusan Fisika FMIPA UGM.)

Untuk memperoleh bentuk persamaan pergeseran vektor pada ruang lengkung, diperkenalkan koordinat kurva linier $z^n(n = 1,2,3, \ldots . N)$ pada ruang berdimensi N. Dengan menggunakan konstanta h_{nm} maka jarak ds antar dua titik adalah :

$$ds^2 = h_{nm} dz^n dz^m \tag{3.39}$$

Sebuah ruang datar N dimensi memiliki ruang fisis yang membentuk permukaan empat dimensi. Persamaan permukaan diperoleh dengan menurunkan $Ny^n(x)$ terhadap x^μ. Ny^n adalah sembarang titik dalam ruang N dimensi dan berbentuk fungsi x-empat $y^n(x)$. Sedangkan x^μ adalah sembarang titik yang berada pada permukaan. Maka diperoleh bentuk turunan parsial pada koordinat 4

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu y^n \tag{3.40}$$

jarak antara dua titik pada permukaan berbeda adalah

$$\delta y^n = \partial_\mu y^n \delta x^\mu \tag{3.41}$$

kuadrat jarak antara keduanya

$$\delta s^2 = h_{nm}\, \partial_\mu \delta y^n\, \partial_v \delta y^m\, \delta x^\mu \delta x^v \tag{3.42}$$

dengan menggunakan notasi pada persamaan (3.39 dapat disederhanakan menjadi

$$\delta s^2 = h_{nm}\delta y^n \delta y^m = h_{nm}\, \partial_\mu \delta y^n\, \partial_v \delta y^m\, \delta x^\mu \delta x^v \tag{3.43}$$

maka

$$\delta s^2 = \partial_\mu y^n\, \partial_v y_n\, \delta x^\mu \delta x^v \tag{3.44}$$

pada konstanta h_{nm} didapatkan

$$\delta s^2 = g_{\mu v} \delta x^n \delta x^v \tag{3.45}$$

didapatkan bentuk tensor matriks

$$g_{\mu v} = \partial_\mu\, y^n \partial_v y_n \tag{3.46}$$

Vektor kontravarian A^n dalam ruang dimensi N dengan A^μ terletak pada koordinat x maka

$$A^n = \partial_\mu y^n\, A^\mu \tag{3.47}$$

digeser vektor kontravarian A^n melalui lintasan melengkung ketitik x + dx dengan mempertahankan komponen vektor tetap konstan. Maka dengan memproyeksikan vektor akan didapatkan bentuk vektor baru pada permukaan lain tapi dalam komponen vektor yang konstan. Proyeksi vektor dilakukan dengan memecah menjadi dua bagian yaitu bagian vektor tangensial dan vektor normal

$$A^n = A^n_{(tan)} + A^n_{(nor)} \tag{3.48}$$

Dengan menggunakan persamaan 2.62 maka vektor tangen menjadi

$$A^n_{(tan)} = K^\mu \partial_\mu y^n (x + dx) \tag{3.49}$$

dimana $\partial_\mu y^n (x + dx)$ adalah titik baru $x + dx$. Vektor normal $A^n_{(nor)}$ didefinisikan ortogonal terhadap setiap vektor tangensial pada titik $+dx$. Maka persamaan (3.50) menjadi

$$A^n = K^\mu \partial_\mu y^n(x+dx) + A^n_{(nor)} K^\mu \partial_\mu y_n(x+dx)$$

$$A^n = A^n_{(tan)} K^\mu \partial_\mu y^n(x+dx) \tag{3.50}$$

dikalikan dengan $\partial_v y_n(x+dx)$ maka

$$A^n \partial_v y_n(x+dx) = K^\mu \partial_\mu y^n(x+dx)\ \partial_v y_n(x+dx) = K^\mu g_{\mu v}(x+dx) \tag{3.51}$$

orde pertama dalam d menjadi

$$\begin{aligned} K_v(x+dx) &= A^n[\partial_v y_n(x) + \partial_\sigma(\partial_v y_n)dx^\sigma] \\ &= \partial_\mu y^n(A^n[\partial_v y_n(x) + \partial_\sigma(\partial_v y_n)dx^\sigma]) \\ &= \partial_\mu y^n(A^n[\partial_v y_n(x) + \partial_\sigma(\partial_v y_n)dx^\sigma]) \\ &= \left[\partial_\mu y^n A^n \partial_v y_n(x)\right] + \left[\partial_\mu y^n A^n \partial_\sigma(\partial_v y_n)dx^\sigma\right] \\ &= A_v + \partial_\mu(y^n A^n)\partial_\sigma(\partial_v y_n)dx^\sigma \end{aligned} \tag{3.52}$$

A_v bergeser dari $x+dx$ dan menghasilkan K_v maka dapat dinyatakan

$$K_v - A_v = dA_v \tag{3.53}$$

dimana A_v didefinisikan sebagai

$$dA_v = \partial_\mu(y^n A^n)\partial_\sigma(\partial_v y_n)dx^\sigma \tag{3.54}$$

Menggunakan perhitungan konstanta h_{nm} maka indeks n dapat dipindah dari atas ke bawa atau sebaliknya. Kemudian diturunkan persamaan (3.46) terhadap x^σ didapatkan

$$\begin{aligned} \partial_\sigma\left(g_{\mu v}\right) &= \partial_\sigma(\partial_\mu\, y^n)\partial_v y_n + \partial_\mu\, y^n \partial_\sigma(\partial_v y_n) \\ &= \partial_\sigma(\partial_\mu y_n)\partial_v\, y^n + \partial_\sigma(\partial_v y_n)\partial_\mu\, y^n \end{aligned} \tag{3.55}$$

indeks μ ditukar dengan indeks σ persamaan diatas menjadi

$$\partial_\mu(g_{\sigma v}) = \partial_v(\partial_\mu y_n)\partial_\sigma\, y^n + \partial_u(\partial_v y_\sigma)\partial_\sigma\, y^n \tag{3.56}$$

indeks μ ditukar dengan indeks v persamaan diatas menjadi

$$\partial_v\left(g_{\sigma\mu}\right) = \partial_v(\partial_\mu y_n)\partial_\sigma\, y^n + \partial_v(\partial_\sigma y_n)\partial_u\, y^n \tag{3.57}$$

dengan mengoperasikan persamaan (3.55) +(3.57)-(3.56) kemudian dibagi 2 maka didapatkan persamaan simbol Christoffel jenis pertama. simbol Christoffel ini memiliki dua indeks pertama yang simetri dan bukan termasuk tensor

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma g_{\mu v}+\partial_v g_{\mu\sigma}-\partial_u g_{\sigma v}\right)=y_{n,v\sigma}y^n_{,\mu} \tag{3.58}$$

ajukan

$$\Gamma_{\sigma v\mu}=\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma g_{\mu v}+\partial_v g_{\mu\sigma}-\partial_u g_{\sigma v}\right) \tag{3.59}$$

pengaruh dari persamaan (3.59) menyebabkan

$$\Gamma_{\sigma v\mu}+\Gamma_{\sigma\mu v}=\partial_\sigma \mathrm{g}_{\mu v} \tag{3.60}$$

Menggunakan (3.59) dan (3.60) maka persamaan (3.54) menjadi

$$dA_v=A^\mu\,\Gamma_{\sigma v\mu}dx^\sigma \tag{3.61}$$

panjang vektor tidak berubah setelah digeser secara paralel dibuktikan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} d\left(g^{\mu v}A_\mu A_v\right) &= g^{\mu v}A_\mu dA_v+g^{\mu v}A_v dA_\mu+A_\mu A_v\partial_\sigma g^{\mu v}dx^\sigma \\ &= A^v dA_v+A^\mu dA_\mu+A_\alpha A_\beta\partial_\sigma g^{\alpha\beta}dx^\sigma \\ &= A^v A^\mu\,\Gamma_{\sigma v\mu}dx^\sigma+A^\mu A^v\,\Gamma_{\sigma\mu v}dx^\sigma+A_\alpha A_\beta\partial_\sigma g^{\alpha\beta}dx^\sigma \\ &= A^v A^\mu\partial_\sigma\, g_{\mu v}dx^\sigma+A_\alpha A_\beta\partial_\sigma g^{\alpha\beta}dx^\sigma \end{aligned} \tag{3.62}$$

Jika $\partial_\sigma g^{\alpha\mu}\,g_{\mu v}+g^{\alpha\mu}\partial_\sigma\,g_{\mu v}=\partial_\sigma\left(g^{\alpha\mu}\,g_{\mu v}\right)=\partial_\sigma\delta^\alpha_v$ dengan nilai $\partial_\sigma\delta^\alpha_v=0$ karena berupa matriks identitas. Dengan mengalikan persamaan tersebut dengan $g^{\alpha\beta}$ didapatkan

$$\partial_\sigma g^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\mu}g^{\beta v}\partial_\sigma g_{\mu v} \tag{3.63}$$

konsekuensi persamaan (3.63) menyebabkan persamaan (3.62) bernilai konstan hal ini membuktikan bahwa panjang vektor konstan

$$d\left(g^{\mu v}A_{\mu}A_{v}\right) = A^{v}A^{\mu}\, g_{\mu v}dx^{\sigma} + A_{\alpha}A_{\beta}\partial_{\sigma}g^{\alpha\beta}dx^{\sigma}$$

$$= A^{v}A^{\mu}\, \partial_{\sigma}g_{\mu v}dx^{\sigma} - A_{\alpha}A_{\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta v}\partial_{\sigma}g_{\mu v}dx^{\sigma}$$

$$= 0 \tag{3.64}$$

maka dapat dinyatakan

$$A_{\alpha}A_{\beta}\partial_{\sigma}g^{\alpha\beta} = -A^{\mu}A^{v}\partial_{\sigma}g_{\mu v} \tag{3.65}$$

Untuk menaikan indeks pertama dari simbol Christoffel jenis pertama dapat menggunakan konstanta panjang sembarang vektor yang memperbolehkan konstanta perkalian skalar $g^{\mu v}\mathrm{A}_{\mu}\mathrm{B}_{v}$ dari dua vektor sembarang A dan B. Panjang vektor $A + \lambda B$ dengan nilai λ sembarang bernilai konstan. Maka didapatkan bentuk simbol Christoffel jenis kedua yaitu

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma v} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma v\lambda} = g^{\mu\lambda}\frac{1}{2}(\partial_{\sigma}g_{\lambda v} + \partial_{v}g_{\lambda\sigma} - \partial_{\lambda}g_{\sigma v}) \tag{3.66}$$

3.6 Persamaan Geodesik

Geodesik merupakan lintasan terpendek dari dua titik yang diperumum. Dengan memperumum persamaan ini maka dapat diaplikasikan di sembarang bentuk Geometry atau lintasan yang akan dilaluinya. Terdapat dua titik di dalam dimensi N dengan koordinat x^{μ} dan $x^{\mu} + dx^{\mu}$. Dengan menggunakan simbol Christoffel jenis pertama kemudian dikalikan dengan tensor matriks $g^{\mu\eta}$ maka didapatkan persamaan geodesik

$$\frac{d^{2}x^{\eta}}{dt^{2}} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \;\; A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{v}}\,\tilde{A}^{v} \tag{3.67}$$

3.7 Turunan Kovarian

Sebuah persamaan transformasi vektor sebagai berikut

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{v}}\,\tilde{A}^{v} \tag{3.68}$$

diturunkan terhadap x^{α} namun hasilnya bukan tensor

$$\partial_{\alpha}A^{\mu} = \partial_{\alpha}\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{v}}\,\tilde{A}^{v}\right] \tag{3.69}$$

$$= \left[\partial_{\alpha}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{v}}\right]\tilde{A}^{v} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{v}}\left[\partial_{\alpha}\tilde{A}^{v}\right]\partial_{\alpha}A^{\mu} = \partial_{\alpha}\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{v}}\,\tilde{A}^{v}\right] \tag{3.70}$$

dikarenakan hasilnya bukan bentuk tensor maka perlu dicari cara untuk membentuk tensor dengan menggunakan turunan parsial. Maka digunakanlah dua jenis simbol Christoffel yang keduanya bukan merupakan tensor

$$[\mu v, \beta] = \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}g_{v\beta} + \partial_{v}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\mu v}\right) \tag{3.71}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu v} = \begin{bmatrix}\alpha \\ \mu\beta\end{bmatrix} = g^{\alpha\beta}[\mu v, \beta] \tag{3.72}$$

sebuah vektor kontravarian A^{μ} diturunkan dengan turunan kovarian maka didefinisikan sebagai berikut

$$\partial_{v}A^{\mu} = \partial_{v}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha v}A^{\alpha} \tag{3.73}$$

untuk turunan kovarian vektor kovarian

$$\partial_{\mu}A_{\mu} = \partial_{v}A_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu v}A_{\alpha} \tag{3.74}$$

setelah dilakukan penurunan maka $\partial_{v}A^{\mu}$ dan $\partial_{\mu}A_{\mu}$ menjadi bentuk tensor.

3.8 Geometry Kerr

Bentuk koordinat ruangwaktu Keer ditulis dengan persamaan garis menjadi

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left[1 - \frac{2mr}{r^2 + \alpha^2\cos^2\theta}\right](du + \alpha\sin^2\theta\, d\phi)^2 + 2(du \\ + \alpha\sin^2\theta\, d\phi)(dr + \alpha\sin^2\theta\, d\phi) + (r^2 \\ + \alpha\cos^2\theta\, d\phi)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \end{aligned} \tag{3.75}$$

Koordinat Boyer-Lindquist dibentuk melalui dua tahapan. Pertama mempertimbangkan bentuk matriks yang sedikit berbeda tetapi setara dengan bentuk asli "Eddington – Finkelstein" Kerr dengan mensubtitusikan koordinat berikut(Visser, 2008)

$$u = t + r \tag{3.76}$$

jika persamaan diatas dimasukkan ke dalam persamaan (3.75) menjadi

$$\begin{aligned} ds^2 = &-dt^2 + dr^2 + 2\alpha \sin^2\theta\, d\phi + (r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta) d\theta^2 \\ &+ (r^2 + \alpha^2)\, sin^2\theta\, d\phi^2 \\ &+ \frac{2mr}{r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta} (dt + dr + \alpha \sin^2\theta\, d\phi)^2 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Tahap kedua yaitu dengan mentransformasi koordinat yang bergantung pada m dengan memasukan elemen garis ke dalam bentuk Boyer – Lindquist(Visser, 2008)

$$t = t_{BL} + 2m \int r \frac{dr}{r^2 - 2m + \alpha^2};\ \phi = \phi_{BL} - \alpha \int r \frac{dr}{r^2 - 2m + \alpha^2}; \tag{3.78}$$

$$r = r_{BL}; \qquad \theta = \theta_{BL}; \tag{3.79}$$

kemudian dilakukan transformasi dan menghilangkan bagian subskrip maka didapatkan persamaan garis yaitu

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left[1 - \frac{2mr}{r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta}\right] dt^2 - \frac{4mr\alpha \sin^2\theta}{r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta} dt\, d\phi \\ &+ \left[\frac{r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta}{r^2 - 2mr + \cos^2\theta}\right] dr^2 + (r^2 + \alpha^2 cos^2\theta) d\theta^2 \\ &+ \left[r^2 + \alpha^2 + \frac{2mr\alpha^2 \sin^2\theta}{r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta}\right] \sin^2\theta\, d\phi^2 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Koordinat Boyer-Lindquist dapat meminimalkan jumlah komponen off-diagonal dari matriks dan sekarang hanya ada satu komponen off-diagonal.

Koordinat ini dapat membantu menganalisis perilaku asimtotik, dan memahami perbedaan utama antara *event horizon* dan *ergosphere.* Dengan mensubstitusikan $r \to \infty$ $(asymptotic)$ pada koordinat Boyer-Lindquist didapatkan bahwa(Visser, 2008)

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2mr}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dt^2 - \left[\frac{4m\alpha \sin^2\theta}{r} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] d\phi dt + \left[1 - \frac{2m}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)\right][dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)] \quad (3.81)$$

3.9 Gravitasi Dalam Kajian Islam

Gravitasi ditemukan oleh Newton pada abad ke 16. Newton menyatakan partikel di alam semesta akan berinteraksi tarik menarik satu dengan yang lainya. Besar gaya tarik menarik antara partikel sebanding dengan massa masing-masing partikel dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antar keduanya. Daerah yang dipengaruhi oleh gravitasi disebut sebagai medan gravitasi.

Alam semesta yang indah ini terbentuk bukan secara kebetulan namun terbentuk dengan proses yang lama. Keindahan alam semesta tersusun dari berbagai komponen yang saling mempengaruhi antara satu dengan yang lainya. Dimulai dari struktur terkecil yaitu partikel sampai struktur yang terbesar yaitu galaksi memiliki keterkaitan yang saling mendukung. Setiap komponen ini bergerak dengan teratur dan seimbang. Keseimbangan alam semesta dijaga oleh berbagai gaya yang bekerja. Gravitasi merupakan satu diantara gaya tersebut yang memiliki kontribusi cukup besar dalam menjaga keseimbangan alam semesta.

اَلَمْ تَرَ اَنَّ اللّٰهَ سَخَّرَ لَكُمْ مَّا فِى الْاَرْضِ وَ الْفُلْكَ تَجْرِىْ فِى الْبَحْرِ بِاَمْرِهٖ ؕ وَ يُمْسِكُ السَّمَآءَ اَنْ تَقَعَ عَلَى الْاَرْضِ اِلَّا بِاِذْنِهٖ ؕ اِنَّ اللّٰهَ بِالنَّاسِ لَرَءُوْفٌ رَّحِيْمٌ

Artinya:"Tidakkah engkau memperhatikan bahwa Allah menundukkan bagimu (manusia) apa yang ada di bumi dan kapal yang berlayar di lautan dengan perintah-Nya. Dan Dia menahan (benda-benda) langit agar tidak jatuh ke bumi, melainkan dengan izin-Nya? Sungguh, Allah Maha Pengasih, Maha Penyayang kepada manusia" (QS. Al Hajj [22]: 65)

Menurut tafsir al Mishbah kata *assamaa'* yang semula diartikan *"segala apa yang ada di atas anda"* dapat ditafsirkan sebagai benda-benda ruang angkasa seperti bintang, rasi bintang, nebula, dan galaksi dimana benda-benda ini dapat bersinar sendiri. Kemudian juga terdapat benda-benda langit yang tidak bercahaya sendiri seperti satelit, planet, komet, meteor, molekul, atom, dan debu alam. Semua benda-benda ini bergerak dan berada pada posisinya dengan seizin Allah SWT melalu ciptaanNya berupa gaya gravitasi.(Shihab, 2017)

Para mufassir berpendapat mengenai surat al-Hajj ayat 65 bahwa gaya gravitasi yang menyebabkan semua benda langit beredar sesuai dengan orbitnya. Gravitasi pula yang menjaga atmosfer dibumi selalu terjaga dengan baik. Atmosfir ini yang membuat manusia di bumi bisa bernafas dan menjaga bumi dari benda-benda langit yang membahayakan. Rahmat Allah SWT ditunjukkan melalui ciptaanNya yang menyebabkan kita hidup dengan penuh kenikmatan di bumi.(Hamzah & Muniroh, 2016)

اِنَّ اللّٰهَ يُمْسِكُ السَّمٰوٰتِ وَ الْاَرْضَ اَنْ تَزُوْلَا ۚ وَ لَئِنْ زَالَتَآ اِنْ اَمْسَكَهُمَا مِنْ اَحَدٍ مِّنْۢ بَعْدِهٖ ؕ اِنَّهٗ كَانَ حَلِيْمًا غَفُوْرًا

Artinya: "Sungguh, Allah yang menahan langit dan Bumi agar tidak lenyap; dan jika keduanya akan lenyap." (QS. Fatir 35: Ayat 41)

Kata *yumsiku* awalnya diartikan dengan memegang sesuatu dengan tangan sehingga yang dipegang itu tidak terlepas atau berpencar. Sedangkan ayat ini menggambarkan keberlangsungan sistem alam semesta hanya di bawah kendali Allah SWT, seperti memegang sesuatu sehingga tidak akan lepas kecuali jika Allah SWT menghendaki untuk lepas.

Ayat kedua ini mengandung pernyataan yang cukup jelas menerangkan bahwa keseimbangan alam semesta dikendalikan oleh Allah SWT. Keseimbangan langit dan bumi dijaga dengan ciptaanNya berupa gaya gravitasi. Hanya Allah yang mampu menjaga keseimbangan alam semesta ini. Hal ini dibuktikan dengan pernyataanNya secara langsung di ayat ini. Kemajuan ilmu pengetahuan yang diciptakan manusia tak mampu untuk mengendalikan gravitasi.

اَللّٰهُ الَّذِيْ رَفَعَ السَّمٰوٰتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا ثُمَّ
اسْتَوٰى عَلَى الْعَرْشِ وَ سَخَّرَ الشَّمْسَ وَ الْقَمَرَ ۗ كُلٌّ يَّجْرِيْ
لِاَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ يُدَبِّرُ الْاَمْرَ يُفَصِّلُ الْاٰيٰتِ لَعَلَّكُمْ بِلِقَآءِ
رَبِّكُمْ تُوْقِنُوْنَ

Artinya:"Allah yang meninggikan langit tanpa tiang (sebagaimana) yang kamu lihat, kemudian Dia bersemayam di atas 'Arsy. Dia menundukkan matahari dan bulan; masing-masing beredar menurut waktu yang telah ditentukan. Dia mengatur urusan (makhluk-Nya), dan menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya), agar kamu yakin akan pertemuan dengan Tuhanmu." (QS. Ar Ra'd [13]: 2)

Tafsir Al-Mishbah menjelaskan yang menurunkan Al Quran adalah Allah SWT yang menjadikan langit menjulang tinggi, menjadikan bintang-bintang beredar sesuai lintasannya, tanpa ada tiang yang bisa dilihat hanya Allah SWT yang maha mengetahui. Penghubung yang tidak bisa dilihat tapi dapat menyatukan semua benda langit dalam fisika dikenal dengan gaya gravitasi. Ayat ini secara tidak

langsung menunjukkan keberadaan gaya gravitasi serta menunjukkan kekuasaan Allah SWT.

Allah menghubungkan langit dan bumi dengan ikatan yang tidak bisa putus kecuali atas kehendakNya. Ayat ini juga memberi contoh matahari dan bulan yang tunduk atas kekuasaan Allah SWT agar bisa digunakan untuk kepentingan manusia di bumi. Kekuasaan Allah ditunjukkan melalui ciptaanNya berupa gaya gravitasi. Hanya Dialah yang mengatur segala sesuatu di langit dan di bumi, dan menerangkan tanda-tanda kekuasaan-Nya di alam raya, agar manusia meyakini konsep keesaan Tuhan.

BAB IV
PERSAMAAN DIRAC DAN KLEIN GORDON DI RUANGWAKTU KERR

4.1 PERSAMAAN DIRAC

4.1.1 Ruangwaktu Kerr

Medan gravitasi yang muncul disebabkan oleh objek yang berputar. Diasumsikan bahwa medan eksternal dari objek ini diwakili oleh metrik Kerr. Dilakukan pembatasan variabel pada rotasi yang lambat, medan yang lemah, bentuk metriknya, dan bentuk koordinat (3+1). Ruangwaktu pada penelitian ini menggunakan persamaan garis Boyer-Lindquist

$$ds^2 = \frac{1}{p^2}(\Delta - a'^2 \sin^2\theta)c^2dt^2 + \frac{4ma'}{\rho^2}r' \sin^2\theta\, cdtd\phi - \frac{\rho^2}{\Delta}dr'^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{1}{\rho^2}[(r'^2 + a'^2)^2 - a'^2\Delta \sin^2\theta]\sin^2\theta\, d\phi^2, \tag{4.1}$$

didefinisikan Δ dan ρ^2

$$\Delta \equiv r'^2 - 2mr' + a'^2 \tag{4.2}$$

$$\rho^2 \equiv r'^2 + a'^2 \cos^2\theta \tag{4.3}$$

rotasi objek memiliki massa yang didefinisikan sebagai berikut

$$m \equiv \frac{GM}{c^2} \tag{4.4}$$

dan a' adalah parameter Kerr yang menggambarkan massa M. Hubungan parameter Kerr dengan momentum anguler J :

$$a' \equiv \frac{J}{c^2} \tag{4.5}$$

diasumsikan rotasi objek berbentuk bola dengan radius R yang memiliki densitas seragam. Maka diperoleh

$$a' \equiv \frac{J}{Mc} = \frac{2}{5c} R^2\omega_s \tag{4.6}$$

diamana ω_s adalah kecepatan sudut dari objek. (jika rotasi objek menyimpang dari bola atau memiliki distribusi densitas yang tidak homogen maka faktor numerik 2/5 akan diubah oleh faktor kesatuan) (Kokichi, 1998).

Pendekatan pertama pada rotasi lambat a' adalah

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r'}\right)c^2dt^2 + \frac{4ma'}{r'}\sin^2\theta cdtd\phi - \left(1 - \frac{2m}{r'}\right)^{-1} dr'^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \sin^2\theta\, d\phi \tag{4.7}$$

dengan menggunakan dua koordinat transformasi yang kontinu

$$r' = r\left(1 + \frac{m}{2r}\right) \tag{4.8}$$

$$x' = r sin\,\theta cos\phi$$

$$y' = r\, sin\theta sing\phi \tag{4.9}$$

$$z' = r\cos\theta$$

Dimasukkan persamaan (4.8)-(4.9) kedalam persamaan (4.7)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\left(\left(\frac{2r + rm}{2r}\right)\right)}\right)c^2dt^2 + \frac{4mca'}{\left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)}\sin^2\theta\, cdtdz - \left(1 - \frac{2m}{\left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)}\right)^{-1} dx'^2 - \left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)^2 dy'^2 - \left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)^2 \sin^2\theta\, dz$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\left(\left(\frac{2r + rm}{2r}\right)\right)}\right) c^2 dt^2 + \frac{4ma}{\left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)} \sin\theta \sin\theta \, dt dz$$

$$- \left(1 - \frac{2m}{\left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)}\right)^{-1} dx'^2 - \left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)^2 dy'^2$$

$$- \left(r\left(1 + \frac{m}{2r}\right)\right)^2 \sin^2\theta \, dz$$

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} c^2 dt^2$$

$$+ \left(\frac{4ma}{r^3\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} (r sin\,\theta cos\phi\,) dy' dt \right.$$

$$\left. - \frac{4ma}{r^3\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} (r\, sin\theta sin\phi) dx' dt \right) - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 dx'^2$$

$$- \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 dy'^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 dz'^2)$$

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} c^2 dt^2$$

$$+ \left(\frac{4ma}{r^3\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} x' dy' dt - \frac{4ma}{r^3\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} y' dx' dt \right)$$

$$- \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 dx'^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 dy'^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 dz'^2)$$

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} c^2 dt^2 + \frac{4ma}{r^3\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} (x' dy' - y' dx') dt \qquad (4.10)$$

$$-\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 (dx'^2+dy'^2+dz'^2)$$

Dimana a adalah definisi dari $a \equiv ca'$. Batas nilai medan lemah hingga $O(1/C^2)$

$$ds^2 = \frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2} c^2dt^2 + \frac{4ma}{r^3\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2}(x'dy'-y'dx')dt \tag{4.11}$$

$$-\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 (dx'^2+dy'^2+dz'^2)$$

Suku sebelah kanan dikalikan dengan GM/r

$$ds^2 = \frac{\left(1-\frac{1}{2c^2}\frac{GM}{r}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2c^2}\frac{GM}{r}\right)^2} c^2dt^2 + \frac{4\left(\frac{GM}{c^2}\right)a}{r^3\left(1+\frac{1}{2c^2}\frac{GM}{r}\right)^2}(x'dy'-y'dx')dt$$

$$-\left(1+\frac{1}{2c^2}\frac{GM}{r}\right)^4 (dx'^2+dy'^2+dz'^2)$$

$$ds^2 = \frac{\left(1+\frac{\phi}{2c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{\phi}{2c^2}\right)^2} c^2dt^2 + \frac{4\left(\frac{GM}{c^2}\right)a}{r^3\left(1-\frac{\phi}{2c^2}\right)^2}(x'dy'-y'dx')dt$$

$$-\left(1+2\frac{\phi}{c^2}\right)^4 (dx'^2+dy'^2+dz'^2)$$

$$ds^2 = \frac{\left(1+\frac{\phi}{2c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{\phi}{2c^2}\right)^2} c^2dt^2 + \frac{\frac{4GMa}{c^2}}{r^3\left(1-\frac{\phi}{2c^2}\right)^2}(x'dy'-y'dx')dt$$

$$-\frac{\left(1-2\frac{\phi}{c^2}\right)^1}{\left(1+2\frac{\phi}{c^2}\right)^{-3}} (dx'^2+dy'^2+dz'^2)$$

$$ds^2 = \left(1+\frac{\phi}{2c^2}\right)^2 c^2dt^2 + \frac{\frac{4GMa}{c^2}}{r^3}(x'dy'-y'dx')dt$$

$$-\left(1-2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx'^2+dy'^2+dz'^2)$$

$$ds^2 = \left(c^2 + 2c^2\frac{\phi}{2c^2} + c^2\frac{\phi^2}{4c^4}\right)dt^2 + \frac{4GMa}{c^2r^3}(x'dy' - y'dx')dt$$
$$-\left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$
$$ds^2 = \left(c^2 + 4\frac{\phi}{2} + 2\frac{\phi^2}{c^2}\right)dt^2 + \frac{4GMa}{c^2r^3}(x'dy' - y'dx')dt \quad (4.12)$$
$$-\left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

dimana ϕ adalah potensial gravitasi Newtonian dengan $\phi = -GM/r$. Kemudian mempertimbangkan kasus dengan pengamatan berputar di sekitar objek yang berada di dalam bidang tegak lurus terhadap kerangka rotasi. Maka diasumsikan kecepatan sudut dari pengamat ω_o adalah konstan, hubungan antara kerangka pengamatan diam (t, x, y, z) dengan kerangka koordinat statis asimtotik (t, x', y', z') adalah

$$x' = x\cos\omega_o t - y\sin\omega_o t$$
$$y' = x\sin\omega_o t + y\cos\omega_o t \quad (4.13)$$
$$z' = z$$

Dengan $a' \equiv 2/5c\ R^2\omega_s$, maka dilakukan lagi transformasi koordinat dengan memasukkan persamaan (4.13) kedalam persamaan (4.12)

$$ds^2 = \left(c^2 + 2\phi + 2\frac{\phi^2}{c^2}\right)dt^2 + \frac{8GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s(x'dy' - y'dx')dt$$

$$-\left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

$$ds^2 = \left(c^2 + 2\phi + 2\frac{\phi^2}{c^2}\right)dt^2$$

$$+ \frac{8GMR^2}{5c^2r^3}((x\cos\omega_o t - y\sin\omega_o t)dy'$$

$$- (x\sin\omega_o t + y\cos\omega_o t)dx')dt \quad - \left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx'^2$$

$$+ dy'^2 + dz'^2)$$

$$ds^2 = \left(c^2 + 2\phi + 2\frac{\phi^2}{c^2}\right)dt^2$$

$$+ \left((-\frac{8GMR^2}{5c^2r^3}y\sin\omega_o t + \frac{8GMR^2}{5c^2r^3}x\cos\omega_o t)dy\right.$$

$$\left. - (\frac{8GMR^2}{5c^2r^3}y\cos\omega_o t + \frac{8GMR^2}{5c^2r^3}x\sin\omega_o\, t)dx\right)dt$$

$$- \left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$ds^2 = \left(c^2 + 2\phi + 2\frac{\phi^2}{c^2}\right)dt^2$$

$$+ \left((-\frac{4GMa}{c^2r^3}y\sin\omega_o t + \frac{4GMa}{c^2r^3}x\cos\omega_o t)dy\right.$$

$$\left. - (\frac{4GMa}{c^2r^3}y\cos\omega_o t + \frac{4GMa}{c^2r^3}x\sin\omega_o\, t)dx\right)dt$$

$$- \left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &\left[c^2 + 2\phi - \omega_o^2(x^2+y^2) + \frac{2\phi^2}{c^2} + \frac{8GMR^2}{5c^2}\omega_o\omega_s(x^2+y^2)\right. \\
&\left. + \frac{2\phi}{c^2}\omega_o^2(x^2+y^2)\right]dt^2 \\
&- \left[\omega_o x dy dt - 2\frac{\phi}{c^2}\omega_o x dy dt - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega x dy dt\right] \\
&+ \left[\omega_o(-y dx dt) - 2\frac{\phi}{c^2}\omega_o(-y dx dt)\right. \\
&\left. - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s(-y dx dt)\right] - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 \\
&+ dz^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &\left[c^2 + 2\phi - \omega_o^2(x^2+y^2) + \frac{2\phi^2}{c^2} + \frac{8GMR^2}{5c^2}\omega_o\omega_s(x^2+y^2)\right. \\
&\left. + \frac{2\phi}{c^2}\omega_o^2(x^2+y^2)\right]dt^2 \\
&- \left[\omega_o - 2\frac{\phi}{c^2}\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right](x dy - y dx)dt \\
&- \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

dengan menggunakan metrik di atas dapat dihitung simbol Christoffelnya. Simbol Christoffel akan digunakan untuk menentukan komponen dari spin koneksi (Lampiran A)

Menggunakan bentuk (3+1) maka bentuk metrik $g_{\alpha\beta}$ pada persamaan (4.14) dipisahkan dengan mengikuti persamaan berikut

$$g_{oo} = N^2 - \gamma_{ij}N^iN^j \tag{4.15}$$

$$g_{oi} = -\gamma_{ij}N^j \equiv -N_i \tag{4.16}$$

$$g_{ij} = -\gamma_{ij} \tag{4.17}$$

dimana N adalah fungsi Lapse, N^i adalah pergeseran vektor, dan γ_{ij} adalah metrik spasial pada hypersurface 3D. Didefinisikan γ^{ij} matriks invers dari γ_{ij}. Mertik $g^{\alpha\beta}$ dapat dipisahkan sesuai persamaan berikut

$$g^{oo} = \frac{1}{N^2} \tag{4.18}$$

$$g^{oi} = -\frac{N^i}{N^2} \tag{4.19}$$

$$g_{ij} = -\frac{N^i N^j}{N^2} - \gamma^{ij} \tag{4.20}$$

Persamaan (4.14) dapat dipisahkan bagian lapse, pergeseran vektor, dan metrik spasial menjadi (Kokichi, 1998):

$$N = c\left(1 + \frac{\phi}{c^2} + \frac{\phi^2}{2c^4}\right) \tag{4.21}$$

$$N^x = -\left(\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right)y \tag{4.22}$$

$$N^y = \left(\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right)x \tag{4.23}$$

$$N^z = 0 \tag{4.24}$$

$$\gamma_{ij} = \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij} \tag{4.25}$$

untuk menghitung komponen spin koneksi diperlukan tetrad berikut ini

$$e^{\mu}_{(0)} = c\left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N}\right) \tag{4.26}$$

$$e^{\mu}_{(k)} = \left(0, e^{\mu}_{(k)}\right) \tag{4.27}$$

dimana spasial tiga $e^i_{(k)}$ didefinisikan sebagai

$$\gamma_{ij} = e^i_{(k)} e^j_{(l)} = \delta_{kl} \tag{4.28}$$

dengan memasukkan persamaan (4.21) - (4.25) kedalam persamaan (4.26) dan (4.27) akan diperoleh tentrad dengan indeks tertentu

$$e^0_{(0)} = c\left(\frac{1}{N}, -\frac{N^0}{N}\right)$$

$$e^0_{(0)} = c\left(\frac{1}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}, -\frac{N^0}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}\right)$$

$$e^0_{(0)} = 1 - \frac{\phi}{c^2} \tag{4.29}$$

$$e^1_{(0)} = c\left(\frac{1}{N}, -\frac{N^1}{N}\right)$$

$$e^1_{(0)} = c\left(\frac{1}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}, -\frac{\left[-\left(\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right)y\right]}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}\right)$$

$$e^1_{(0)} = \left(\omega_o - \frac{\phi}{c^2}\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right)y \tag{4.30}$$

$$e^2_{(0)} = c\left(\frac{1}{N}, -\frac{N^2}{N}\right)$$

$$e^2_{(0)} = c\left(\frac{1}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}, -\frac{\left[\left(\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right)x\right]}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}\right)$$

$$e^2_{(0)} = -\left(\omega_o - \frac{\phi}{c^2}\omega_o - \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega_s\right)x \tag{4.31}$$

$$e^3_{(0)} = c\left(\frac{1}{N}, -\frac{N^3}{N}\right)$$

$$e^3_{(0)} = c\left(\frac{1}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}, -\frac{0}{\left[c\left(1+\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}\right)\right]}\right)$$

$$e^{3}_{(0)} = 0 \tag{4.32}$$

$$e^{i}_{(j)} = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)\delta^{i}_{j} \tag{4.33}$$

Dari persamaan diatas dapat dihitung komponen dari spin koneksi (Kokichi, 1998). (Lampiran B)

4.1.2 Turunan Kovarian

Terdapat sebuah kasus dengan menggunakan persamaan tensor yang akan dilakukan penggantian indeks dari tensor Lorentz huruf biasa T^{a}_{b} menjadi tensor Lorentz dengan indeks yang menggunakan huruf romawi T^{α}_{β}. Perubahan indeks ini menyatakan bahwa terjadi transformasi koordinat dari persamaan relativitas khusus ke persamaan relativitas umum. Kemudian dilakukan perubahan turunan ∂_{a} menjadi turunan ∇_{α} dan menganti η_{ab} menjadi $g_{\alpha\beta}$. Perubahan ini mengubah persamaan awal menjadi persamaan secara umum. Metode perubahan indeks hanya bekerja pada tensor yang menggunakan transformasi Lorentz. Metode ini tidak dapat diterapkan pada medan spinor yang menjelaskan partikel dengan spin $\frac{1}{2}$.

Agar dapat diterapkan pada partikel spin $\frac{1}{2}$ maka perlu mempertimbangkan sistem koordinat inersial lokal pada setiap titik ruangwaktu dan mendefinisikan medan umum dengan spinor kedalam sistem koordinat ini. Dengan menghubungkan sistem koordinat inersial lokal dengan sistem koordinat umum non inersial akan didapatkan perluasan teori dari sebuah medan yang berada di dalam ruangwaktu yang melengkung. Sesuai dengan prinsip kekuatan *(strong Principle)* yang sama menyatakan bahwa semua hukum alam di dalam sistem

koordinat inersial akan sama dengan sistem koordinat kartesian yang tidak dipercepat atau tidak terdapat pengaruh gravitasi. Pendekatan ini layak dipertimbangkan dan digunakan.

Dengan menggunakan bentuk tetrad dan membentuk sistem koordinat inersial lokal ξ_x^a pada setiap titik ruangwaktu *X*. Metrik pada sistem koordinat non inersial berbentuk(Kokichi, 1998)

$$g_{\alpha\beta}(x) = e_\alpha^{(a)}(x) e_\beta^{(b)}(x)\, \eta_{ab} \tag{4.34}$$

dimana

$$e_\alpha^{(a)}(X) \equiv \left(\frac{\partial \xi_x^a(x)}{\partial x^\alpha}\right)_{x=X} \tag{4.35}$$

jika diubah koordinat non inersial umum dari x^α menjadi x'^α maka

$$e_\alpha^{(a)} \rightarrow e_\alpha'^{(a)} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\, e_\beta^{(a)} \tag{4.36}$$

$e_\alpha^{(a)}$ adalah medan vektor kovarian empat.

Diberikan sebuah medan vektor kontravarian $A^\alpha(x)$ dengan menggunakan tetrad maka dapat mengganti bagian dari sistem koordinat inersial lokal ξ_x^a pada :

$$\bar{A}^a \equiv e_\alpha^{(a)}\, A^\alpha \tag{4.37}$$

Persamaan diatasa juga dapat diterapkan pada medan tensor umum

$$\bar{A}_a \equiv e_a^{(\alpha)}\, A_\alpha \tag{4.38}$$

$$\bar{B}^a{}_b \equiv e_\alpha^{(a)}\, e_{(b)}^\beta B_\beta^\alpha \tag{4.39}$$

dimana

$$e_{(a)}^\alpha \equiv \eta_{ab} g^{\alpha\beta} e^{(b)}{}_\beta \tag{4.40}$$

tetrad pada persamaan diatas memenuhi hubungan sebagai berikut

$$e^{\alpha}_{(a)} e^{(a)}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{4.41}$$

$$e^{\alpha}_{(a)} e^{(b)}_{\alpha} = \delta^{b}_{a} \tag{4.42}$$

Prinsip kesetaraan pada relativitas umum harus diaplikasikan pada semua kerangka inersial lokal dengan komponen medan skalar $\bar{A}^a, \bar{B}^a{}_b,$ dan seterusnya. Pendefinisian medan skalar dapat dipilih bebas di dalam sistem koordinat inersial lokal tapi harus mengandung vektor atau tensor yang memenuhi transformasi Lorentz $\Lambda^a_b(x)$ pada x :

$$\bar{A}^a(x) \rightarrow \Lambda^a_b(x)\bar{A}^b(x) \tag{4.43}$$

$$\bar{B}^a{}_b(x) \rightarrow \Lambda^a_c(x)\Lambda^d_b(x)\bar{B}^c{}_d(x) \tag{4.44}$$

dimana

$$\eta_{ab}\Lambda^a_c(x)\Lambda^b_d(x) = \eta_{cd} \tag{4.45}$$

sesuai dengan perubahan persamaan diatas, tetrad $e^{(a)}_{\alpha}$ dapat diubah menjadi

$$e^{(a)}_{\alpha}(x) \rightarrow \Lambda^a_b(x)\mathrm{e}^{(b)}_{\alpha}(x) \tag{4.46}$$

Secara umum medan $\bar{\psi}_m(x)$ ditentukan di dalam sistem koordinat inersial lokal yang berubah dengan cara berikut

$$\bar{\psi}_m(x) \rightarrow \sum_n [U(\Lambda(x))]_{mn}\,\bar{\psi}_n(x) \tag{4.47}$$

Dimana $U(\Lambda(x)$ adalah matriks dari grub Lorentz, missal jika $\bar{\psi}$ adalah kovarian vektor $\bar{A}_a$ maka $U\big(\Lambda(x)\big)$ sama dengan

$$[U(\Lambda(x))]^b_a = \Lambda^b_a(x) \tag{4.48}$$

sedangkan untuk tensor kontravarian $\bar{T}^{ab}$

$$[U(\Lambda(x))]^{ab}_{cd} = \Lambda^a_c(x)\Lambda^b_d(x) \tag{4.49}$$

Koordinat vektor ditransformasikan ke dalam bentuk transformasi koordinat umum $\rightarrow x'$:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \tag{4.50}$$

tetrad dapat digunakan untuk membentuk turunan koordinat skalar yaitu:

$$e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \tag{4.51}$$

turunan koordinat skalar ini berhubungan dengan turunan biasa yang dibentuk di dalam sistem koordinat inersial lokal. Meskipun sebenarnya koordinat ini adalah koordinat skalar. Turunan koordinat skalar tidak memiliki sifat transformasi sederhana menurut transformasi Lorentz ketika diterapkan pada medan umum (Kokichi, 1998).

Mentransformasi turunan koordinat skalar dengan medan umum $\bar{\psi}$ menggunakan aturan transformasi Lorentz (4.47)

$$e^{\alpha}_{(a)}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \bar{\psi}(x) \rightarrow \Lambda^{b}_{a}(x) e^{\alpha}_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \{U(\Lambda(x))\bar{\psi}(x)\}$$

$$= \Lambda^{b}_{a}(x) e^{\alpha}_{(b)}(x) \left[U\big(\Lambda(x)\big) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \bar{\psi}(x) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} U(\Lambda(x)) \right\} \bar{\psi}(x) \right] \tag{4.52}$$

Untuk memperluas teori pada ruangwaktu datar di dalam ruangwaktu melengkung, maka didefinisikan sebuah operator $\overline{D}_a$ yang memenuhi transformasi Lorentz yang bergantung posisi. Operator ini memenuhi hukum transformasi

$$\overline{D}_a \bar{\psi}(x) \rightarrow \Lambda^{b}_{a}(x) U\big(\Lambda(x)\big) \overline{D}_b \bar{\psi}(x) \tag{4.53}$$

$\overline{D}_a \bar{\psi}(x)$ berperilaku seperti tensor dengan satu kovarian tambah yang memenuhi transformasi Lorentz bergantung posisi. Dengan mengganti $\partial_a \bar{\psi}(x)$ di dalam persamaan medan di ruangwaktu datar menjadi $\overline{D}_a \bar{\psi}(x)$ maka akan

didapatkan persamaan medan yang tidak bergantung sistem koordinat inersial(Kokichi, 1998).

Dengan mempertimbangkan persamaan (4.52) akan didapatkan koordinat skalar turunan vektor Lorentz $\overline{D}_a$ dengan bentuk :

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\bar{\psi}(x) \rightarrow \Lambda^{b}_{a}(x)e^{\alpha}_{(b)}(x)\left\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}U\big(\Lambda(x)\big)\right\}\bar{\psi}(x)$$

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\bar{\psi}(x)$$

$$= \Lambda^{b}_{a}(x)e^{\alpha}_{(b)}(x)\left[U\big(\Lambda(x)\big)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\bar{\psi}(x) + \left\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}U\big(\Lambda(x)\big)\right\}\bar{\psi}(x)\right] \tag{4.54}$$

Suku sebelah kanan diuraikan

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\bar{\psi}(x)$$

$$= \left[\Lambda^{b}_{a}(x)e^{\alpha}_{(b)}(x)U\big(\Lambda(x)\big)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\bar{\psi}(x)\right] + \left[\Lambda^{b}_{a}(x)e^{\alpha}_{(b)}(x)\left\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}U\big(\Lambda(x)\big)\right\}\bar{\psi}(x)\right]$$

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \left\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}U(\Lambda(x))\right\}\right]\bar{\psi}(x)$$

$$= \Lambda^{b}_{a}(x)e^{\alpha}_{(b)}(x)\left[U\big(\Lambda(x)\big)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\bar{\psi}(x)\right]$$

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \left\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}U(\Lambda(x))\right\}\right]\bar{\psi}(x) = \Lambda^{\alpha}_{a}(x)U\big(\Lambda(x)\big)\overline{D}_a\bar{\psi}(x)$$

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \{\overline{D}_{\alpha}U(\Lambda(x))\}\right]\bar{\psi}(x) = \overline{D}_a\bar{\psi}(x)$$

$$e^{\alpha}_{(a)}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \bar{\Gamma}_{\alpha}\{U(\Lambda(x))\}\right]\bar{\psi}(x) = \overline{D}_a\bar{\psi}(x)$$

$$\overline{D}_a e^{\alpha}_{(a)} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha}\right] \tag{4.55}$$

dimana Γ_α adalah matriks yang memenuhi hukum transformasi Lorentz

$$\Gamma_\alpha(x) \to U\big(\Lambda(x)\big)\Gamma_\alpha(x)U^{-1}\big(\Lambda(x)\big) + \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}U\big(\Lambda(x)\big)\right]U^{-1}(\Lambda(x)) \qquad (4.56)$$

Turunan vektor Lorentz koordinat skalar $\overline{D}_a$ adalah turunan kovarian yang memenuhi transformasi Lorentz yang bergantung posisi. Hasil penurunan ini membahas medan umum mengandung spinor yang dimasukkan ke dalam ruangwaktu melengkung. Maka didapatkan persamaan medan umum di dalam ruangwaktu melengkung (Kokichi, 1998).

4.1.3 Penghubung

Menggunakan hukum transformasi Lorentz sebuah medan dilambangkan dengan ψ_m yang ditransformasikan menggunakan transformasi Lorentz oleh Λ_b^a

$$\psi'_m = \sum_n [U(\Lambda)]_{mn}\,\psi_n \qquad (4.57)$$

Transformasi Lorentz Λ_1 yang diikuti oleh transformasi Lorentz Λ_2 akan menghasilkan hasil yang sama dengan transformasi Lorentz $\Lambda_1\Lambda_2$. Matriks $U(\Lambda)$ harus menggambarkan grub Lorentz, maka

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2) \qquad (4.58)$$

Matriks *U* pada persamaan (4.47) dan (4.48) memenuhi hukum perkalian grup. Mempertimbangkan grub Lorentz kecil digunakanlah transformasi Lorentz yang memenuhi persamaan identitas berikut:

$$\Lambda_b^a(x) = \delta_b^a + \omega_b^a(x), \qquad |\omega_b^a| \ll 1 \qquad (4.59)$$

karena transformasi Lorentz dibatasi oleh persamaan (4.45). Pada bagian ω dapat dilakukan perpindahan indeks sebagai berikut

$$\omega_{ab}(x) = -\omega_{ba}(x) \tag{4.60}$$

indeks pada ω dapat dinaikan atau diturunkan dengan η. Matriks yang menggambarkan $U(\Lambda)$ harus sangat dekat dengan Identitas berikut :

$$U\big(1 + \omega(x)\big) = \mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab}) \tag{4.61}$$

σ_{ab} adalah kumpulan konstanta matriks yang bisa berbentuk tensor antisimetrik pada a dan b:

$$\sigma_{ab} = \sigma_{-ba} \tag{4.62}$$

Jika mempertimbangkan vektor kovarian $\bar{A}_a$ maka didapatkan

$$[\sigma_{ab}]_c^d = \eta_{ac}\delta_b^d - \eta_{bc}\delta_a^d \tag{4.63}$$

Matriks σ_{ab} harus dibatasi oleh hukum perkalian grub $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2)$. Jika diaplikasi pada produk $\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}$ maka :

$$\begin{aligned} U(\Lambda)U(1+\omega)U(\Lambda^{-1}) &= U(\Lambda)U(U(\Lambda^{-1}) + \omega U(\Lambda^{-1})) \\ &= U(U(\Lambda)U(\Lambda^{-1}) + U(\Lambda)\omega U(\Lambda^{-1})) \\ &= U(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}) \end{aligned} \tag{4.64}$$

Dengan memperkecil ω

$$\mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab})U(\Lambda)U(\Lambda^{-1}) = \mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{cd}\Lambda_a^c\Lambda_b^d$$

$$U(\Lambda)\,\sigma_{ab}\,U(\Lambda^{-1}) = \sigma_{cd}\Lambda_a^c\Lambda_b^d \tag{4.65}$$

Jika dikelompokkan menurut $\Lambda = 1 + \omega$ dan $\Lambda^{-1} = 1 - \omega$ didapatkan

$$\omega^{cd}\big[\sigma_{ab,}\sigma_{cd}\big] = \omega^{cd}\,(2\eta_{cb}\sigma_{ad} + 2\eta_{ca}\sigma_{db}$$

$$\omega^{cd}\big(\sigma_{ab,}\sigma_{cd} - \sigma_{cd,}\sigma_{ab}\big) = \omega^{cd}\,(2\eta_{cb}\sigma_{ad} + 2\eta_{ca}\sigma_{db})$$

$$\omega^{cd}\big[\sigma_{ab,}\sigma_{cd}\big] = \omega^{cd}\,(\eta_{cb}\sigma_{ad} + \eta_{cb}\sigma_{ad} + \eta_{ca}\sigma_{db} + \eta_{ca}\sigma_{db})$$

$$\omega^{cd}\big[\sigma_{ab,}\sigma_{cd}\big] = \omega^{cd}\,(\eta_{cb}\sigma_{ad} - \eta_{da}\sigma_{cb} - \eta_{ca}\sigma_{bd} + \eta_{db}\sigma_{ca})$$

$$\omega^{cd}\left[\sigma_{ab,}\sigma_{cd}\right] = \omega^{cd}\left(\eta_{cb}\sigma_{ad} - \eta_{ca}\sigma_{bd} + \eta_{db}\sigma_{ca} - \eta_{da}\sigma_{cb}\right) \quad (4.66)$$

Maka didapatkan bentuk komutasi

$$[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] = \eta_{cb}\sigma_{ad} - \eta_{ca}\sigma_{bd} + \eta_{db}\sigma_{ca} - \eta_{da}\sigma_{cb} \quad (4.67)$$

dan tensor contravariant $\bar{T}^{ab}$

$$[\sigma_{ab}]^{cd}_{ef} = \delta^c_a\eta_{be}\delta^d_f - \delta^c_b\eta_{ae}\delta^d_f + \delta^d_a\eta_{bf}\delta^c_e - \delta^d_b\eta_{af}\delta^c_e \quad (4.68)$$

Matriks σ_{ab} memenuhi hubungan komutasi pada persamaan (4.68) maka jika ditulis dalam bentuk komutator biasa menjadi

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (4.69)$$

Menggunakan transformasi pada persamaan (4.56) dengan memenuhi transformasi Lorentz Infinitesimal (4.59) bentuk penghubung Γ_α bertransformasi menjadi (Kokichi, 1998)

$$\Gamma_\alpha(x) \rightarrow \Gamma_\alpha(x) + \frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\,[\sigma_{ab}, \Gamma_\alpha(x)] + \frac{1}{2}\sigma_{ab}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\omega^{ab}(x) \quad (4.70)$$

didefinisikan bentuk koneksi

$$\Gamma_\alpha(x) \rightarrow \tfrac{1}{2}C^{ab}_\alpha(x)\sigma_{ab} \quad (4.71)$$

dimana indeks latin pada C adalah penaik atau penurun seperti pada η, sedangkan indeks Greek berada pada g. $C^{ab}_\alpha(x)$ bersifat antisimetri di a dan b. Dengan menggunakan hukum transformasi (4.70) dan hubungan komutasi (4.68) maka didapatkan $C^{ab}_\alpha(x)$

$$\frac{1}{2}C^{ab}_\alpha(x)\sigma_{ab} \rightarrow \frac{1}{2}C^{ab}_\alpha(x)\sigma_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\,\left[\sigma_{ab}, \frac{1}{2}C^{ab}_\alpha(x)\sigma_{ab}\right] + \frac{1}{2}\sigma_{ab}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\omega^{ab}(x)$$

$$\frac{1}{2}C_{\alpha}^{ab}(x)\sigma_{ab} \rightarrow \frac{1}{2}C_{\alpha}^{ab}(x)\sigma_{ab}$$

$$+\frac{1}{2}\omega^{ab}(x)\left[\frac{1}{2}C_{\alpha}^{ab}(x)\sigma_{ab} - \sigma_{ab}\frac{1}{2}C_{\alpha}^{ab}(x)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_{ab}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega^{ab}(x)$$

$$C_{\alpha}^{ab}(x) \rightarrow C_{\alpha}^{ab}(x) + \omega^{ab}(x)\, C_{\alpha}^{ab}(x)[\sigma_{ab} - \sigma_{ab}] + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega^{ab}(x)$$

$$C_{\alpha}^{ab}(x) \rightarrow C_{\alpha}^{ab}(x) + \omega^{ab}(x)\, C_{\alpha}^{ab}[\sigma_{ab} + \sigma_{ba}] + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega^{ab}(x)$$

$$C_{\alpha}^{ab}(x) \rightarrow C_{\alpha}^{ab}(x) + \omega^{ab}(x)\, C_{\alpha}^{ab}[\sigma_{ab} + \sigma_{ba}] + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega^{ab}(x)$$

$$C_{\alpha}^{ab}(x) \rightarrow C_{\alpha}^{ab}(x) + \omega^{ab}(x)\, \eta_{c}^{a}\eta_{a}^{c}C_{\alpha}^{ab}\sigma_{ab} + \omega^{ab}\eta_{c}^{b}\eta_{b}^{c}(x)\, C_{\alpha}^{ab}\sigma_{ba}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega^{ab}(x)$$

$$C_{\alpha}^{ab}(x) \rightarrow C_{\alpha}^{ab}(x) + \omega_{c}^{a}(x)C_{\alpha}^{cb}(x) + \omega_{c}^{b}(x)\, C_{\alpha}^{ac} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega^{ab}(x) \qquad (4.72)$$

Koordinat skalar turunan vektor Lorentz $\overline{D}_a$ adalah turunan kovarian yang memenuhi transformasi Lorentz. Turunan $\overline{D}_a$ berbeda dengan turunan kovarian ∇_{α} yang digunakan di analisis tensor. Maka harus dihubungkan di antara keduanya dengan menggunakan persamaan (4.63), sehingga didapatkan hubungan turunan $\overline{D}_a$ dan tetrad $e_{(a)\alpha}$

$$\overline{D}_a \equiv e_{(a)}^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \Gamma_{\mu}\right]$$

$$\overline{D}_a e_{(a)\alpha} = e_{(a)}^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}e_{(a)\alpha} - \Gamma_{\mu}e_{(a)\alpha}\right]$$

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} = e_{(a)}^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}e_{(b)\alpha} - \frac{1}{2}C_{\mu}^{ab}(x)\sigma_{ab}\, e_{(b)\alpha}\right]$$

Diubah indeksnya

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} = e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \frac{1}{2} C^{ab}_{\mu} \eta^{ef}_{c} \eta^{c}_{ef}(x) \sigma_{ab}\, e_{(b)\alpha} \right]$$

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} = e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \frac{1}{2} C^{ef}_{\mu} \eta_{c} \sigma^{c}_{ef}(x)\, e_{(b)\alpha} \right]$$

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} = e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \frac{1}{2} C^{ef}_{\mu} \left[\sigma_{ef}\right]^{c}_{b}\, e_{(c)\alpha} \right]$$

Menggunakan definisi persamaan (4.63)

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} = e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \frac{1}{2} C^{ef}_{\mu} \left(\eta_{eb} \delta^{c}_{f} - \eta_{fb} \delta^{c}_{e}\right) e_{(c)\alpha} \right]$$

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} = e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \frac{1}{2} C^{ef}_{\mu} \left(\eta_{eb} \delta^{c}_{f} e_{(c)\alpha} + \eta_{fb} \delta^{c}_{e} e_{(c)\alpha}\right) \right]$$

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} \equiv e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \eta_{bc} C^{cd}_{\mu}\, e_{(d)\alpha} \right] \tag{4.73}$$

Tetrad $e_{(a)\alpha}$ tidak hanya seperti vektor Lorentz tapi juga koordinat vektor. Oleh karena itu, harus mempertimbangkan properti vektor juga. Turunan kovarian berasal dari koordinat kovarian vektor. Maka total turunan kovarian $\overline{D}_a$ didefinisikan sebagai (Kokichi, 1998)

$$\overline{D}_a e_{(b)\alpha} \equiv e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_{(b)\alpha} - \eta_{bc} C^{cd}_{\mu} e_{(d)\alpha} - \Gamma^{v}_{\alpha\mu}\, e_{(b)v} \right] \tag{4.74}$$

dimana $\Gamma^{v}_{\alpha\mu}$ adalah simbol Christoffel. Jika dilakukan dengan cara yang sama pada tetrad $e^{(a)}_{\alpha}$ maka didapatkan

$$\overline{D}_a e^{(b)}_{\alpha} \equiv e^{\mu}_{(a)} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e^{(b)}_{\alpha} - \eta_{bc} C^{cd}_{\mu} e^{(b)}_{\alpha} - \Gamma^{v}_{\alpha\mu}\, e^{(b)}_{\alpha} \right] \tag{4.75}$$

turunan kovarian dari metrics $g_{\alpha\beta}$ bernilai nol

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{4.76}$$

oleh karena itu dari persamaan (4.34) menjadi

$$0 = \nabla_{\mu} g_{\alpha\beta}$$

$$= e_{\mu}^{(a)} \overline{D}_{\alpha} g_{\alpha\beta}$$

$$= e_{\mu}^{(a)} \left[\left(\overline{D}_{\alpha} e_{\alpha}^{(b)} \right) e_{(b)\beta} + e_{\alpha}^{(b)} \left(\overline{D}_{\alpha} e_{(b)\beta} \right) \right] \quad (4.77)$$

solusi sederhana dari persamaan diatas adalah

$$\overline{D}_{\alpha} e_{\alpha}^{(b)} = \overline{D}_{\alpha} e_{(b)\alpha} = 0 \quad (4.78)$$

persamaan diatas dianggap sebagai solusi pada kondisi mendasar. Dengan menggunakan kondisi ini akan dicari hubungan Γ_{α} dan tetrad $\mathrm{e}_{(a)\alpha}$ dari persamaan (4.74) dan (4.75)

$$C_{\alpha}^{ab}(x) = -\eta^{ac}\eta^{bd} e_{(c)}^{\lambda} \nabla_{\alpha} e_{(d)\lambda} \quad (4.79)$$

oleh karena itu, penghubung Γ_{α}

$$\Gamma_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{2} C_{\alpha}^{ab}(x) \sigma_{ab}$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(-\eta^{ac}\eta^{bd} e_{(c)}^{\lambda} \nabla_{\alpha} e_{(d)\lambda} \right) \sigma_{ab}$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(-\eta^{ac}\eta^{bd} e_{(c)}^{\lambda} \nabla_{\alpha} e_{(d)\lambda} \right) \sigma_{ab} \sigma_{ab}^{\mu v} g_{\mu v}^{ab}$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(-\sigma^{ab} g_{\mu v} e_{(a)}^{\mu} \nabla_{\alpha} e_{(b)}^{v} \right)$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) = -\frac{1}{2} \sigma^{ab} g_{\mu v} e_{(a)}^{\mu} \nabla_{\alpha} e_{(b)}^{v} \quad (4.80)$$

menurut transformasi Lorentz yang sangat kecil (4.59) tetrad $e_{(a)\alpha}$ berubah sesuai

$$\mathrm{e}_{(a)\alpha}(x) \rightarrow \mathrm{e}_{(a)\alpha}(x) + \omega_{a}^{b}(x) \mathrm{e}_{(b)\alpha}(x) \quad (4.81)$$

maka

$$e_{(a)}^{\lambda}(x) \nabla_{(\alpha)} \mathrm{e}_{(b)\lambda}(x) \rightarrow e_{(a)}^{\lambda}(x) \nabla_{(\alpha)} \mathrm{e}_{(b)\lambda}(x) + \omega_{a}^{c}(x) e_{(c)}^{\lambda} \nabla_{(\alpha)} \mathrm{e}_{(b)\lambda}(x) \quad (4.82)$$

$$+\omega_b^c(x)e_{(a)}^{\lambda}\nabla_{(\alpha)}\mathrm{e}_{(c)\lambda}(x)-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\omega_{ab}(x)$$

oleh karena itu $C_{\alpha}^{ab}(x)$ pada persamaan (4.79) memenuhi hukum transformasi persamaan (4.71) (Kokichi, 1998)

4.1.4 Persamaan Dirac di Ruangwaktu Kerr

Turunan kovarian $\overline{D}_a$ digunakan untuk menurunkan persamaan Dirac di ruangwaktu melengkung. Persamaan ini dibentuk dari koordinat inersial ξ_x^a

$$\left[i\hbar\,\gamma^{(a)}\,\frac{\partial}{\partial\xi_x^a}-mc\right]\bar{\psi}(\xi)=0 \tag{4.83}$$

dimana matriks Dirac $\gamma^{(a)}$ ditentukan dengan hubungan

$$\gamma^{(a)}\gamma^{(b)}+\gamma^{(b)}\gamma^{(a)}=2\eta^{ab} \tag{4.84}$$

$\bar{\psi}$ adalah spinor Dirac yang didefinisikan di dalam sistem koordinat inersial lokal. Mengganti turunan $\partial/\partial\xi_x^a$ dengan turunan kovarian $\overline{D}_a$ pada persamaan (4.83) untuk mengganti ruangwaktu datar menjadi ruangwaktu melengkung

$$\left[i\hbar\,\gamma^{(a)}e_{(a)}^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma_{\alpha}\right)-mc\right]\bar{\psi}(\xi)=0 \tag{4.85}$$

dengan turunan kovarian D_a didefinisikan dengan

$$D_a\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma_{\alpha} \tag{4.86}$$

dimana bentuk umuman kovarian matriks Dirac γ^{α} didefinisikan dengan

$$\gamma^{\alpha}\equiv\gamma^{(a)}\,e_{(a)}^{\alpha} \tag{4.87}$$

dengan menggunakan definisi diatas, maka dapat diturunkan persamaan Dirac di dalam bentuk kovarian umum (Kokichi, 1998)

$$\left[i\hbar\,\gamma^{(a)}e_{(a)}^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma_{\alpha}\right)-mc\right]\bar{\psi}(\xi)=0$$

$$\left[i\hbar\ \gamma^{(a)}\, e^{a}_{(\alpha)} e^{\alpha}_{(a)}\, D_a - mc\right] \bar{\psi}(\xi) = 0$$

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)} D_a - mc\right] \psi(x) = 0 \tag{4.88}$$

matriks kovarian Dirac memenuhi hubungan sebagai berikut

$$\gamma^{\alpha}\,\gamma^{\beta}\ + \gamma^{\beta}\,\gamma^{\alpha}\ = 2\ g^{\alpha\beta} \tag{4.89}$$

Dilakukan transformasi spinor dengan menggunakan transformasi Lorentz Λ maka didapatkan

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(x) \tag{4.90}$$

Dengan $S(\Lambda)$ adalah matriks dari grub Lorentz. Maka persamaan (4.88) menjadi

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)}\partial_a - mc\right] \psi(x) = 0$$

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)}\partial_a - mc\right] \psi'(x) S^{-}(\Lambda) = 0$$

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)}\partial_a S^{-1}(\Lambda) - mcS^{-1}(\Lambda)\right] \psi'(x) = 0$$

Pada bagian kiri dikalikan dengan $S(\Lambda)$

$$\left[i\hbar S(\Lambda)\gamma^{(a)}\partial_a S^{-1}(\Lambda) - mcS^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\right] \psi'(x) = 0$$

$$\left[i\hbar S(\Lambda)\gamma^{(a)} S^{-1}(\Lambda)\ \partial_a - mc\right] \psi'(x) = 0$$

Dilakukan Transformasi Lorentz Λ

$$\partial_{b'}(x) = \Lambda\ \partial_a \eta^{a}_{b}(x)$$

$$\partial_{b'}(x)(\Lambda^{-1})^{b}_{a} = \partial_a(x)$$

$$\partial_{b'}(x)(\Lambda^{-1})^{b}_{a} = \partial_a(x)$$

Maka didapatkan (Kokichi, 1998)

$$\left[i\hbar S(\Lambda)\gamma^{(a)} S^{-1}(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{b}_{a}\ \partial_{b'} - mc\right] \psi'(x) = 0 \tag{4.91}$$

Agar persamaan Dirac menjadi bentuk kovarian yang memenuhi transformasi Lorentz, maka harus mengikuti hubungan berikut ini

$$i\hbar S(\Lambda)\gamma^{(a)}S^{-1}(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{b}_{a} = \gamma^{(b)}$$

$$i\hbar S(\Lambda)\gamma^{(a)}S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{a}_{b}\gamma^{(b)} \tag{4.92}$$

dengan mempertimbangkan transformasi Lorentz infinitesimal (4.59) maka $S(\Lambda)$ harus ditulis dalam bentuk berikut ini

$$S(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{ab} \tag{4.93}$$

dari persamaan (4.92) dapat diturunkan dengan mengikuti kondisi berikut ini

$$i\hbar S(\Lambda)\gamma^{(a)}S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{a}_{b}\gamma^{(b)}$$

$$i\hbar\left(1 + \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{ab}\right)\gamma^{(a)}\left(1 - \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{ab}\right) = (1-\omega)^{a}_{b}\gamma^{(b)}$$

$$\frac{1}{2}\omega^{ab}\frac{1}{2}\gamma^{(a)}\,\gamma^{(b)} - \frac{1}{2}\omega^{ab}\frac{1}{2}\eta^{ab}\boldsymbol{I} = -\omega^{c}_{d}\gamma^{(d)}$$

$$\frac{1}{2}\omega^{ab}\left(\frac{1}{2}\gamma^{(a)}\,\gamma^{(b)} - \frac{1}{2}\eta^{ab}\boldsymbol{I}\right) = -\omega^{c}_{d}\gamma^{(d)}$$

$$\frac{1}{2}\omega^{ab}\left(\frac{1}{4}\left[2\gamma^{(a)}\,\gamma^{(b)} - 2\eta^{ab}\boldsymbol{I}\right]\right) = -\omega^{c}_{d}\gamma^{(d)}$$

$$\frac{1}{2}\omega^{ab}\left(\frac{1}{4}\left[\gamma^{(a)},\gamma^{(b)}\right]\right) = -\omega^{c}_{d}\gamma^{(d)}$$

$$\frac{1}{2}\omega^{ab}\left[\sigma^{ab},\gamma^{(c)}\right] = -\omega^{c}_{d}\gamma^{(d)} \tag{4.94}$$

Pada kasus spinor kondisi ini diatur dengan

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{4}\left[\gamma^{(a)},\gamma^{(b)}\right] \tag{4.95}$$

dari persamaan (4.80) didapatkan spin koneksi (Kokichi, 1998)

$$\Gamma_{\alpha}(x) = -\frac{1}{2}\sigma^{ab}g_{\mu v}e^{\mu}_{(a)}\nabla_{\alpha}e^{v}_{(b)}$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left[\gamma^{(a)},\gamma^{(b)}\right]\right)g_{\mu v}e^{\mu}_{(a)}\nabla_{\alpha}e^{v}_{(b)}$$

$$\Gamma_\alpha(x) = -\frac{1}{8}\left[\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\right] g_{\mu v} e^{\mu}_{(a)} \nabla_\alpha e^{v}_{(b)} \tag{4.96}$$

4.1.5 Persamaan Jenis Schrödinger

Diturunkan persamaan jenis Schrödinger dari persamaan kovarian Dirac (4.88) dengan menggunakan tetrad tertentu maka Metrik kovarian Dirac γ^α dapat ditulis dengan

$$\gamma^0 = \gamma^{(a)} e^0_{(a)} = \gamma^{(0)} \frac{c}{N} \tag{4.97}$$

$$\gamma^0 = \gamma^{(a)} e^i_{(a)} = -\gamma^{(0)} \frac{c}{N} N^i + \gamma^{(j)} e^i_{(j)} \tag{4.98}$$

dimana N adalah fungsi Lapse dan N^i adalah pergeseran vektor. Diganti D_a dengan $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha\right)$ maka persamaan kovarian Dirac pada persamaan (4.88) menjadi

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)} D_a - mc\right] \psi(x) = 0$$

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha\right) - mc\right] \psi(x) = 0$$

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\hbar\gamma^{(a)}\Gamma_\alpha - mc\right] \psi(x) = 0 \tag{4.99}$$

Persamaan (4.99) merupakan persamaan Dirac yang rungwaktunya sudah diubah kedalam ruangwaktu Kerr. Persamaan ini menjelaskan partikel fermion yang bergerak ruangwaktu melengkung serta mengalami rotasi. Jika dibandingkan dengan persamaan Dirac diruangwaktu datar perbedaanya terdapat pada suku Koneksi Γ_α menyebabkan Geometry ruangwaktunya melengkung. Koneksi Γ_α memiliki komponen spin koneksi yang sudah dihitung di Lampiran B. Komponen koneksi ini dihasilkan dari persamaan garis ds^2 pada Geometry Kerr. Jika

dilakukan aproksimasi dengan $\Gamma_\alpha = \Gamma_0$ maka akan didapatkan kembali persamaan Dirac diruangwaktu datar.

Agar diketahui pengaruh perubahan ruangwaktu Kerr pada persamaan Dirac maka perlu diaplikasikan persamaan ini kedalam sebuah kasus. Kasus yang digunakan dalam penelitian ini berupa interferometer neutron. Alat ini akan memisahkan gelombang neuton yang diberi gangguan berupa efek gravitasi dan rotasi pada salah satu gelombangnya. Kedua gelombang neutron kemudian dipertemukan kembali agar diketahui perbedaannya. Maka persamaan (4.99) perlu dipisahkan suku ruang dan waktunya agar didapatkan persamaan jenis Schrödinger.

$$\left[i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\gamma^{(0)}\Gamma_0 + i\hbar\gamma^{(i)}\frac{\partial}{\partial x^i} - i\hbar\gamma^{(i)}\Gamma_i - mc\right]\psi(x) = 0$$

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \left[-i\hbar\gamma^{(i)}\frac{\partial}{\partial x^i} + i\hbar\gamma^{(i)}\Gamma_i + i\hbar\gamma^{(0)}\Gamma_0 + mc\right] \tag{4.100}$$

Memasukkan persamaan (4.97) dan persamaan (4.98)

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)$$

$$= \left[-i\hbar\left(-\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i + \gamma^{(j)}e^i_{(j)}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right.$$

$$\left. + i\hbar\left(-\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i + \gamma^{(j)}e^i_{(j)}\right)\Gamma_i + i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\Gamma_0 + mc\right]$$

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)$$

$$= \left[\left(\gamma^{(0)}i\hbar\frac{c}{N}N^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma^{(j)}e^i_{(j)}i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right.$$

$$\left. + \left(-i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i\Gamma_i + i\hbar\gamma^{(j)}e^i_{(j)}\Gamma_i\right) + i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\Gamma_0 + mc\right]$$

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)$$

$$= \left[\left(\gamma^{(0)}i\hbar\frac{c}{N}N^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma^{(j)}e^i_{(j)}i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right.$$

$$\left. + \left(-i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i\Gamma_i + i\hbar\gamma^{(j)}e^i_{(j)}\Gamma_i\right) + i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\Gamma_0 + mc\right]$$

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\left(\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i i\hbar\Gamma_i\right)\right.$$

$$+ \left(-\gamma^{(j)}e^i_{(j)}i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma^{(j)}e^i_{(j)}i\hbar\Gamma_i\right) + i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{N}}\Gamma_0$$

$$\left. + mc\right]\psi$$

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} + i\hbar\Gamma_i\right)\right.$$

$$\left. + \gamma^{(j)}e^i_{(j)}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} + i\hbar\Gamma_i\right) + i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{N}}\Gamma_0 + mc\right]\psi$$

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\left(-\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i + \gamma^{(j)}e^i_{(j)}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} + i\hbar\Gamma_i\right)\right. \quad (4.101)$$

$$\left. + i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{N}}\Gamma_0 + mc\right]\psi$$

Dikalikan dengan $\gamma^{(0)}cN$ maka akan didapatkan persamaaan jenis Schrödinger yang memiliki suku terpisah antara bagian ruang dan waktunya

$$\left(\gamma^{(0)}cN\right)i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

$$= \left[\left(\gamma^{(0)}cN\right)\left(-\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^i + \gamma^{(j)}e^i_{(j)}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\hbar\Gamma_i\right) + \left(\gamma^{(0)}cN\right)i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{N}}\Gamma_0 + \left(\gamma^{(0)}cN\right)mc\right]\psi$$

$$\left(\gamma^{(0)}cN\right) i\hbar\gamma^{(0)}\frac{c}{N}\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

$$= \left[\left(\gamma^{(0)}cN\gamma^{(j)}e^{i}_{(j)} - \gamma^{(0)}cN\gamma^{(0)}\frac{c}{N}N^{i}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\hbar\Gamma_{i}\right) + \left(\gamma^{(0)}cN\right)i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{N}}\Gamma_{0} + \left(\gamma^{(0)}cN\right)mc\right]\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\left(\gamma^{(0)}\gamma^{(j)}cNe^{i}_{(j)} - N^{i}\right)(\bar{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\iota}} + i\hbar\Gamma_{i}) + i\hbar\Gamma_{0} + \gamma^{(0)}mc^{2}N\right]\psi \quad (4.102)$$

Persamaan (4.102) merupakan persamaan Dirak di ruangwaktu Kerr yang berbentuk persamaan jenis Schrödinger. Disebut sebagai persamaan jenis Schrödinger karena memisahkan suku ruang dan waktu yang memiliki kesamaan dengan persamaan Schrödinger. Perbedaan persamaan (4.120) dengan persamaan Dirac diruangwaktu datar terletak pada suku ruang dan waktunya. Pada persamaan Dirac diruangwaktu datar suku ruang dan waktu dijadikan satu pada matrik gamma γ^{μ} sedangkan pada persamaan Dirac diruangwaktu Kerr matrik gamma dipisah menjadi γ^{0} bagian waktu dan γ^{j} bagian ruangnya. Pada persamaan ini juga terdapat koneksi Γ_{i} dan Γ_{0} yang tersusun dari beberapa komponen (Lampiran B). Komponen ini muncul karena Geometry Kerr yang digunakan. Komponen ini yang menunjukkan bahwa ruangwaktu melengkung.

Persamaan Dirac diruangwaktu Kerr menggambarkan partikel fermion yang bergerak diruangwaktu melengkung dan berotasi. Sedangkan persamaan Dirac yang biasa hanya bergerak pada ruangwaktu datar. Ruangwaktu yang melengkung disebabkan oleh gravitasi. Pergerakan partikel diruangwaktu melengkung perlu diketahui pengaruhnya terhadap partikel fermion. Pada sub bab selanjutnya akan dicari pe

ngaruh ruangwaktu yang melengkung dan berotasi terhadap partikel fermion.

4.1.6 Hamiltonian Non-Relativitas

Pada kasus partikel dengan *rest energy* yang lebih besar dari energi kinetik. akan diperluas Hamiltonian yang bergantung pada $1/c$, karena rasio energi kinetik pada *rest energy* adalah p/mc jauh lebih kecil. Akan didapatkan Hamiltonian Non-relativitas dengan menggunakan transformasi Foldy-Wouthuysen-Tani. Spinor di dalam teori Dirac terdiri dari empat komponen. Transformasi ini mengubah empat komponen menjadi dua komponen fungsi gelombang pada kasus partikel spin $\frac{1}{2}$.

Eksperimen interferometer dilakukan di Bumi maka digunakan definisi

$$\omega_s = \omega_o = \omega \tag{4.103}$$

Sebelum menggunakan transformasi FWT akan didefinisikan ulang spinor dan Hamiltonian sebagai berikut

$$\psi' = \gamma^{\frac{1}{4}}\psi, \qquad H' = \gamma^{\frac{1}{4}} H \gamma^{-\frac{1}{4}} \tag{4.104}$$

dimana γ adalah determinan dari matrik spasial

$$\gamma = \det(\gamma_{ij}) \tag{4.105}$$

karena menghasilkan skalar invariant maka

$$(\psi, \varphi) \equiv \int \bar{\psi}\ \varphi \sqrt{\gamma} d^3x \tag{4.106}$$

definisi dari produk skalar sama seperti pada ruangwaktu datar dengan definisi ulang sebagai berikut

$$\langle \psi', \varphi' \rangle \equiv \int \sqrt{\overline{\psi'}}\ \varphi' d^3x \tag{4.107}$$

maka akan didapatkan Hamiltonian non-relativitas dengan menggunakan transformasi FWT pada Hamiltonian H'.

$$\bar{H}' = UH'U^{\dagger}$$

$$\bar{H}' = \begin{pmatrix} \bar{H}'_{+} & 0 \\ 0 & \bar{H}_{-} \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \tag{4.108}$$

spinor juga diturunkan pada kedua komponen spinor

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{4.109}$$

dimana Φ dan χ dinamakan komponen *large* dan *small*. Selanjutnya Hamiltonian didefinisikan dengan pengurangan

$$H_{+} \equiv \bar{H}_{+} - mc^2 \tag{4.110}$$

menggunakan definisi di atas akan didapatkan persamaan Schrödinger dengan koreksi relativitas umum untuk komponen *large*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = H_{+}\Phi$$

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \Bigg[& \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}}{2m} + m\phi - \boldsymbol{\omega}.(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}) \\ & + \frac{1}{c^2}\left(\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega.(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}) - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^4}{8m^3} + \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{3}{2m}\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}\right) \\ & + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3GM}{2mr^3}\boldsymbol{L}.\boldsymbol{S} + \frac{6GMR^2}{5r^5}\boldsymbol{S}.[\boldsymbol{r}\ x\ (\boldsymbol{r}x\boldsymbol{\omega})]\right)\Bigg]\Phi \end{aligned} \tag{4.111}$$

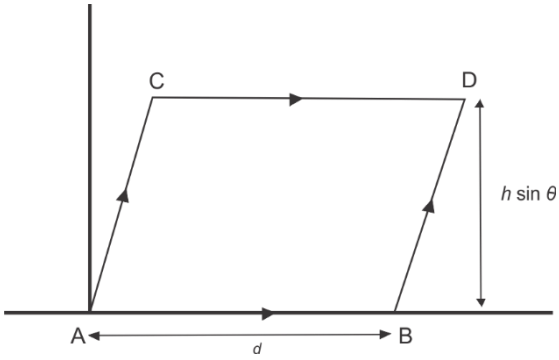
Dimana $\boldsymbol{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ adalah spin dari partikel fermion dengan matrik spin Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ (Lampiran C). Mengikuti prosedur kuantitas kanokial akan didapatkan Hamiltonian non relativitas dengan $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ (Lampiran D) (Kokichi, 1998)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi' = \left[\frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}}{2m} + m\phi - \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} + \frac{1}{c}\left(\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega\cdot\boldsymbol{L} - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{4}}}{8m^3} + \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{3}{2m}\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}\right)\right] \quad (4.112)$$

Hamiltonian diatas terdiri dari dua jenis Hamiltonian yaitu Hamiltonian utama dan Hamiltonian pengganggu. $\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}/2m$ merupakan Hamiltonian utama dengan bentuk yang sama dengan Hamiltonian pada persamaan Schrödinger sedangkan sisanya merupakan Hamiltonian pengganggu. Jika dilihat dari jenis Hamiltonian diatas merupakan kombinasi dari beberapa jenis Hamiltonian seperti $\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}/2m$ dan $m\phi$ dalam bentuk fisika klasik. Hamitlonian $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ dalam bentuk kuantum dan sisanya merupakan Hamiltonian dalam bentuk relativistik.i888

4.1.7 Efek Gravitasi Pada Interferometer Neutron

Penelitian ini memerlukan alat untuk mengetahui pengaruh gravitasi dari persamaan (4.122). Interferometer neutron adalah jenis interferometer yang khas. Jenis interferometer ini mampu mendeteksi ide dasar dari mekanik kuantum di dalam laboratorium. Pada penelitian ini menggunakan model interferometer yang disederhanakan. Interferometer neutron dibuat dari kristal tunggal. Interferometer ini diletakkan di bumi maka beberapa besaran nilainya diambil dari bumi seperti rotasi dan gaya gravitasi yang bekerja di bumi. Bentuk skemanya seperti pada gambar berikut



Gambar 4.1 Skema lintasan Interferometer Neutron

Interferometer neutron menggambarkan pergerakan partikel fermion melalui ruangwaktu yang melengkung dan berotasi. Ruangwaktu yang melengkung disebabkan oleh gravaitasi. Gravitasi dan rotasi ini berupa gravitasi dan rotasi bumi dikarenakan interferometer neutron diletakkan di bumi dan pengamatannya juga dilakukan di bumi. Ruangwaktu yang melengkung dan berotasi akan mempengaruhi pergerakan partikel fermion.

Cara kerjanya mula-mula sinar neutron yang mewakili partikel fermion datang melalui titik A kemudian dipisahkan menjadi dua bagian sinar yang koheren. Pemisahan ini terjadi akibat hamburan bragg dari bidang atom yang tegak lurus terhadap permukaan kristal. Sinar yang melalui titik B dan C akan diberi pengaruh gravitasi dan rotasi. Kemudian pada titik B dan C bagian sinar dialihkan arahnya untuk bertemu kembali di titik D. Pada titik pertemuan inilah akan dilihat kedua sinar apakah sinar tetap sefase bergeser fasenya atau saling meniadakan. (Kokichi, 1998).

Hamiltonian non-relativitas pada persamaan (4.112) dapat dipisahkan menjadi

$$H_+ = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 \qquad (4.113)$$

Jika dikelompokkan suku Hamiltoniannya

$$H_+ = H_0 + \sum_k \Delta H_k \tag{4.114}$$

Hamiltonian persamaan (4.114) terdiri dari dua jenis Hamiltonian yaitu hamiltonian utama dan Hamiltonian pengganggu. Hamiltonian pengganggun mucul karena perubahan ruangwaktu didalam persamaan Dirac. Hamiltonian total dari persamaan Dirac di ruangwaktu Kerr terdiri dari beberapa suku

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi' = \left[\frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}}{2m} + m\phi - \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} + \frac{1}{c}\left(\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega\cdot\boldsymbol{L} - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{4}}}{8m^3} + \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{3}{2m}\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}\right)\right] \tag{4.115}$$

Jika menggunakan fungsi gelombang Φ_0 pada persamaan Schrödinger dapat diselesaikan dengan persamaan berikut

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0 = H_0\,\Phi_0 \tag{4.116}$$

Hamiltonian total pada persamaan jenis Schrödinger (4.112) dapat diselesaikan dengan menggunakan bentuk fungsi gelombang

$$\Phi = \Phi_0 \exp\left(i\sum_k \beta_k\right) \tag{4.117}$$

dimana β_k mengandung Hamiltonian dari suku pengganggu

$$\beta_k = \frac{1}{\hbar}\int^t \Delta H_k dt \tag{4.118}$$

β_k adalah fase gelombang yang masuk kedalam interfeometer. Fase gelombang menggambarkan jumlah putaran yang telah dilakukan atau sejauh mana gelombang menjalar. $\Delta\beta_k$ adalah beda fase pada titik D. Beda fase adalah beda antara dua gelombang atau lebih sepanjang sumbu umum. Dua gelombang

neutron yang melewati lintasan ABD dan lintasan ACD bertemu pada titik D. Pada titik pertemuan di D dapat dihitung pergeseran fasenya sebagai berikut

$$\Delta\beta_k = \beta_{k(ACD)} - \beta_{k(ABD)} = -\frac{1}{\hbar}\oint \Delta H_k dt \tag{4.119}$$

setiap suku Hamiltonian dari persamaan (4.115) akan dihitung pergeseran fasenya menggunakan persamaan (4.119). Kemudian akan dievaluasi bagian yang menyebabkan terjadinya pergeseran fase (Kokichi, 1998).

H_0 merupakan Hamiltonian untuk partikel non-relativistik yang menyebar di ruangwaktu datar

$$H_0 = \frac{\bar{p}^2}{2m} \tag{4.120}$$

dimana $\bar{p}^2$ adalah momentum partikel fermion dan m adalah massa partikel fermion. Suku ini berbentuk Hamiltonian klasik. Partikel berada diruangwaktu datar maka tidak terjadi perbedaan fase $\Delta H_0 = 0$. Nilai pergeseran fasenya bernilai nol.

$$\Delta\beta_0 = \beta_{0(ACD)} - \beta_{0(ABD)} = -\frac{1}{\hbar}\oint \Delta H_0 dt$$

$$\Delta\beta_0 = -\frac{1}{\hbar}\oint \Delta H_0 dt$$

$$\Delta\beta_0 = 0 \tag{4.121}$$

Suku Hamiltonian pertama berupa potensial gravitasi $\Delta H_1 = m\phi$. Hamiltonian ini merupakan Hamiltonian klasik dengan ϕ adalah potensial Newtonian gravitasi $\phi = -GM/r$ dan m adalah massa partikel. Hamiltonian ini memiliki nilai yang sama dengan potensial gravitasi Newtonian $m\phi = V_g$. Jika

dimasukkan suku Hamiltonian pertama kedalam persamaan (4.199) maka menghasilkan pergeseran fase sebesar

$$\Delta\beta_1 = \beta_{1(ABD)} - \beta_{1(ACD)} \tag{4.122}$$

dimasukkan nilai fasenya dengan $\beta_{1(ABD)}$ yang mengalami variasi rotasi sebesar φ

$$\begin{aligned}
\Delta\beta_1 &\cong \frac{1}{2\pi\hbar}\left[V_g(R + d_2 \sin\varphi) - V_g(R)\right]\frac{m\lambda d_1}{\hbar} \\
&\cong \frac{1}{2\pi\hbar}\left[V_g(R + d_2 \sin\varphi)\frac{m\lambda d_1}{\hbar} - V_g(R)\frac{m\lambda d_1}{\hbar}\right] \\
&\cong \frac{1}{2\pi}\left[\left(V_g R\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2} + V_g d_2 \sin\varphi\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2}\right) - V_g(R)\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2}\right] \\
&\cong \left[\frac{1}{2\pi}\left(V_g R\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2} - V_g(R)\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2} + \frac{m(m\ g)d_1 d_2\lambda}{\hbar^2}\sin\varphi\right)\right] \\
\Delta\beta_1 &\cong \frac{m^2 gA\lambda}{2\pi\hbar^2}\sin\varphi
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Dengan $m = 1.6749 \times 10^{-27} kg$ adalah massa dari partikel neutron, g adalah percepatan gravitasi, $A = d_1 d_2 = 0.8864\, m^2$ adalah luas dari jajargenjang, $\lambda = 2.8 \times 10^{-14}\, m$ adalah panjang gelombang de Broglie , dan φ adalah sudut rotasi dari interferometer relatif dari bidang horizontal dengan $\varphi = 90^{\circ}$. Pada bagian ABD dipengaruhi oleh efek rotasi φ pada interferometer. Kedua gelombang dipengaruhi oleh gravitasi Newtonian V_g.

Jika dimasukkan nilai dari eksperimen maka akan didapatkan besaran fase sebesar

$$\Delta\beta_1 \cong \frac{m^2 gA\lambda}{2\pi\hbar^2}\sin\varphi$$

$$\Delta\beta_1 \cong \frac{(1.6749 \times 10^{-27})^2 \times 9.806 \times 0.8864 \times 2.8 \times 10^{-14}}{2 \times 3.14 \times 1.05457^{-34}}\sin 90$$

$$\Delta\beta_1 \cong \frac{68.2743 \times 10^{-68}}{6.6227 \times 10^{-34}}$$

$$\Delta\beta_1 \cong 1.03091 \times 10^{-33} \quad (4.124)$$

Persamaan (4.119) akan bernilai nol jika tidak terjadi pergeseran fase karena gelombang ACD dan ABD memiliki fase yang sama. Namun pada persamaan (4.123) menghasilkan nilai tidak nol, maka menunjukkan bahwa fungsi gelombang mengalami pergeseran fase. Pergeseran fase gelombang disebabkan efek gravitasi yang ditunjukkan oleh variabel V_g yang merupakan potensial gravitasi. Pada fungsi gelombang ABD diberikan variasi berupa rotasi. Potensial gravitasi dan variasi rotasi berpengaruh terhadap pergeseran fase gelombang pada titik D yang dibuktikan dengan perbedaan vektor gelombang ($\Delta\beta_k = \beta_{k(ACD)} - \beta_{k(ABD)}$). Efek gravitasi dan efek rotasi mewakili ruang waktu Kerr yang telah dimasukkan didalam persamaan Dirac (4.102). Efek ini muncul dari pergeseran fase yang pertama kali diprediksi oleh Overhause dan Colella. (Overhauser & Colella, 1974b)

Suku Hamiltonian kedua $\Delta H_2 = \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{L}$ yang menggambarkan kopling diantara rotasi bumi ($\boldsymbol{\omega}$) dan momentum sudut ($\boldsymbol{L}$). Pergeseran fase dihitung menggunakan persamaan (4.119).

$$\beta_2 = \frac{1}{\hbar}\int \omega L_Z\, dt = \frac{1}{\hbar}\int \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}\, dt \quad (4.125)$$

Dimana rotasi bumi $\boldsymbol{\Omega} = (0,0,\omega)$ dan $\boldsymbol{L} = \left(L_x, L_y, L_z\right)$ adalah momentum sudut klasik dengan $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$. Pergeseran fasenya adalah

$$\Delta\beta_2 = \beta_{1(AcD)} - \beta_{1(ABD)}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{1}{\hbar}\oint \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{L}\, dt$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{1}{\hbar}\oint \boldsymbol{\Omega} \,.\, (\boldsymbol{mr} \times \dot{\boldsymbol{r}})\, dr$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{m}{\hbar}\oint \boldsymbol{\Omega}.\, (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\, dr$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{A} \tag{4.126}$$

dengan $\boldsymbol{A}$ adalah luasan jajar genjang dari loop interferometer.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} \tag{4.127}$$

Persamaan diatas menggunakan integral tertutup karena dimulai dan diakhiri pada titik yang sama. $\boldsymbol{A}$=0.8864 m^2 luas interferometer yang berbentuk jajargenjang, $\boldsymbol{\Omega}$ rotasi bumi. Jika dimasukkan nilai pada persamaan (4.126) maka akan didapatkan nilai fase sebesar

$$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\frac{2\pi}{T} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2(1.6749 \times 10^{-27})}{1.05457^{-34}}\frac{2(3.14)}{3.15 \times 10^{-7}} \cdot 0.8864$$

$$\Delta\beta_2 = 5.631229 \tag{4.128}$$

Persamaan (4.126) menghasilkan besaran nilai, menunjukkan bahwa terjadi pergeseran fase pada Hamiltonian kedua. Pergeseran fase pada persamaan (4.126) pertama kali diturunkan oleh Lorne (Page, 1975) Pergeseran fase ini disebabkan oleh gaya inersial oleh karena itu pergeseran fase tidak bergantung pada gravitasi. Pergeseran fase ini disebabkan oleh rotasi bumi yang diwakili oleh variable $\boldsymbol{\Omega}$ pada persamaan (4.126). Pembuktian efek ini dilakukan oleh eksperimen Werner dkk.(Werner dkk., 1979). dan beberapa penelitian menggunakan metode yang lain.(Anandan, 1977; Dresden & Yang, 1979; Sakurai, 1980)

Selanjutnya suku Hamiltonian ketiga yang berbentuk kuantum relativistic dengan

$$\Delta H_3 = \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\,\omega.\boldsymbol{L} \tag{4.129}$$

Kontribusi ketiga muncul dari efek relativitas umum dikenal dengan efek Lense-Thirring. Dimasukkan persamaan (4.126) kedalam persamaan (4.119) untuk menghitung pergeseran fasenya

$$\beta_k = \frac{1}{\hbar}\int^{t} \Delta H_k dt$$

$$= -\frac{1}{\hbar}\int^{t}\left(\frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}\right)dt \tag{4.130}$$

pergeseran fasenya adalah

$$\Delta\beta_3 = \beta_{3(ACD)} - \beta_{3(ABD)}$$

$$= -\frac{4GMR^2}{5c^2\hbar}\oint\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times dr)}{r^3}$$

dimasukkan nilai $r = (\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}')$

$$\Delta\beta_3 = -\frac{4GMR^2}{5c^2\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot\oint\frac{(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}')\times dr'}{|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$= -\frac{2MR^2}{5c^2\hbar R^3}\boldsymbol{\omega}\cdot\left[\oint\boldsymbol{r}'\times dr' - \mathbf{3}\oint\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times dr'\right]$$

$$= \frac{2mr_g}{5\hbar R}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A} - \frac{2mr_g}{5\hbar R}\boldsymbol{\omega}\cdot 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{A}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

$$= \frac{2mr_g}{5\hbar R}\boldsymbol{\omega}\cdot\left[\boldsymbol{A} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\,\boldsymbol{A}\right]$$

$$= \frac{2mr_g}{5\hbar R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A}$$

$$= \frac{2m}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A} \tag{4.131}$$

Jika diasumsikan bumi adalah bola yang memiliki densitas seragam dengan

$$\boldsymbol{J} = \frac{2}{5} MR^2 \Omega \tag{4.132}$$

dan

$$\Delta\beta_3 = \frac{2m}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{2m\boldsymbol{\omega}}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{A} - \frac{3}{\boldsymbol{\omega}}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\boldsymbol{A}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\Delta\beta_2\frac{r_g}{5R}\left[1 - \frac{3}{\boldsymbol{\omega}}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\boldsymbol{A}\right] \tag{4.133}$$

Jika dihubungkan antara $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{A}$ maka didapatkan

$$\Delta\beta_3 = -\frac{1r_g}{5R}\Delta\beta_2 \quad \text{jika } \boldsymbol{R} \text{ tegak lurus pada } \boldsymbol{A} \tag{4.134}$$

$$\Delta\beta_3 = -\frac{2r_g}{5R}\Delta\beta_2 \quad \text{jika } \boldsymbol{R} \text{ sejajar pada } \boldsymbol{A} \tag{4.135}$$

Dimana $\boldsymbol{R}$ adalah vektor posisi interferometer dari pusat bumi dan R adalah jari-jari bumi, ω adalah vektor momentum sudut dari bumi, dan $r_g \equiv 2GM/c^2 = 8.87 \times 10^{-3} m$ adalah radius Schwarzschild dari bumi. Dalam kasus ini $\boldsymbol{R} = R$ memiliki nilai yang sama. Perbedaan fase (4.131) diturunkan oleh Kurowai dkk.(Kuroiwa dkk., 1993). Pada kasus $\boldsymbol{R}$ tegak lurus pada $\boldsymbol{A}$ dimasukkan masing-masing nilainya sesuai dengan nilai eksperimen maka didapatkan nilai pergeseran fase sebesar

$$\Delta\beta_3 = -\frac{1r_g}{5R}\Delta\beta_2$$

$$\Delta\beta_3 = -\frac{10^{-9}}{5} \times 5.631229$$

$$\Delta\beta_3 = -1.0726 \times 10^{-9} \tag{4.136}$$

Persamaan (4.136) mengandung efek Sagnac $\Delta\beta_2$ yang disebabkan oleh rotasi dan radius Schwarzschild $r_g \equiv 2GM/c^2$. Pergeseran fase yang terjadi disebabkan oleh rotasi dan gravitasi. Dua variabel ini memiliki peran yang sama seperti pada

Hamiltonian pertama. Sampai saat ini, efek Lense-Thirring belum teramati dalam eksperimen interferometer mana pun. Hal ini disebabkan karena nilai pergeseran fasenya yang cukup kecil. Nilai negatif menunjukan bahwa fase gelombang pertama bergerak lebih jauh dibandingkan fase gelombang kedua maka ketika dihitung pergeseran fasenya bernilai negatif.

Hamiltonian keempat $\Delta H_4 = \bar{\boldsymbol{p}}^4/8m^3c^2$ adalah murni dari koreksi relativitas khusus pada energi kinetic. Hamiltonian ini mirip dengan Hamiltonian pada energi kinetic (H_0). Karena bagian ini bersifat independen dari lintasan pergeseran fase di dalam eksperimen interferometer maka tidak menghasilkan efek apapun. Nilai pergeseran fasenya bernilai nol.

$$\beta_4 = \frac{1}{\hbar}\int^{t} \Delta H_4 dt$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\hbar}\int_{t}^{t} \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^4}{8m^3c^2}\, dt$$

$$\beta_4 = 0 \tag{4.137}$$

Koreksi kelima dengan Hamiltonian $\Delta H_5 = m\phi^3/2c^2$ akan diperoleh pergeseran fase seperti pada koreksi pergeseran merah pada energi potensial. Dimasukkan H_5 kedalam persamaan (4.120) untuk menghitung pergeseran fasenya

$$\beta_5 = \frac{1}{\hbar}\int^{t} \Delta H_5 dt$$

$$= \frac{1}{\hbar}\int^{t} \frac{m\phi^3}{2c^2} dt \tag{4.138}$$

Maka pergeseran fasenya

$$\Delta\beta_5 = \beta_{5(ACD)} - \beta_{5(ABD)}$$

$$= -\frac{1}{2R}\frac{2GM}{c^2}\frac{m^2 gA\lambda}{2\pi\hbar^2}\sin\theta$$

$$= -\frac{1r_g}{2R}\Delta\beta_1 \tag{4.139}$$

$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2} = 8.87 \times 10^{-3} m$ adalah radius Schwarzschild dari bumi dengan objek bumi, R adalah jari jari bumi , dan $\Delta\beta_1$ pergeseran fase yang disebebak oleh H_1yang telah dihitung diatas. Jika nilai masing masing variabel dimasukkan akan didapatkan nilai pergeseran fase sebesar.

$$\Delta\beta_5 = -\frac{1r_g}{2R}\Delta\beta_1$$

$$\Delta\beta_5 = -\frac{1}{2(6.371 \times 10^6)} \times 8.87 \times 10^{-3} \times (1.03091 \times 10^{-33})$$

$$\Delta\beta_5 = -0.71764 \times 10^{-39} \tag{4.140}$$

Nilai negatif menunjukan bahwa fase gelombang pertama bergerak lebih jauh dibandingkan fase gelombang kedua maka ketika dihitung pergeseran fasenya bernilai negatif.

Koreksi keenam dengan Hamiltonian $\Delta H_6 = 3\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}/2mc^2$ menghasilkan pergeseran fase mirip dengan koreksi pergeseran merah pada energi kinetic $v/c = \Delta\lambda/\lambda_0$. Dimasukkan H_6 kedalam persamaan (4.119) untuk menghitung pergeseran fasenya

$$\beta_6 = \frac{1}{\hbar}\int^t \frac{3\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}}{2mc^2}dt$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\hbar}\int^t \frac{m^2 v^2\phi}{mc^2}dt \tag{4.141}$$

Maka pergeseran fasenya

$$\Delta\beta_6 = \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{\hbar}\int^{t} m\phi\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{m^2 gA\lambda}{2\pi\hbar^2}\sin\theta\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 \Delta\beta_1 \qquad (4.142)$$

dengan λ_c adalah panjang gelombang Compton. Dimasukkan masing-masing nilai agar diketahui nilai pergeseran fasenya. Panjang gelombang Compton dari partikel neutron adalah

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{1.6749 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{8}} = 1.318686 \times 10^{-15}$$

Maka Panjang gelombang

$$\Delta\beta_6 = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 \Delta\beta_1$$

$$\Delta\beta_6 = \frac{3}{2}\left(\frac{1.318686 \times 10^{-15}}{2.8 \times 10^{-14}}\right)^2 (10.3091 \times 10^{-34})$$

$$\Delta\beta_6 = 7.2827496 \times 10^{-36} \qquad (4.143)$$

Dua koreksi akhir di atas memiliki sudut rotasi yang bergantung pada $\Delta\beta_1$. Oleh karena itu, sesuai dengan eksperimen yang telah dilakukan hanya pada sudut rotasi yang berbeda saja efek pergeseran terjadi. Efek ini tidak dapat dipisahkan dari efek Newtonian. Dengan mempertimbangkan koreksi putaran, jika putaran partikel konstan sepanjang lintasan dalam interferometer, maka $-\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{S}$ tidak menghasilkan beda fasa.

Tabel 4.1 Nilai Pergeseran Fase Pada Persamaan Dirac

Hamiltonian	Pergeseran fase	Nilai Pergeseran Fase

$H_0 = \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^2}{2m}$	$\Delta\beta_0 = 0$	$\Delta\beta_0 = 0$
$H_1 = m\phi$	$\Delta\beta_1 = \frac{m^2 g A \lambda}{2\pi\hbar^2}\sin\varphi$	$\Delta\beta_1 = 1.03091 \times 10^{-33}$
$H_2 = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$	$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{A}$	$\Delta\beta_2 = 5.631229$
$H_3 = \frac{4GMR^2}{5cr^3}$	$\Delta\beta_3 = \frac{2m}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A}$	$\Delta\beta_3 = -1.0726 \times 10^{-9}$
$H_4 = \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^4}{8cm^3}$	$\Delta\beta_4 = 0$	$\Delta\beta_4 = 0$
$H_5 = \frac{1}{2c}m\phi^2$	$\Delta\beta_5 = -\frac{1r_g}{2R}\Delta\beta_1$	$\Delta\beta_5 = -0.71764 \times 10^{-39}$
$H_6 = \frac{3}{2mc}\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}$	$\Delta\beta_6 = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2\Delta\beta_1$	$\Delta\beta_6 = 7.2827496 \times 10^{-36}$

Nilai pergeseran fase diatas dapat dibagi menjadi dua jenis berdasarkan penyebabnya yaitu pergeseran fase yang disebabkan oleh efek gravitasi dan pergeseran fase yang disebabkan oleh rotasi. Munculnya dua pengaruh ini dikarenakan ruangwaktu yang melengkung dan berotasi. Pada penelitian ini hanya fokus pada pengaruh efek gravitasinya saja. Maka hanya pada Hamiltonian $H_1, H_5,$ dan H_6 yang muncul pengaruh gravitasi sisanya dipengaruhi oleh rotasi.

Meskipun nilai pergeseran fase sangat kecil tapi nilai ini sudah cukup menunjukkan bahwa gravitasi dapat mempengaruhi partikel fermion. Kemudian hasil perhitungan pergeseran fase diatas akan dibandingkan dengan nilai

pergeseran fase dari persamaan Klein Gordon. Perbandingan ini sebagai dasar untuk menentukan persamaan yang mengalami pengaruh gravitasi paling besar.

4.2 PERSAMAAN KLEIN GORDON

4.2.1 Persamaan Klein Gordon di Ruangwaktu Kerr

Penelitian ini menggunakan persamaan Klein Gordon di dalam ruangwaktu yang melengkung dan berotasi. Ruangwaktu yang melengkung disebabkan oleh efek gravitasi. Ruangwaktu pada persamaan Klein Gordon akan diganti dengan ruang waktu Kerr yang menggambarkan ruangwaktu melengkung dan berotasi.

Persamaan Klein Gordon menjelaskan partikel Boson yang memiliki spin nol. Jika ruangwaktu dari persamaan Klein Gordon diganti dengan ruangwaktu Kerr maka akan mempengaruhi partikel Boson. Untuk mengetahui pengaruhnya maka akan diturunkan terlebih dahulu bentuk persamaan Klein Gordon di ruangwaktu Kerr kemudian persamaan tersebut akan diaplikasikan pada interferometer Neutron. Dimulai dengan persamaan kovarian Lorens dari persamaan Klein Gordon

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mu}\boldsymbol{\nabla}_{\mu}\phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{2}\phi = 0 \tag{4.144}$$

Persamaan Klein Gordon dianggap sederhana dan kurang tepat karena kegagalannya untuk menjelaskan fungsi gelombang pada probabilitas tanpa memperkenalkan prosedur dari kuantitas kedua. Pada pembatasan non relativitas, ketidak konsistenan pada interpretasi probabilitas dapat diselesaikan dengan cara berikut. Mempertimbangkan ruangwaktu untuk menyederhanakan persamaannya. Maka memindahkan masa energi diam dari Hamiltonian yang didefinisikan fungsi gelombang non relativistik ψ sebagai berikut (Kuroiwa dkk., 1993):

$$\Phi = \psi\, e^{\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)} \tag{4.145}$$

dimana $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$

$$\boldsymbol{\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \tag{4.146}$$

Maka persamaan (4.144) menjadi

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2i\frac{m}{\hbar}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla^2\phi = 0$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi\, e^{\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)}}{\partial t^2} + 2i\frac{m}{\hbar}\frac{\partial\psi\, e^{\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)}}{\partial t} + \nabla^2\psi\, e^{\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)} = 0$$

Dengan $mc^2 = 0$ pada kasus *rest energy* maka

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + 2i\frac{m}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla^2\psi = 0 \tag{4.147}$$

dimana $\boldsymbol{\nabla^2}$ operator Lapasian tiga dimensi. Orde relatif suku pertama pada persamaan (4.147) yang lain adalah $O((v/c)^2)$, dimana v menunjukkan karakteristik kecepatan dari paket gelombang atau setara dengan $O((\lambda_0/\lambda)^2)$. Dimana λ_0 adalah Panjang gelombang Compton dan λ adalah Panjang gelombang de Broglie dari partikel (Kuroiwa dkk., 1993).

Interferometer neutron digunakan oleh Colella, Overhause, dan Wearner menggunakan pendekatan non relativitas yang memberikan deskripsi yang cukup akurat sehingga $O((v/c)^2)$ dapat diabaikan. Hal ini sesuai dengan penggambaran keadaan energi negatif serta memungkinkan untuk memiliki interpretasi probabilitas fungsi gelombang ψ. Oleh karena itu persamaan (4.147) dapat reduksi menjadi persamaan Schrödinger biasa (Kuroiwa dkk., 1993).

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + 2i\frac{m}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla^2\psi = 0$$

$$2i\frac{m}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla^2\psi=0$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{4.148}$$

dimulai dengan persamaan Klein Gordon dengan pendekatan mengikuti persamaan diatas maka efek gravitasi dan rotasi dari Kerr dimasukkan ke dalam persamaan (4.144) melalui metrik. (Kuroiwa dkk., 1993).

Diasumsikan medan gravitasi eksternal dari bumi dengan metrik Kerr. Pada koordinat Boyer-Lindquist diberikan persamaan garis

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & -\frac{\Delta}{\rho^2}(cdt-a\sin^2\theta\, d\phi)^2+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\phi-acdt]^2 \\ & +\rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta}+d\theta^2\right) \end{aligned} \tag{4.149}$$

diuraikan suku yang memiliki pangkat

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & -\frac{\Delta}{\rho^2}(c^2dt^2-2c\,a\sin^2\theta\, dtd\phi+a^2\sin^4\theta\, d\phi^2) \\ & +\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a)^2d\phi^2-2(r^2+a^2)d\phi acdt \\ & +a^2c^2dt^2)+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2d\theta^2 \end{aligned}$$

dikelompokkan setiap sukunya

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \left(\left(-\frac{\Delta}{\rho^2}+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}a^2\right)c^2dt^2\right. \\ & \left.+\left(\frac{\Delta}{\rho^2}2c\,a\sin^2\theta-2\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2)ac\right)dtd\phi\right) \\ & +\left(-\frac{\Delta}{\rho^2}a^2\sin^4\theta+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2)^2\right)d\phi^2+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 \\ & +\rho^2d\theta^2 \end{aligned}$$

$$ds^2 = \left(\left(\frac{-\Delta + \sin^2\theta}{\rho^2}a^2\right)c^2dt^2 + \frac{2a\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\Delta - (r^2+a^2)\right)cdtd\phi\right) + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(-\Delta a^2\sin^2\theta + (r^2+a^2)^2)d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$ds^2 = \left(\left(\frac{-\Delta + \sin^2\theta\, a^2}{\rho^2}\right)c^2dt^2 + \frac{2a\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{2GMr}{c^2}\ cdtd\phi\right) + \Sigma^2\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (4.150)$$

dimana $\Delta \equiv r^2 - 2(GM/c^2) + a^2$, M adalah massa dari bumi, $\rho^2 \equiv r^2a^2\cos^2\theta$, dan a adalah parameter Kerr yang berhubungan dengan momentum sudut J dan mass bumi $a = J/Mc$. G adalah konstanta gravitasi. Bentuk operator d'Alembertian di dalam koordinat Boyer-Linduquist dapat dihitung dengan bentuk

$$\square_g = \frac{1}{|g|^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^{\boldsymbol{a}}}\left(|g|^{1/2}g^{\boldsymbol{ab}}\frac{\partial}{\partial x^{\boldsymbol{b}}}\right) \quad (4.151)$$

dimana $|g|$ merupakan $|\det g|$ maka didapatkan

$$\square_g = \frac{\sigma^2}{\Delta\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4aMr}{\Delta\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial\varphi} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\rho^2 - 2Mr}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (4.152)$$

dimana kondisi saat ini GM/rc^2 dan a/r memiliki yang cukup kecil dan keduanya merupakan orde yang tinggi maka dapat diabaikan. Maka bentuk Operator Laplacian tiga dimensi berupa

$$\nabla^2 = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial r}\right) - \left(\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\rho^2}{\Delta\rho^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$-\frac{2Mr}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$-\frac{2Mr}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$-\frac{2Mr}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad (4.153)$$

$$-\frac{2Mr}{(r^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\sin^2\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Dimasukkan persamaan (4.153) kedalam persamaan (4.148) maka persamaan Klein Gordon menjadi

$$\frac{i\hbar\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{r^2\hbar^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]\psi \qquad (4.154)$$

$$-\frac{GMm}{r}\psi + \frac{2GMa}{r^3c}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\psi$$

dengan m adalah massa dari partikel Boson. Persamaan diatas merupakan persamaan Klein Gordon di ruangwaktu Kerr. Dengan menggunakan pendekatan non relativistik maka bentuk persamaan diatas hampir sama dengan persamaan Schrödinger dengan suku ruang dan waktunya yang dipisahkan.

Perbedaan antara persamaan Klein Gordon di ruangwaktu datar dengan persamaan Klein Gordon di ruangwaktu Kerr terletak pada metriknya. Metrik ini yang mewakili bentuk dari ruangwaktu. Pada persamaan Klein Gordon diruangwaktu datar (2.16) bentuk ruangwaktunya diwakili oleh metrik $\boldsymbol{\eta^{\mu}}$. Sedangkan pada persamaan Klein Gordon di ruangwaktu Kerr struktur ruangwaktu yang melengkung dan rotasi diwakili oleh suku berikut

$$\frac{i\hbar\partial\psi}{\partial t} = \frac{GMm}{r}\psi + \frac{2GMa}{r^3c}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\psi$$

Perubahan bagian ruangwaktu akan mempengaruhi pergerakan partikel Boson. Partikel Boson akan mengalami efek gravitasi dan rotasi.

Didefinisikan L^2 dan L_z adalah operator momentum sudut dari partikel yang bergantung pusat bumi.

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{4.155}$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{4.156}$$

Dilakukan transformasi koordinat $\phi \to \phi - \omega t$, dengan ω adalah kecepatan sudut dari bumi maka persamaan (4.154) menjadi

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2\hbar^2}\right]\psi - \frac{GMm}{r}\psi - \omega L_z\psi \\ & + \frac{2GMa}{r^3c}L_z\psi \end{aligned} \tag{4.157}$$

Agar diketahui pengaruh dari gravitasi dan rotasi pada partikel Boson maka persamaan Klein Gordon (4.157) diaplikasikan pada interferometer neutron. Pengamatan ini dilakukan di bumi maka bentuk persamaan yang digunakan menggunakan persamaan jenis Schrödinger (Kuroiwa dkk., 1993)

4.2.2 Efek Gravitasi Pada Interferometer Neutron

Pengaruh efek gravitasi pada persamaan Klein Gordon dapat dilihat dengan cara mengaplikasikan persamaan (4.157) kedalam interferometer neutron. Persamaan (4.157) adalah persamaan jenis Schrödinger yang bagian ruang dan waktunya terpisah. Pada bagian kanan merupakan suku Hamiltonian. Setiap Hamiltonian ini akan digunakan untuk menghitung pergeseran fase agar diketahui pengaruh ruangkwaktu Kerr pada persamaan Klein Gordon. Hamiltonian dari persamaan (4.157) dapat dibagi menjadi empat bagian

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 \tag{4.158}$$

Setiap Hamiltonian memiliki nilai masing-masing

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2mr^2}\right) + \left(-\frac{GMm}{r}\right) + (-\omega L_z) + \left(\frac{2GMa}{r^3c}L_2\right) \tag{4.159}$$

Persamaan (4.157) terdiri dari dua jenis Hamiltonian yaitu Hamiltonian utama dan Hamiltonian pengganggu. Dimana H_0 adalah Hamiltonian utama untuk partikel bebas yang bergerak diruangwaktu datar maka Hamiltonian ini tidak mempengaruhi fase gelombang. (Kuroiwa dkk., 1993)

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{4.160}$$

Sedangkan untuk Hamiltonian sisanya merupakan Hamiltonian pengganggu yang berpengaruh pada fase gelombang yang masuk kedalam Interferometer Neutron.

$$H_1 = -\frac{GMm}{r} \equiv V_g \tag{4.161}$$

$$H_2 = -\omega L_z \tag{4.162}$$

$$H_3 = \frac{2GMa}{r^3 c} L_2 \tag{4.163}$$

Persamaan Klein Gordon diruangwaktu Kerr menghasilkan tiga jenis Hamiltonian pengganggu. Jika dilihat bentuknya memiliki kesamaan dengan Hamiltonian dipersamaan Dirac diruangwaktu Kerr. Maka untuk mengetahui pengaruh efek gravitasi pada persamaan Klein Gordon digunakan cara yang sama dengan persamaan Dirac diruangwaktu Kerr.

ψ_0 adalah solusi untuk Hamiltonian utama H_0 sedangkan untuk solusi Hamiltonian H total adalah

$$\psi = \psi_0 \, e^{[-i(\beta_1+\beta_2+\beta_3)]} \tag{4.164}$$

dimana β_i menunjukan gelombang dengan fase yang terdiri dari Hamiltonian $H_i (i = 1 - 3)$.

Interferometer neutron menggambarkan pergerakan partikel boson yang berada pada ruangwaktu melengkung dan berotasi. Ruangwaktu yang melengkung disebabkan oleh gravitasi. Gravitasi dan rotasi pada interferometer neutron berasal dari gravitasi dan rotasi bumi dikarenakan interferometer neutron diletakkan di bumi dan pengamatannya juga dilakukan di bumi. Ruangwaktu yang melengkung dan berotasi akan mempengaruhi pergerakan partikel boson.

Cara kerja interferometer neutron mula-mula sinar neutron yang mewakili partikel boson masuk melalui titik A kemudian dipisahkan menjadi dua bagian sinar yang koheren. Pemisahan ini terjadi akibat hamburan bragg dari bidang atom yang tegak lurus terhadap permukaan kristal. Sinar yang melalui titik B dan C akan diberi pengaruh gravitasi dan rotasi. Kemudian pada titik B dan C bagian sinar dialihkan arahnya untuk bertemu kembali di titik D. Pada titik pertemuan

inilah akan dilihat kedua sinar apakah sinar tetap sefase bergeser fasenya atau saling meniadakan. (Kokichi, 1998).

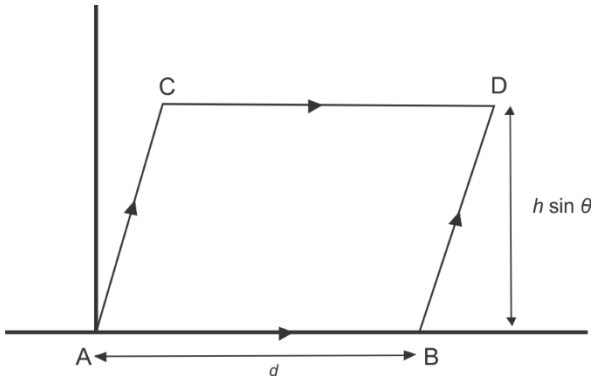
Gelombang yang memasuki interferometer neutron didefinisikan sebagai berikut

$$\beta_k = \frac{1}{\hbar}\int^{t} \Delta H_k dt \tag{4.165}$$

β_k adalah fase gelombang yang masuk ke dalam interferometer. Fase gelombang menggambarkan jumlah putaran yang telah dilakukan atau sejauh mana gelombang menjalar. $\Delta\beta_k$ adalah beda fase pada titik D. Beda fase adalah beda antara dua gelombang atau lebih sepanjang sumbu umum. Dua gelombang neutron yang melewati lintasan ABD dan lintasan ACD bertemu pada titik D. Pada titik pertemuan di D dapat dihitung pergeseran fasenya sebagai berikut

$$\Delta\beta_k = \beta_{k(ACD)} - \beta_{k(ABD)} = -\frac{1}{\hbar}\oint \Delta H_k dt \tag{4.166}$$

skema sederhana interferometer neutron



Gambar 4.2 Skema lintasan Interferometer Neutron

Suku Hamiltonian pertama (H_1) berupa energi potensial gravitasi newton

$$\Delta H_1 = \frac{mGM}{r} = V_g \tag{4.167}$$

Dimasukkan nilai gelombang $\beta_{1(ABD)}$ yang mengalami variasi rotasi sebesar φ dan $\beta_{1(ACD)}$ kedalam persamaan (4.167) untuk dihitung pergeseran fasenya

$$\begin{aligned}
\beta_{grav} &= \beta_{1(ABD)} - \beta_{1(ACD)} \\
&\cong \frac{1}{\hbar}\left[V_g(R + d_2 \sin\varphi) - V_g(R)\right]\frac{m\lambda d_1}{\hbar} \\
&\cong \frac{1}{\hbar}\left[V_g(R + d_2 \sin\varphi)\frac{m\lambda d_1}{\hbar} - V_g(R)\frac{m\lambda d_1}{\hbar}\right] \\
&\cong \left[\left(V_g R\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2} + V_g d_2 \sin\varphi\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2}\right) - V_g(R)\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2}\right] \\
&\cong \left[\left(V_g R\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2} - V_g(R)\frac{m\lambda d_1}{\hbar^2} + \frac{m(m\,g)d_1 d_2\lambda}{\hbar^2}\sin\varphi\right)\right] \\
&= \frac{m^2 gA\lambda}{\hbar^2}\sin\varphi
\end{aligned} \tag{4.168}$$

dengan m adalah massa dari partikel, g adalah percepatan gravitasi, $A = d_1 d_2$ adalah luas dari jajargenjang, λ adalah panjang gelombang de Broglie , dan φ adalah sudut rotasi dari interferometer relatif dari bidang horizontal. Pada bagian ABD dipengaruhi oleh efek rotasi φ pada interferometer. Kedua gelombang dipengaruhi oleh gravitasi Newtonian V_g.

Persamaan (4.168) akan bernilai nol jika tidak terjadi pergeseran fase karena gelombang ACD dan ABD memiliki fase yang sama. Namun pada persamaan (4.168) menghasilkan nilai tidak nol maka menunjukkan bahwa fungsi gelombang mengalami pergeseran fase. Kedua gelombang mengalami efek gravitasi yang ditunjukkan oleh variabel V_g yang merupakan potensial gravitasi. Pada fungsi gelombang ABD diberikan variasi berupa rotasi. Potensial gravitasi dan variasi rotasi ini berpengaruh terhadap pergeseran fase gelombang pada titik D yang

dibuktikan dengan perbedaan vektor gelombang ($\Delta\beta_k = \beta_{k(ACD)} - \beta_{k(ABD)}$). Efek gravitasi dan efek rotasi mewakili ruang waktu Kerr yang telah dimasukkan didalam persamaan Klein Gordon (4.157). Efek ini muncul dari pergeseran fase yang pertama kali diprediksi oleh Overhause dan Colella. (Overhauser & Colella, 1974b)

Jika dimasukkan nilai dari eksperimen dengan $m = 1.6749 \times 10^{-27} kg$ adalah massa dari partikel, g adalah percepatan gravitasi, $A = d_1 d_2 = 0.8864\, m^2$ adalah luas dari jajargenjang, $\lambda = 2.8 \times 10^{-14}\, m$ adalah panjang gelombang de Broglie , dan φ adalah sudut rotasi dari interferometer relatif dari bidang horizontal dengan $\varphi = 90^{\circ}$ maka akan didapatkan besaran fase sebesar

$$\Delta\beta_1 \cong \frac{m^2 g A \lambda}{2\pi\hbar^2} \sin\varphi$$

$$\Delta\beta_1 \cong \frac{(1.6749 \times 10^{-27})^2 \times 9.806 \times 0.8864 \times 2.8 \times 10^{-14}}{2 \times 3.14 \times 1.05457^{-34}} \sin 90$$

$$\Delta\beta_1 \cong \frac{68.2743 \times 10^{-68}}{6.6227 \times 10^{-34}}$$

$$\Delta\beta_1 \cong 1.03091 \times 10^{-34} \qquad (4.169)$$

Selanjutnya suku Hamiltonian kedua $\Delta H_2 = \boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{L}$ yang menggambarkan kopling diantara rotasi bumi dan momentum sudut. Pergeseran fase dihitung menggunakan persamaan (4.166). $\beta_{k(ACD)}$ dan $\beta_{k(ABD)}$ ditulis dalam bentuk yang sama

$$\beta_2 = \frac{1}{\hbar}\int \omega L_Z\, dt = \frac{1}{\hbar}\int \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}\, dt \qquad (4.170)$$

Dimana rotasi bumi $\boldsymbol{\Omega} = (0,0,\omega)$ dan $\boldsymbol{L} = \left(L_x, L_y, L_z\right)$ adalah momentum sudut klasik $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$. Pergeseran fasenya adalah

$$\Delta\beta_2 = \beta_{1(AcD)} - \beta_{1(ABD)}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{1}{\hbar}\oint \boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{L}\, dt$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{1}{\hbar}\oint \boldsymbol{\Omega}\,.(\boldsymbol{mr} \times \dot{\boldsymbol{r}})\, dr$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{m}{\hbar}\oint \boldsymbol{\Omega}.(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\, dr$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{A} \qquad (4.171)$$

dengan $\boldsymbol{A}$ adalah luasan dari jajar genjang dari model interferometer.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} \qquad (4.172)$$

Hasil perhitungan pada persamaan (4.171) tidak menghasilkan nilai nol maka menunjukkan bahwa gelombang mengalami pergeseran fase. Pergeseran fase pada persamaan (4.171) pertama kali diturunkan oleh Lorne (Page, 1975) Pergeseran fase ini disebabkan oleh gaya inersial oleh karena itu pergeseran fase tidak bergantung pada gravitasi. Pergeseran fase ini disebabkan oleh rotasi bumi yang diwakili oleh variable $\boldsymbol{\Omega}$ pada persamaan (4.171). Pembuktian efek ini dilakukan oleh eksperimen Werner dkk.(Werner dkk., 1979). dan beberapa penelitian menggunakan metode yang lain.(Anandan, 1977; Dresden & Yang, 1979; Sakurai, 1980).

Dimasukan nilai dari eksperimen dengan $\boldsymbol{A}$=0.8864 m^2, $m = 1.6749 \times 10^{-27} kg$ adalah massa dari partikel, dan $\boldsymbol{\Omega} = 2 \times 10^{-7}(rad/s)$ adalah rotasi bumi maka akan didapatkan nilai pergeseran fase sebesar

$$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\frac{2\pi}{T}\cdot \boldsymbol{A}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2(1.6749\ \times 10^{-27})}{1.05457^{-34}}\frac{2(3.14)}{3.15\times 10^{-7}}\cdot 0.8864$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{2(1.6749\ \times 10^{-27})}{1.05457^{-34}}.2\times 10^{-7}\cdot 0.8864$$

$$\Delta\beta_2 = 5.631229 \tag{4.173}$$

Selanjutnya dihitung pergeseran fase pada suku Hamiltonian ke tiga

$$\Delta H_3 = \frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega.\boldsymbol{L} \tag{4.174}$$

Kontribusi ketiga muncul dari efek relativitas umum dikenal dengan efek Lense-Thirring. Dimasukkan persamaan (4.174) kedalam persamaan (4.166) untuk menghitung pergeseran fasenya

$$\beta_k = \frac{1}{\hbar}\int^{t}\Delta H_k dt$$

$$= -\frac{1}{\hbar}\int^{t}\left(\frac{4GMR^2}{5c^2r^3}\omega\ \cdot \boldsymbol{L}\right)dt \tag{4.175}$$

pergeseran fasenya adalah

$$\Delta\beta_3 = \beta_{3(ACD)} - \beta_{3(ABD)}$$

$$= -\frac{4GMR^2}{5c^2\hbar}\oint\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\ \times\ dr)}{r^3}$$

$$= -\frac{4GMR^2}{5c^2\hbar}\boldsymbol{\omega}\ \cdot\oint\frac{(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r'})\ \times\ dr'}{|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r'}|^3}$$

$$= -\frac{4GMR^2m}{5c^2\hbar}\boldsymbol{\omega}\ \cdot\oint|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r'}|^{-2}\times dr'$$

dipisahkan suku yang diintegral

$$\Delta\beta_3 = -\frac{2MR^2}{5c^2\hbar R^3}\boldsymbol{\omega}\ \cdot\left[\oint\boldsymbol{r'}\times dr' - \mathbf{3}\oint\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{r'}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times dr'\right]$$

dilakukan integral terhadap dr'

$$\Delta\beta_3 = \frac{2mr_g}{5\hbar R}\boldsymbol{\omega}\cdot\ \boldsymbol{A} - \frac{2mr_g}{5\hbar R}\boldsymbol{\omega}\cdot 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{A}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

$$= \frac{2mr_g}{5\hbar R}\boldsymbol{\omega}\cdot\left[\boldsymbol{A} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\omega\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\ \boldsymbol{A}\right]$$

dikeluarkan bagian $\boldsymbol{\omega}$ dan $\boldsymbol{A}$

$$\Delta\beta_3 = \frac{2mr_g}{5\hbar R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A}$$

$$= \frac{2m}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A} \qquad (4.176)$$

Dimana $\boldsymbol{R}$ adalah vektor posisi interferometer dari pusat bumi R adalah jari-jari bumi, ω adalah vektor momentum sudut dari bumi, dan $r_g \equiv \frac{2GM}{c^2} = 8.87 \times 10^{-3}m$ adalah radius Schwarzschild dari bumi. Nilai $\boldsymbol{R} = R$ memiliki nilai yang sama.(Kuroiwa dkk., 1993). Jika dimasukkan masing-masing nilainya sesuai dengan eksperimen maka didapatkan nilai pergeseran fase sebesar

Jika diasumsikan bumi adalah bola yang memiliki densitas seragam dengan

$$\boldsymbol{J} = \frac{2}{5}MR^2\Omega \qquad (4.178)$$

dan

$$\Delta\beta_3 = \frac{2m}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{\omega} - 3\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\boldsymbol{A}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{2m\boldsymbol{\omega}}{\hbar}\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{A} - \frac{3}{\boldsymbol{\omega}}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\boldsymbol{A}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\Delta\beta_2\frac{r_g}{5R}\left[\boldsymbol{A} - \frac{3}{\boldsymbol{\omega}}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\boldsymbol{A}\right] \qquad (4.179)$$

Jika dihubungkan antara $\boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{A}$ maka didapatkan

$$\Delta\beta_3 = -\frac{1r_g}{5R}\Delta\beta_2 \quad \text{jika } \boldsymbol{R} \text{ tegak lurus pada } \boldsymbol{A} \qquad (4.180)$$

$$\Delta\beta_3 = -\frac{2r_g}{5R}\Delta\beta_2 \quad \text{jika } \boldsymbol{R} \text{ sejajar pada } \boldsymbol{A} \qquad (4.181)$$

Persamaan (4.180) mengandung efek Sagnac $\Delta\beta_2$ yang disebabkan oleh rotasi dan radius Schwarzschild $r_g \equiv 2GM/c^2$ hal ini menunjukkan bahwa pergeseran fase yang terjadi disebabkan oleh rotasi dan gravitasi. Dua variabel ini memiliki peran yang sama seperti pada Hamiltonian pertama. Sampai saat ini, efek Lense-Thirring belum teramati dalam eksperimen interferometer mana pun. Hal ini disebabkan karena ukurannya yang kecil. Pada kasus $\boldsymbol{R}$ tegak lurus pada $\boldsymbol{A}$ dimasukkan masing-masing nilainya sesuai dengan nilai eksperimen maka didapatkan nilai pergeseran fase sebesar

$$\Delta\beta_3 = -\frac{1r_g}{5R}\Delta\beta_2$$

$$\Delta\beta_3 = -\frac{10^{-9}}{5} \times 5.631229$$

$$\Delta\beta_3 = -1.0726 \times 10^{-9} \qquad (4.182)$$

Nilai negatif menunjukan bahwa fase gelombang pertama bergerak lebih jauh dibandingkan fase gelombang kedua maka ketika dihitung pergeseran fasenya bernilai negatif.

Tabel 4.2 Nilai Pergeseran Fase Persamaan Klein Gordon

Hamiltonian	Pergeseran Fase	Nilai Pergeseran Fase
$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2mr^2}$	$\Delta\beta_1 = 0$	$\Delta\beta_0 = 0$
$H_1 = m\phi$	$\Delta\beta_1 = \frac{mGM}{r}$	$\Delta\beta_1 = 1.031 \times 10^{-33}$
$H_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}$	$\Delta\beta_2 = \frac{2m}{\hbar}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{A}$	$\Delta\beta_2 = 5.631229$

$H_3 = \frac{4GMR^2}{5cr^3}$	$\Delta\beta_3$ $= \frac{1}{5}\Delta\beta_2 \frac{r_g}{5R}$ $\left[\boldsymbol{A} - \frac{3}{\boldsymbol{\omega}}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\boldsymbol{A}\right]$	$\Delta\beta_3$ $= -1.0726 \times 10^{-9}$

Nilai pergeseran fase diatas dapat dibagi menjadi dua jenis berdasarkan penyebabnya yaitu pergeseran fase yang disebabkan oleh efek gravitasi dan pergeseran fase yang disebabkan oleh rotasi. Munculnya dua pengaruh ini dikarenakan ruangwaktu yang melengkung dan berotasi. Pada penelitian ini hanya fokus pada pengaruh efek gravitasinya saja. Maka hanya pada Hamiltonian H_1 saja yang muncul pengaruh gravitasi sisanya dipengaruhi oleh rotasi.

Nilai pergeseran fase yang didapat sama dengan pergeseran fase pada persamaan Dirac hanya berbeda pada jumlahnya saja. Hasil perhitungan pergeseran fase menunjukkan persamaan Dirac mengalami pengaruh gravitasi yang lebih besar dibandingkan dengan persamaan Klein Gordon. Persamaan Dirac lebih banyak mengandung suku Hamiltonian yang tidak ditemukan di persamaan Klein Gordon. Semakin banyak suku Hamiltonian menunjukkan bahwa semakin banyak pula Hamiltonian pengganggu didalamnya. Hamiltonian pengganggu akan muncul ketika perhitungan melibatkan bagian kuantum.

BAB V
PENUTUP

5.1 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk persamaan Dirac dan persamaan Klein Gordon di dalam ruangwaktu Kerr berbentuk sebagai berikut:

$$\left[i\hbar\gamma^{(a)}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - i\hbar\gamma^{(a)}\Gamma_{\alpha} - mc\right]\psi(x) = 0 \tag{5.1}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2\hbar^2}\right]\psi - \frac{GMm}{r}\psi - \omega L_z\psi + \frac{2GMa}{r^3c}L_z\psi \tag{5.2}$$

2. Efek gravitasi menyebabkan terjadinya pergeseran fase pada persamaan Dirac dan persamaan Klein Gordon yang diamati melalui interferometer neutron. Pada persamaan Dirac efek gravitasi berada pada suku Hamiltonian H_1, H_5, H_6. Pada persamaan Klein Gordon efek gravitasi berada pada suku Hamiltonian H_1 saja. Hasil perhitungan pergeseran fase menunjukkan persamaan Dirac mengalami pengaruh gravitasi yang lebih besar dibandingkan dengan persamaan Klein Gordon.

5.2 SARAN

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangakan menggunakan ruangwaktu yang lebih kompleks seperti pada Geometry Kerr-Newman dan Geometry Reissner-Nordstrom.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan terjemahan. 2008. Departemen Agama RI. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Al-Mahalli, J., & As-Suyuthi, J. (2018). *Tafsir Jalalain*. ummul qura. http://toko-muslim.com/buku-tafsir-jalalain-dilengkapi-asbabun-nuzul/

Anandan, J. (1977). Gravitational and rotational effects in quantum interference. *Physical Review D*, *15*(6), 1448–1457. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.1448

Anugraha, R. (2011). *Teori Relativitas Rinto anugraha.pdf*. Jurusan Fisika FMIPA UGM.

Colella, R., Overhauser, A. W., & Werner, S. A. (1975). Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference. *Physical Review Letters*, *34*(23), 1472–1474. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.34.1472

Dresden, M., & Yang, C. N. (1979). Phase shift in a rotating neutron or optical interferometer. *Physical Review D*, *20*(8), 1846–1848. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.20.1846

Gautama, S. E. (2016). *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi*. Paradoks Softbook Publisher. http://paradoks77.blogspot.com

Griffiths, D. J. (2004). *Introduction to elementary particles*. WILEY-VCH.

Hamzah, M., & Muniroh, B. (2016). KONSEP GAYA TARIK (GRAVITASI) DALAM PERSPEKTIF AL-QURAN DAN SAINS (KAJIAN SURAT AL-HAJJ AYAT 65. *SPEKTRA : Jurnal Kajian Pendidikan Sains*, *2*(2), 100. https://doi.org/10.32699/spektra.v2i2.13

Kokichi, anano. (1998). Gravitational effects on Dirac particles. *Faculty of Science and Technology, Hirosaki University, Hirosaki 036-8561, Japan*, 81.

Kuroiwa, J., Kasai, M., & Toshifumi, F. (1993). A treatment of general relativistic effects in quantum interference. *Physics Letters A*, *182*(4–6), 330–334. https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90403-M

Overhauser, A. W., & Colella, R. (1974a). Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference. *Physical Review Letters*, *33*(20), 1237–1239. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1237

Overhauser, A. W., & Colella, R. (1974b). Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference. *Physical Review Letters*, *33*(20), 1237–1239. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1237

Page, L. A. (1975). Effect of Earth's Rotation in Neutron Interferometry. *Physical Review Letters*, *35*(8), 543–543. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.35.543

Rauch, H., Treimer, W., & Bonse, U. (1974). Test of a single crystal neutron interferometer. *Physics Letters A*, *47*(5), 369–371. https://doi.org/10.1016/0375-9601(74)90132-7

Sabarni, S. (2019). STRUKTUR ATOM BERDASARKAN ILMU KIMIA DAN PERSPEKTIF AL-QURAN. *Lantanida Journal*, *7*(1), 87. https://doi.org/10.22373/lj.v7i1.4647

Sakurai, J. J. (1980). Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth's rotation. *Physical Review D*, *21*(10), 2993–2994. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2993

Shihab, M. Q. (2017). *Tafsir Al-Mishbah Set Lengkap Oleh M Quraish Shihab*. Lentera Hati. https://store.lenterahati.com/en/home/8933-tafsir-al-mishbah-set-lengkap-vol-115.html

Vishveshwara, C. V. (1970). Stability of the Schwarzschild Metric. *Physical Review D*, *1*(10), 2870–2879. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.1.2870

Visser, M. (2008). The Kerr spacetime: A brief introduction. *ArXiv:0706.0622 [Astro-Ph, Physics:Gr-Qc, Physics:Hep-Th]*. http://arxiv.org/abs/0706.0622

Wajima, S., Kasai, M., & Futamase, T. (1997). Post-Newtonian effects of gravity on quantum interferometry. *Physical Review D*, *55*(4), 1964–1970. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.1964

Weiner, R. M. (2013). Spin-statistics-quantum number connection and supersymmetry. *Physical Review D*, *87*(5), 055003. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.055003

Werner, S. A., Staudenmann, J.-L., & Colella, R. (1979). Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron. *Physical Review Letters*, *42*(17), 1103–1106. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.1103

LAMPIRAN
LAMPIRAN A
KOMPONEN SIMBOL CHRISTOFFEL

Penurunan komponen simbol Christoffel diturunkan dari metrik (4.14)

$$\Gamma^0_{00} = 0 + O(1/c^4) \tag{A.1}$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{c^2}\phi_{,1} - \frac{1}{c^4}\frac{6GMR^2}{5r^2}\omega_0\omega_s x(x^2+y^2) + O(1/c^6) \tag{A.2}$$

$$\Gamma^0_{02} = \frac{1}{c^2}\phi_{,2} - \frac{1}{c^4}\frac{6GMR^2}{5r^2}\omega_0\omega_s y(x^2+y^2) + O(1/c^6) \tag{A.3}$$

$$\Gamma^0_{03} = \frac{1}{c^2}\phi_{,3} - \frac{1}{c^4}\frac{6GMR^2}{5r^2}\omega_0\omega_s z(x^2+y^2) + O(1/c^6) \tag{A.4}$$

$$\Gamma^0_{10} = 0 \tag{A.5}$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{c^4}\frac{12GMR^2}{5r^2}\omega_s xy + O(1/c^6) \tag{A.6}$$

$$\Gamma^0_{12} = -\frac{1}{c^4}\frac{6GMR^2}{5r^2}\omega_s(x^2-y^2) + O(1/c^6) \tag{A.7}$$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{1}{c^4}\frac{6GMR^2}{5r^2}\omega_s yz + O(1/c^6) \tag{A.8}$$

$$\Gamma^0_{20} = 0 \tag{A.9}$$

$$\Gamma^0_{21} = 0 \tag{A.10}$$

$$\Gamma^0_{22} = -\frac{1}{c^4}\frac{12GMR^2}{5r^2}\omega_s xy + O(1/c^6) \tag{A.11}$$

$$\Gamma^0_{23} = -\frac{1}{c^4}\frac{12GMR^2}{5r^2}\omega_s zx + O(1/c^6) \tag{A.12}$$

$$\Gamma^0_{30} = 0 \tag{A.13}$$

$$\Gamma^0_{31} = 0 \tag{A.14}$$

$$\Gamma^0_{32} = 0 \tag{A.15}$$

$$\Gamma^0_{33} = 0 + O(1/c^6) \tag{A.16}$$

$$\Gamma^1_{00} = \phi_{,1} - \omega_0^2 x + \frac{1}{c^2}\left[4\phi\phi_{,1} + \omega_0^2 x\left(x\phi_{,1} + y\phi_{,2}\right) + \frac{8GMR^2}{5r^3}\omega_0\omega_s x(x^2 + y^2)\right] + O(1/c^4) \quad \text{(A.17)}$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{c^2}\omega_0 y\phi_{,1} + O(1/c^4) \quad \text{(A.18)}$$

$$\Gamma^1_{02} = -\omega_0 + \frac{1}{c^2}\left[\omega_0 x\phi_{,1} + 2\omega_0 y\phi_{,2} + \frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_s - \frac{6GMR^2}{5r^3}\omega_s(x^2 + y^2)\right] + O(1/c^4) \quad \text{(A.19)}$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{1}{c^2}\left[2\omega_0 y\phi_{,3} - \frac{6GMR^2}{5r^5}\omega_s yz\right] + O(1/c^4) \quad \text{(A.20)}$$

$$\Gamma^1_{10} = 0 \quad \text{(A.21)}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,1} + O(1/c^4) \quad \text{(A.22)}$$

$$\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,2} + O(1/c^4) \quad \text{(A.23)}$$

$$\Gamma^1_{13} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,3} + O(1/c^4) \quad \text{(A.24)}$$

$$\Gamma^1_{20} = 0 \quad \text{(A.25)}$$

$$\Gamma^1_{21} = 0 \quad \text{(A.26)}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,1} + O(1/c^4) \quad \text{(A.27)}$$

$$\Gamma^1_{23} = 0 + O(1/c^4) \quad \text{(A.28)}$$

$$\Gamma^1_{30} = 0 \quad \text{(A.29)}$$

$$\Gamma^1_{31} = 0 \quad \text{(A.30)}$$

$$\Gamma^1_{32} = 0 \quad \text{(A.31)}$$

$$\Gamma_{33}^{1} = \frac{1}{c^2}\phi_{,1} + O(1/c^6) \tag{A.32}$$

$$\Gamma_{00}^{2} = \phi_{,2} - \omega_0^2 y + \frac{1}{c^2}\left[4\phi\phi_{,2} + \omega_0^2 y\left(x\phi_{,1} + y\phi_{,2}\right) + \frac{8GMR^2}{5r^3}\omega_0\omega_s y - \frac{12GMR^2}{5r^3}\omega_0\omega_s y(x^2 + y^2)\right] + O(1/c^4) \tag{A.33}$$

$$\Gamma_{01}^{2} = \omega_0 + \frac{1}{c^2}\left[-2\omega_0 x\phi_{,1} - \omega_0 y\phi_{,2} - \frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_s + \frac{6GMR^2}{5r^5}\omega_s(x^2 + y^2)\right] + O(1/c^4) \tag{A.34}$$

$$\Gamma_{02}^{2} = -\frac{1}{c^2}\omega_0 x\phi_{,2} + O(1/c^4) \tag{A.35}$$

$$\Gamma_{03}^{2} = \frac{1}{c^2}\left[-2\omega_0 X\phi_{,3} + \frac{6GMR^2}{5r^5}\omega_s zx\right] + O(1/c^4) \tag{A.36}$$

$$\Gamma_{10}^{2} = \frac{1}{c^2}\phi_{,2} + O(1/c^4) \tag{A.37}$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{c^2}\phi_{,2} + O(1/c^4) \tag{A.38}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,1} + O(1/c^4) \tag{A.39}$$

$$\Gamma_{13}^{2} = 0 + O(1/c^4) \tag{A.40}$$

$$\Gamma_{20}^{2} = 0 \tag{A.41}$$

$$\Gamma_{21}^{2} = 0 \tag{A.42}$$

$$\Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,2} + O(1/c^4) \tag{A.43}$$

$$\Gamma_{23}^{2} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,3} + O(1/c^4) \tag{A.44}$$

$$\Gamma_{30}^{2} = 0 \tag{A.45}$$

$$\Gamma^2_{31} = 0 \tag{A.46}$$

$$\Gamma^2_{32} = 0 \tag{A.47}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{c^2}\phi_{,2} + O(1/c^4) \tag{A.48}$$

$$\Gamma^3_{00} = \phi_{,2} + \frac{1}{c^2}\left[4\phi\phi_{,3} + \omega_0^2(x^2 + y^3)\phi_{,3} - \frac{12GMR^2}{5r^3}\omega_0\omega_s z(x^2 + y^2)\right] + O(1/c^4) \tag{A.49}$$

$$\Gamma^3_{01} = \frac{1}{c^2}\left[-\omega_0 y\phi_{,3} + \frac{6GMR^2}{5r^5}\omega_s yz\right] + O(1/c^4) \tag{A.50}$$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{1}{c^2}\left[\omega_0 y\phi_{,3} - \frac{6GMR^2}{5r^5}\omega_s zx\right] + O(1/c^4) \tag{A.51}$$

$$\Gamma^3_{03} = 0 + O(1/c^4) \tag{A.52}$$

$$\Gamma^3_{10} = 0 \tag{A.53}$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{c^2}\phi_{,3} + O(1/c^4) \tag{A.54}$$

$$\Gamma^3_{12} = 0 + O(1/c^4) \tag{A.55}$$

$$\Gamma^3_{13} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,1} + O(1/c^4) \tag{A.56}$$

$$\Gamma^3_{20} = 0 \tag{A.57}$$

$$\Gamma^3_{21} = 0 \tag{A.58}$$

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{c^2}\phi_{,3} + O(1/c^4) \tag{A.59}$$

$$\Gamma^3_{23} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,2} + O(1/c^4) \tag{A.60}$$

$$\Gamma^3_{30} = 0 \tag{A.61}$$

$$\Gamma^3_{31} = 0 \tag{A.62}$$

$$\Gamma^3_{32} = 0 \tag{A.63}$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{c^2}\phi_{,3} + O(1/c^4) \tag{A.64}$$

LAMPIRAN B
KOMPONEN SPIN KONEKSI

Komponen Spin Koneksi Pada Persamaan (4.80)

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8}\left[\gamma^{(a)},\gamma^{(b)}\right] g_{\mu v} e^{\mu}_{(a)} \nabla_\alpha e^{v}_{(b)} \tag{B.1}$$

Menggunakan tetrad pada persamaan (4.29) - (4.33) dan komponen dari simbol Christoffel maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = & -\frac{1}{8}\varepsilon_{ijk}\omega_O^i \gamma^{[jk]} - \frac{1}{4}\gamma^{[Oi]}\phi_{,1} \\ & -\frac{1}{8c^2}\left[\frac{GM}{r^3}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\gamma^{[jk]}\right. \\ & -\frac{4GMR^2}{5r^3}\varepsilon_{ijk}\omega_s^i\gamma^{[jk]} \\ & \left.-\frac{6GMR^2}{5r^5}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\gamma^{[jk]}\right]\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1 = & -\frac{1}{8}\left(\phi_{,2}\varepsilon_{3jk} - \phi_{,3}\varepsilon_{2jk}\right)\gamma^{[jk]} \\ & +\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-2xy\gamma^{[01]} + (x^2-y^2)\gamma^{[02]} - yz\gamma^{[03]}\right]\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 = & -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,3}\varepsilon_{1jk} - \phi_{,1}\varepsilon_{3jk}\right)\gamma^{[jk]} \\ & +\left[\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S(x^2-y^2)\gamma^{[01]} + \frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S 2xy\gamma^{[02]}\right. \\ & \left.+\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S zx\gamma^{[03]}\right]\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\Gamma_3 = -\frac{1}{8}\left(\phi_{,1}\varepsilon_{2jk} - \phi_{,2}\varepsilon_{1jk}\right)\gamma^{[jk]} + \frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-yz\gamma^{[01]} + zx\gamma^{[02]}\right] \tag{B.5}$$

Dimana ε_{ijk} adalah tensor antisymmetric Levi-Civita ($\varepsilon_{123} = +1$), $\gamma^{[ab]}$ didefinisikan dengan

$$\gamma^{[ab]} = \left[\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\right] \tag{B.6}$$

dan vektor kecepatan sudut ω_O, ω_S

$$\omega_O = (0,0,\omega_O) \tag{B.7}$$

$$\omega_S = (0,0,\omega_S) \tag{B.8}$$

Hal ini sesuai dengan matrik 4x4 yang sama dengan matrik spin Pauli:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{B.9}$$

dimana I adalah satuan matrik 2x2. Matriks ini memenuhi hubungan berikut

$$\rho_i \rho_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\rho_k \tag{B.10}$$

sekarang digunakan representasi standar dari matrik Dirac

$$\gamma^{(0)} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(i)} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.11}$$

dimana σ_i dikenal dengan matrik Pauli, kemudian diperoleh

$$\gamma^{[0i]} = \frac{2}{c}\rho_1\sigma_i \tag{B.12}$$

$$\gamma^{[ij]} = -2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{B.13}$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned} i\hbar\Gamma_0 = & -i\hbar\frac{1}{8}\varepsilon_{ijk}\omega_O^i\gamma^{[jk]} - \frac{1}{4}i\hbar\gamma^{[Oi]}\phi_{,1} \\ & - \frac{1}{8c^2}\left[i\hbar\frac{GM}{r^3}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\gamma^{[jk]}\right. \\ & - i\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\varepsilon_{ijk}\omega_S^i\gamma^{[jk]} \\ & \left. - i\hbar\frac{6GMR^2}{5r^5}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\gamma^{[jk]}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\Gamma_0 = & -i\frac{\hbar\sigma_i}{2}\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\omega_O^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\right)+\frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma_i}}{2c}\frac{2}{2}\rho_1\phi_{,1} \\
& -\frac{1}{c^2}\left[i\hbar\frac{GM}{8r^3}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)\right. \\
& -i\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\varepsilon_{ijk}\omega_s^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right) \\
& \left.-i\hbar\frac{6GMR^2}{5r^5}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)\right] \\
i\hbar\Gamma_0 = & -\frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2}\frac{1}{2}\,\omega_O+\frac{1}{2c}i\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\rho_1\phi_{,1} \\
& -\frac{1}{c^2}\left[-\frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}_i}{2}\frac{GM}{2r^3}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i+2\boldsymbol{\sigma_i}\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_S\right. \\
& \left.+2\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\frac{6GMR^2}{5r^5}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\right] \\
i\hbar\Gamma_0 = & -\omega_O\cdot\boldsymbol{S}\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\,\rho_1\boldsymbol{\sigma_i}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) \\
& +\frac{1}{c^2}\left[-\boldsymbol{S}\frac{GM}{2r^3}\,[r\times(r\times\omega_O)]+2\boldsymbol{\sigma_i}\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_S\right. \\
& \left.+2\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\frac{6GMR^2}{5r^5}\,[r\times(r\times\omega_O)]\right] \\
i\hbar\Gamma_0 = & -\omega_O\cdot\boldsymbol{S}+\frac{1}{2c}\,\rho_1\boldsymbol{\sigma_i}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) \\
& +\frac{1}{c^2}\left[\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_S\cdot-\frac{GM}{2r^3}\boldsymbol{S}\cdot\,[r\times(r\times\omega_O)]\right. \\
& \left.+\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\frac{6GMR^2}{5r^5}\,[r\times(r\times\omega_O)]\right]
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,2}\varepsilon_{3jk} - \phi_{,3}\varepsilon_{2jk}\right)\gamma^{[jk]}$$

$$+\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-2xy\gamma^{[01]} + (x^2 - y^2)\gamma^{[02]} - yz\gamma^{[03]}\right]$$

$$i\hbar\Gamma_1 = -\frac{i\hbar}{8c^2}\left(\phi_{,2}\varepsilon_{3jk} - \phi_{,3}\varepsilon_{2jk}\right)\left(-4i\varepsilon_{jki}\right)$$

$$+ i\hbar\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-2xy\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_1\right) + (x^2 - y^2)\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_2\right)\right.$$

$$\left. - yZ\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_3\right)\right]$$

$$i\hbar\Gamma_1 = -\frac{\hbar}{2c^2}\left(\phi_{,2}\sigma_3 - \phi_{,3}\sigma_2\right)$$

$$+\frac{i\hbar}{c^3}\rho_1\frac{3GMR^2}{5r^5}\omega_S[-2xy\sigma_1 + (x^2 - y^2)\sigma_2 - yz\sigma_3] \quad \text{(B.15)}$$

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,3}\varepsilon_{1jk} - \phi_{,1}\varepsilon_{3jk}\right)\gamma^{[jk]}$$

$$+\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[(x^2 - y^2)\gamma^{[01]} + 2xy\gamma^{[02]} + zx\gamma^{[03]}\right]$$

$$i\hbar\Gamma_2 = -\frac{i\hbar}{8c^2}\left(\phi_{,3}\varepsilon_{1jk} - \phi_{,1}\varepsilon_{3jk}\right)\left(-4i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)$$

$$+ i\hbar\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[(x^2 - y^2)\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_1\right) + 2xy\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_2\right)\right.$$

$$\left. + zx\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_3\right)\right]$$

$$i\hbar\Gamma_2 = -\frac{\hbar}{2c^2}\left(\phi_{,3}\sigma_1 - \phi_{,1}\sigma_3\right)$$

$$+\frac{i\hbar}{c^2}\rho_1\frac{3GMR^2}{5r^5}\omega_S[(x^2 - y^2)\sigma_1 + 2xy\sigma_2 + zx\sigma_3] \quad \text{(B.16)}$$

$$\Gamma_3 = -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,1}\varepsilon_{2jk} - \phi_{,2}\varepsilon_{1jk}\right)\gamma^{[jk]}$$

$$+\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-yz\gamma^{[01]} + zx\gamma^{[02]}\right]$$

$$i\hbar\Gamma_3 = -i\hbar\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,1}\varepsilon_{2jk} - \phi_{,2}\varepsilon_{1jk}\right)\left(-4i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)$$

$$+ i\hbar\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-yz\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_1\right) + zx\left(\frac{2}{c}\rho_1\sigma_2\right)\right]$$

$$i\hbar\Gamma_3 = -\frac{\hbar}{2c^2}\left(\phi_{,1}\sigma_2 - \phi_{,2}\sigma_1\right) + \frac{i\hbar}{c^3}\rho_1\frac{3GMR^2}{5r^5}\omega_S[-yz\sigma_1 + zx\sigma_2] \qquad \text{(B.17)}$$

dimana $\bar{\boldsymbol{p}}$ adalah operator momentum di dalam ruangwaktu datar dan $\boldsymbol{S} = \hbar\sigma/2$ adalah spin dari partikel.

Disisi lain jika menggunakan representasi Weyl sebagai matrik Dirac :

$$\gamma^{(0)} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(i)} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(B.18)}$$

kemudian diperoleh

$$\gamma^{[0i]} = \frac{2}{c}\rho_3\sigma_i \qquad \text{(B.19)}$$

$$\gamma^{[ij]} = -2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \text{(B.20)}$$

maka didapatkan

$$i\hbar\Gamma_0 = -i\hbar\frac{1}{8}\varepsilon_{ijk}\omega_O^i\gamma^{[jk]} - \frac{1}{4}i\hbar\gamma^{[Oi]}\phi_{,1}$$

$$-\frac{1}{8c^2}\left[i\hbar\frac{GM}{r^3}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\gamma^{[jk]}\right.$$

$$-i\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\varepsilon_{ijk}\omega_S^i\gamma^{[jk]}$$

$$\left.-i\hbar\frac{6GMR^2}{5r^5}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\gamma^{[jk]}\right]$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\Gamma_0 = & -i\frac{\hbar\sigma_i}{2}\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\omega_O^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\right)+\frac{i\hbar\boldsymbol{\sigma_i}}{2c}\frac{2}{2}\rho_3\phi_{,1} \\
& -\frac{1}{c^2}\left[i\hbar\frac{GM}{8r^3}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)\right. \\
& -i\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\varepsilon_{ijk}\omega_S^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right) \\
& \left.-i\hbar\frac{6GMR^2}{5r^5}\varepsilon_{ijk}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\left(-2i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)\right] \\
i\hbar\Gamma_0 = & -\frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2}\frac{1}{2}\,\omega_O+\frac{1}{2c}i\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\rho_3\phi_{,1} \\
& -\frac{1}{c^2}\left[-\frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}_i}{2}\frac{GM}{2r^3}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i+2\boldsymbol{\sigma_i}\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_S\right. \\
& \left.+2\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\frac{6GMR^2}{5r^5}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\right] \\
i\hbar\Gamma_0 = & -\omega_O\cdot\boldsymbol{S}\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\,\rho_3\boldsymbol{\sigma_i}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) \\
& +\frac{1}{c^2}\left[-\boldsymbol{S}\frac{GM}{2r^3}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i+2\boldsymbol{\sigma_i}\hbar\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_S\right. \\
& \left.+2\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\frac{6GMR^2}{5r^5}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\right] \\
i\hbar\Gamma_0 = & -\omega_O\cdot\boldsymbol{S}\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\,\rho_3\boldsymbol{\sigma_i}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) \\
& +\frac{1}{c^2}\left[\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega_S\cdot-\frac{GM}{2r^3}\boldsymbol{S}\cdot\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\right. \\
& \left.+2\hbar\boldsymbol{\sigma_i}\frac{6GMR^2}{5r^5}\,[r\times(r\times\omega_O)]^i\right] \qquad \text{(B.21)} \\
\Gamma_1 = & -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,2}\varepsilon_{3jk}-\phi_{,3}\varepsilon_{2jk}\right)\gamma^{[jk]} \\
& +\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-2xy\gamma^{[01]}+(x^2-y^2)\gamma^{[02]}-yz\gamma^{[03]}\right]
\end{aligned}
$$

$$i\hbar\Gamma_1 = -\frac{i\hbar}{8c^2}\left(\phi_{,2}\varepsilon_{3jk} - \phi_{,3}\varepsilon_{2jk}\right)\left(-4i\varepsilon_{jki}\right)$$

$$+ i\hbar\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-2xy\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_1\right) + (x^2 - y^2)\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_2\right)\right.$$

$$\left. - yZ\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_3\right)\right]$$

$$i\hbar\Gamma_1 = -\frac{\hbar}{2c^2}\left(\phi_{,2}\sigma_3 - \phi_{,3}\sigma_2\right)$$

$$+ \frac{i\hbar}{c^3}\rho_3\frac{3GMR^2}{5r^5}\omega_S[-2xy\sigma_1 + (x^2 - y^2)\sigma_2 - yz\sigma_3] \quad \text{(B.22)}$$

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,3}\varepsilon_{1jk} - \phi_{,1}\varepsilon_{3jk}\right)\gamma^{[jk]}$$

$$+ \frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[(x^2 - y^2)\gamma^{[01]} + 2xy\gamma^{[02]} + zx\gamma^{[03]}\right]$$

$$i\hbar\Gamma_2 = -\frac{i\hbar}{8c^2}\left(\phi_{,3}\varepsilon_{1jk} - \phi_{,1}\varepsilon_{3jk}\right)\left(-4i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)$$

$$+ i\hbar\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[(x^2 - y^2)\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_1\right) + 2xy\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_2\right)\right.$$

$$\left. + zx\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_3\right)\right]$$

$$i\hbar\Gamma_2 = -\frac{\hbar}{2c^2}\left(\phi_{,3}\sigma_1 - \phi_{,1}\sigma_3\right)$$

$$+ \frac{i\hbar}{c^2}\rho_3\frac{3GMR^2}{5r^5}\omega_S[(x^2 - y^2)\sigma_1 + 2xy\sigma_2 + zx\sigma_3] \quad \text{(B.23)}$$

$$\Gamma_3 = -\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,1}\varepsilon_{2jk} - \phi_{,2}\varepsilon_{1jk}\right)\gamma^{[jk]} + \frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-yz\gamma^{[01]} + zx\gamma^{[02]}\right]$$

$$i\hbar\Gamma_3 = -i\hbar\frac{1}{8c^2}\left(\phi_{,1}\varepsilon_{2jk} - \phi_{,2}\varepsilon_{1jk}\right)\left(-4i\varepsilon_{jki}\sigma_i\right)$$

$$+ i\hbar\frac{3GMR^2}{10c^2r^5}\omega_S\left[-yz\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_1\right) + zx\left(\frac{2}{c}\rho_3\sigma_2\right)\right]$$

$$i\hbar\Gamma_3 = -\frac{\hbar}{2c^2}\left(\phi_{,1}\sigma_2 - \phi_{,2}\sigma_1\right) + \frac{i\hbar}{c^3}\rho_3\frac{3GMR^2}{5r^5}\omega_S[-yz\sigma_1 + zx\sigma_2] \qquad \text{(B.24)}$$

LAMPIRAN C
HAMILTONIAN NON-RELATIVITAS

Menggunakan representasi standar (B.11) untuk matrik Dirac dan komponen koneksi spin persamaan (B.14)- (B.17) maka akan didapatkan bentuk

$$
\begin{aligned}
H = {} & \rho_3 mc^2 + \rho_3 m\phi \\
& + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\rho_3 m\phi + \left(\frac{4GMR^2}{5r^3}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} + \frac{4GMR^2}{5r^3}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{S}\right)\right. \\
& \left. + \frac{6GMR^2}{5r^5}\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega_s})]\right] + c\rho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\overline{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\omega} \\
& \cdot\boldsymbol{S} + \left[-\frac{1}{c}\rho_1\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) + \frac{1}{c}\rho_1 2\phi\boldsymbol{\sigma}.\overline{\boldsymbol{p}}\right] \\
H = {} & \rho_3 mc^2 + c\rho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\overline{\boldsymbol{p}} + \rho_3 m\phi - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}) \\
& + \frac{1}{c}\rho_1\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) + 2\phi\boldsymbol{\sigma}.\overline{\boldsymbol{p}}\right] \\
& + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3}\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5}\boldsymbol{S}\right. \qquad \text{(C.1)} \\
& \left. \cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega_s})]\right]
\end{aligned}
$$

dimana ρ_i didefinisikan oleh (B.9). Hamiltonian H' didefinisikan pada persamaan (4.101) dan didapatkan

$$H' = \gamma^{\frac{1}{4}} H \gamma^{-\frac{1}{4}}$$

$$H' = \gamma^{\frac{1}{4}} \left[\rho_3 mc^2 + c\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{p}} + \rho_3 m\phi - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) \right.$$

$$+ \frac{1}{c} \rho_1 \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\bar{\boldsymbol{p}}\phi) + 2\phi \boldsymbol{\sigma} . \bar{\boldsymbol{p}} \right]$$

$$+ \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} \rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5} \boldsymbol{S} \right.$$

$$\left. \left. \cdot [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega_s})] \right] \right] \gamma^{-\frac{1}{4}}$$

$$H = \rho_3 mc^2 + c\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{p}} + \rho_3 m\phi - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})$$

$$+ \frac{1}{c} \rho_1 [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\bar{\boldsymbol{p}}\phi) + \phi \, \boldsymbol{\sigma} . \bar{\boldsymbol{p}}]$$

$$+ \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} \rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5} \boldsymbol{S} \right. \qquad \text{(C.2)}$$

$$\left. \cdot [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega_s})] \right]$$

dengan menggunakan transformasi FWT untuk menurunkan Hamiltonian non relativistic pada bagian *"large"*. Pertama digunakan operator kesatuan *(unitary)*

$$U_1 = \exp\left(i\rho_2 \frac{\sigma \cdot \bar{\rho}}{2mc} \right) \qquad \text{(C.3)}$$

Bentuk Hamiltonian dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$H = mc^2\left(\rho_3 + \frac{1}{mc^2}\left(c\rho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\overline{\boldsymbol{p}} + \rho_3 m\phi - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})\right)\right) + \frac{1}{c}\left[-\rho_1\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) + 2\rho_1\phi\boldsymbol{\sigma}.\overline{\boldsymbol{p}}\right] + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3}\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5}\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega_s})]\right] \quad \text{(C.4)}$$

$$h = \beta + \frac{1}{c^2}D + \frac{1}{c}\Omega \quad \text{(C.5)}$$

$$\beta = \rho_3 + \frac{1}{mc^2}\left(c\rho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\overline{\boldsymbol{p}} + \rho_3 m\phi - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})\right) \quad \text{(C.6)}$$

$$D = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}\rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3}\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5}\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega_s})]\right] \quad \text{(C.7)}$$

$$\Omega = \frac{1}{mc}\left[-\rho_1\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\overline{\boldsymbol{p}}\phi) + 2\rho_1\phi\boldsymbol{\sigma}.\overline{\boldsymbol{p}}\right] \quad \text{(C.8)}$$

Jadi dilakukan eliminasi persamaan ganjil dari $O(c)$ dengan menggunakan persamaan

$$e^{iS}He^{-iS} = H + i[S,H] + \frac{i^2}{2!}\left[S,[S,H]\right] + \frac{i^3}{3!}\left[S,\left[S,[S,H]\right]\right] + \cdots \quad \text{(C.9)}$$

dan berhubungan dengan (B.10). Kemudian dilakukan transformasi Hamiltonian $U_1 H' U_1^{\dagger}$

$$U_1 H' U_1^{\dagger} = \rho_3 mc^2 + c\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{p}} + \rho_3 m\phi - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})$$

$$+ \frac{1}{c} \rho_1 [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\overline{\boldsymbol{p}}\phi) + \phi\, \boldsymbol{\sigma}.\overline{\boldsymbol{p}}]$$

$$+ \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} \rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5} \boldsymbol{S} \right. \qquad \text{(C.10)}$$

$$\left. \cdot [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega_s})\,] \right]$$

yang kedua menggunakan

$$U_2 = \exp\left(i\rho_2 \frac{3m^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{\rho}}\phi + \phi\boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{\rho}}) - 2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{\rho}})^3}{12(mc)^3} \right) \qquad \text{(C.11)}$$

Operator uniter menyebabkan bentuk ganjil $O(1/c)$ lenyap. Maka akan didapatkan

$$UH'U^{\dagger} = \rho_3 mc^2 + c\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2} \rho_3 m\phi + m\phi - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})$$

$$+ \frac{1}{c} \rho_1 [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\overline{\boldsymbol{p}}\phi) + \phi\, \boldsymbol{\sigma}.\overline{\boldsymbol{p}}]$$

$$+ \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} \rho_3 m\phi + \frac{4GMR^2}{5r^3} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) + \frac{6GMR^2}{5r^5} \boldsymbol{S} \right. \qquad \text{(C.10)}$$

$$\left. \cdot [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega_s})\,] \right]$$

Dimana $U = U_2 U_1$

LAMPIRAN D
KUANTITAS CANOCIAL

Mengikuti prosedur kuantitas kanokial untuk menurunkan persamaan Schrödinger yang melibatkan relativitas umum pada partikel non-relativistik maka pertama diturunkan Hamiltonian Klasik

1. Hamiltonian Klasik

Partikel yang memiliki massa m dan menyebar di dalam medan gravitasi sesuai dengan persamaan (4.21)-(4.25) dengan kondisi (4.103) bentuk Lagrangian relativistiknya untuk partikel ini adalah

$$\begin{aligned} L &= -mc\frac{ds}{dt} \\ &= -mc\sqrt{g_{\mu v}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{v}} \\ &= -mc\sqrt{N^2 - \gamma_{ij}(N^i + \dot{x}^i)(N^j + \dot{x}^j)} \end{aligned} \tag{D.1}$$

dimana titik di atas x^{μ} menunjukkan turunan terhadap t. Didefinisikan momentum kanocial dengan

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \tag{D.2}$$

dengan menggunakan persamaan diatas akan mereduksi Hamiltonian klasik

$$\begin{aligned} H &= p_i\dot{x}^i - L - mc^2 \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L - mc^2 \\ &= N\sqrt{m^2c^2 + \gamma^{ij}p_ip_j} - N^ip_i - mc^2 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Dianggap partikel non relativistic yang memiliki energi diamnya jauh lebih besar daripada energi kinematic. Maka akan didapatkan

$$\gamma^{ij} p_i p_j \ll mc^2 \tag{D.4}$$

Maka didapatkan Hamiltonian non-relativitas

$$H = -N^i p_i + \left(\frac{N}{c} - 1\right) mc^2 + \frac{N}{c}\left[\frac{\gamma^{ij} p_i p_j}{2m} - \frac{\left(\gamma^{ij} p_i p_j\right)^2}{8m^3 c^2}\right] + O\left(\frac{1}{4^4}\right) \tag{D.5}$$

2. Hamiltonian Kuantum

Untuk mendapatkan Hamiltonian klasik non relativitas dengan mengikuti prosedur kuantitas kanocial untuk menurunkan Hamiltonian kuantum. Maka dilakukan penggantian momentum p_i di dalam Hamiltonian klasik dengan operator momentum $\hat{p}_i$. Variabel kanokial x^i dan $\hat{p}_i$ yang memenuhi hubungan komutasi berikut

$$\left[x^i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta^i_j \tag{D.6}$$

operator momentum $\hat{p}_i$ adalah hermitian oleh karena itu memenuhi hubungan berikut

$$(\hat{p}_i\psi, \varphi) = (\psi, \hat{p}_i\varphi) \tag{D.7}$$

dimana tanda kurung menunjukkan inner produk yang invarian terhadap transformasi koordinat spasial:

$$(\psi, \varphi) \equiv \int \psi^* \varphi \sqrt{\gamma d^3}\, x \tag{D.8}$$

Mempertimbangkan definisi inner produk maka didapatkan operator momentum

$$\hat{p}_i = -i\hbar\gamma^{-1/4} \frac{\partial}{\partial x^i} \gamma^{1/4} \equiv \gamma^{-1/4} \bar{p}_i \gamma^{1/4} \tag{D.10}$$

Operator momentum $\hat{p}_i$ memenuhi hubungan komutasi (D.6). Dengan mengganti p_i di dalam momentum klasik (D.5) dengan $\hat{p}_i$ akan diperoleh Hamiltonian kuantum

$$H = -N^i p_i + \left(\frac{N}{c} - 1\right) mc^2 + \frac{N}{c}\left[\frac{\gamma^{ij} p_i p_j}{2m} - \frac{\left(\gamma^{ij} p_i p_j\right)^2}{8m^3 c^2}\right] + O\left(\frac{1}{4^4}\right)$$

$$H = -N^i \hat{p}_i + \left(\frac{N}{c} - 1\right) mc^2 + \frac{N}{c}\left[\frac{\gamma^{ij} \hat{p}_i p_j}{2m} - \frac{\left(\gamma^{ij} \hat{p}_i p_j\right)^2}{8m^3 c^2}\right] + O\left(\frac{1}{4^4}\right)$$

Dimasukkan persamaan (D.10)

$$H = -N^i\left(\gamma^{-1/4} \bar{p}_i \gamma^{1/4}\right) + \left(\frac{N}{c} - 1\right) mc^2 + \frac{N}{c}\left[\frac{\gamma^{ij}\left(\gamma^{-1/4} \bar{p}_i \gamma^{1/4}\right) p_j}{2m} - \frac{\left(\gamma^{ij}\left(\gamma^{-1/4} \bar{p}_i \gamma^{1/4}\right) p_j\right)^2}{8m^3 c^2}\right] + O\left(\frac{1}{4^4}\right)$$

$$H = \gamma^{-1/4}\left[\frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}}{2m} + m\phi - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} + \frac{1}{c}\left(\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega \cdot L - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{4}}}{8m^3} + \frac{1}{2} m\phi^2 + \frac{3}{2m}\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}\right)\right]\gamma^{-1/4} \quad \text{(D.11)}$$

Persamaan Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi \quad \text{(D.12)}$$

Mendefinisikan ulang fungsi gelombang dan Hamiltonian

$$\phi' = \gamma^{1/4}\phi, \quad H' = \gamma^{1/4} H \gamma^{-1/4} \quad \text{(D.13)}$$

dengan memenuhi definisi diatas didapatkan

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi' = H'\phi'$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi' = \left[\frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{2}}}{2m} + m\phi - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} + \frac{1}{c}\left(\frac{4GMR^2}{5r^3}\omega \cdot \boldsymbol{L} - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{4}}}{8m^3} + \frac{1}{2} m\phi^2 + \frac{3}{2m}\bar{\boldsymbol{p}}.\phi\bar{\boldsymbol{p}}\right)\right] \quad \text{(D.14)}$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **DIAN EKO PAMBUDI**
NIM : **10640028**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/ Fisika**
Judul Skripsi : **Studi Efek Gravitasi Partikel Fermion Dan Boson Dalam Ruangwaktu Melengkung**
Pembimbing I : **Arista Romadani, M.Sc.**
Pembimbing II : **Drs. Abdul Basid, M.Si**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	Kamis/21 Januari 2021	Konsultasi Bab I, II,dan III	
2	Jumat/28 Januari 2021	Konsultasi Bab I, II,dan III	
3	Rabu/1 Maret 2021	Konsultasi Bab I, II,dan III	
4	Rabu/29 Maret 2021	ACC Bab I, II, dan III	
5	Rabu/25 Agustus 2021	Konsultasi Bab IV	
6	Kamis/30 September 2021	Konsultasi Integrasi	
7	Senin/25 Oktober 2021	Konsultasi Bab IV	
8	Jumat/12 November 2021	ACC Bab IV	
9	Senin/17 Januari 2022	Konsultasi semua Bab, Abstrak dan ACC	
10	Senin/24 Januari 2022	Konsultasi integrasi dan ACC	
11	Kamis/3 Februari 2022	Konsultasi penulisan semua Bab dan ACC	

Malang, 21 Maret 2022
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika,

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002