INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA GRAF KOPRIMA DARI GRUP MATRIKS *UPPER UNITRIANGULAR* ATAS RING BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD ARIS ABDILLAH
NIM. 15610109

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA GRAF KOPRIMA DARI GRUP MATRIKS *UPPER UNITRIANGULAR* ATAS RING BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Oleh
Muhammad Aris Abdillah
NIM. 15610109

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA GRAF KOPRIMA DARI GRUP MATRIKS *UPPER UNITRIANGULAR* ATAS RING BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Aris Abdillah
NIM. 15610109

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 10 Januari 2022

Pembimbing I	Pembimbing II
Dewi Ismiarti, M.Si NIDT. 19870505 20160801 2 058	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA GRAF KOPRIMA DARI GRUP MATRIKS *UPPER UNITRIANGULAR* ATAS RING BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Aris Abdillah
NIM. 15610109

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 04 Februari 2022

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	:	Muhammad Aris Abdillah
NIM	:	15610109
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua Graf Koprima dari Grup Matriks Upper Unitriangular atas Ring Bilangan Bulat Modulo

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Januari 2022
Yang membuat pernyataan

Muhammad Aris Abdillah
NIM. 15610109

MOTO

“Perbaikilah hatimu, maka akan baik segala perilakumu”

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur penulis persembahkan skripsi ini kepada

Bapak Mashuri dan Ibu Kiptiyah, serta adik Anida Mu'arifatul Fitria yang selalu memberikan semangat, wejangan dan doa kepada penulis agar dimudahkan dalam mencari ilmu.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur penulis haturkan kepada Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmatnya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Tak lupa shalawat serta salam selalu tercurah kepada Baginda Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing umat manusia menuju jalan kebenaran.

Suatu kebahagiaan bagi penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang tentunya tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu patutlah penulis sampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, MA selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan dosen wali penulis.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang selalu sabar memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis.
5. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dengan baik.
6. Seluruh dosen dan staf administrasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan informasi kepada penulis.

7. Bapak, ibuk, dan adik tercinta yang selalu mengingatkan, memberi semangat dan motivasi, serta mendoakan penulis agar diberi kelancaran dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
8. Teman-teman angkatan 2015 dan teman-teman pondok penulis yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis agar segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak yang ikut terlibat dalam penyelesaian skipsi ini.

Dengan mengharapkan rida dari Allah SWT, semoga amal baik dari semua pihak telah disebutkan diterima di sisi Allah. Penulis juga berharap semoga skripsi ini bermanfaat kepada orang yang membacanya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 10 Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Abdillah, Muhammad Aris. 2022. **Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua Graf Koprima dari Grup Matriks *Upper Unitriangular* atas Ring Bilangan Bulat Prima**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Indeks eksentrisitas Zagreb pertama, indeks eksentrisitas Zagreb kedua, graf koprima, matriks *upper unitriangular*

Graf koprima dari suatu grup G adalah graf Γ_G dengan G sebagai himpunan titiknya dan dua titik berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika orde keduanya relatif prima. Misalkan p adalah bilangan prima, maka G_p melambangkan grup perkalian matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo p. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui graf koprima Γ_{G_p} serta menentukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua dari graf koprima Γ_{G_p} untuk $p \geq 3$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$
2. Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
$$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$$

ABSTRACT

Abdillah, Muhammad Aris. 2022. **First and Second Zagreb Eccentricity Indices on Coprime Graph of Upper Unitriangular Matrix Group over Ring of Integers Modulo Prime. Thesis.** Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: First Zagreb eccentricity index, second Zagreb eccentricity index, coprime graph**,** upper unitriangular matrices.

Coprime graph of a group G is graph Γ_G with G is as its set of vertices and the two distinct vertices are adjacent if and only if order of both of them are relatively prime. Let p is a prime number, then G_p denote the multiplicative group of 2×2 upper unitriangular matrices over ring of integers modulo p. The purposes of this research are to find out coprime graph Γ_{G_p} and then find first and second Zagreb eccentricity indices of coprime graph Γ_{G_p} for $p \geq 3$. The research method that used is library research. The results of this research are as follows.

1. First Zagreb eccentricity index of coprime graph Γ_{G_p} is
$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$
2. Second Zagreb eccentricity index of coprime graph Γ_{G_p} is
$$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$$

مستخلص البحث

عبدالله، محمد اريس. ٢٠٢٢. **مؤشر الإنحراف الزغرب الأول والثاني على البيان Coprime لزمرة المصفوفة *Upper Unitriangular* على حلقة الأعداد الصحيحة Modulo Prime**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١) ديوي إسميارتي، الماجستير. (٢) محمد نافع جوهري، الماجستير.

الكلماة الرئيسية: مؤشر الإنحراف الزغرب الأول، مؤشر الإنحراف الزغرب الثاني، البيان coprime، المصفوفة *upper unitriangular*.

البيان coprime لزمرة G هو البيان Γ_G حيث كانت G مجموعة الرؤوس من Γ_G والرؤوسان المختلفتان مجاوران إذا وفقط إذا كانت رتبة كل منهما أوليا نسبيا. دع p يكون عدد أولي، إذا G_p دلت زمرة الضربي من المصفوفات *upper unitriangular* 2×2 على حلقة الأعداد الصحيحة modulo prime. الأغراض في هذا البحث هي لمعرفة البيان coprime Γ_{G_p} ووجد مؤشر الإنحراف الزغرب الأول والثاني على البيان coprime Γ_{G_p} مع $p \geq 3$. طريقة البحث المستخدمة هنا هي دراسة مكتبيّة. وأما نتائج هذا البحث هي:

١. مؤشر الإنحراف الزغرب الأول من البيان coprime Γ_{G_p} هو
$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$

٢. مؤشر الإنحراف الزغرب الثاني من البيان coprime Γ_{G_p} هو
$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan satu kajian ilmu matematika yang banyak diterapkan dalam kehidupan manusia. Penerapan teori graf mencakup berbagai disiplin ilmu, seperti biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu-ilmu sosial (Abdussakir, Azizah, & Nofandika, 2009). Dalam teknik informatika, teori graf berperan penting seperti menciptakan *link* yang ada di internet, aplikasi *Global Positioning System* (GPS), kecerdasan buatan, dan hal-hal lain.

Suatu graf G didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong dan berhingga V dari objek-objek yang disebut *titik*, bersama himpunan yang mungkin kosong E dari himpunan-himpunan 2 unsur dari V yang disebut dengan *sisi* (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016). Dalam graf G, pasangan dua titik berbeda di E dikatakan juga *terhubung langsung*.

Relasi antar himpunan titik dengan himpunan sisi merupakan inti pembahasan dari teori graf. Relasi tersebut digambarkan sebagai relasi terhubung langsung antara dua titik berbeda oleh suatu sisi di graf maupun relasi terkait langsung suatu titik dengan suatu sisi. Suatu titik akan terhubung langsung dengan suatu titik lain jika memenuhi kondisi tertentu.

Allah telah memerintahkan Nabi Muhammad SAW untuk melakukan perjalanan isra’ dari Masjidil Haram menuju Masjidil Aqsa kemudian mi’raj dari

Masjidil Aqsa menuju Sidratul Muntaha untuk menerima perintah menjalankan salat lima waktu. Dalam Al Quran surat al-Isra’ ayat pertama Allah menjelaskan:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِي أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَٰرَكْنَا حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَٰتِنَآ إِنَّهُۥ

هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya:
Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya (Muhammad) pada malam hari dari Masjidil Haram menuju Masjidil Aqsa yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian tanda-tanda (kebesaran) Kami. Sesungguhnya Dia Maha Mendengar, lagi Maha Melihat.

Ayat ini memberikan gambaran kepada kita perjalanan singkat di waktu malam yang dilakukan Nabi Muhammad dari titik awal di Masjidil Haram menuju Masjidil Aqsa, kemudian menuju titik terakhir yaitu Sidrotul Muntaha untuk bertemu dengan Allah dan diberi perintah menjalankan sholat lima waktu. Allah memberikan kenikmatan kepada Nabi dalam perjalanan tersebut berupa diperlihatkannya tanda-tanda kekuasaan Allah yang luar biasa dan dipertemukan oleh para rasul sebelumnya (Al-Mahally & As-Suyuti, 2010).

Penelitian-penelitian tentang graf sering berkaitan dengan teori aljabar abstrak. Salah satu contoh struktur dalam aljabar abstrak adalah grup. Menurut Gallian (2013), grup adalah suatu himpunan dengan satu operasi biner yang memenuhi kondisi tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap unsurnya memiliki invers.

Graf koprima dari suatu grup merupakan suatu graf yang sering diteliti oleh para ahli matematika. Graf koprima dari grup G didefinisikan sebagai graf yang titik-titiknya adalah unsur-unsur di G dan dua titik berbeda di graf tersebut terhubung langsung jika orde dari unsur-unsur grup G saling relatif prima (Dorbidi, 2016).

Penelitian tentang graf koprima telah dilakukan oleh Ma, Wei, dan Yang (2014) dengan judul "The Coprime Graph of a Group". Penelitian lain tentang graf koprima juga dilakukan oleh Dorbidi (2016), dengan judul "A Note of the Coprime Graph of a Group". Selanjutnya, penelitian dilakukan oleh Alraqad, Saeed, dan Alshawarbeh (2021), dengan judul "Classification of Groups According to the Number of End Vertices in the Coprime Graph".

Grup perkalian matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima merupakan kajian teori grup yang dapat diteliti grafnya. Grup ini merupakan grup yang hampir komutatif. Dikatakan hampir komutatif karena dua unsur dari grup yang ordenya relatif prima pasti komutatif (Gupta, Shetty, & Lokesha, 2016). Adapun matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima adalah jenis dari matriks segitiga atas (*upper triangular*) dengan entri-entri dari matriks tersebut merupakan unsur dari ring bilangan bulat modulo dan entri pada diagonal utama matriks tersebut adalah satu (Oliinyk & Sushchanskii, 2000).

Selanjutnya, graf tertentu dari grup perkalian matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo dapat dicari indeks-indeks topologinya, seperti indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan indeks eksentrisitas Zagreb kedua. Salah satu penelitian mengenai hal tersebut yaitu penelitian yang dilakukan oleh Gupta, Shetty, dan Lokesha (2016) dalam artikelnya yang berjudul "On the Graph of Nilpotent Matrix Group of Lenght One".

Penelitian dalam skripsi ini mendasarkan masalahnya pada dua penelitian dari Gupta, Shetty, dan Lokesha (2016) dan Dorbidi (2016). Dari penelitian Gupta, Shetty, dan Lokesha (2016), diambil materi tentang grup perkalian matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo n dan indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua. Adapun dari Dorbidi (2016) diambil materi tentang graf koprima. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua graf koprima dari grup perkalian matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian, rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana indeks eksentrisitas Zagreb pertama graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima?
2. Bagaimana indeks eksentrisitas Zagreb kedua graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui bentuk umum indeks eksentrisitas Zagreb pertama graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima.

2. Untuk mengetahui bentuk umum indeks eksentrisitas Zagreb kedua graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima.
2. Memberikan informasi tentang indeks eksentrisitas Zagreb kedua graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima yang dimaksud adalah grup terhadap operasi perkalian matriks dan matriksnya berukuran 2×2. Sedangkan bilangan primanya dibatasi untuk bilangan prima $p, p \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*). Beberapa literatur yang digunakan pada penelitian ini berasal dari buku-buku dan artikel-artikel matematika. Literatur tersebut digunakan untuk mengkaji beberapa definisi dan sifat-sifat dari objek yang akan dibahas. Adapun langkah-langkah dari penelitian ini antara lain:

1. Menentukan himpunan titik pada graf koprima dari grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima Γ_{G_p} untuk $p = 3, 5, 7$.
2. Menentukan keterhubungan titik pada Γ_{G_p} untuk $p = 3, 5, 7$.
3. Merumuskan teorema tentang himpunan titik dan keterhubungan titik pada graf koprima Γ_{G_p} dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.
4. Merumuskan lemma eksentrisitas titik pada graf koprima Γ_{G_p} untuk bilangan prima $p \geq 3$.
5. Menentukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf koprima Γ_{G_p} dengan $p = 3,5,7$.
6. Merumuskan teorema indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf koprima Γ_{G_p} dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.
7. Menentukan indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf koprima Γ_{G_p} dengan $p = 3,5,7$.
8. Merumuskan teorema indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf koprima Γ_{G_p} dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini terdiri dari empat bab dan setiap bab terdiri dari beberapa subbab. Sistematika penulisan ini bertujuan agar penelitian mudah dipahami. Adapun sistematika penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I	Pendahuluan, yang meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
Bab II	Kajian pustaka, yang meliputi: faktor persekutuan terbesar, kongruensi bilangan bulat, grup, ring, ring bilangan bulat modulo, matriks 2×2 upper unitriangular atas ring bilangan bulat modulo, grup perkalian matriks 2×2 upper unitriangular atas ring bilangan bulat modulo, graf, graf koprima, indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua, dan kajian nilai keislaman.
Bab III	Pembahasan, pada bab ini akan ditemukan bentuk dari graf koprima dari grup perkalian matriks 2×2 upper unitriangular atas ring bilangan bulat modulo prima dan kemudian ditemukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf koprima.
Bab IV	Penutup, pada bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Faktor Persekutuan Terbesar

Definisi 2.1.1

Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak keduanya nol. *Faktor persekutuan terbesar* dari a dan b yang ditulis dengan (a, b) adalah bilangan bulat positif terbesar q sehingga q membagi a dan q membagi b (Lee, 2018).

Definisi 2.1.2

Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak keduanya nol. Maka dikatakan bahwa a dan b *relatif prima* jika $(a, b) = 1$ (Lee, 2018).

Contoh 2.1.1

Bilangan-bilangan bulat 2 dan 3 adalah relatif prima karena $(2, 3) = 1$.

Definisi 2.1.3

Suatu bilangan $p \in \mathbb{N}$ dengan $p > 1$ disebut *bilangan prima* jika p hanya mempunyai pembagi positif 1 dan p. Bilangan-bilangan p selain bilangan prima disebut *bilangan komposit* (Lee, 2018).

Contoh 2.1.2

2,3,5, dan 7 adalah bilangan-bilangan prima.

2.2 Kongruensi Bilangan Bulat

Definisi 2.2.1

Suatu *relasi ekivalen* R pada suatu himpunan S adalah suatu himpunan pasangan terurut unsur-unsur di S yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Refleksif, yaitu $(a, a) \in R$ untuk semua $a \in S$.
2. Simetris, yaitu $(a, b) \in R$ menyebabkan $(b, a) \in R$.
3. Transitif, yaitu $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ menyebabkan $(a, c) \in R$.

Jika R adalah relasi ekivalen pada himpunan S, maka $(a, b) \in R$ dapat ditulis dengan aRb (Gallian J. A., 2013).

Definisi 2.2.2

Misalkan R adalah suatu relasi ekivalen pada suatu himpunan S dan $b \in S$. *Kelas ekivalen yang memuat b* didefinisikan sebagai suatu subhimpunan yang dinyatakan dengan

$$[b] = \{a \in S | aRb\}$$

(Gallian J. A., 2013).

Definisi 2.2.3

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dan $m > 1$. Misalkan a dan b keduanya bilangan bulat, dikatakan bahwa *a kongruen b* modulo m jika dan hanya jika $a - b$ adalah kelipatan dari m dan dapat ditulis dengan $a \equiv b \ (mod\ m)$. Jika $0 \leq r < m$ maka $a \equiv r \ (mod\ m)$ dapat dituliskan $r = a \ mod\ m$ (Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh 2.2.1

$20 \equiv 2 \ (mod\ 6)$ karena $20 - 2 = 3 \cdot 6$.

Teorema 2.2.1

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dan $m > 1$. Relasi kongruensi modulo m yang didefinisikan dengan $aRb \Leftrightarrow a \equiv b \ (mod\ m)$ adalah relasi ekivalen pada $\mathbb{Z}$ (Gilbert & Gilbert, 2015).

Bukti:

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Perhatikan bahwa

$$a - a = 0 = 0 \cdot m.$$

Artinya $a \equiv a \ (mod\ m)$. Jadi relasi kongruensi modulo m bersifat refleksif.

2. Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ maka $a - b = pm$ untuk suatu $p \in \mathbb{Z}$. Sehingga diperoleh $b - a = -pm$, dengan $-p \in \mathbb{Z}$. Artinya $b \equiv a \ (mod\ m)$.

   Jadi relasi kongruensi modulo m memenuhi sifat simetris.

3. Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan $b \equiv c \ (mod\ m)$ maka $a - b = pm$ untuk suatu $p \in \mathbb{Z}$ dan $b - c = qm$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Sehingga diperoleh

$$a - c = a - b + b - c = pm + qm = (p + q)m.$$

   Artinya $a \equiv c \ (mod\ m)$.

   Jadi relasi kongruensi modulo m memenuhi sifat transitif.

Dengan demikian, relasi kongruensi modulo m adalah relasi ekivalen pada $\mathbb{Z}$.

Kelas-kelas ekivalen dari relasi kongruensi modulo m merupakan subhimpunan-subhimpunan dari $\mathbb{Z}$ yang saling lepas. Subhimpunan-subhimpunan tersebut disebut dengan *kelas-kelas kongruensi modulo m*. Berdasarkan Definisi 2.2.2, diperoleh kelas kongruensi yang memuat a:

$$\begin{aligned}
[a] &= \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a(mod\ m)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = km, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = a + km, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a + km |\ k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$. Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan misalkan $x \in [a]$ maka $x \equiv a \ (mod\ m)$, dengan sifat transitif diperoleh $x \equiv b \ (mod\ m)$. Oleh karena itu $x \in [b]$. Jadi $[a] \subseteq [b]$. Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh $[b] \subseteq [a]$.

Dengan demikian $[a] = [b]$. Sebaliknya jika $[a] = [b]$, karena $a \in [a]$ maka $a \in [b]$. Oleh karena itu $a \equiv b \ (mod\ m)$. Dengan demikian

$$[a] = [b] \Leftrightarrow a \equiv b \ (mod\ m) \Leftrightarrow a - b = mk, k \in \mathbb{Z}.$$

Sehingga terdapat m kelas kongruensi modulo m berbeda sebagai berikut

$$[0] = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -2m + 1, -m + 1, 1, m + 1, 2m + 1, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -2m + 2, -m + 2, 2, m + 2, 2m + 2, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$[m - 1] = \{\dots, -m - 1, -1, m - 1, 2m - 1, 3m - 1, \dots\}.$$

Jika $m = 3$, diperoleh kelas-kelas kongruensi modulo m sebagai berikut:

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

Kumpulan kelas-kelas kongruensi modulo m yang berbeda membentuk suatu himpunan dan disimbolkan dengan $\mathbb{Z}_m$. Jadi himpunan $\mathbb{Z}_m$ dituliskan dengan:

$$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], \dots, [m - 1]\}.$$

Selanjutnya, untuk menyederhanakan penulisan, $[a]$ dituliskan sebagai $\bar{a}$. Dengan demikian,

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m - 1}\}.$$

2.3 Grup

Definisi 2.3.1

Misalkan G adalah suatu himpunan. Suatu *operasi biner* pada G adalah pemetaan yang memasangkan setiap pasangan berurut unsur-unsur dari G ke satu unsur dari

G. Artinya, operasi biner adalah cara mengombinasikan dua unsur dari G untuk menghasilkan satu unsur baru di G, sehingga operasi biner bersifat tertutup (Gallian J. A., 2013).

Definisi 2.3.2

Misalkan G adalah suatu himpunan bersama suatu operasi biner pada G (disebut sebagai perkalian dan hasil operasi dari (a, b) dinotasikan dengan ab) dikatakan sebagai suatu *grup* terhadap perkalian jika memenuhi tiga sifat-sifat berikut.

1. Asosiatif.

   Operasi biner pada G bersifat asosiatif. Artinya, untuk semua a, b, c di G, berlaku

$$(ab)c = a(bc).$$

2. Unsur identitas

   Terdapat suatu unsur identitas e di G, sehingga

$$ae = a = ea$$

   untuk semua unsur a di G.

3. Unsur invers

   Untuk setiap unsur a di G terdapat suatu unsur b di G sehingga

$$ab = ba = e.$$

   Dalam hal ini, b dikatakan sebagai invers dari a. Selanjutnya, unsur invers dari a dilambangkan dengan a^{-1} (Gallian, 2013).

Dengan kata lain, grup G adalah himpunan disertai operasi biner yang tertutup di G yang bersifat asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap unsur-unsurnya mempunyai suatu unsur invers. Jika pada grup G berlaku sifat $ab = ba$ untuk setiap pasangan unsur a dan b, maka G dikatakan sebagai *grup komutatif*. Suatu grup dikatakan *grup tidak komutatif*, jika terdapat pasangan unsur a dan b, memenuhi $ab \neq ba$ (Gallian J. A., 2013).

Contoh 2.3.1

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$, dan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ ketiganya adalah grup terhadap operasi penjumlahan biasa.

Definisi 2.3.3

Banyaknya unsur dari suatu grup (grup hingga atau tak hingga) disebut *orde dari grup*. Orde dari suatu grup G dinotasikan dengan $|G|$. Adapun *orde dari suatu unsur g di G* adalah suatu bilangan bulat positif terkecil n sehingga $g^n = e$. (dalam notasi penjumlahan dapat ditulis dengan $gn = 0$). Jika sebarang bilangan bulat positif n tidak memenuhi kondisi $g^n = e$, maka dikatakan bahwa g memiliki *orde tak hingga*. Orde dari suatu unsur g dinotasikan dengan $|g|$ (Gallian J. A., 2013).

Definisi 2.3.4

Misalkan G adalah suatu grup. Suatu subhimpunan H dari G disebut *subgrup* dari G jika H adalah suatu grup terhadap operasi di G (Gilbert & Gilbert, 2015).

Definisi 2.3.5

Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Didefinisikan

1. $a^0 = e$,
2. $a^1 = a$,
3. $a^{k+1} = a^k \cdot a$, untuk sebarang bilangan bulat positif k,
4. $a^{-k} = (a^{-1})^k$, untuk sebarang bilangan bulat positif k.

(Gilbert & Gilbert, 2015)

Teorema 2.3.1

Misalkan x dan y adalah unsur-unsur dari grup G, dan misalkan m dan n adalah bilangan-bilangan bulat. Maka,

1. $x^n \cdot x^{-n} = e$
2. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
3. $(x^m)^n = x^{mn}$
4. Jika G adalah grup komutatif, maka $(xy)^n = x^n y^n$.

(Gilbert & Gilbert, 2015)

Misalkan G adalah suatu grup dan misalkan a adalah suatu unsur di G. Himpunan

$$\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

adalah subgrup dari G dan disebut sebagai *subgrup siklis* yang dibangun oleh a. Selanjutnya, G disebut *grup siklis* jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \langle a \rangle$. Dalam hal ini, a disebut pembangun dari G (Gallian J. A., 2013).

Teorema 2.3.2

Misalkan G adalah suatu grup dan misalkan a adalah suatu unsur di G. Jika a mempunyai orde tak hingga, maka $a^i = a^j$ jika dan hanya jika $i = j$. Jika a mempunyai orde berhingga n, maka $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan $a^i = a^j$ jika dan hanya jika n membagi $i - j$ (Gallian J. A., 2013).

Bukti:

Jika a mempunyai orde tak hingga, maka tidak terdapat suatu bilangan bulat positif n sehingga $a^n = e$. Jika $i = j$ maka jelas bahwa $a^i = a^j$. Sebaliknya, misalkan $a^i = a^j$ dan andaikan $i \neq j$. Asumsikan $i > j$, maka $i - j > 0$ dan

$$a^{i-j} = a^i \cdot a^{-j} = a^j \cdot a^{-j} = e.$$

Artinya terdapat bilangan bulat $i - j > 0$ sehingga $a^{i-j} = e$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa tidak terdapat suatu bilangan bulat positif n sehingga $a^n = e$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $a^i = a^j$ jika dan hanya jika $i = j$.

Selanjutnya, dimisalkan a mempunyai orde berhingga, dimisalkan $|a| = n$. Akan dibuktikan bahwa $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$. Jelas bahwa $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ termuat di $\langle a \rangle$ sehingga $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \subseteq \langle a \rangle$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $\langle a \rangle \subseteq \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$. Dimisalkan a^k adalah sebarang unsur di $\langle a \rangle$. Berdasarkan algoritma pembagian, terdapat bilangan bulat q dan r sehingga

$$k = qn + r \text{ dengan } 0 \leq r < n.$$

Diperoleh

$$a^k = a^{qn+r} = a^{qn}a^r = a^{nq}a^r = (a^n)^q a^r = e^q a^r = ea^r = a^r,$$

sehingga $a^k \in \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$. Oleh karena itu, $\langle a \rangle \subseteq \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan terbukti bahwa $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $a^i = a^j$ jika dan hanya jika n membagi $i - j$. Jika $a^i = a^j$ maka

$$a^{i-j} = a^i \cdot a^{-j} = a^j \cdot a^{-j} = e.$$

Dengan menggunakan algoritma pembagian, terdapat q dan r bilangan bulat, sehingga

$$i - j = qn + r \text{ dengan } 0 \leq r < n.$$

Perhatikan $a^{i-j} = a^{qn+r}$ dan diperoleh

$$e = a^{i-j} = a^{qn+r} = a^{qn}a^r = a^{nq}a^r = (a^n)^q a^r = e^q a^r = ea^r = a^r.$$

Karena n merupakan bilangan bulat positif terkecil sehingga $a^n = e$, maka haruslah $r = 0$. Akibatnya, $i - j = qn$ dan terbukti bahwa n membagi $i - j$. Sebaliknya, dimisalkan $i - j = nq$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$, maka

$$a^{i-j} = a^{nq} = (a^n)^q = e^q = e.$$

Selanjutnya diperoleh

$$a^i = a^{i-j+j} = a^{i-j}a^j = ea^j = a^j.$$

Jadi $a^i = a^j$ jika dan hanya jika n membagi $i - j$.

Akibat 2.3.1

Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$, maka $|a| = |\langle a \rangle|$ (Gallian J. A., 2013).

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.3.2, jika $|a| = n$, maka $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan $a^i = a^j$ jika dan hanya jika n membagi $i - j$. Akibatnya banyaknya unsur dari $\langle a \rangle$ adalah n. jadi, $|a| = |\langle a \rangle|$.

Definisi 2.3.6

Misalkan G adalah suatu grup dan H adalah subhimpunan tak kosong dari G. Jika H adalah suatu subgrup dari G dan $a \in G$. Didefinisikan *koset kiri* dari H di G yang diwakili oleh a adalah himpunan

$$aH = \{ah | h \in H\}.$$

Koset kanan dari H di G yang diwakili oleh a adalah himpunan

$$Ha = \{ha | h \in H\}.$$

(Gallian J. A., 2013)

Lemma 2.3.1

Misalkan H adalah subgrup dari grup G dan $a, b \in G$. Maka

1. $a \in aH$.
2. $aH = H$ jika dan hanya jika $a \in H$.
3. $aH = bH$ jika dan hanya jika $a \in bH$.
4. $aH = bH$ atau $aH \cap bH = \emptyset$.

5. $|aH| = |bH|$.

(Gallian J. A., 2013)

Teorema 2.3.3 (Teorema Lagrange)

Jika G adalah suatu grup hingga dan H adalah subgrup dari G, maka $|H|$ membagi $|G|$. Khususnya, banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H di G adalah $|G|/|H|$ (Gallian J. A., 2013).

Bukti:

Misalkan $a_1H, a_2H, \dots, a_rH$ adalah semua koset kiri berbeda dari H di G. Maka, untuk masing-masing unsur $a \in G$, diperoleh $aH = a_iH$ untuk suatu i, $1 \leq i \leq r$. Oleh karena itu, $a \in a_iH$. Sehingga, G dapat dinyatakan sebagai gabungan koset-koset kiri dari H di G yang ditulis dengan

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_rH.$$

Kemudian, sifat 4 dari Lemma 2.3.1 mengakibatkan $a_iH \cap a_jH = \emptyset$ untuk $i \neq j$. Sehingga diperoleh

$$|G| = |a_1H| + |a_2H| + \cdots + |a_rH|.$$

Karena $|a_iH| = |H|$ untuk setiap i, diperoleh $|G| = r|H|$. Jadi $|H|$ membagi $|G|$ dan banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H di G adalah $|G|/|H|$.

Akibat 2.3.2

Misalkan G adalah suatu grup hingga dan $a \in G$. Maka, $|a|$ membagi $|G|$ (Gallian J. A., 2013).

Bukti:

Perhatikan bahwa berdasarkan Akibat 2.3.1, $|a| = |\langle a \rangle|$. Selanjutnya karena G hingga berdasarkan Teorema 2.3.3 (Teorema Lagrange), $|\langle a \rangle|$ membagi $|G|$. Oleh karena itu diperoleh $|a|$ membagi $|G|$.

Akibat 2.3.3

Misalkan G adalah suatu grup berorde prima. Maka, G adalah suatu grup siklis. Khususnya, sebarang unsur $a \in G$ dengan $a \neq e$ akan membangun G (Gallian J. A., 2013).

Bukti:

Misalkan $|G| = p$ dengan p adalah suatu bilangan prima. Misalkan $a \in G$ dan $a \neq e$. Maka, $|\langle a \rangle|$ membagi $|G|$ dan $|\langle a \rangle| \neq 1$. Oleh karena itu, $|\langle a \rangle| = p = |G|$. Jadi $\langle a \rangle = G$ dan terbukti bahwa G adalah grup siklis.

2.4 Ring

Definisi 2.4.1

Suatu ring R adalah suatu himpunan dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan (yang dinotasikan dengan $a + b$) dan perkalian (yang dinotasikan dengan ab) sehingga untuk semua x, y, z di R, memenuhi

1. $x + y = y + x$ (operasi penjumlahan bersifat komutatif)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (operasi penjumlahan bersifat asosiatif)
3. Terdapat unsur identitas penjumlahan $0 \in R$ sehingga $x + 0 = x$ untuk semua $x \in R$.
4. Untuk setiap $x \in R$ terdapat unsur invers penjumlahan $-x$ di R sehingga
$$x + (-x) = 0.$$
5. $x(yz) = (xy)z$ (operasi perkalian bersifat asosiatif).
6. $x(y + z) = xy + xz$ dan $(y + z)x = yx + zx$ (operasi perkalian bersifat distributif terhadap penjumlahan) (Gallian J. A., 2013).

Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa ring R adalah suatu grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, perkalian di R bersifat asosiatif dan bersifat distributif terhadap penjumlahan. Ring R dikatakan *ring komutatif* jika perkalian pada R bersifat komutatif. Unsur identitas terhadap perkalian di R disebut *unity (unsur kesatuan)*, adapun unsur tak nol yang memiliki unsur invers terhadap perkalian di R disebut *unit dari R* (Gallian J. A., 2013).

2.5 Ring Bilangan Bulat Modulo

Teorema 2.5.1

Misalkan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan $c \equiv d \ (mod\ m)$ maka

$$a + c \equiv b + d \ (mod\ m) \qquad \text{dan} \qquad ac \equiv bd \ (mod\ m)$$

(Gilbert & Gilbert, 2015)

Bukti:

Misalkan $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan $c \equiv d \ (mod\ m)$. Artinya

$$a - b = mk, \text{untuk suatu } k \in \mathbb{Z}$$

dan

$$c - d = ml, \text{untuk suatu } l \in \mathbb{Z}.$$

Perhatikan bahwa

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = mk + ml = m(k + l).$$

Dengan demikian $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$.

Perhatikan bahwa

$$ac - bd = a(c - d) + (a - b)d = a(ml) + (mk)d = m(al + kd).$$

Dengan demikian $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.

Teorema 2.5.2

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dengan $m > 1$. Penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan pada $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

dan

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

dengan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}_m$. Selanjutnya dengan operasi tersebut, $\mathbb{Z}_m$ merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Bukti:

1. Penjumlahan adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}_m$

   Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ maka $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m$

   Misalkan $\bar{a} = \bar{c}$ dan $\bar{b} = \bar{d}$ maka $a \equiv c \ (mod\ m)$ dan $b \equiv d \ (mod\ m)$.

   Berdasarkan Teorema 2.5.1, $a + b \equiv c + d \ (mod\ m)$, artinya $\overline{a + b} = \overline{c + d}$. Jadi penjumlahan tersebut adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}_m$.

2. Operasi penjumlahan bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_m$.

   Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

   $$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a + b} \\ &= \overline{b + a} \\ &= \bar{b} + \bar{a} \end{aligned}$$

   Jadi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$ bersifat komutatif.

3. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_m$

   Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, maka

   $$\begin{aligned} \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} + \overline{b + c} \\ &= \overline{a + (b + c)} \end{aligned}$$

$$= \overline{(a+b)+c}$$

$$= \overline{a+b} + \bar{c}$$

$$= \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c}$$

Jadi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif.

4. $\bar{0}$ adalah unsur identitas terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$.

   Ambil $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

$$\bar{0} + \bar{a} = \overline{0+a} = \bar{a} \qquad \text{dan} \qquad \bar{a} + \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a}$$

5. Ambil $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

$$\bar{a} + (\overline{-a}) = \overline{a + (-a)} = \bar{0} \qquad \text{dan} \qquad \overline{-a} + \bar{a} = \overline{-a + a} = \bar{0}.$$

   Jadi $-\bar{a} = \overline{-a}$.

6. Perkalian adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}_m$

   Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ maka $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \in \mathbb{Z}_m$

   Misalkan $\bar{a} = \bar{c}$ dan $\bar{b} = \bar{d}$ maka $a \equiv c \ (mod\ m)$ dan $b \equiv d \ (mod\ m)$

   Berdasarkan Teorema 2.5.1, $ab \equiv cd \ (mod\ m)$, artinya $\overline{ab} = \overline{cd}$.

   Jadi perkalian tersebut adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}_m$.

7. Operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif.

   Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$. Maka diperoleh

$$\bar{a}\left(\bar{b}\bar{c}\right) = \bar{a}\overline{bc}$$

$$= \overline{a(bc)}$$

$$= \overline{(ab)c}$$

$$= \overline{ab}\bar{c}$$

$$= \left(\bar{a}\bar{b}\right)\bar{c}$$

8. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$.

Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) &= \bar{a}\overline{(b+c)} \\ &= \overline{a(b+c)} \\ &= \overline{(ab)+(ac)} \\ &= \overline{(ab)} + \overline{(ac)} \\ &= (\bar{a}\bar{b}) + (\bar{a}\bar{c}) \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $(\bar{b}+\bar{c})\bar{a} = \bar{b}\bar{a} + \bar{c}\bar{a}$

9. $\bar{1}$ adalah unsur identitas terhadap operasi perkalian di $\mathbb{Z}_m$.

   Misalkan $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

$$\bar{1}\bar{a} = \overline{1a} = \bar{a} \qquad \text{dan} \qquad \bar{a}\bar{1} = \overline{a1} = \bar{a}$$

10. Operasi perkalian bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_m$.

    Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &= \overline{ab} \\ &= \overline{ba} \\ &= \bar{b}\bar{a} \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_m$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Ring ini disebut *ring bilangan bulat modulo* m. Operasi pada ring $\mathbb{Z}_m$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b \ (mod\ m)} \qquad \text{dan} \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b \ (mod\ m)}.$$

2.6 Matriks *Upper Unitriangular* 2×2 atas Ring Bilangan Bulat Modulo

Matriks *upper unitriangular* merupakan jenis khusus dari matriks segitiga atas (*upper triangular*). Pada subbab ini akan dijelaskan definisi dari matriks *upper unitriangular*.

Definisi 2.6.1

Misalkan R adalah suatu ring. Suatu matriks atas R adalah suatu susunan segi empat dari unsur-unsur di R dalam baris-baris horizontal dan kolom-kolom vertikal. Selanjutnya unsur-unsur tersebut dinamakan entri-entri dari matriks (Bronson & Costa, 2020).

Secara umum matriks A berukuran $p \times n$ dituliskan dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

yang mana matriks tersebut sering disingkat $[a_{ij}]_{p\times n}$ atau $[a_{ij}]$. Dalam notasi ini, a_{ij} menunjukkan entri dari matriks $[a_{ij}]_{p\times n}$ yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j (Bronson & Costa, 2020).

Jika matriks A mempunyai banyak baris dan kolom yang sama, $p = n$, maka A disebut sebagai suatu matriks persegi. Entri a_{ij} di A dengan $i = j$ disebut sebagai entri diagonal. Perhatikan matriks persegi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pada matriks tersebut, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ terletak pada dan membentuk diagonal utama (Bronson & Costa, 2020).

Definisi 2.6.2

Misalkan A adalah suatu matriks $m \times n$ dan B adalah suatu matriks $n \times p$. Hasil kali dari A dan B, dinotasikan dengan AB, adalah matriks $m \times p$ dengan unsur ke-(i,j) sama dengan penjumlahan dari hasil kali unsur-unsur yang bersesuaian dari baris ke-i dari matriks A dan kolom ke-j dari matriks B. Artinya, jika $AB = [c_{ij}]$ maka

$$c = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

(Rosen, 2012)

Contoh 2.6.1

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Maka, diperoleh

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix}.$$

Definisi 2.6.3

Suatu matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ untuk $n \geq 1$ disebut *matriks upper triangular* jika matriks tersebut mempunyai bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a_{i-1j} & a_{i-1j} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{ij} \end{pmatrix},$$

dengan $a_{ij} = 0$ jika $i > j$ (Bronson & Costa, 2020). Jenis khusus dari matriks upper triangular adalah *matriks upper unitriangular*. Matriks *upper unitriangular* atas suatu ring komutatif K adalah matriks yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1j} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{2j} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 & a_{i-1j} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dengan $a_{ij} \in K$ (Oliinyk & Sushchanskii, 2000). Matriks upper unitriangular A berukuran 2×2 ditulis dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

untuk suatu $a \in K$.

2.7 Grup Perkalian Matriks 2×2 *Upper Unitriangular* atas Ring Bilangan Bulat Modulo

Misalkan n adalah suatu bilangan bulat, $n > 1$. Didefinisikan himpunan matriks 2×2 upper unitriangular atas $\mathbb{Z}_n$ sebagai berikut:

$$G_n = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{x} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| \bar{0}, \bar{1}, \bar{x} \in \mathbb{Z}_n \right\}.$$

Akan dibuktikan bahwa G_n adalah suatu grup terhadap perkalian matriks.

1. G_n tertutup terhadap perkalian matriks.

   Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in G_n.$$

   Maka,

$$AB = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{a} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{b} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} + \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

   Karena $\mathbb{Z}_n$ tertutup terhadap penjumlahan maka $\bar{b} + \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$. Jadi terbukti bahwa G_n tertutup terhadap perkalian matriks.

2. Perkalian matriks pada G_n bersifat asosiatif

   Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in G_n.$$

   Maka,

$$A(BC) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{b} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{c} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} + \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{a} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \left(\bar{c} + \bar{b}\right) + \bar{a} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \left(\bar{c} + \bar{b}\right) + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} + \bar{b} + \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

dan

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{a} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{b} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{b} + \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \left(\bar{b} + \bar{a}\right) \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{c} + \left(\bar{b} + \bar{a}\right) \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{c} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{c} + \bar{b} + \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Karena $A(BC) = (AB)C$, terbukti bahwa perkalian matriks pada G_n bersifat asosiatif.

3. G_n memiliki suatu unsur identitas

Akan dibuktikan bahwa $I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ adalah identitas terhadap perkalian matriks di G_n.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in G_n$. Perhatikan bahwa

$$AI = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{a} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{a} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = A$$

dan

$$IA = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{0} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{a} + \bar{0} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{a} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = A.$$

Sehingga, terbukti bahwa I adalah unsur identitas di G_n.

4. Untuk setiap $A \in G_n$, terdapat unsur invers $A^{-1} \in G_n$ sehingga $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

   Misalkan $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dengan $\overline{-a} \in Z_n$. Maka,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{a} \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot (\overline{-a}) + \bar{a} \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot (\overline{-a}) + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= I$$

   dan

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \cdot \bar{1} + (\overline{-a}) \cdot \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{a} + (\overline{-a}) \cdot \bar{1} \\ \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{a} + \bar{1} \cdot \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = I.$$

   Sehingga, terbukti bahwa A^{-1} adalah unsur invers dari A di G_n.

Jadi, terbukti bahwa G_n adalah grup terhadap perkalian matriks.

Perhatikan G_n adalah grup berorde n. Misalkan p adalah bilangan prima dan

$$a = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

maka berdasarkan Akibat 2.3.3, diperoleh

$$G_p = \langle a \rangle = \left\{ a^0 = I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \dots, a^{p-1} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{p-1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

2.8 Graf

Definisi 2.8.1

Suatu graf G adalah suatu himpunan tak kosong dan berhingga V dari objek-objek yang disebut *titik*, bersama himpunan $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ yang anggotanya disebut dengan *sisi* (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Untuk menyatakan suatu graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dituliskan $G = (V, E)$. Untuk menekankan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, maka V dapat ditulis sebagai $V(G)$ dan E dapat ditulis sebagai $E(G)$. Suatu sisi $\{u, v\}$ dari G dapat dituliskan pula sebagai uv atau vu.

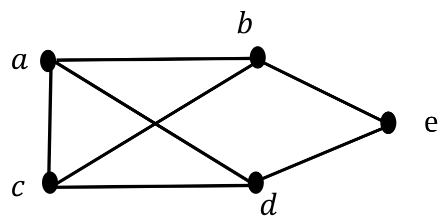
Contoh 2.8.1

Misalkan graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ sebagai berikut.

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

Berdasarkan $V(G)$ dan $E(G)$ diperoleh gambar graf G sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf G

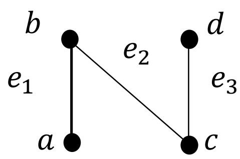
Definisi 2.8.2

Misalkan $e = \{u, v\}$ adalah suatu sisi dari graf G maka titik u dan v dikatakan terhubung langsung *(adjacent)*. Adapun u dan e serta v dan e dikatakan terkait langsung *(incident)*. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Berdasarkan Gambar 2.1, titik a dan b *terhubung langsung*, demikian juga a dan c, a dan d, b dan c, b dan e, c dan d, serta d dan e. Titik a dan e *tidak terhubung langsung*, demikian juga titik c dan e, serta titik b dan d.

Contoh 2.8.2

Misalkan graf P mempunyai himpunan titik $V(P) = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E(P) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = \{a, b\}$, $e_2 = \{b, c\}$, dan $e_3 = \{c, d\}$. Berdasarkan $V(P)$ dan $E(P)$ dapat digambarkan graf P sebagai berikut.



Gambar 2.2 Graf P

Definisi 2.8.3

Misalkan G adalah suatu graf dan misalkan u dan v adalah titik-titik (tidak harus berbeda) di G. *Jalan* $W: u - v$ pada graf G adalah barisan titik-titik di G yang diawali dari u dan diakhiri oleh v sehingga titik-titik yang berurutan di W terhubung langsung di G. Jalan W tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$W = (u = v_0, v_1, \cdots, v_k = v)$$

dengan $v_i v_{i+1} \in E(G)$ untuk $0 \leq i \leq k-1$. Banyaknya sisi yang terbentuk dari W disebut *panjang* dari W. Jika $v_0 \neq v_k$ maka W disebut *jalan terbuka*. Adapun *lintasan* didefinisikan sebagai jalan yang semua titiknya berbeda (Abdussakir, Azizah, & Nofandika, 2009).

Definisi 2.8.4

Misalkan u dan v adalah dua titik di suatu graf G. Titik u dan v *terhubung* di G jika terdapat suatu lintasan $u - v$ di G. Graf G dikatakan *graf terhubung* jika setiap dua titik u dan v terhubung (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Definisi 2.8.5

Misalkan G adalah graf terhubung dan misalkan u dan v adalah dua titik berbeda di G. *Jarak (distance)* dari u dan v di G, dinotasikan dengan $d(u,v)$, adalah panjang lintasan terpendek $u - v$ di G (Gupta, Shetty, & Lokesha, 2016).

Definisi 2.8.6

Misalkan G adalah graf terhubung dan misalkan u adalah suatu titik di G. *Eksentrisitas (eccentricity)* titik u, dinotasikan dengan $e(u)$, adalah maksimum jarak dari titik u ke titik v yang berbeda di G:

$$e(u) = \text{maks}\,\{d(u,v) | v \in V(G), v \neq u\}.$$

Jika u dan v adalah dua titik berbeda pada G, maka v disebut *titik eksentrik* dari u jika $e(u) = d(u,v)$ (Gupta, Shetty, & Lokesha, 2016).

Berdasarkan Gambar 2.2, diperoleh jarak dari masing-masing titik ke titik lain di graf G sebagai berikut:

$d(a,b) = 1$, $d(a,c) = 2$, $d(a,d) = 3$

$d(b,a) = 1$, $d(b,c) = 1$, $d(b,d) = 2$

$d(c,a) = 2$, $d(c,b) = 1$, $d(c,d) = 1$

$d(d,a) = 3$, $d(d,b) = 2$, $d(d,c) = 1$

Sehingga diperoleh eksentrisitas titik-titik di graf G adalah sebagai berikut:

$e(a) = 3, \quad e(b) = 2, \quad e(c) = 2, \quad e(d) = 3.$

2.9 Graf Koprima

Dari suatu grup dapat dibangun suatu graf. Salah satu jenis graf yang dibangun dari suatu grup adalah graf koprima. Definisi graf koprima dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.9.1

Misalkan G adalah suatu grup. Graf koprima dari G adalah suatu graf yang titik-titiknya adalah unsur-unsur di G dan dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $(|x|,|y|) = 1$. Graf koprima dari G dinotasikan dengan Γ_G (Dorbidi, 2016).

Contoh 2.9.1

Diberikan grup $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$ terhadap operasi penjumlahan. Graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah graf dengan himpunan titik

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}) = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}.$$

Misalkan $x, y \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7})$. Keterhubungan titik-titik di graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ dapat dilihat dalam tabel FPB dari orde unsur-unsur di $\mathbb{Z}_7$ sebagai berikut.

Tabel 2.1 Faktor Persekutuan Terbesar Orde Unsur di $\mathbb{Z}_7$

$(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert)$		y						
		$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
x	$\bar{0}$	1	1	1	1	1	1	1
	$\bar{1}$	1	7	7	7	7	7	7
	$\bar{2}$	1	7	7	7	7	7	7

	$\overline{3}$	1	7	7	7	7	7	7
	$\overline{4}$	1	7	7	7	7	7	7
	$\overline{5}$	1	7	7	7	7	7	7
	$\overline{6}$	1	7	7	7	7	7	7

Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh titik-titik berbeda di $V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7})$ yang terhubung langsung yaitu

$\overline{0}$ terhubung langsung dengan $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$

$\overline{1}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{2}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

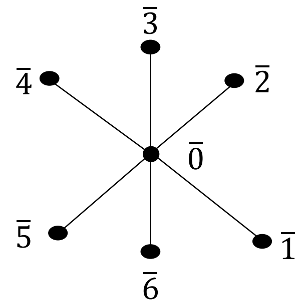
$\overline{3}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{4}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{5}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{6}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

Berdasarkan keterhubungan titik yang telah diperoleh, dapat digambarkan graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ sebagai berikut.



Gambar 2.3 Graf Koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$

2.10 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Definisi 2.10.1

Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan tak trivial. *Indeks eksentrisitas Zagreb pertama* dan *indeks eksentrisitas Zagreb kedua* dari graf G secara berturut-turut didefinisikan sebagai

$$E_1(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)^2$$

dan

$$E_2(G) = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} e(u)e(v)$$

(Gupta, Shetty, & Lokesha, 2016).

Perhatikan bahwa $E_1(G)$ merupakan hasil penjumlahan dari kuadrat eksentrisitas semua titik $v \in V(G)$ sedangkan $E_2(G)$ merupakan hasil penjumlahan dari perkalian eksentrisitas dua titik berbeda yang saling terhubung langsung.

Contoh 2.10.1

Perhatikan graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ pada Contoh 2.9.1. Dari Contoh 2.9.1 diperoleh eksentrisitas titik-titik pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ sebagai berikut.

a. Eksentrisitas titik $\bar{0}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$\begin{aligned} e(\bar{0}) &= \text{maks } \left\{d(\bar{0}, h) \middle| h \in V\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right) - \{\bar{0}\}\right\} \\ &= \text{maks } \{d(\bar{0}, \bar{1}), d(\bar{0}, \bar{2}), d(\bar{0}, \bar{3}), d(\bar{0}, \bar{4}), d(\bar{0}, \bar{5}), d(\bar{0}, \bar{6})\} \\ &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ &= \{1\}. \end{aligned}$$

b. Eksentrisitas titik $\bar{1}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$e(\bar{1}) = \text{maks } \left\{d(\bar{1}, h) \middle| h \in V\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right) - \{\bar{1}\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(\bar{1},\bar{0}), d(\bar{1},\bar{2}), d(\bar{1},\bar{3}), d(\bar{1},\bar{4}), d(\bar{1},\bar{5}), d(\bar{1},\bar{6})\}$

$= \text{maks}\,\{1, 2, 2, 2, 2, 2\}$

$= \{2\}.$

c. Eksentrisitas titik $\bar{2}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$e(\bar{2}) = \text{maks}\,\left\{d(\bar{2},h) \middle| h \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}) - \{\bar{2}\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(\bar{2},\bar{0}), d(\bar{2},\bar{1}), d(\bar{2},\bar{3}), d(\bar{2},\bar{4}), d(\bar{2},\bar{5}), d(\bar{2},\bar{6})\}$

$= \text{maks}\,\{1, 2, 2, 2, 2, 2\}$

$= \{2\}.$

d. Eksentrisitas titik $\bar{3}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$e(\bar{3}) = \text{maks}\,\left\{d(\bar{3},h) \middle| h \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}) - \{\bar{3}\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(\bar{3},\bar{0}), d(\bar{3},\bar{1}), d(\bar{3},\bar{2}), d(\bar{3},\bar{4}), d(\bar{3},\bar{5}), d(\bar{3},\bar{6})\}$

$= \text{maks}\,\{1, 2, 2, 2, 2, 2\}$

$= \{2\}.$

e. Eksentrisitas titik $\bar{4}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$e(\bar{4}) = \text{maks}\,\left\{d(\bar{4},h) \middle| h \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}) - \{\bar{4}\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(\bar{4},\bar{0}), d(\bar{4},\bar{1}), d(\bar{4},\bar{2}), d(\bar{4},\bar{3}), d(\bar{4},\bar{5}), d(\bar{4},\bar{6})\}$

$= \text{maks}\,\{1, 2, 2, 2, 2, 2\}$

$= \{2\}.$

f. Eksentrisitas titik $\bar{5}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$e(\bar{5}) = \text{maks}\,\left\{d(\bar{5},h) \middle| h \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}) - \{\bar{5}\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(\bar{5},\bar{0}), d(\bar{5},\bar{1}), d(\bar{5},\bar{2}), d(\bar{5},\bar{3}), d(\bar{5},\bar{4}), d(\bar{5},\bar{6})\}$

$= \text{maks}\,\{1, 2, 2, 2, 2, 2\}$

$= \{2\}.$

g. Eksentrisitas titik $\bar{6}$ pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$e(\bar{6}) = \text{maks } \left\{d(\bar{6}, h) \middle| h \in V\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right) - \{\bar{6}\}\right\}$$

$$= \text{maks } \{d(\bar{6}, \bar{0}), d(\bar{6}, \bar{1}), d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{3}), d(\bar{6}, \bar{4}), d\left(\bar{6}, \bar{5}\right)\}$$

$$= \text{maks } \{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$$

$$= \{2\}.$$

Dari eksentrisitas-eksentrisitas titik-titik yang diperoleh, selanjutnya diperoleh indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ sebagai berikut.

$$E_1\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right)} e(v)^2$$

$$= e(\bar{0})^2 + e(\bar{1})^2 + e(\bar{2})^2 + e(\bar{3})^2 + e(\bar{4})^2 + e\left(\bar{5}\right)^2 + e(\bar{6})^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$

$$= 25.$$

Indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_7}$ adalah

$$E_2\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right) = \sum_{\{u,v\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_7}\right)} e(u)e(v)$$

$$= e(\bar{0})e(\bar{1}) + e(\bar{0})e(\bar{2}) + e(\bar{0})e(\bar{3}) + e(\bar{0})e(\bar{4}) + e(\bar{0})e\left(\bar{5}\right)$$

$$+ e(\bar{0})e(\bar{6})$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$$

$$= 6(1 \cdot 2)$$

$$= 12.$$

2.11 Kajian Nilai Keislaman

Manusia merupakan makhluk yang diberi label sebagai makhluk sosial. Seorang manusia akan selalu hidup bersama dengan manusia lain untuk memenuhi kebutuhan hidupnya. Mereka saling berinteraksi dan berkomunikasi agar tujuan hidupnya tercapai. Dalam proses interaksi dengan manusia lain, mereka membentuk golongan dan membuat suatu aturan yang mengatur proses interaksi agar tercapai kehidupan yang rukun dan damai.

Berkaitan dengan hal ini, dalam ilmu matematika, terdapat kajian ilmu yang menerangkan suatu himpunan unsur-unsur dengan suatu operasi biner yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Himpunan unsur-unsur tersebut disebut dengan grup. Grup dalam kehidupan masyarakat diumpamakan sebagai suatu golongan yang anggotanya adalah orang-orang yang ada dalam golongan tersebut. Adapun operasi biner diumpamakan sebagai proses interaksi antar orang-orang yang harus memenuhi aturan-aturan yang berlaku pada golongan tersebut. Dengan mengikuti aturan yang berlaku maka akan tercapai hidup yang harmonis dan tercapai tujuan dalam kehidupan bersama tersebut.

Dalam Al Quran, Allah telah memerintahkan manusia agar tidak bercerai berai antar sesama manusia yang dijelaskan dalam surat Ali ‘Imran ayat 105:

وَلَا تَكُوْنُوْا كَالَّذِيْنَ تَفَرَّقُوْا وَاخْتَلَفُوْا مِنْ بَعْدِ مَا جَآءَهُمُ الْبَيِّنٰتُ وَاُولٰۤىِٕكَ لَهُمْ عَذَابٌ عَظِيْمٌ ﴿١٠٥﴾

Artinya:
Dan janganlah kamu menjadi seperti orang yang bercerai berai dan berselisih setelah sampai kepada mereka keterangan yang jelas. Dan mereka itulah orang-orang yang mendapat azab yang berat.

Dalam ayat ini, dapat diambil pelajaran bahwa Allah memerintahkan sesama manusia untuk selalu menjaga kerukunan dan melarang mereka untuk saling bermusuhan dalam hal beragama. Perselisihan dan perpecahan sejatinya akan menciptakan kehancuran dan azab dari Allah (Al-Mahally & As-Suyuti, 2010).

Selain teori grup, ilmu matematika juga mengkaji ilmu tentang graf. Graf didefinisikan sebagai pasangan dari himpunan berhingga titik-titik dan sisi-sisi. Dua titik dalam graf akan terhubung langsung oleh suatu sisi jika memenuhi kondisi tertentu. Misalkan pada graf koprima, dua titik berbeda akan terhubung langsung jika keduanya relatif prima. Dalam kaitannya dengan pengamalan ajaran agama Islam, antar seorang muslim dengan muslim lainnya bisa jadi berbeda. Namun, mereka akan terikat pada satu keyakinan yang sama, yaitu meyakini bahwa Allah adalah satu-satunya Tuhan yang wajib disembah dan Nabi Muhammad adalah utusan Allah. Penyembahan hanya kepada Allah telah diterangkan dalam Al Quran surat al An’am ayat 162-163:

قُلْ اِنَّ صَـــلَاتِيْ وَنُسُـــكِيْ وَ مَحْيَايَ وَمَمَاتِيْ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ﴿١٦٢﴾ لَا شَـــرِيْكَ لَهُ وَبِذٰلِكَ اُمِرْتُ وَاَنَا اَوَّلُ الْمُسْلِمِيْنَ﴿١٦٣﴾

Artinya:
Katakanlah (Muhammad), “Sesungguhnya salatku, ibadahku, hidupku, dan matiku hanya bagi Allah, Tuhan semesta alam. Tidak ada sekutu baginya, dan demikianlah yang diperintahkan kepadaku dan aku adalah orang yang pertama-tama berserah diri (muslim).

Kajian keislaman dalam ilmu matematika memberikan pemahaman bahwa ilmu matematika dapat dipahami melaui aspek keagamaan yang terdapat dalam Al Quran dan bahkan kajian dalam Al Quran dapat mengilhami kajian ilmu matematika. Hal ini dapat meyakinkan umat Islam bahwa Al Quran merupakan sumber ilmu yang menjadi sumber dari ilmu-ilmu yang lain. Dengan demikian, Al Quran menjadi pedoman bagi manusia untuk menjalankan kehidupannya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Graf Koprima dari G_p

Pada bagian ini, akan dideskripsikan graf koprima dari G_p untuk p bilangan prima, $p \geq 3$. Pertama-tama, akan ditinjau graf koprima G_3, G_5, dan G_7.

3.1.1 Graf koprima dari grup G_3

Perhatikan bahwa grup $G_3 = \{a^0, a, a^2\}$ dengan

$$a^0 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix},$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh himpunan titik graf koprima dari G_3 adalah $V\left(\Gamma_{G_3}\right) = G_3$. Selanjutnya untuk menentukan keterhubungan titik-titik pada graf koprima Γ_{G_3}, perhatikan orde dari masing-masing anggota G_3 sebagai berikut

$$|a^0| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 1,$$

$$|a| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 3,$$

$$|a^2| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 3.$$

Misalkan $0 \leq i, j \leq 2$, maka faktor persekutuan terbesar dari orde dua unsur di G_3 dapat dinyatakan dalam tabel berikut.

Tabel 3.1 Tabel Faktor Persekutuan Terbesar dari Orde Dua Unsur di G_3

$(\lvert a^i\rvert, \lvert a^j\rvert)$	$\lvert a^0\rvert$	$\lvert a\rvert$	$\lvert a^2\rvert$
$\lvert a^0\rvert$	1	1	1
$\lvert a\rvert$	1	3	3
$\lvert a^2\rvert$	1	3	3

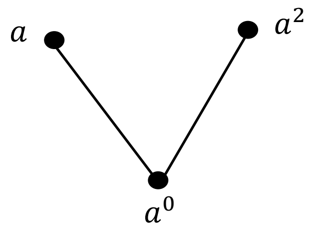
Berdasarkan tabel tersebut, diperoleh titik-titik berbeda di $V(\Gamma_{G_3})$ yang saling terhubung langsung yaitu:

a^0 terhubung langsung dengan a dan a^2,

a terhubung langsung dengan a^0,

a^2 terhubung langsung dengan a^0.

Berdasarkan keterhubungan titik yang telah diperoleh, dapat digambarkan graf koprima Γ_{G_3} sebagai berikut.



Gambar 3.1 Graf Koprima Γ_{G_3}

3.1.2 Graf koprima dari grup G_5

Perhatikan bahwa grup $G_5 = \{a^0, a, a^2, a^3, a^4\}$ dengan

$a^0 = I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\quad a = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\quad a^2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$,

$a^3 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\quad a^4 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$.

Sehingga diperoleh himpunan titik graf koprima dari G_5 adalah $V(\Gamma_{G_5}) = G_5$. Selanjutnya untuk menentukan keterhubungan titik-titik pada graf koprima Γ_{G_5}, perhatikan orde dari masing-masing anggota G_5 sebagai berikut

$|a^0| = \left|\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}\right| = 1, \quad |a| = \left|\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}\right| = 5, \quad |a^2| = \left|\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}\right| = 5,$

$|a^3| = \left|\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}\right| = 5, \quad |a^4| = \left|\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}\right| = 5.$

Misalkan $0 \leq i, j \leq 4$, maka faktor persekutuan terbesar dari orde dua unsur di G_5 dapat dinyatakan dalam tabel berikut.

Tabel 3.2 Tabel Faktor Persekutuan Terbesar dari Orde Dua Unsur di G_5

$(\|a^i\|, \|a^j\|)$	$\|a^0\|$	$\|a\|$	$\|a^2\|$	$\|a^3\|$	$\|a^4\|$
$\|a^0\|$	1	1	1	1	1
$\|a\|$	1	5	5	5	5
$\|a^2\|$	1	5	5	5	5
$\|a^3\|$	1	5	5	5	5
$\|a^4\|$	1	5	5	5	5

Berdasarkan tabel tersebut, diperoleh titik-titik berbeda di $V(\Gamma_{G_5})$ yang saling terhubung langsung yaitu:

a^0 terhubung langsung dengan a, a^2, a^3 dan a^4,

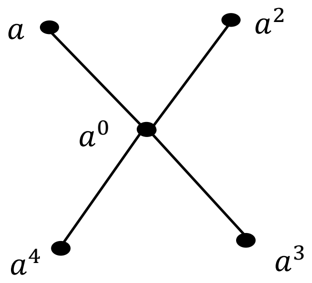
a terhubung langsung dengan a^0,

a^2 terhubung langsung dengan a^0,

a^3 terhubung langsung dengan a^0,

a^4 terhubung langsung dengan a^0

Berdasarkan keterhubungan titik yang telah diperoleh, dapat digambarkan graf koprima Γ_{G_5} sebagai berikut.



Gambar 3.2 Graf Koprima Γ_{G_5}

3.1.3 Graf koprima dari grup G_7

Perhatikan bahwa grup $G_7 = \{a^0, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ dengan

$$a^0 = I = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix},$$

$$a^4 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \quad a^5 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \quad a^6 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Sehingga diperoleh himpunan titik graf koprima dari G_7 adalah $V(\Gamma_{G_7}) = G_7$. Selanjutnya untuk menentukan keterhubungan titik-titik pada graf koprima Γ_{G_7}, perhatikan orde dari masing-masing anggota G_7 sebagai berikut

$$|a^0| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 1, \quad |a| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 7, \quad |a^2| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 7,$$

$$|a^3| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 7, \quad |a^4| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 7, \quad |a^5| = \begin{vmatrix} \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{vmatrix} = 7,$$

$$|a^6| = \left|\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}\right| = 7.$$

Misalkan $0 \leq i, j \leq 6$, maka faktor persekutuan terbesar dari orde dua unsur di G_7 dapat dinyatakan dalam tabel berikut.

Tabel 3.3 Tabel Faktor Persekutuan Terbesar dari Orde Dua Unsur di G_7

$(\|\boldsymbol{a^i}\|, \|\boldsymbol{a^j}\|)$	$\|a^0\|$	$\|a\|$	$\|a^2\|$	$\|a^3\|$	$\|a^4\|$	$\|a^5\|$	$\|a^6\|$
$\|a^0\|$	1	1	1	1	1	1	1
$\|a\|$	1	7	7	7	7	7	7
$\|a^2\|$	1	7	7	7	7	7	7
$\|a^3\|$	1	7	7	7	7	7	7
$\|a^4\|$	1	7	7	7	7	7	7

Berdasarkan tabel tersebut, diperoleh titik-titik berbeda di $V(\Gamma_{G_7})$ yang saling terhubung langsung yaitu:

a^0 terhubung langsung dengan a, a^2, a^3, a^4, a^5, dan a^6,

a terhubung langsung dengan a^0,

a^2 terhubung langsung dengan a^0,

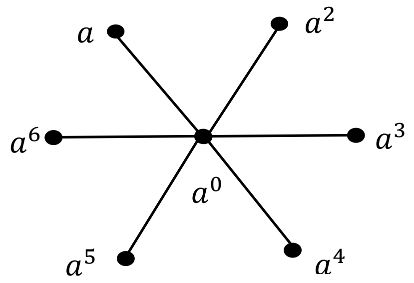
a^3 terhubung langsung dengan a^0,

a^4 terhubung langsung dengan a^0

a^5 terhubung langsung dengan a^0

a^6 terhubung langsung dengan a^0

Berdasarkan keterhubungan titik yang telah diperoleh, dapat digambarkan graf koprima Γ_{G_7} sebagai berikut.



Gambar 3.3 Graf Koprima Γ_{G_7}

Berdasarkan graf koprima dari G_p dengan $p = 3,5,7$, diperoleh tabel keterhubungan titik-titik di graf koprima Γ_{G_p} sebagai berikut:

Tabel 3.4 Keterhubungan Titik pada Graf Γ_{G_p}

p	$u \in V(\Gamma_{G_p})$	Titik-titik yang terhubung langsung dengan u
3	a^0	a dan a^2
	a	a^0
	a^2	a^0
5	a^0	a, a^2, a^3, dan a^4

	a	a^0
	a^2	a^0
	a^3	a^0
	a^4	a^0
7	a^0	$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$
	a	a^0
	a^2	a^0
	a^3	a^0
	a^4	a^0
	a^5	a^0
	a^6	a^0

Misalkan p adalah bilangan prima dengan $p \geq 3$. Dari Tabel 3.4, diperoleh dugaan bahwa pada graf koprima Γ_{G_p}, untuk $0 < i \leq p-1$ dan $0 \leq j \leq p-1$ titik a^i terhubung langsung dengan titik a^j jika dan hanya jika $j = 0$. Dari dugaan tersebut, selanjutnya diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.1.1

Misalkan p adalah bilangan prima dengan $p \geq 3$ dan $a = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$. Maka graf koprima Γ_{G_p} adalah suatu graf dengan himpunan titik

$$V\left(\Gamma_{G_p}\right) = \{a^0, a, \dots, a^{p-1}\}$$

dan untuk $0 \leq i, j \leq p-1$, jika $i \neq 0$ maka

$$\{a^j, a^i\} \in E(\Gamma_{G_p}) \text{ jika dan hanya jika } j = 0.$$

Khususnya, himpunan sisi dari graf koprima Γ_{G_p} adalah

$$E\left(\Gamma_{G_p}\right) = \left\{\{a^0, a^i\} \middle| 1 \leq i \leq p-1\right\}.$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.9.1 diperoleh bahwa

$$V\left(\Gamma_{G_p}\right) = \{a^0, a, \dots, a^{p-1}\}.$$

Misalkan $0 \leq i, j \leq p-1$. Perhatikan bahwa jika $1 \leq k \leq p-1$ maka $|a^k| > 1$, sehingga berdasarkan Akibat 2.3.2 $|a^k| = p$. Jika $i \neq 0$ dan $j \neq i$ maka

$$\begin{aligned} \{a^j, a^i\} \in E\left(\Gamma_{G_p}\right) &\Leftrightarrow \left(|a^j|, |a^i|\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(|a^j|, p\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow |a^j| = 1 \\ &\Leftrightarrow j = 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh himpunan sisi pada graf koprima Γ_{G_p} adalah

$$E\left(\Gamma_{G_p}\right) = \left\{\{a^0, a^i\} \middle| 1 \leq i \leq p-1\right\}.$$

3.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_p} untuk p Suatu Bilangan Prima

Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} dapat diduga dengan menemukan nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada beberapa graf koprima Γ_{G_p} untuk p suatu prima, $p \geq 3$.

3.2.1 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_3}

Eksentrisitas titik-titik di graf koprima Γ_{G_3} dituliskan sebagai berikut.

a) Eksentrisitas dari titik a^0 pada graf koprima Γ_{G_3} adalah

$$\begin{aligned} e(a^0) &= \text{maks}\left\{d(a^0, v) \middle| v \in V\left(\Gamma_{G_3}\right) - \{a^0\}\right\} \\ &= \text{maks}\ \{d(a^0, a), d(a^0, a^2)\} \\ &= \text{maks}\ \{1,1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) Eksentrisitas dari titik a pada graf koprima Γ_{G_3} adalah

$$e(a) = \text{maks}\left\{d(a,v)\middle|v \in V(\Gamma_{G_3}) - \{a\}\right\}$$

$$= \text{maks}\,\{d(a,a^0), d(a,a^2)\}$$

$$= \text{maks}\{1,2\}$$

$$= 2$$

c) Eksentrisitas dari titik a^2 pada graf koprima Γ_{G_3} adalah

$$e(a^2) = \text{maks}\left\{d(a^2,v)\middle|v \in V(\Gamma_{G_3}) - \{a^2\}\right\}$$

$$= \text{maks}\,\{d(a^2,a^0), d(a^2,a)\}$$

$$= \text{maks}\,\{1,2\}$$

$$= 2$$

Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_3} adalah sebagai berikut.

$$E_1(\Gamma_{G_3}) = \sum_{v \in V(\Gamma_{G_3})} e(v)^2$$

$$= e(a^0)^2 + e(a)^2 + e(a^2)^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2$$

$$= 2^2 + 2^2 + 2^2 - 3$$

$$= 3(2^2) - 3$$

$$= 4(3) - 3.$$

3.2.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_5}

Eksentrisitas titik-titik di graf koprima Γ_{G_5} dituliskan sebagai berikut.

a) Eksentrisitas dari titik a^0 pada graf koprima Γ_{G_5} adalah

$$e(a^0) = \text{maks}\left\{d(a^0,v)\middle|v \in V(\Gamma_{G_5}) - \{a^0\}\right\}$$

$$= \text{maks}\,\{d(a^0,a), d(a^0,a^2), d(a^0,a^3), d(a^0,a^4)\}$$

$= \text{maks}\ \{1,1,1,1\}$

$= 1.$

b) Eksentrisitas dari titik a pada graf koprima Γ_{G_5} adalah

$$e(a) = \text{maks}\left\{d(a,v)\middle|v \in V\left(\Gamma_{G_5}\right) - \{a\}\right\}$$

$$= \text{maks}\ \{d(a,a^0), d(a,a^2), d(a,a^3), d(a,a^4)\}$$

$$= \text{maks}\ \{1,2,2,2\}$$

$$= 2.$$

c) Eksentrisitas dari titik a^2 pada graf koprima Γ_{G_5} adalah

$$e(a^2) = \text{maks}\left\{d(a^2,v)\middle|v \in V\left(\Gamma_{G_5}\right) - \{a^2\}\right\}$$

$$= \text{maks}\ \{d(a^2,a^0), d(a^2,a), d(a^2,a^3), d(a^2,a^4)\}$$

$$= \text{maks}\ \{1,2,2,2\}$$

$$= 2.$$

d) Eksentrisitas dari titik a^3 pada graf koprima Γ_{G_5} adalah

$$e(a^3) = \text{maks}\left\{d(a^3,v)\middle|v \in V\left(\Gamma_{G_5}\right) - \{a^3\}\right\}$$

$$= \text{maks}\ \{d(a^3,a^0), d(a^3,a), d(a^3,a^2), d(a^3,a^4)\}$$

$$= \text{maks}\ \{1,2,2,2\}$$

$$= 2.$$

e) Eksentrisitas dari titik a^4 pada graf koprima Γ_{G_5} adalah

$$e(a^4) = \text{maks}\left\{d(a^4,v)\middle|v \in V\left(\Gamma_{G_5}\right) - \{a^4\}\right\}$$

$$= \text{maks}\ \{d(a^4,a^0), d(a^4,a), d(a^4,a^2), d(a^4,a^3)\}$$

$$= \text{maks}\ \{1,2,2,2\}$$

$$= 2.$$

Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_5} adalah sebagai berikut.

$$E_1(\Gamma_{G_5}) = \sum_{v \in V(\Gamma_{G_5})} e(v)^2$$

$$= e(a^0)^2 + e(a)^2 + e(a^2)^2 + e(a^3)^2 + e(a^4)^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$

$$= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 - 3$$

$$= 5(2^2) - 3$$

$$= 4(5) - 3.$$

3.2.3 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_7}

Eksentrisitas titik-titik di graf koprima Γ_{G_7} dituliskan sebagai berikut.

a) Eksentrisitas dari titik a^0 pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a^0) = \text{maks}\left\{d(a^0, v) \middle| v \in V(\Gamma_{G_7}) - \{a^0\}\right\}$$

$$= \text{maks}\,\{d(a^0, a), d(a^0, a^2), d(a^0, a^3), d(a^0, a^4), d(a^0, a^5), d(a^0, a^6)\}$$

$$= \text{maks}\,\{1,1,1,1,1,1\}$$

$$= 1.$$

b) Eksentrisitas dari titik a pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a) = \text{maks}\left\{d(a, v) \middle| v \in V(\Gamma_{G_7}) - \{a\}\right\}$$

$$= \text{maks}\,\{d(a, a^0), d(a, a^2), d(a, a^3), d(a, a^4), d(a, a^5), d(a, a^6)\}$$

$$= \text{maks}\,\{1,2,2,2,2,2\}$$

$$= 2.$$

c) Eksentrisitas dari titik a^2 pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a^2) = \text{maks}\left\{d(a^2, v) \middle| v \in V(\Gamma_{G_7}) - \{a^2\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(a^2,a^0), d(a^2,a), d(a^2,a^3), d(a^2,a^4), d(a^2,a^5), d(a^2,a^6)\}$

$= \text{maks}\,\{1,2,2,2,2,2\}$

$= 2.$

d) Eksentrisitas dari titik a^3 pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a^3) = \text{maks}\left\{d(a^3,v)\middle| v \in V\left(\Gamma_{G_7}\right) - \{a^3\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(a^3,a^0), d(a^3,a), d(a^3,a^2), d(a^3,a^4), d(a^3,a^5), d(a^3,a^6)\}$

$= \text{maks}\,\{1,2,2,2,2,2\}$

$= 2.$

e) Eksentrisitas dari titik a^4 pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a^4) = \text{maks}\left\{d(a^4,v)\middle| v \in V\left(\Gamma_{G_7}\right) - \{a^4\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(a^4,a^0), d(a^4,a), d(a^4,a^2), d(a^4,a^3), d(a^4,a^5), d(a^4,a^6)\}$

$= \text{maks}\,\{1,2,2,2,2,2\}$

$= 2.$

f) Eksentrisitas dari titik a^5 pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a^5) = \text{maks}\left\{d(a^5,v)\middle| v \in V\left(\Gamma_{G_7}\right) - \{a^5\}\right\}$$

$= \text{maks}\,\{d(a^5,a^0), d(a^5,a), d(a^5,a^2), d(a^5,a^3), d(a^5,a^4), d(a^5,a^6)\}$

$= \text{maks}\,\{1,2,2,2,2,2\}$

$= 2.$

g) Eksentrisitas dari titik a^6 pada graf koprima Γ_{G_7} adalah

$$e(a^6) = \text{maks}\left\{d(a^6,v)\middle| v \in V\left(\Gamma_{G_7}\right) - \{a^6\}\right\}$$

$= \text{maks}\{d(a^6,a^0), d(a^6,a), d(a^6,a^2), d(a^6,a^3), d(a^6,a^4), d(a^6,a^5)\}$

$= \text{maks}\,\{1,2,2,2,2,2\}$

$= 2.$

Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_7} adalah sebagai berikut.

$$E_1(\Gamma_{G_7}) = \sum_{v \in V(\Gamma_{G_7})} e(v)^2$$

$$= e(a^0)^2 + e(a)^2 + e(a^2)^2 + e(a^3)^2 + e(a^4)^2 + e(a^5)^2 + e(a^6)^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$

$$= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 - 3$$

$$= 7(2^2) - 3$$

$$= 4(7) - 3$$

3.2.4 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama pada Graf Koprima Γ_{G_p}

Berdasarkan perhitungan beberapa indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_3}, Γ_{G_5}, dan Γ_{G_7}, ditemukan pola dari indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} untuk $p \geq 3$ sebagai berikut:

Tabel 3.5 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_p}

p	G_p	Γ_{G_p}	$E_1(\Gamma_{G_p})$
3	G_3	Γ_{G_3}	$9 = 4(3) - 3$
5	G_5	Γ_{G_5}	$17 = 4(5) - 3$
7	G_7	Γ_{G_7}	$25 = 4(7) - 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	G_p	Γ_{G_p}	$4p - 3$

Selanjutnya dari eksentrisitas-eksentrisitas titik pada graf koprima $\Gamma_{G_3}, \Gamma_{G_5}, \Gamma_{G_7}$ diperoleh suatu lemma tentang eksentrisitas titik dari graf koprima Γ_{G_p} untuk suatu bilangan p dengan $p \geq 3$ sebagai berikut.

Lemma 3.2.1

Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Eksentrisitas titik $u \in V(\Gamma_{G_p})$ pada graf koprima Γ_{G_p} adalah

$$e(u) = \begin{cases} 1, \text{untuk } u = a^0 \\ 2, \text{untuk } u \neq a^0 \end{cases}$$

Bukti:

Jika $u = a^0$, karena a^0 terhubung langsung dengan semua titik yang lain di graf koprima Γ_{G_p} maka $d(a^0, v) = 1$ untuk setiap $v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{a^0\}$. Sehingga diperoleh eksentrisitas dari titik a^0 adalah

$$\begin{aligned} e(a^0) &= \text{maks}\left\{d(a^0, v) \middle| v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{a^0\}\right\} \\ &= \text{maks}\ \{d(a^0, a), d(a^0, a^2), \cdots, d(a^0, a^{p-1})\} \\ &= \text{maks}\ \{1,1, \cdots, 1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi untuk $u = a^0$ diperoleh $e(u) = 1$.

Jika $u \neq a^0$, karena $\left|V\left(\Gamma_{G_p}\right)\right| \geq 3$ maka terdapat $v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right)$ dengan $u \neq v \neq a^0$. Perhatikan karena $v \neq a^0$ maka $\{u, v\} \notin E(\Gamma_{G_p})$ dan akibatnya $d(u, v) > 1$. Pandang lintasan

$$u - v: (u, a^0, v)$$

yang mengakibatkan $d(u, v) \leq 2$. Oleh karena itu diperoleh $d(u, v) = 2$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} e(u) &= \text{maks}\ \left\{d(u, v) \middle| v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{u\}\right\} \\ &= \text{maks}\ \{1,2\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, diberikan suatu teorema tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} untuk suatu prima p dan $p \geq 3$ sebagai berikut.

Teorema 3.2.1

Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama graf koprima dari grup G_p adalah

$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.2.1, diperoleh rumus indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E_1\left(\Gamma_{G_p}\right) &= \sum_{v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right)} e(v)^2 \\
&= e(a^0)^2 + \sum_{v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{a^0\}} e(v)^2 \\
&= 1^2 + (p-1) \cdot 2^2 \\
&= 1 + (p-1) \cdot 4 \\
&= 1 + 4p - 4 \\
&= 4p - 3
\end{aligned}$$

3.3 Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua dari Graf Koprima G_p untuk p Suatu Bilangan Prima

Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} dapat diperoleh dengan menemukan nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari beberapa graf koprima Γ_{G_p} untuk suatu p bilangan prima dan $p \geq 3$.

3.3.1 Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua dari Graf Koprima Γ_{G_3}

Eksentrisitas dari masing-masing titik $a^i \in V(\Gamma_{G_3})$ untuk $0 \leq i \leq 2$ adalah

$$e(a^0) = 1, e(a) = 2, e(a^2) = 2.$$

Selanjutnya, diperoleh indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_3} adalah sebagai berikut.

$$E_2\left(\Gamma_{G_3}\right) = \sum_{\{u,v\}\in E\left(\Gamma_{G_3}\right)} e(u)e(v)$$

$$= (a^0)e(a) + e(a^0)e(a^2)$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$$

$$= 2(2)$$

$$= 2(3-1)$$

$$= 2(3) - 2$$

3.3.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua dari Graf Koprima Γ_{G_5}

Eksentrisitas dari masing-masing titik $a^i \in V(\Gamma_{\mathrm{G}_5})$ untuk $0 \leq i \leq 4$ adalah

$$e(a^0) = 1,\ e(a) = 2,\ e(a^2) = 2,\ e(a^3) = 2,\ e(a^4) = 2.$$

Selanjutnya, diperoleh indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_5} adalah sebagai berikut.

$$E_2\left(\Gamma_{G_5}\right) = \sum_{\{u,v\}\in E\left(\Gamma_{G_5}\right)} e(u)e(v)$$

$$= e(a^0)e(a) + e(a^0)e(a^2) + e(a^0)e(a^3) + e(a^0)e(a^4)$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$$

$$= 4(2)$$

$$= 2(5-1)$$

$$= 2(5) - 2$$

3.3.3 Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua dari Graf Koprima Γ_{G_7}

Eksentrisitas dari masing-masing titik $a^i \in V(\Gamma_{\mathrm{G}_7})$ untuk $0 \leq i \leq 6$ adalah

$$e(a^0) = 1,\ e(a) = 2,\ e(a^2) = 2,\ e(a^3) = 2,\ e(a^4) = 2,\ e(a^5) = 2,$$
$$e(a^6) = 2.$$

Selanjutnya, diperoleh indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari Γ_{G_7} adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
E_2(\Gamma_{G_7}) &= \sum_{\{u,v\}\in E(\Gamma_{G_7})} e(u)e(v) \\
&= (a^0)e(a) + e(a^0)e(a^2) + e(a^0)e(a^3) + e(a^0)e(a^4) + e(a^0)e(a^5) \\
&\qquad + e(a^0)e(a^6) \\
&= 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 \\
&= 6(2) \\
&= 2(7-1) \\
&= 2(7) - 2
\end{aligned}$$

3.3.4 Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua dari Graf Koprima Γ_{G_p}

Berdasarkan indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_3}, Γ_{G_5}, Γ_{G_7}, selanjutnya indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} untuk $p \geq 3$ membentuk pola yang disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.6 Indeks Eksentrisitas Zagreb Kedua dari Graf Koprima Γ_{G_p}

p	G_p	Γ_{G_p}	$E_2(\Gamma_{G_p})$
3	G_3	Γ_{G_3}	$4 = 2(3) - 2$
5	G_5	Γ_{G_5}	$8 = 2(5) - 2$
7	G_7	Γ_{G_7}	$13 = 2(7) - 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	G_p	Γ_{G_p}	$2p - 2$

Dari indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada Γ_{G_3}, Γ_{G_5}, dan Γ_{G_7}, diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.3.1

Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Maka indeks eksentrisitas Zagreb kedua graf koprima dari grup G_p adalah

$$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$$

Bukti:

Perhatikan bahwa himpunan sisi dari graf Γ_{G_p} adalah

$$E\left(\Gamma_{G_p}\right) = \left\{\{a^0, a^i\} \middle| 1 \leq i \leq p - 1\right\},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E_2\left(\Gamma_{G_p}\right) &= \sum_{\{u,v\} \in E\left(\Gamma_{G_p}\right)} e(u)e(v) \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} e(a^0)e\left(a^i\right) \\ &= (p-1)(1 \cdot 2) \\ &= (p-1)2 \\ &= 2p - 2 \end{aligned}$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, untuk sebarang bilangan prima p dengan $p \geq 3$ diperoleh beberapa kesimpulan berikut.

1. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$
2. Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
$$E_2\left(\Gamma_{G_p}\right) = 2p - 2.$$

4.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis meneliti tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf koprima dari grup perkalian matriks 2×2 upper unitriangular atas ring bulangan bulat modulo prima. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf koprima dari grup lain atau pada graf lainnya dari grup perkalian matriks 2×2 upper unitriangular atas ring bulangan bulat modulo prima.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf.* Malang: UIN-Malang Press.

Al-Mahally, J. M., & As-Suyuti, J. A. 2010. *Tafsir Al-Qur'an Al-'Adzim Jilid I.* Surabaya: Maktabah Imam.

Al-Qur’an Terjemahan. 2015. *Department Agama RI.* Bandung: CV. Darus Sunnah

Alraqad, T. A., Saeed, M. S., & Alshawarbeh, E. S. 2021. Classification of Groups According to the Number of End Vertices in the Coprime Graph. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 52*(1), 105-111.

Bronson, R., & Costa, G. B. 2020. *Matrix Methods Applied Linear Algebra and Sabermetrics (Fourth Edition).* London: Academic Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs (Sixth Edition).* Boca Raton: CRC Press.

Dorbidi, H. R. 2016. A Note On the Coprime Graph of A Group. *International Journal of Group Theory*, 17-22.

Gallian, J. A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra (8th Edition).* Boston: Brook/Cole Cengage Learning.

Gilbert, L., & Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition.* Stamford: Cengage Learning.

Gupta, C. K., Shetty, B. S., & Lokesha, V. 2016. On The Graph of nilpotent matrix group of lenght one. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 8*(01), 1-31.

Lee, G. T. 2018. *Abstract Algebra, An Introductory Course.* chams: Springer International Publishing AG.

Ma, X., Wei, H., & Yang, L. 2014. The Coprime Graph of a Group. *International Journal of Group Theory*, 13-23.

Oliinyk, A. S., & Sushchanskii, V. I. 2000. Free Group of Infinite Unitriangular Matices. *Mathematical Note, 67*(03), 320-324.

Rosen, K. H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Application (Seventh Edition).* New York: Mc Graw Hill.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Aris Abdillah, lahir di Kabupaten Kediri pada tanggal 02 Desember 1996, biasa dipanggil Aris. Anak pertama dari dua bersaudara, putra dari Bapak Mashuri dan Ibu Kiptiyah. Tinggal di Dusun Kalipakis RT 01/RW 01 Desa Pucunglor Kecamatan Ngantru Kabupaten Tulungagung.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Fathul Huda Pucunglor dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Ma'arif Ngantru dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya, menempuh jenjang pendidikan menengah atas di MAN Kunir Blitar (MAN 3 Blitar) dan lulus pada tahun 2015. Setelah itu melanjutkan pendidikan perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2015 dan mengambil jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Muhammad Aris Abdillah
NIM	:	15610109
Fakultas/Program Studi	:	Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	:	Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua Graf Koprima dari Grup Matriks Upper Unitriangular atas Ring Bilangan Bulat Modulo Prima
Pembimbing I	:	Dewi Ismiarti, M.Si
Pembimbing II	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	27 Agustus 2021	Konsultasi Bab III	1.
2	1 Oktober 2021	Konsultasi Bab II dan III	2.
3	9 Oktober 2021	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4	20 Oktober 2021	Konsultasi Kajian Agama	4.
5	1 November 2021	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6	13 November 2021	ACC Seminar Proposal dari Pembimbing 1	6.
7	13 November 2021	ACC Seminar Proposal dari Pembimbing 2	7.
8	6 Desember 2021	Konsultasi Bab I, II, III, dan IV	8.
9	10 Desember 2021	ACC Kajian Agama	9.
10	10 Desember 2021	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 13 Maret 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005