NEAR-RING PRIMA ATAS SEMIGRUP

SKRIPSI

OLEH
SULAIMAN HAMDANI ALFARID
NIM. 15610095

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

NEAR-RING PRIMA ATAS SEMIGRUP

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S,Mat)

Oleh:
SULAIMAN HAMDANI ALFARID
NIM, 15610095

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

NEAR-RING PRIMA ATAS SEMIGRUP

SKRIPSI

Oleh:
SULAIMAN HAMDANI ALFARID
NIM, 15610095

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 6 November 2021

Pembimbing I	Pembimbing II
Prof.Dr. H. Turmudi, M.Si.P.hD	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129200012 2 005

NEAR-RING PRIMA ATAS SEMIGRUP

SKRIPSI

Oleh
Sulaiman Hamdani Alfarid
NIM. 15610095

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana (S.Mat)
Tanggal 26 November 2021

Penguji Utama	: Dewi Ismiarti	.....
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	.....
Sekretaris Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	.....
Anggota Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Sulaiman Hamdani Alfarid

NIM : 15610095

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Near – ring Prima Atas Semigrup

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar – benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau, pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencatatkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 6 November 2021
Yang membuat pernyataan,

Sulaiman Hamdani Alfarid
NIM. 15610095

MOTO

Tuntunlah setiap langkahku Allah SWT.

وَاِذَا سَاَلَكَ عِبَادِيْ عَنِّيْ فَاِنِّيْ قَرِيْبٌۗ اُجِيْبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ اِذَا دَعَانِ فَلْيَسْتَجِيْبُوْا لِيْ وَلْيُؤْمِنُوْا بِيْ لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُوْنَ

"*Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu (Muhammad) tentang Aku, maka sesungguhnya Aku dekat. Aku Kabulkan permohonan orang yang berdoa apabila dia berdoa kepada-Ku. Hendaklah mereka itu memenuhi (perintah)-Ku dan beriman kepada-Ku, agar mereka memperoleh kebenaran" (QS. Al – Baqarah 186).*

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur penulis persembahkan karya ini kepada:

Bapak Musta'in, Ibu Sri'in Malikah, serta Adik Syahid (Alm) dan Alfina Rahmadini tercinta yang telah memberikan do'a, dukungan, dan semangat kepada penulis. Para Guru yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan yang bermanfaat serta sahabat – sahabat yang sealu memberikan semangat yang berarti bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Near-ring* Prima atas Semigrup" ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah membimbing umatnya dari berbagai permasalahan menuju kehidupan yang bahagia di dunia dan akhirat.

Suatu kebanggan tersendiri bagi penulis dapat menyelesaikan skripsis ini yang tentunya tidak terlepas dari bantuan, fukungan, dan suumbangsih dari berbagai pihak. Oleh karena itu patutlah penulis sampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, MA selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen wali.
5. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si. P.hD, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dengan baik.
6. Evawati Alisah, M.Pd, selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dengan baik.

7. Seluruh dosen dan staf administrasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan pada penulis.
8. Bapak, ibu, dan Adik-adik tercinta yang telah memberikan do'a, dukungan, dan semangat kepada penulis.
9. Semua teman-teman matematika angkatan 2015, khususnya Kurniansyah Ade Islami dan A. Syaddad Mutawakkil Alallah, serta teman sekontrakan yang selalu memberikan dukungan dan berjuang bersama dalam menuntut ilmu.
10. Semua pihak yang ikut serta dalam membantu dan menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan bagi para pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 6 November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HLAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

ABSTRAK xii

ABSTRACT xiii

ملخص xiv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 4

1.3 Tujuan Penelitian 4

1.4 Batasan Masalah 4

1.5 Manfaat Penelitian 5

1.6 Metode Penelitian 5

1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Grup 7

2.2 Semi Grup 9

2.3 Ring 10

2.4 Near – Ring 12

2.5 Ideal Prima dan Near – Ring Prima 14

2.6 Kajian Agama 17

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Hubungan integral Near-Ring dengan Ideal Prima 21

3.2 Semi Grup dengan Ideal Prima 22
3.3 Near-ring Prima atas Semi grup 23
3.4 Kajian Agama 24

BAB IVPENUTUP

4.1 Kesimpulan 27
4.2 Saran 30

DAFTAR PUSTAKA

RIWAYAT HIDUP

ABSTRAK

Alfarid, Sulaiman Hamdani. 2021. **Near-ring Prima Atas Semigrup.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Prof. Dr. Turmudi, P.hD. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: Himpunan, Grup, Semigrup, Ring, Near-ring, Ideal, Ideal Prima, Daerah Integral, Near-ring Prima

Misal grupoid (S, μ) didefinisikan sebagai himpunan tak kosong S dengan operasi biner μ dengan maksud sebuah pemetaan $\mu : S \times S \to S$ adalah di S. Kita katakan bahwa (S, μ) adalah semigrup jika operasi μ adalah assosiatif.

Misal R adalah himpunan dengan hubungan kesamaan, dinotasikan dengan $=$, dan operasi penjumlahan dan perkalian dinotasikan dengan $+$ dan $\cdot$, yang *well-defined* di R. Maka R adalah ring (dengan berdasarkan kepada kedua operasi) jika kondisi – kondisi (1) R tertutup terhadap penjumlahan, (2) Penjumlahan di R adalah assosiatif , (3) R mengandung identitas penjumlahan 0, (4) R mengandung invers penjumlahan, (5) Penjumlahan di R adalah komutatif, (6) R tertututp terhadap perkalian,(7) Perkalian di R adalah assosiatif, (8) terdapat sifat distributif di R.

Misal R adalah near-ring, dan $A \subset R$, A disebut ideal dari R jika untuk setiap $r \in R$ dan $a \in A$, sedemikian sehingga: $rA = \{ra | a \in I\} \subseteq A$ dan $Ar = \{ar | a \in I\} \subseteq A$. ideal A dari R adalah proper ideal dari R jika A adalah proper subset dari R. Suatu ideal P dari near-ring N disebut ideal prima jika untuk setiap ideal I dan J pada N, berlaku $I.J \subset P = I \subset P \vee J \subset P$.

Near-ring merupakan generalisasi dari ring. Perbedaannya adalah pada *near-ring* ,himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi pertama yaitu haruslah berupa grup akan tetapi tidak harus grup abelian serta memenuhi salah satu sifat distributif kanan atau kiri. Suatu near-ring N dikatakan near-ring prima apabila pada N berlaku untuk setiap $x, y \in N$, $xNy = \{0_N\}$ mengimplikasikan $x = 0_N$ atau $y = 0_N$.

ABSTRACT

Alfarid, Sulaiman Hamdani. 2021. **PRIME NEAR-RING OF SEMIGROUP.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Prof. Dr. Turmudi, P.hD. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Set, Group, Semigroup, Ring, Near-ring, Ideal, Prime Ideal, integral Domain, Prime Near-ring

Let the groupoid (S, μ) be defined as a non-empty set S with binary operation with the intention that mapping $S \times S \to S$ is defined. We say that (S, μ) is a semigroup if the operation is associative, this is to show, for all $x, y, z \in S$.

Let R be a set with an equality relation, denoted by $=$, and addition and multiplication operations denoted by $+$ and $\cdot$, which are defined. Then R is a Ring (based on both operations) if the conditions (1) R is closed to addition, (2) addition in R is associative, (3) R contains addition identity 0, (5) addition in R is commutative, (6) R is closed to multiplication, (7) multiplication in R is associative, (8) two distributive properties exist in R.

A subnear-ring A of the near-ring R, A is called an ideal of R if for each $r \in R$ and $a \in A$, such that: $rA = \{ra | a \in I\} \subseteq A$ and $Ar = \{ar | a \in I\} \subseteq A$. Ideal A of R is an ideal proper of R if A is a proper subset of R. An ideal P of a near-ring N is called a prime ideal if for every ideal I and J in N, $I \cdot J \subset P = I \subset P \vee J \subset P$.

Near-ring is a generalization of ring. The difference is in the near-ring, a non-empty set that is equipped with the first operation, which must be a group but not necessarily an abelian group and fulfill one of the right or left distributive properties. A near-ring R is said to be prime near-ring if at N applies to every $x, y \in N, xNy = \{0_N\}$ implies $x = 0_N$ or $y = 0_N$.

ملخص

الفريد ,سليمان حمداني. NEAR-RING PRIME OF SEMIGROUP . 2021
.مقال. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، مالانج. المشرف: (i) أ.د. دكتور. تورمودي ، د. (ii) إيفا واتي أليسا ,ماجستير في التربية

الكلمات الدالة: يضع, مجموعة، نصف مجموعة ، مثالي ، رئيس مثالي ، Near-ring, Ring, Integral Domain, Near-ring Prima.

دع المجموعة (S، μ) تُعرّف على أنها مجموعة غير فارغة S مع العملية الثنائية بنية تحديد $S \times S \to S$ لرسم الخرائط. نقول أن (S، μ) عبارة عن نصف مجموعة إذا كانت العملية ترابطية ، وهذا لإظهار ، لجميع x, z∈S، y.

لنفترض أن R مجموعة ذات علاقة تشابه ، يُشار إليها بعلامة = ، وعمليات الجمع والضرب التي يُشار إليها بالرمز + و. ، والتي يتم تعريفها. ثم R عبارة عن حلقة (استنادًا إلى كلتا العمليتين) إذا كانت الشروط (1) R مغلقة للإضافة ، (2) الإضافة في R ترابطية ، (3) R تحتوي على هوية إضافة 0 ، (4) R تحتوي على مقلوب الجمع ، (5) الإضافة في R تبادلية ، (6) R مغلقة للضرب ، (7) الضرب في R هو ترابطي ، (8) توجد خاصيتان توزيع في R.

الحلقة الفرعية A للحلقة القريبة R ، تسمى A مثالية لـ R إذا كانت لكل r∈R و a∈A ، مثل: $rA = \{ra \mid a \in I\} \subseteq A$ و $Ar = \{ar \mid a \in I\} \subseteq A$. المثالية A من R هي مناسبة مثالية لـ R إذا كانت A هي مجموعة فرعية مناسبة من R. يُطلق على P المثالي للحلقة القريبة N نموذجًا أوليًا إذا كان لكل مثال I و Jفي N، $I.J \subset P = I \subset P \vee J \subset P$.

$Near - ring$هي تعميم للحلقة. يكمن الاختلاف في الحلقة القريبة ، وهي مجموعة غير فارغة ومجهزة بالعملية الأولى ، والتي يجب أن تكون مجموعة ولكن ليس بالضرورة مجموعة أبليان وتفي بإحدى خصائص التوزيع اليمنى أو اليسرى. يُقال أن الحلقة N القريبة من الحلقة الأولية إذا كانت N تنطبق على كل x، $x, y \in N, xNy = \{0_N\}$ تعني $x = 0_N$ أو $y = 0_N$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Cabang ilmu dalam bidang aljabar ada berbagai macam, diantaranya adalah cabang ilmu aljabar abstrak. Dalam aljabar abstrak atau sering disebut dengan aljabar modern, adalah cabang ilmu aljabar yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, semigrup, ring atau gelanggang, deal semigrup, lapangan atau *field*, dan, modul (Triwulandari, Sari, Putu, & Harini, 2017).

Near-ring merupakan salah satu generalisasi dari teori Ring, yang dimana pada near-ring (misalkan himpunan N dengan dua operasi biner $* \; dan \; \#$) operasi pertama pada himpunannya $(N,*)$ adalah grup (tidak perlu abelian) dan pada operasi kedua dengan himpunannya $(N,\#)$ adalah semigrup, serta berlaku hukum distributif, tetapi hanya memenuhi salah satu hukum distributif kiri atau distributif kanan(Pilz, 1983). Suatu near-ring N dikatakan near-ring prima apabila pada N berlaku untuk setiap $x,y \in N$, $xNy = \{0_N\}$ mengimplikasikan $x = 0_N$ atau $y = 0_N$ (Boua, 2012).

Daerah integral adalah ring komutatif dengan elemen kesatuan tanpa pembagi nol, sehingga *product* (hasil) adalah 0 jika salah satu faktornya adalah 0, sehingga $ab = 0$ hanya ketika $a = 0$ dan $b = 0$ (Gallian, 2012).

Dalam bidang matematika dapat kita ketahui dalam konsep himpunan, dimana dalam himpunan setiap anggotanya harus memenuhi syarat atau aturan yang ada. Selanjutnya dalam struktur aljabar, dikenal konsep tentang grup dimana dalam grup merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi

kondisi tertentu. Struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi kondisi tertentu disebut Ring. Sementara studi dengan operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia diciptakan secara berpasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Seperti dalam ayat Al-Quran Allah menjelaskan dalam surah AN-NISA' ayat 23:

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوٰتُكُمْ وَعَمّٰتُكُمْ وَخٰلٰتُكُمْ وَبَنَاتُ الْأَخِ وَبَنَاتُ الْأُخْتِ وَأُمَّهٰتُكُمُ الّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوٰتُكُم مِّنَ الرَّضٰعَةِ وَأُمَّهٰتُ نِسَآئِكُمْ وَرَبٰٓئِبُكُمُ الّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ الّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَٰٓئِلُ أَبْنَآئِكُمُ الَّذِينَ مِنْ أَصْلٰبِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا۟ بَيْنَ الْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ ۗ إِنَّ اللهَ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ٢٣:

Artinya : 4:23 "Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang."

Berdasarkan hal tersebut hubungan antar manusia telah diatur dengan jelas oleh Allah SWT, dan memungkinkan bagi kita agar mematuhi dan memahami akan makna dan maksud dari ayat tersebut.

Berdasarkan pada penelitian sebelumnya yang telah banyak membahas tentang near-ring , khususnya tentang derivasi pada near-ring seperti pada penelitian dari Bell (1987) yang membahas tentang beberapa syarat cukup *near-ring* merupakan ring komutatif, pada penelitiannya yang lain, Bell (1992) meneliti tentang dua jenis derivasi, yaitu derivasi yang mengawetkan sifat komutatif pada ring maupun *near-ring* dan derivasi Daif. Lebih lanjut lagi, penelitian mengenai

generalisasi pada salah satu jenis derivasi, yaitu –derivasi pada *near-ring* yang melibatkan semigrup idealnya dilakukan oleh Ashraf (2015). Seiring dengan berkembangnya penelitian mengenai *near-ring*, penelitian mengenai *prime near-ring* yang merupakan salah satu jenis *near-ring* juga turut dikembangkan oleh sejumlah penulis. Wang (1994) meneliti tentang dua jenis derivasi yang dioperasikan bersama-sama pada sebuah prime near-rings,selanjutnya, Boua (2012) membahas mengenai syarat cukup yang mengakibatkan *prime near-ring* merupakan ring komutatif dengan melibatkan derivasi pada ideal semigrupnya.

Selanjutnya, pada penelitian oleh Pradita Z. Triwulandari (2017) yang meneliti tentang Hubungan Derivasi Prime Near-ring dengan sifat komutatif Ring, berdasarkan dari penelitian sebelumnya yang banyak membahas tentang near-ring. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas pendeskripsian near-ring prima atas semigrup.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut di atas, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah :

1. Bagaimana hubungan integral near – ring dengan ideal prima?
2. Bagaimana membangun ideal prima dari semigrup ?
3. Bagaimana membangun near-ring prima dari semigrup ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Untuk mengetahui dan mendeskripsikan hubungan integral near – ring dengan ideal prima,
2. Untuk mengetahui dan mendeskripsikan prosedur membangun ideal prima dari semigrup,
3. Untuk mengetahui dan mendeskripsikan prosedur membangun near-ring prima dari semigrup.

1.4 Batasan Masalah

Untuk mencapai tujuan yang diharapkan dan pembahasan yang fokus, maka perlu adanya pembatasan permasalahan pada skripsi ini, antara lain:

1. Untuk menunjukkan hubungan Ideal prima dan integral near – ring prima, penulis akan menunjukkan dan membuktikan hubungan biimplikasi antara keduanya.

2. Untuk membangun ideal dari semigrup yang diperoleh dari suatu elemen near – ring, dan menunjukkan bahwa ideal dari semigrup tersebut adalah ideal prima.
3. Untuk membangun near – ring prima dari semigrup, penulis akan menggunakan hubungan dari near – ring prima dengan ideal prima , dan hubungan semigrup dengan ideal prima.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah mengetahui bagaimana membangun near – ring prima dari semigrup, dan sebagai tambahan wawasan , tambahan referensi bagi penelitian selanjutnya.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji beberapa literatur berupa buku, jurnal, maupun laporan penelitian yang relevan dengan topik yang dibahas. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian ini antara lain:

1. Mempelajari teorema yang berkaitan dengan semigrup, prime near-ring, Ideal, Ideal prima, dan juga sifat-sifat yang terdapat di dalam teorema terkait.
2. Mencari dan mendeskripsikan hubungan integral near-ring dan ideal prima dengan menunjukkan dan membuktikan teorema yang berkaitan.
3. Mencari dan mendeskripsikan hubungan semigrup dan ideal prima dengan menunjukkan dan membuktikan teorema membangun ideal prima dari semigrup.

4. Menunjukkan dan membuktikan teorema membangun near-ring prima atas semigrup.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan, yang meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka, yang meliputi: Grup, Semigrup, Near-ring, Near-ring Prima, penyelesaian masalah dalam Islam.

Bab III Pembahasan, pada bab ini akan dibahas tentang bagaimana hubungan dari near-ring prima dengan ideal prima, hubungan dari semigrup prima dengan ideal prima, yang kemudian nanti akan digunakan untuk membangun near – ring prima dari semigrup.

Bab IV Penutup, pada bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Grup

Misalkan G adalah himpunana tak kosong dan $*$ adalah operasi yang didefinisikan pada G. Maka G disebut grup dengan operasi $*$ apabila memenuhi empat kondisi :

1. Operasi $*$ bersifat tertutup di G, misal,$x \in G$ dan $y \in G$ maka $x * y$ ada di G.
2. Operasi $*$ bersifat assosiatif di G, untuk setiap x, y, z di G, $x * (y * z) = (x * y) * z$.
3. G memeiliki elemen identitas e, terdapat e di G sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$ untuk semua $x \in G$.
4. G memuat invers setiap elemen , untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ (Gilbert & Gilbert, 2014).

Definisi 2.1.1 Grup Abelian,

Misal G adalah grup dengan operasi $*$, maka G disebut grup komutatif atau "Grup Abelian", jika operasi $*$ adalah komutatif, misal $x * y = y * x, \forall\, x, y \in G$ (Gilbert & Gilbert, 2014).

Contoh:

a). Misal pada Z didefinisikan operasi $*$:

$x * y = x + y - 1\ \forall x, y \in Z$, buktikan bahwa $(Z,*)$ adalah grup dan apakah grup abelian .

Bukti:

(i). Ambil $x, y \in Z$, maka $x + y \in Z$ dan $1 \in Z$, sehingga $(x + y - 1) \in Z = (x * y) \in Z$, jadi operasi $*$ tertutup di Z.

(ii). $(x * y) * z = (x + y - 1) * z, \forall x, y, z \in Z$

$= x + y - 1 + z - 1$

$= x + (y + z - 1) - 1$

$= x + (y * z) - 1$

$= x * (y * z)$,

Jadi, operasi $*$ assosiatif di Z.

(iii). $\forall\, a \in Z, I \in Z$, misal I adalah elemen identitas di Z maka,

$$a * I = a \qquad I * a = a$$

$$a + I - 1 = a \qquad I + a - 1 = a$$

$$I = 1 \qquad I = 1$$

Jadi $I = 1$, maka 1adalah identitas di Z.

(iv). $\forall\, a \in Z$, maka ada $a^{-} \in Z$

$$a * a^{-1} = I \qquad a^{-1} * a = I$$

$$a + a^{-1} - 1 = 1 \qquad a^{-1} + a - 1 = 1$$

$$a^{-1} = 2 - a \qquad a^{-1} = 2 - a$$

Jadi $a^{-1} = 2 - a$

$2^{-1} = 2 - 2 = 0$.

Sehingga dari (i) sampai (iv), maka $(Z,*)$ adalah grup.

Selanjutnya $\forall\, a, b \in Z$,

$a * b = a + b - 1$

$= b + a - 1$

$= b * a$

Jadi $a * b = b * a$,

Sehingga $(Z,*)$ adalah grup abelian.

2.2 Semi Grup

Misal grupoid (S, μ) didefinisikan sebagai himpunan tak kosong S dengan operasi biner μ dengan maksud sebuah pemetaan $\mu : S \times S \to S$ adalah terdefinisi. Kita katakan bahwa (S, μ) adalah semigrup jika operasi μ adalah assosiatif, untuk semua $x, y, z \in S$.

$$\big((x, y)\mu\,, z\big)\mu = (x, (y, z)\mu)\mu$$

Notasi ini dapat dituliskan dengan operasi biner perkalian, sehingga $(x, y)\mu$ akan menjadi $x.\,y$ atau xy, sehingga ditulis menjadi,

$(xy)z = x(yz)$ (Howie, 1995),

sifat assosiatif yang familiar dari aljabar elementer. Sehingga dari formula tersebut menjadi xyz dan $x_1x_2 \ldots x_n, \forall x, y, z, x_1, x_2, \ldots x_n \in S$, dan dapat digunakan untuk menunjukkan notasi x^n $(n \in N)$.

Ketika semigrup S dengan operasi perkalian, maka dapat dituliskan dengan $(S, \cdot)$. Jika semigrup S memiliki sifat komutatif, maka $\forall x, y \in S$, $xy = yx$, dan dapat kita katakan bahwa S adalah semigrup komutatif. Jika semigrup S memiliki element 1 dengan sifat identitas, untuk setiap $x \in S$, maka berlaku $x1 = 1x = x$, kita katakan bahwa 1 adalah elemen identitas dari S, dan S adalah semigrup dengan elemen identitas atau biasa kita sebut dengan *monoid.* Semigrup S hanya memiliki satu elemen identitas, jika $1'$ juga memiliki sifat $x1' = 1'x = x\ \forall x \in S$, maka:

$1' = 1.1'$(karena 1 identitas)

$= 1$(karena $1'$ identitas).

Jika sebuah semigrup S dengan minimal dua elemen dan terdapat elemen 0, Sedemikian sehingga, untuk setiap $x \in S$,

$0x = x0 = 0$, dapat kita katakan bahwa 0 adalah *zero elemen* (atau *zero*) dari S, dan S adlah semigrup dengan mengandung *zero*.seperti pada elemen identitas dalam semigrup hanya memiliki atau terdapat satu elemen *zero* saja.

2.3 Ring

Ring adalah himpunan yang memiliki dua operasi yang terdefinisi dengan jelas didalamnya, dan memenuhi beberapa kondisi. Misal R adalah himpunan dengan didalamnya terdapat hubungan kesamaan, dinotasikan dengan $=$, dan operasi penjumlahan dan perkalian dinotasikan dengan $+$ dan $\cdot$, yang terdefinisi. Maka R adalah ring (dengan berdasarkan kepada kedua operasi) jika kondisi – kondisi dibawah ini terpenuhi :

1. R tertutup terhadap penjumlahan : $x \in R$ dan $y \in R$ mengakibatkan $x + y \in R$,
2. Penjumlahan di R adalah assosiatif : $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk semua $x, y, z \in R$,
3. R mengandung identitas penjumlahan 0 : $x + 0 = 0 + x = x$ untuk semua $x \in R$,
4. R mengandung invers penjumlahan: untuk x di R, terdapat $-x$ di R sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$,
5. Penjumlahan di R adalah komutatif : $x + y = y + x$ untuk semua $x, y \in R$,
6. R tertutup terhadap perkalian: $x \in R$ dan $y \in R$ mengakibatkan $x \cdot y \in R$,
7. Perkalian di R adalah assosiatif : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ untuk semua $x, y, z \in R$,

8. sifat distributif terdapat di R: $x \cdot (x + y) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ untuk semua $x, y, z \in R$

   (Gilbert & Gilbert, 2014).

Ring dikatakan ring komutatif apabila rinng tersebut mengandung identitas operasi perkalian (*unity*).

Contoh:

Akan ditunjukkan bahwa himpunan E dari sebuah himpunan bilangan bulat positif adalah ring dengan terdefinisi pada operasi penjumlahan dan perkalian di Z.

Bukti:

a. Misal $x \in E$ dan $y \in E$, maka $x = 2n, y = 2m$ dengan $m, n \in Z$, jika kita jumlahkan maka $x + y = 2n + 2m = 2(n + m) \in E$, sehingga E tertutup pada opersi penjumlahan.
b. Operasi penjumlahan di E adalah assosiatif.
c. E mengandung identitas penjumlahan 0, misal $2 + 0 = 2$,
d. untuk setiap $x = 2k \in E$, terdapat invers penjumlahan dari x di E, $-x = 2(-k)$.
e. Operasi penjumlahan di E adalah komutatif.
f. Untuk $x = 2n, y = 2m$ dengan $m, n \in Z$, jika kita operasikan maka $xy = 2n2m = 2(2nm) \in E$, sehingga E tertutup pada opersi perkalian.
g. Operasi perkalian di E adalah assosiatif,
h. Berlaku sifat distributif pada E.

Jadi $(E, +, \cdot)$ adalah ring.

2.4 Near – Ring

Near-ring merupakan generalisasi dari ring. Perbedaannya adalah pada *near-ring* ,himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi pertama yaitu haruslah berupa grup akan tetapi tidak harus grup abelian serta memenuhi salah satu sifat distributif kanan atau kiri .

Himpunan R tidak kosong dan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ didefinisikan pada R, suatu struktur aljabar yang dinyatakan dengan $(R,+,\cdot)$ dinamakan Near-ring apabila :

(1) $(R,+)$ adalah grup (tidak harus grup abelian),

(2) $(R,.)$ adalah semigrup,

(3) untuk setiap $x,y,z \cdot R$ berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri

(i). distributif kanan : $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

(ii). distributif kiri : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Pilz, 1983)

suatu near-ring disebut near-ring kanan jika memenuhi (1), (2), dan (3) bagian (i), dan disebut near-ring kiri jika memenuhi (1), (2), dan (3) bagian (ii). Selanjutnya yang dimaksud near-ring apabila memenuhi near-ring kiri maupun near-ring kanan, dan $x \cdot y$ dapat juga ditulis xy (PILZ, 1983). Dalam penelitian ini menggunakan Near-ring kanan dalam pembahasan, dan pembuktian.

Near – ring biasanya dinotasikan dengan N, N', N_1 atau yang lainnya, yang biasa kita tulis dengan notasi $(N,+,\cdot)$. Dari penjelasan near – ring diatas dapat diketahui bahwa tentunya setiap ring adalah near – ring melihat dari sifat dan syarat yang ada pada near – ring dan ring.

Pada umumnya, pada struktur near – ring tidak berlaku persamaan $0_R \cdot a = 0_R$ dan $(-a) \cdot b = -ab$, meskipun berlaku pada struktur ring, sehingga

pada struktur near – ring, apabila ada kondisi $0_R \cdot a = 0_R$, maka akan terbentuk klasifikasi seperti pada definisi dibawah ini.

Definisi 2.4.1

Diberikan $(R, +, \cdot)$ adalah near – ring, didefinisikan

$$R_0 \coloneqq \{r \in R | 0_R \cdot r = 0_R\}$$

Selanjutnya, R_0 disebut bagian simetri nol(*zero-symetric*) dari near – ring R. (Clay J.R, 1992)**.**

Definisi 2.4.2

Diberikan near – ring R, subgrup H di near-ring R, disebut subnear – ring di R(ditulis $H < R$), jika memenuhi $HH \subseteq H$.(Clay J.R, 1992).

Definisi 2.4.3 Near – ring sederhana (simple near - ring)

Diberikan Near – ring R, near – ring R dikatakan sederhana (simple near - ring) jika R tidak mempunyai *ideal non – trivial.* (PILZ, 1983)

Definisi 2.4.4 integral near-ring

Daerah integral adalah near-ring komutatif dengan elemen kesatuan, dan tanpa pembagi nol (*zero divisor*), akibatnya *product* adlah 0 jika hanya jika salah satu faktor adalah 0, sehingga $ab = 0$ hanya ketika $a = 0$ atau $b = 0$. (Gallian, 2012)

Definisi 2.4.5 *Zero Divisor* (Pembagi nol)

Pembagi nol adalah elemen tak nol dari suatu ring komutatif R sedemikian sehingga, dengan elemen tak nol $b \in R$ maka $ab = 0$. (Gallian, 2012)

2.5 Ideal Prima dan Near – Ring Prima

Sebelum membahas near-ring prima, akan dibahas ideal prima terlebih dahulu yang merupakan syarat utama terbentuknya near-ring prima.

Definisi 2.5.1 Ideal

Sebuah subnear-ring A dari near – ring R , A disebut ideal dari R jika untuk setiap $r \in R$ dan $a \in A$, sedemikian sehingga:

$rA = \{ra | a \in I\} \subseteq A$ dan $Ar = \{ar | a \in I\} \subseteq A$. ideal A dari R adalah proper ideal dari R jika A adalah proper subset dari R.

Definisi 2.5.2 Ideal Prima

Suatu ideal prima L dari near-ring komutatif N disebut proper ideal dari Nsehingga $a, b \in N$ dan $ab \in L$ berakibat $a \in L$ atau $b \in L$.(Gallian, 2012)

Suatu ideal P dari near-ring N disebut ideal prima jika untuk setiap ideal I dan J pada N, berlaku $I.J \subset P = I \subset P \vee J \subset P$.

Teorema 2.5 R/A adalah daerah integral jika dan hanya jika A ideal prima(Gallian, 2012)

Misal $\boldsymbol{R}$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas dan $\boldsymbol{A}$ adalah ideal di $\boldsymbol{R}$. Maka $\boldsymbol{R/A}$ adalah daerah integral jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ ideal prima.

Bukti:

Misal R/A adalah daerah integral dan $ab \in A$. Maka $(a + A)(b + A) = ab + A = A$, zero elemen dari ring R/A, jadi kedua $a + A = A$ atau $b + A = A$ yang kedunya $a \in A$atau $b \in A$, sehinggaa A adalah prima.

Untuk membuktikan bagian lain teorema, pertama kita anggap bahwa $\frac{R}{A}$ adalah ring komutatif dengan elemen identiatas untuk setia proper ideal A. Sangat sederhana untuk menunjukkan bahwa A adalah prima, $\frac{R}{A}$ tidak memiliki zero-

divisor, jadi anggap A adalah prima dan$(a + A)(b + A) = 0 + A$. Maka $ab \in A$ dan karena itu, $a \in A$ atau $b \in A$, sehingga salah satu $a + A$ atau $b + A$ adalah zero koset di R/A.

Teorema Ekuivalensi Ideal Prima (2.5.1) (PILZ, 1983)

Diberikan ideal P pada near-ring N. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1. Ideal P adalah prima.
2. Untuk setiap ideal I dan J pada N, jika $\langle I \cdot J \rangle \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.
3. Untuk setiap $i, j \in N$, jika $i \notin P$ dan $j \notin P$, maka $\langle i \rangle \cdot \langle j \rangle \nsubseteq P$.
4. Untuk setiap ideal I dan J pada N, jika $I \supseteq P$ dan $J \supseteq P$, maka $I.J \nsubseteq P$.
5. Untuk setiap ideal I dan J pada N, jika $I \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$, maka $I.J \nsubseteq P$.

Bukti:

a. (1=>2) misalkan I dan J ideal di N sedemikian sehingga $\langle IJ \rangle \subseteq P$. Akan dibuktikan $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$,

   Menurut definisi $\langle IJ \rangle$, dapat diketahui bahwa $IJ \subseteq \langle IJ \rangle$ sehingga $IJ \subseteq P$, mengingat P adalah ideal prima maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.

b. (2 => 1) misalkan I dan J adalah ideal di N sedemikian sehingga $IJ \subseteq P$, akan dibuktikan P adalah ideal prima,yang artinya adalah $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.

   Menurut definisi $\langle IJ \rangle$, dapat diketahui bahwa $\langle IJ \rangle$ adalah ideal terkecil yang memuat IJ dan P ideal yang memuat IJ, maka $\langle IJ \rangle \subseteq P$, sehingga dari yang diketahui jika $\langle IJ \rangle \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.

c. (1 => 3) misalkan $a, b \in N$ sedemikian sehingga $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq P$, akan dibuktikan $a \in P$ dan $b \in P$.

   Dapat diketahui bahwa P ideal prima di N dan $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq P$, maka $\langle a \rangle \subseteq P$ dan $\langle b \rangle \subseteq P$ sehingga $a \in P$ dan $b \in P$.

d. (3 => 4) misalkan I dan J ideal di N sedemikian sehingga $I \supseteq P$ dan $J \supseteq P$, akan dibuktikan $IJ \nsubseteq P$.

   Ambil sebarang $a \in I - P$ dan $b \in J - P$, maka $a \cdot b \notin P$, $\langle a \rangle \subseteq I$ dan $\langle b \rangle \subseteq J$, sehingga berdasarkan yang diketahui, jika $a \notin P$ dan $b \notin P$ maka $\langle a \rangle \langle b \rangle \nsubseteq P$, sehingga mengakibatkan $IJ \nsubseteq P$.

e. (4 =>5) misalkan I dan J ideal di N, sedemikian dehingga $I \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$, akan dibuktikan $IJ \nsubseteq P$.

Ambil sebarang $a \in I - P$ dan $b \in J - P$, maka $a.b \notin P$, $\langle a \rangle \subseteq I$ dan $\langle b \rangle \subseteq J$, mengingat bahwa $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ ideal di N, maka $\{0_R\} \subseteq \langle a \rangle$ dan $\{0_R\} \subseteq \langle b \rangle$ sehingga untuk setiap $c \in P$ dapat dituliskan dengan $c = 0_R + c$ yang mengakibatkan $\langle a \rangle + P \supseteq P$ dan $\langle b \rangle + P \supseteq P$, sehingga berlaku $(\langle a \rangle + P)(\langle b \rangle + P) \nsubseteq P)$.

Berdasarkan hasil diatas, maka ada $a' \in \langle a \rangle$, $b' \in \langle b \rangle$, dan $p, p' \in P$ sedemikian sehingga $(a' + p)(b' + p') \notin P$.

$$(a' + p)(b' + p') = (a' + p)b' + (a' + p)p'$$
$$= (a' + p)b' + a'b' - a'b' + (a' + p)p' \notin P$$

Mengingat $a'b', \notin P$ dan $a'b' \in \langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq IJ$, maka $IJ \nsubseteq P$.

Dalam teori grup, semua subgrup di grup komutatif adalah normal. Mengingat near – ring terhadap operasi pertama tidak harus grup komutatif, maka dalam mendefinisikan near – ring subgrupnya harus normal, seperti terdapat pada definisi dibawah ini.

Definisi 2.5.3 (Clay J.R, 1992)

Diberikan $(R, +, \cdot)$ adalah near – ring, subgrup I di R disebut ideal di R, jika:

a. $(I, +)$ adalah subgrup normal di $(R, +)$

b. $RI \subseteq I$

c. $(\forall x, y \in R)(\forall i \in I), (x + i)y - xy \in I.$

Apabila subgrup I di R memenuhi kondisi (a) dan kondisi (b) maka dapat disebut dengan Ideal kiri di R, sedangkan apabila subgrup I di R memenuhi kodisi (a) dan kondisi (c) maka dapat disebut sebagai Ideal kanan di R.

Definisi 2.5.4 Near – ring Prima

Suatu near-ring N dikatakan near-ring prima apabila pada N berlaku untuk setiap $x, y \in N$, $xNy = \{0_N\}$ mengimplikasikan $x = 0_N$ atau $y = 0_N$ (Boua, 2012).

Yang berarti N dapat dikatakan near-ring prima apabila perkalian antara N dengan dua elemennya yang menghasilkan 0_N yang berarti bahwa salah satu dari elemennya adalah sama dengan 0_N.

Diberikan near – ring R, Ideal P di R disebut prima, jika untuk setiap I, J di R, berlaku $IJ \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$ (PILZ, 1983) .

2.6 Kajian Agama

Dalam segala aspek kehidupan manusia telah diatur dan didasari oleh hukum yang ada dalam Al – Qur'an. Begitu juga ilmu – ilmu yang ada, termasuk ilmu matematika yang tentu didalamnya terdapat banyak cabang ilmu yang digunakan dan tersebar dalam kehidupan manusia. Al – Qur'an sebagai dasar pemikiran dalam ilmu matematika, tentunya banyak menjabarkan dan menggunakan istilah yang memiliki makna dalam ilmu matematika yang mengilhami para ilmuan matematika pada zaman ke zaman. Dalam matematika terdapat banyak cabang – cabang ilmu yang diantaranya adalah cabang ilmu

aljabar, statistik, logika, dan pemodelan. Dalam bidang matematika dapat kita ketahui dalam konsep himpunan, dimana dalam himpunan setiap anggotanya harus memenuhi syarat atau aturan yang ada. Dalam ilmu aljabar terdapat teori tentang grup, dimana definisi dari grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan $(G,*)$ dengan G adalah himpunan takkosong dan "$*$" adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas di G , dan memuat invers setiap elemen dalam grup G tersebut.

Dalam agama istiah grup dapat kita artikan sebagai kumpulan golongan dengan aturan tertentu. Dimana dalam kumpulan (himpunan) tersebut terdapat anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan - aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya dalam berinteraksi dengan sesama makhluk kita harus tetap dalam aturan yang telah ditetapkan oleh Allah.

Dalam Al-Qur’an surat Al-fatihah ayat 7 menyebutkan:

صِرَاطَ الَّذِيْنَ اَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ ۙ غَيْرِ الْمَغْضُوْبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّاۤلِّيْنَ

Artinya: “*(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat (Q. S. Al-Fatihah: 7).”*

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007).

Dari penjelasan diatas dapat kita ketahui bahwa manusia dibagi dalam kelompok – kelompok yang berbeda sesuai dengan bagaimana kita dalam menjalankan atau tidak setiap perintah, dan menjauhi larangan Allah.

Sementara studi dengan operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia diciptakan secara berpasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Seperti dalam ayat Al-Quran Allah menjelaskan dalam surah AN-NISA' ayat 23:

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوٰتُكُمْ وَعَمّٰتُكُمْ وَخٰلٰتُكُمْ وَبَنَاتُ الْأَخِ وَبَنَاتُ الْأُخْتِ وَأُمَّهٰتُكُمُ الّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوٰتُكُم مِّنَ الرَّضٰعَةِ وَأُمَّهٰتُ نِسَآئِكُمْ وَرَبٰٓئِبُكُمُ الّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ الّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلٰٓئِلُ أَبْنَآئِكُمُ الَّذِينَ مِنْ أَصْلٰبِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا۟ بَيْنَ الْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ ۗ إِنَّ اللَّهَ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ٢٣

Artinya : 4:23 "Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang."

Berdasarkan hal tersebut hubungan antar manusia telah diatur dengan jelas oleh Allah SWT, dan memungkinkan bagi kita agar selalu memperhatikan setiap akan berinteraksi dengan sesama agar tidak terjadi hal yang merugikan bagi diri kita maupun orang lain disekitar kita. Dengan mematuhi dan memahami akan makna dan maksud dari ayat tersebut kita dapat memilah dan memilih dengan

siapa saja kita harus bergaul dan dengan siapa saja kita dapat menjalin hubungan khususnya pernikahan.

Dengan adanya ayat – ayat dalam Al-Qur’an, kita dapat memahami matematika dari berbagai pandangan dan aspek khususnya aspek keagamaan. Dengan memahami setiap kata dan kalimat dalam Al-Qur’an kita dapat mengetahui bahwa dalam bahasan atau konsep matematika tentang grup, memiliki makna yang mendalam dimana himpunan didalamnya adalah sebagai kelompok dimana dengan adanya operasi biner didalamnya memberikan suatu aturan dan batasan kita dalam berinteraksi dan bergaul dengan sesama mahluk.

BAB III
PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan dibahas tentang bagaimana membangun near – ring prima atas semigrup, yang akan diawali dengan mencari hubungan integral near-ring prima dengan ideal prima, dan bagaimana membangun ideal prima dari semigrup.

3.1 Hubungan integral Near-Ring dengan Ideal Prima

Pada bagian ini penulis akan menunjukkan hubungan dari integral near – ring dengan ideal prima, kemudian penulis akan membangun near ring prima dari ideal prima.

Untuk menunjukkan hubungan dari integral near – ring dan ideal prima maka penulis akan membuktikan teorema berikut :

Teorema 3.1

Misal $(N, +, \cdot)$ near-ring komutatif dengan elemen kesatuan, dan L adalah ideal di N,

Maka L Ideal prima jika dan hanya jika N/L integral near-ring.

Bukti:

➔ L Ideal prima maka N/L integral near-ring

Jelas bahwa N/L adalah near-ring komutatif dengan elemen kesatuan, sebab N near-ring dengan unsur kesatuan dengan $0 + L$ merupakan identitas operasi penjumlahan N/L dan $1 + L$ merupakan identitas perkalian pada N/L.

Misal L ideal Prima di N, akan ditunjukkan N/L adalah integral near-ring.

Ambil $(a+L)$ dan $(b+L) \in N/L$, misal L ideal prima dan $(a+L)(b+L) = 0+L = L$, maka $ab \in L$. Oleh karena itu $a \in L$ atau $b \in L$, dengan demikian $a+L$ atau $b+L$ adalah koset nol dari near-ring N/L.

Jadi, N/L integral near-ring.

$\leftarrow$ N/L integral near-ring maka L Ideal prima

N/L integral near-ring, dan ambil $ab \in L$, dengan L adalah ideal di N, maka untuk $(a+L),(b+L) \in N/L$ berlaku$(a+L)(b+L) = ab+L = L$. Karena N/Ladalah integral near-ring, maka $a+L = L$ atau $b+L = L$ yang keduanya $a \in L$atau $b \in L$, sehingga L adalah ideal prima.

3.2 Semi Grup dengan Ideal Prima

Pada bagian ini akan digunakan kembali near-ring $(N,+,\cdot)$, dan semigrup yang digunakan adalah semigrup $(S,+)$ dari near-ring tersebut, dan ideal yang digunakan adalah ideal yang dibangun dari semigrup.

Untuk ideal prima dari semigrup, penulis akan membangun terlebih dahulu ideal dari semigrup yang diperoleh dari suatu elemen near – ring, dan menunjukkan bahwa ideal dari semigrup tersebut adalah ideal prima.

Teorema 3.2

Misal N adalah near ring, S adalah semigrup, dan $S \subseteq N$. maka S adalah ideal prima di N.

Bukti:

Diketahui $(S,+)$ adalah semigrup di $(N,+)$, akan dibuktikan S adalah ideal prima di N,

i) Akan dibuktikan S adalah ideal di N

Ambil sebarang $s \in S$ dan $a, b \in N$, maka

a). $as = s \in S$ yang mengakibatkan $SN \subseteq S$

b). $(a + s)b - ab = b - b = 0_N \in S$,

jadi S adalah ideal di N.

ii) Akan dibuktikan bahwa S adalah ideal prima, misalkan ideal C dan D ada di N, dan jika $CD \subseteq S$ maka $C \subseteq S$ dan $D \subseteq S$.

Mengingat $< cd >$ adalah ideal terkecil yang memuat CD dan S adalah ideal yang memuat CD, maka $< CD > \subseteq S$, sehingga menurut teorema 2.5.1(1), jika $< CD > \subseteq S$ maka $C \subseteq S$ atau $D \subseteq S$, jadi S adalah ideal prima.

Berdasarkan hasil diatas dapat diketahui bahwa semigrup dapat dibangun menjadi sebuah ideal prima.

3.3 Near-ring Prima atas Semi grup

Untuk membangun Near-ring Prima atas Semi grup, penulis memerlukan definisi dan hubungan dari integral near – ring dengan ideal prima, dan hubungan semigrup dengan ideal prima. Dalam bagian ini, pembahasan akan terfokus pada bagaimana membangun Near-ring Prima atas Semi grup.

Berdasarkan dari definisi, penulis akan menunjukkan dan membangun near-ring prima dari semigrup. Dengan memperhatikan apakah semigrup yang akan dibentuk menjadi near – ring tersebut adalah ideal prima atau tidak, sehingga dapat dibentuk menjadi suatu near – ring prima.

Teorema 3.3

Misal diketahui $(J,*,+)$ adalah ring, $(M,+)$ adalah sebuah semigrup, dan M subgrup normal, dengan $M \subset J$. Akan ditunjukkan bahwa M adalah ideal prima maka J adalah near – ring prima.

Bukti:

i. Akan dibuktikan M adalah ideal di J,

Ambil sebarang $s \in M$, dan $a, b \in J$,sedemikian sehingga:

a. $a \cdot s = s \in M$ maka $M \cdot J \subseteq J$,

b. $(a+s)b - a \cdot b = b - b = 0_J \in J$,

Maka M adalah Ideal di J.

ii. Karena J adalah Ring, maka J juga adalah Near-ring,

Akan dibuktikan M adalah Ideal prima,

Ambil ideal P dan ideal Q dari J, dan jika $PQ \subseteq M$, maka $P \subseteq M$ dan $Q \subseteq M$, mengingat $< pq >$ adalah ideal terkecil yang memuat PQ, dan M adalah ideal yang memuat PQ, maka $< pq > \subseteq M$, berdasarkan teorema 2.5.1 bagian (1), maka M adalah ideal prima di near-ring J.

Oleh karena M adalah ideal prima di near-ring J, maka berdasarkan Teorema 2.5.1 bagian (4), maka J adalah near-ring prima.

Maka terbukti bahwa semigrup dapat dibangun ,menjadi near-ring prima.

3.4 Kajian Agama

Pada bab sebelumnya dijelaskan bahwa dalam ilmu aljabar terdapat teori tentang grup, dimana definisi dari grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan $(G,*)$ dengan G adalah himpunan takkosong dan "$*$ " adalah operasi

biner di G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas di G , dan memuat invers setiap elemen dalam grup G tersebut.

Dalam agama istiah grup dapat kita artikan sebagai kumpulan golongan dengan aturan tertentu. Dimana dalam kumpulan (himpunan) tersebut terdapat anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan - aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya dalam berinteraksi dengan sesama makhluk kita harus tetap dalam aturan yang telah ditetapkan oleh Allah.

Dengan adanya ayat – ayat dalam Al-Qur'an, kita dapat memahami matematika dari berbagai pandangan dan aspek khususnya aspek keagamaan. Dengan memahami setiap kata dan kalimat dalam Al-Qur'an kita dapat mengetahui bahwa dalam bahasan atau konsep matematika tentang grup, memiliki makna yang mendalam dimana himpunan didalamnya adalah sebagai kelompok dimana dengan adanya operasi biner didalamnya memberikan suatu aturan dan batasan kita dalam berinteraksi dan bergaul dengan sesama mahluk. Dengan adanya batasan tersebut kita dapat mngetahui bagaimana dan dengan siapa saja kita harus bergaul dan menjalin hubungan, utamanya dalam memilih pasangan hidup.

Selain itu, dalam teori tentang Ring kita mengetahui bahwa ring dipengaruhi oleh dua operasi biner yang ada di dalamnya, dan tentunya setiap operasi biner yang berlaku memiliki aturan dan dampak masing masing terhadap himpunan dalam Ring tersebut. Didalam aturan atau aksioma dalam Ring terdapat sifat asosiatif pada kedua operasinya, dalam islam dimisalkan dengan muamalah,

muamalah dalam Al-Qur'an terdapat dalam surah Al-Baqarah ayat 282, yang diadalamnya terdapat kata "... **اِذَا تَدَايَنْتُم** " yang memiliki arti "*bermuamalah ialah seperti berjual beli, hutang piutang, atau sewa – menyewa dan sebagainya...*", yang maknanya adalah untuk selalu mencatat dan memenuhi segala kewajiban tentang jual beli, utang piutang, sewa dan sebagainya. Yang dimana muamalah di sini mengisyaratkan suatu sifat asosiatif dalam suatu golongan atau urusan tertentu.

Dari teori Ring telah kita ketahui juga memenuhi aturan atau aksioma distributif, dalam islam dapat kita contohkan dengan pembagian harta rampasan perang yang terdapat dalam surat al-anfal ayat 1, yang di dalamnya terdapat bunyi "...**يَسْئَلُوْنَكَ عَنِ الْاَنْفَالِ**ۗ..." yang memiliki arti "*Mereka menanyakan kepadamu (Muhammad) tentang (pembagian) harta rampasan perang...",* yang maknanya pembagian dari harta rampasan tersebut haruslah secara merata dan sesuai porsinya, agar terjadi persatuan antar umat dan tidak terjadi perpecahan di dalam umat islam.

Sesuai yang sudah terdapat dalam Al-qur'an surat *An-nisa'* ayat 23 diatas dapat kita ambil makna lain yaitu dalam berkehidupan dan bergaul dalam masyarakat, setiap manusia memiliki kelurga dan nasabnya sendiri sendiri, dengan mematuhi batasan yang berlaku sesuai ketentuan agama kita, menghindarkan kita untuk menjalin dengan sesama keluarga sedarah, dan dengan orangtua dan anak dari saudara kita.

Dengan adanya aturan dalam berinteraksi dalam sesama makhluk, memberikan kita bukan hanya pengetahuan dan wawasan, tetapi juga makna lain

bahwa matematika dan islam tidak bisa dipisahkan. Bukan hanya untuk kesejahteraan manusia, tapi juga untuk menjaga kelestarian hidup dan kemaslahatan serta kesehatan manusia itu sendiri.

Sesuai dengan yang terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 182 diatas, bahwa setiap muamlah haruslah dilaksanakan dengan penuh amanah dan sesuai aturan atau sifat yang berlaku, diantaranya apabila kita berurusan dengan jual beli, utang piutang, sewa menyewa dan sebagainya, maka harus dicatat dan dilaksanakan dengan sesuai perjanjian, dan aturan yang disepakati.

Sesuai dengan yang terdapat dalam surat Al-Anfal ayat 1 diatas, dapat kita ambil sebuah keteladanan bahwa setiap apa yang diperoleh secara bersama-sama atau berkelompok, maka kiata harus membagi setiap hasil yang diperoleh, agar tidak terjadi perpecahan dalam kelompok tersebut. Dan dengan adanya ayat tersebut kita akan menghindari kedzoliman dalam membagi sesuatu kepada teman seperjuangan kita, dengan memperhatikan aspek kekeluargaan dan persatuan umat islam, agar selalu terjalin persaudaraan dan persatuan umat.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hubungan dari integral near ring dan ideal prima adalah biimpikasi. Berdasarkan Teorema 3.1 Maka L Ideal prima jika dan hanya jika N/L integral near-ring.
2. Untuk membangun ideal dari semigrup, dapat ditunjukkan dengan,

   Teorema 3.2

   Diketahui $(S,+)$ adalah semigrup di $(N,+)$, maka S adalah ideal prima di N,

   i. Akan dibuktikan S adalah ideal di N

      Ambil sebarang $s \in S$ dan $a, b \in N$, maka

      a). $as = s \in S$ yang mengakibatkan $SN \subseteq S$

      b). $(a+s)b - ab = b - b = 0_N \in S$,

      jadi S adalah ideal di N.

   ii. Akan dibuktikan bahwa S adalah ideal prima, misalkan ideal C dan D ada di N, dan jika $CD \subseteq S$ maka $C \subseteq S$ dan $D \subseteq S$.

      Mengingat $< cd >$ adalah ideal terkecil yang memuat CD dan S adalah ideal yang memuat CD, maka $< CD > \subseteq S$, sehingga menurut Teorema 2.5.1(1), jika $< CD > \subseteq S$ maka $C \subseteq S$ atau $D \subseteq S$, jadi S adalah ideal prima.

Berdasarkan hasil diatas diketahui bahwa semigrup dapat dibangun menjadi sebuah ideal prima.

3. Untuk membangun Near-ring Prima atas Semi grup dan diperoleh bahwa:

   Teorema 3.3

   Misal diketahui $(J,*,+)$ adalah ring, $(M,+)$ adalah sebuah semigrup, dengan $M \subset J$. Akan ditunjukkan bahwa M adalah ideal prima maka J adalah near – ring prima.

   i). Akan dibuktikan M adalah ideal di J,

   Ambil $s \in M$, dan $a, b \in J$,sedemikian sehingga:

   a. $a \cdot s = s \in M$ maka $M \cdot J \subseteq J$

   b. $(a + s)b - a \cdot b = b - b = 0_J \in J$

   maka M adalah ideal di J.

   ii). Karena J adalah Ring, maka J juga adalah Near-ring,

   Akan dibuktikan M adalah Ideal prima,

   Ambil ideal P dan ideal Q dari J, dan jika $PQ \subseteq M$, maka $P \subseteq M$ dan $Q \subseteq M$, mengingat $< pq >$ adalah ideal terkecil yang memuat PQ, dan M adalah ideal yang memuat PQ, maka $< pq > \subseteq M$, berdasarkan Teorema 2.5.1 bagian (1), maka M adalah ideal prima di near-ring J.

   Oleh karena M adalah ideal prima di near-ring J, maka berdasarkan Teorema 2.5.1 bagian (4), maka J adalah near-ring prima.

   Maka terbukti bahwa semigrup dapat dibangun ,menjadi near-ring prima.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, hanaya dibahas tentang bagaimana membangun near-ring prima dari semigrup. Disarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih dalam cara menggunakan near-ring prima dan semigrup dalam bidang pengkodean (peng-enkripsian) pesan dan aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2007). *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Boua, A. (2012). Some Conditions under which Prime Near-Rings are Commutative Rings. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 7–15.

Clay J.R. (1992). *NEARRING, GENESES, AND APPLICATIONS*. New York: Oxford University Press.

Gallian, J. A. (2012). *CONTEMPORARY ABSTRACT ALGEBRA* (8th ed.). Minnesota: Brooks/cole cengange learning.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2014). *ELEMENTS OF MODERN ALGEBRA*. south carolina: Cengage Learning.

Howie, J. M. (1995). epdf.pub_fundamentals-of-semigroup-theory.pdf. Oxford: Oxford University Press.

Pilz, G. (1983). *Near-Rings The Theory and its Applications* (2nd ed., Vol. 23). North- Holland, Amsterdam: North-Holland Mathematict Studies.

PILZ, G. (1983). *Near-rings The Theory and its Applications* (2nd ed.). North-Holland, Amsterdam: NORTH-HOLLAND PUBLlSHlNG COMPANY.

Triwulandari, P. Z., Sari, K., Putu, L., & Harini, I. (2017). HUBUNGAN DERIVASI PRIME NEAR-RING DENGAN SIFAT KOMUTATIF RING, *6*(2), 116–123.

RIWAYAT HIDUP

Sulaiman Hamdani Alfarid, lahir di Kabupaten Jombang pada tanggal 26 Oktober 1996, biasa dipanggil Sulaiman, tinggal di Desa Jombok RT 03 RW 01, Kecamatan Ngantang, Kabupaten Malang. Anak pertama dari Bapak Musta'in dan Ibu Sri'in Malikah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN JOMBOK 1, Kecamatan Ngantang, Kabupaten Malang, lulus pada tahun 2009, setelah itu melanjutkan ke SMPN 1 NGANTANG, Kabupaten Malang, dan lulus pada tahun 2012. Kemudian beliau melanjutkan pendidikan di MAN 7 JOMBANG, Kecamatan Bandar Kedung Mulyo, Kabupaten Jombang, dan lulus pada tahun2015. Pada tahun 2015 beliau menempuh kuliah S1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang maengambil jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sulaiman Hamdani Alfarid

NIM : 15610095

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika

Judul Skripsi : Near-ring Prima atas Semigrup

Pembimbing I : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si. P.hD

Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda tangan
1.	2 september 2019	Konsultasi Bab I	1.
2.	5 februari 2020	Konsultasi Bab II	2.
3.	4 maret 2020	ACC Bab I dan Bab II	3.
4.	2 oktober 2019	Konsultasi kajian keagamaan	4.
5.	19 desember 2019	Konsultasi kajian keagamaan	5.
6.	9 maret 2021	Konsultasi Bab III	6.
7.	13 oktober 2021	Konsultasi Bab III dan IV	7.
8.	11 oktober 2021	Konsultasi Kajian keagamaan	8.
9.	18 oktober 2021	ACC kajian Keagamaan	9.
10.	6 November 21	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 26 desember 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129200012 2 005