BILANGAN DOMINASI PADA GRAF PEMBAGI NOL RING BILANGAN BULAT MODULO 4*P*

SKRIPSI

OLEH
MAULANA AKBAR WIBI
NIM. 15610023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

BILANGAN DOMINASI PADA GRAF PEMBAGI NOL RING BILANGAN BULAT MODULO 4*P*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Maulana Akbar Wibi
NIM. 15610023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

BILANGAN DOMINASI PADA GRAF PEMBAGI NOL RING BILANGAN BULAT MODULO 4P

SKRIPSI

Oleh
Maulana Akbar Wibi
NIM. 15610023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 25 November 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	Juhari, M.Si
NIDT. 19870218201608011056	NIDT. 19840209201608011055

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129200012 2005

BILANGAN DOMINASI PADA GRAF PEMBAGI NOL RING BILANGAN BULAT MODULO 4_p

SKRIPSI

Oleh
Maulana Akbar Wibi
NIM. 15610023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana (S.Mat)
Tanggal 25 November 2021

Penguji Utama	: Dr. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji	: Juhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Maulana Akbar Wibi
NIM	: 15610023
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Bilangan Dominasi pada Graf Pembagi Nol Ring Bilangan Bulat Modulo 4_p.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 25 November 2021
Yang membuat pernyataan

Maulana Akbar Wibi
NIM. 15610023

MOTO

"Dan Sesungguhnya telah Kami mudahkan Alquran untuk pelajaran, maka adakah orang yang mengambil pelajaran?" (QS. Al-Qamar: 17)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Rohmat Wahyudik dan ibunda Sri Ningsih tercinta yang selalu berjuang tanpa lelah, memberikan doa, semangat, nasihat dan kasih sayang di setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi lebih baik.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur bagi Allah Swt atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam juga tetap tercurah kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad Saw yang telah menunjukkan manusia kepada jalan yang terang (Islam).

Dalam proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, M.A, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dan motivasi kepada penulis.
5. Juhari, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dan motivasi kepada penulis.

6. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah sabar dan ikhlas dalam mendidik dan memberikan ilmu kepada penulis.
8. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan doa, nasihat dan motivasi kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman pesantren yang dengan ikhlas meminjamkan laptop kepada penulis.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Jurusan Matematika.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 26 Oktober 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR vii

DAFTAR ISI ix

DAFTAR TABEL xi

DAFTAR GAMBAR xii

ABSTRAK xiii

ABSTRACT xiv

ملخص

..... **Error! Bookmark not defined.**

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Metode Penelitian 3
1.6 Sistematika Penulisan 4

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ring 6
2.2 Ring Komutatif 6
2.3 Ring Komutatif dengan Pembagi Nol 7
2.4 Graf 7
2.5 Lingkungan 8
2.6 Graf Pembagi Nol 8
2.7 Bilangan Dominasi dan Himpunan Dominasi 8
2.8 Hubungan Bilangan Dominasi dengan Ilmu Pengetahuan 10

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Formula Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4p})$ dengan $\boldsymbol{p = 2, 3, 5, 7, 11}$ 12
3.1.1 Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4.2})$ 12

3.1.2 Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4.3})$ 14
3.1.3 Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4\cdot 5})$ 16
3.1.4 Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4\cdot 7})$ 17
3.1.5 Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4\cdot 11})$ 19
3.2 Teorema Bilangan Dominasi pada Graf Pembagi Nol Ring $\boldsymbol{Z4p}$ 23
BAB IV KESIMPULAN
4.1 Kesimpulan 25
4.2 Saran 25
DAFTAR PUSTAKA
RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_8$ 13
Tabel 3.2 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_8$ 13
Tabel 3.3 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{12}$ 14
Tabel 3.4 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{12}$ 15
Tabel 3.5 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{20}$ 16
Tabel 3.6 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{28}$ 18
Tabel 3.7 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{44}$ 20
Tabel 3.8 Bilangan dominasi $\mathbb{Z}_{4p}$ untuk $p = 2,3,5,7,11$ 22

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G 8
Gambar 2.2 Himpunan Titik Dominasi pada Graf G 9
Gambar 3.1 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_8$ 14
Gambar 3.2 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{12}$ 15
Gambar 3.3 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{20}$ 17
Gambar 3.4 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{28}$ 19
Gambar 3.5 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{44}$ 21

ABSTRAK

Wibi, Maulana Akbar. 2021. **Bilangan Dominasi pada Graf Pembagi Nol Ring Bilangan Bulat Modulo 4p.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Graf, Pembagi Nol, Bilangan Dominasi

Graf pembagi nol G dari suatu ring R adalah suatu graf dengan titik-titiknya adalah semua unsur pembagi nol dari R. Kedua titik misalkan x dan y dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ dengan $x, y \neq 0$ di R. Suatu ring R dikatakan memiliki pembagi nol jika terdapat minimal satu unsur tak nol di R yang jika dioperasikan menggunakan perkalian dengan titik lain di R yang bukan nol akan menghasilkan nol. Himpunan dominasi dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah himpunan $S \subseteq V$ yang untuk setiap titik di $V - S$ terhubung langsung dengan setidaknya satu titik di S. Kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari suatu graf G disebut dengan bilangan dominasi. Pada penelitian ini ditunjukkan bilangan dominasi pada graf pembagi nol ring modulo $4p$ dengan p bilangan prima adalah

$$\gamma\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \begin{cases} 1, \text{jika } p = 2 \\ \\ 2, \text{jika } p > 2. \end{cases}$$

ABSTRACT

Wibi, Maulana Akbar. 2021. **On the Domination of Zero Divisor Graph of Integers Ring Modulo 4p.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim Islamic State University of Malang. Advisors: (I) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: Graph, Zero Divisor, Domination Number

A Zero divisor graph G of a ring R is a graph whose the vertices are all the elements of zero divisor of R. Two vertices, say x and y are said to be adjacent if and only if $x \cdot y = 0$ with $x, y \neq 0$ in R. A ring R is said to have a zero divisor if there is at least one non zero element in R that if it is operated using multiplication with other vertices in R which is not zero, it equals zero. The domination set of a graph $G = (V, E)$ is the set $S \subseteq V$ where for every vertex in $V - S$ is adjacent to at least one vertex in S, the minimum cardinality of domination set of a graph G is called domination number. In this study, it is shown that the domination number in the zero divisor graph of ring modulo $4p$ with p prime number is

$$\gamma\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \begin{cases} 1, \text{if } p = 2 \\ 2, \text{if } p > 2. \end{cases}$$

مستخلص

ويبي، مولانا اكبر ويبي. ٢٠٢١. **رقم الهيمنة في رسم بياني القاسم الصفر في الساحة أعداد صحيحة مودولو ٤ف.** البحث العلمي. دراسة الرياضية، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك ابراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (١) مُحمَّد نافع جوهري الماجستير. (٢) جوهري الماجستير.

الكلمة المفتاحية: رسم بياني، القاسم الصفر، رقم الهيمنة

يقال إن R هورسم البياني جميع قواسمه الصفرية R للحلقةG القاسم الصفر R في $x, y \neq 0$ مع $x \cdot y = 0$ متصلان مباشرة إذا وفقة إذا كانت x, y رأسين، مثل يحتوي على القاسم الصفر إذا كانت هناك رأس واحد على الأقل R يقال إن الحلقة والذي، إذا تم تشغيله باستخدام الضرب مع رؤوس أخرى R غير صفر في $G = (V, E)$، سينتج عنه صفر. المجموعة المهيمنة للرسم بياني R غير صفرية في مجاورة لرأس واحد على $V - S$ التي تكون لكل رأس في $S \subseteq V$ هي المجموعة . يسمي الحد الأدنى من عدد العناصر المهيمنة في الرسم بالرقم S الأقل في المهيمن. في هذه الدراسة، يتضح أن الرقم الهيمنة في الرسم البياني المقسوم على هو p مع الرقم الأولي 4_p الحلقة صفر المقسوم عليه:

$$\gamma\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \begin{cases} 1, \text{if } p = 2 \\ 2, \text{if } p > 2. \end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf G adalah himpunan V tidak kosong berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan E yang mungkin kosong dari sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik. Graf G yang mempunyai himpunan dari titik-titik V dan himpunan sisi E dapat dinotasikan $G = (V, E)$, (Chartrand, dkk, 2016:3).

Graf pembagi nol dari suatu ring R yang dinotasikan dengan $\Gamma(R)$ adalah suatu graf dengan titik-titiknya adalah semua unsur dari R dan dua titik terhubung langsung jika perkalian kedua titiknya adalah nol. Gagasan tersebut telah diperkenalkan I. Beck (1988) dalam artikel "*Colouring of Commutative Rings"* yang kemudian penelitian tersebut dilanjutkan oleh D. D. Anderson dan M. Naseer (1993) mengatakan dalam artikelnya "*Beck's Coloring of a Commutative Ring"* suatu ring komutatif R dapat menjadi suatu graf sederhana di mana titik-titiknya adalah unsur R dan dua unsur R yang berbeda misalkan $x, y \in R$ terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 0$.

Dominasi secara historis mulai dipelajari oleh (Hedetniemi dan Laskar,1950), dalam bukunya "*Bibliography on Domination in Graphs and Some Basic Definitions of Domination Parameters"* namun tingkat pengkajian tentang dominasi meningkat secara pesat pada pertengahan 1970-an, kemudian Haynes dkk menuliskan dalam bukunya " *Fundamentals of Domination in Graphs"* lebih dari 75 jenis dominasi dan berbagai topik lanjutan dalam dominasi yang telah didefinisikan dan diselidiki oleh beberapa peneliti, (Vaidya dan Pandit, 2014).

Himpunan dominasi dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah himpunan $S \subseteq V$ dengan setiap titik di $V - S$ terhubung langsung dengan setidaknya satu titik di S. Kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari suatu graf G disebut dengan bilangan dominasi, (Huang dan Xu, 2010:3).

Kajian tentang bilangan dominasi dan himpunan dominasi dalam teori graf dapat dilambangkan dengan kewajiban seorang manusia mencari ilmu dan mengamalkannya dalam kehidupan sehari-hari. Layaknya bilangan dominasi yang mendominasi titik-titik suatu graf, sebagaimana pula dengan ilmu kita juga bisa mempelajari suatu ilmu untuk mendapatkan suatu ruang lingkup pengetahuan yang luas. Sebagaimana yang terkandung dalam al-Quran surat Fatir ayat 28

"Dan demikian (pula) di antara manusia, makhluk bergerak yang bernyawa dan hewan-hewan ternak ada yang bermacam-macam warnanya (dan jenisnya). Di antara hamba-hamba Allah yang takut kepada-Nya, hanyalah para ulama. Sungguh, Allah Mahaperkasa, Maha Pengampun."

Ayat di atas menunjukkan kemahaluasan ilmu Allah, dan sesungguhnya orang-orang yang ada di dalam kubur pasti akan dibangkitkan-Nya. Namun, orang yang lalai melihat hal-hal di atas dengan penglihatan kelalaian yang tidak bisa menimbulkan kesadaran baginya. Sesungguhnya hanyalah orang yang takut kepada Allah yang dapat mengambil pelajaran dari-Nya dan berusaha mengetahui dengan pikiran-pikirannya yang fokus apa yang menjadi hikmah dari makhluk-makhluk tersebut. Ini merupakan contoh suatu dalil yang menunjukkan derajat keutamaan ilmu, sebab ilmu mengajak takut kepada Allah, dan orang-orang yang takut kepada-Nya adalah orang-orang yang dianugerahi karamah.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana formula bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}), p$ bilangan prima?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah menentukan formula bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}), p$ bilangan prima.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberi manfaat sebagai berikut :

1. Bagi peneliti, untuk memperdalam pemahaman dan menambah wawasan pengetahuan tentang bilangan dominasi khususnya pada formula bilangan dominasi $\mathbb{Z}_{4p}$.
2. Bagi pembaca, sebagai tambahan pengetahuan dan dapat digunakan menjadi rujukan pada penelitian selanjutnya tentang bilangan dominasi.
3. Bagi lembaga, sebagai tambahan perbendaharaan karya tulis ilmiah tentang bilangan dominasi.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode kajian pustaka. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji buku-buku ataupun artikel yang berhubungan dengan topik bahasan. Adapun langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan bilangan dominasi pada graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan $p = 2,3,5,7,11$ untuk memunculkan dugaan.
2. Menentukan pembagi nol $\mathbb{Z}_{4p}, \forall p$ bilangan prima.
3. Menentukan jumlah titik dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}), \forall p$ bilangan prima
4. Menentukan titik yang terhubung langsung dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}), \forall p$ bilangan prima.
5. Menentukan himpunan dominasi dan bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ $\forall p$ bilangan prima.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penelitian ini mudah dipahami dan terarah maka digunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan dari penelitian ini.

BAB II Kajian Pustaka

Bab ini membahas tentang ring, ring komutatif, ring komutatif dengan pembagi nol, graf, lingkungan, graf pembagi nol, bilangan dominasi dan himpunan dominasi, al-quran sebagai penyempurna kitab-kitab terdahulu.

BAB III Pembahasan

Bab ini membahas tentang langkah-langkah yang dikerjakan untuk memperoleh rumus umum himpunan dominasi dan bilangan dominasi pada graf pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan cara mencari pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{4p}$, menggambar representasi graf, menentukan bilangan dominasi graf pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{4p}$ dan pembuktiannya

BAB IV Penutup

Bab ini membahas tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Ring

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu $+$ sebagai operasi pertama dan $\times$ sebagai operasi kedua berturut-turut disebut operasi tambah dan operasi kali disebut dengan ring, jika memenuhi aksioma berikut:

a. $(R, +)$ adalah grup abelian,

b. Operasi $\times$ bersifat tertutup di R,

c. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di R, yaitu

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \forall a, b \in R,$$

d. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di R baik distributif kiri maupun kanan, Untuk semua $a, b, c \in R$ berlaku

   $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ dan $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

   (Dummit dan Foote, 1991).

2.2. Ring Komutatif

Suatu ring $(R, +, \times)$ dikatakan komutatif jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif di R (Arifin,2000:73). Untuk memudahkan definisi di atas, peneliti menggunakan $(\times)$ sebagai operasi kedua, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut :

Suatu ring $(R, +, \times)$ disebut ring komutatif apabila

$$\forall a, b \in R \text{ berlaku } a \times b = b \times a.$$

2.3. Ring Komutatif dengan Pembagi Nol

Suatu ring komutatif $(R, +, \times)$ dikatakan memiliki pembagi nol jika dan hanya jika $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ sedemikian hingga $a \times b = 0$. Definisi lainnya mengatakan misal $(R, +, \times)$ ring komutatif, suatu unsur yang bukan nol $a \in R$ disebut pembagi nol jika terdapat unsur yang bukan nol $b \in R$ sedemikian hingga $a \times b = 0$.

2.4. Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik $V(G)$, dan himpunan yang mungkin kosong pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi $E(G)$. (Abdussakir dkk, 2009).

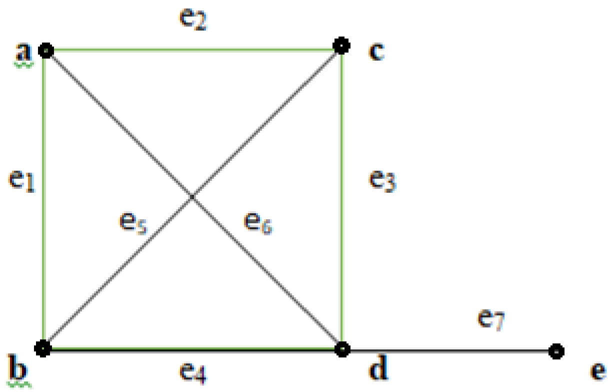
Misalkan u dan v merupakan titik di graf G. Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v, jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut dari e. Dua sisi e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada titik yang sama, (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ seperti berikut ini.

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf G tersebut secara lebih jelas dapat digambarsebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf **G**

.

2.5. Lingkungan

Misalkan v adalah titik pada graf G, maka titik-titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N[v]$. (Abdussakir dkk, 2009:9). Contoh pada gambar 1 misalkan kita ambil titik d maka lingkungan dari titik d adalah titik a, b, c, e. Bisa ditulis dengan $N[d] = \{a, b, c, e\}$.

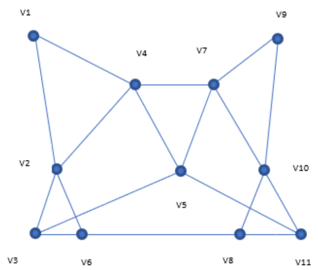
2.6. Graf Pembagi Nol

Misalkan R adalah ring komutatif dan $Z(R)$ merupakan pembagi nol dari R. Suatu graf pembagi nol Γ(R) adalah graf sederhana dengan titik-titiknya adalah unsur pembagi nol dari suatu ring komutatif R. Misalkan x dan y merupakan titik-titik di R, maka xy dikatakan terhubung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ dengan $x, y \neq 0$. (Wicaksono dan Sholeha, 2013:2).

2.7. Bilangan Dominasi dan Himpunan Dominasi

Salah satu topik yang dibahas dalam teori graf adalah himpunan dominasi. Banyak hal yang dapat dipelajari dari bilangan dominasi dan himpunan dominasi pada kehidupan sehari-hari. Seperti yang disebutkan oleh (Haynes,dkk,1998:21), misalkan dalam penentuan rute bus sekolah. Hampir semua bus sekolah beroperasi berdasarkan rute dan aturan tertentu. Biasanya aturan tersebut digunakan dengan tujuan untuk berupaya agar semua murid dapat menjangkau dengan jarak yang tidak jauh ke tempat pemberhentian bus. Dalam kasus ini permasalahannya di titik-titik mana saja pemberhentian bus ditentukan agar setiap anak berjalan tidak jauh ke pemberhentian tersebut.

Diberikan dua titik u dan v di suatu graf G, dikatakan u mendominasi v jika $v \in N[u]$. Himpunan bagian $D \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi jika titiknya mendominasi semua titik di G. Bilangan dominasi pada G dinotasikan dengan $\gamma(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi (Huang dan Xu, 2010:3).



Gambar 2.2 Himpunan Titik Dominasi pada graf **G**

Titik $v2$ mendominasi $v1, v3, v4, v6$ dalam G karena $v1, v3, v4, v6 \in [v2]$, atau dapat dikatakan $v1, v3, v4, v6$ merupakan anggota lingkungan dari $v2$ karena $v1, v3, v4, v6$ terhubung langsung dengan $v2$.

Titik $v5$ mendominasi $v3, v4, v7, v11$ dalam G karena $v3, v4, v7, v11 \in [v5]$, atau dapat dikatakan $v3, v4, v7, v11$ merupakan anggota lingkungan dari $v5$ karena $v3, v4, v7, v11$ terhubung langsung dengan $v5$.

Titik $v10$ mendominasi $v7, v8, v9, v11$ dalam G karena $v7, v8, v9, v11 \in [v10]$, atau dapat dikatakan $v7, v8, v9, v11$ merupakan anggota lingkungan dari $v10$ karena $v7, v8, v9, v11$ terhubung langsung dengan $v10$.

$D = \{v2, v5, v10\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf G karena $D \subseteq V(G)$. Jadi bilangan dominasi G adalah $\gamma(G) = 3$ karena merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi pada graf G.

2.8. Hubungan Bilangan Dominasi dengan Ilmu Pengetahuan

Kitab suci al-quran merupakan pedoman utama bagi seorang muslim untuk menjalankan kehidupan beragama sesuai apa yang sudah diperintahkan Allah SWT. Alquran memerintahkan kepada setiap manusia untuk menuntut ilmu agar Allah angkat derajatnya lebih tinggi daripada orang yang tidak menuntut ilmu. Hal ini sendiri telah dijelaskan dalam alquran surat al Mujadalah ayat 11 yang artinya :

"Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: Berlapang-lapanglah dalam majlis, maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan"

Allah mengangkat derajat orang yang berilmu diantara kalian dengan kemuliaan di dunia dan pahala di akhirat. Maka barang siapa yang beriman dan memiliki ilmu maka Allah akan mengangkat derajatnya dengan keimanannya itu dan mengangkat derajatnya dengan ilmunya pula; dan salah satu dari itu adalah Allah mengangkat derajat mereka dalam majelis-majelis."

Kutipan ayat tersebut menerangkan bahwa betapa Allah akan mengangkat derajat mereka yang menuntut ilmu beberapa kali lebih tinggi daripada yang tidak menuntut ilmu. Isyarat ini menandakan bahwa dengan ilmu lah manusia bisa menjadi lebih mulia, tidak dengan hartanya apalagi nasabnya. Dalam sebuah Hadis pun disebutkan tentang keutamaan mempelajari ilmu pengetahuan dalam Islam, Rasulullah SAW bersabda yang artinya:

"*Siapa yang menempuh jalan untuk mencari ilmu, maka Allah akan mudahkan baginya jalan menuju surga.*" (HR. Muslim, no. 2699).

Dari kedua dalil di atas menerangkan bahwa umat Islam diwajibkan untuk menuntut ilmu, karena Allah telah berjanji di dalam Al-Qur'an bahwa barang siapa yang pergi untuk menuntut ilmu maka Allah akan mengangkat derajatnya, dan Rasulullah juga menjelaskan bahwa dengan belajar atau berjalan untuk mencari ilmu maka Allah akan memudahkan jalannya menuju surga.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini akan dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama membahas mengenai bagaimana menentukan bilangan dominasi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ dengan $p = 2,3,5,7,11$ untuk memunculkan dugaan. Bagian kedua menentukan formula bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ dengan p prima.

3.1. Formula Bilangan Dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ dengan $p = 2, 3, 5, 7, 11$

Subbab ini membahas penentuan rumus bilangan dominasi pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$, dimana p adalah bilangan prima yang nantinya akan menghasilkan dugaan dan akan dibuktikan menjadi sebuah teorema. Percobaan ini menggunakan ring $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{28}$, dan $\mathbb{Z}_{44}$ untuk menentukan rumus umum tersebut.

3.1.1. Bilangan Dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4.2})$

Hasil operasi unsur unsur $\mathbb{Z}_8$ ditunjukkan dengan tabel cayley berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_8$

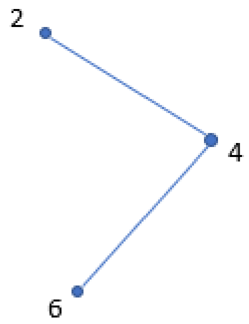
$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.1, diketahui anggota pembagi nol $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{2,4,6\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan tabel cayley pembagi nol dari $\mathbb{Z}_8$ terhadap operasi perkalian.

Tabel 3. 2 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_8$

$\times$	2	4	6
2	4	0	4
4	0	0	0
6	4	0	4

Berdasarkan Tabel 3.2 diketahui bahwa perkalian titik bukan 0 yang menghasilkan nilai 0 adalah titik 2, 4, dan 6. Oleh karena itu, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.1 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_8$

Berdasarkan gambar 3.1, himpunan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ adalah $\{4\}$, karena titik 4 mendominasi semua titik $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$, sehingga $2, 4, 6 \in N[4]$. Karena kardinalitas minimal dari graf $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ adalah 1 maka bilangan dominasi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ adalah $\gamma(\mathbb{Z}_8) = 1$.

3.1.2. Bilangan Dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4.3})$

Hasil operasi unsur-unsur $\mathbb{Z}_{12}$ ditunjukkan dengan tabel cayley berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{12}$

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3

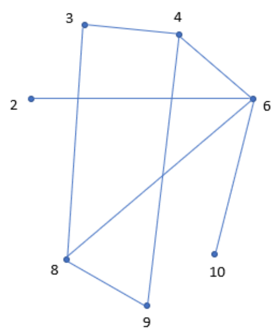
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.3, diketahui anggota pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan tabel cayley pembagi nol $\mathbb{Z}_{12}$ terhadap operasi perkalian.

Tabel 3.4 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{12}$

$\times$	2	3	4	6	8	9	10
2	4	6	8	0	4	6	8
3	6	9	0	6	0	3	6
4	8	0	4	0	8	0	4
6	0	6	0	0	0	6	0
8	4	0	8	0	4	0	8
9	6	3	0	6	0	9	6
10	8	6	4	0	8	6	4

Berdasarkan Tabel 3.4, diketahui bahwa perkalian titik bukan 0 yang menghasilkan nilai 0 adalah titik 2, 3, 4, 6, 8, 9, dan 10. Oleh karena itu, graf pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{12}$ ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.2 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{12}$

.

Berdasarkan gambar 3.2, himpunan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$ adalah $\{4, 6\}$, karena titik 4 mendominasi 3, 4, 6, 9 dan titik 6 mendominasi 2, 4, 6, 8, 10 dalam graf pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{12}$, sehingga $3, 4, 6, 9 \in N[4]$ dan $2, 4, 8, 10 \in N[6]$. Karena kardinalitas minimal dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$ adalah 2 maka bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$ adalah $\gamma(\mathbb{Z}_{12}) = 2$.

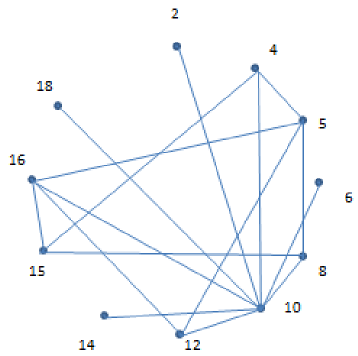
3.1.3. Bilangan Dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4\cdot 5})$

Akan ditentukan pembagi nol $\mathbb{Z}_{20}$. Hasil operasi unsur-unsur $\mathbb{Z}_{20}$ ditunjukkan dengan tabel cayley berikut:

Tabel 3.5 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{20}$

×	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18
2	4	8	10	12	16	0	4	8	10	12	16
4	8	16	0	4	12	0	8	16	0	4	12
5	10	0	5	10	0	10	0	10	15	0	10
6	12	4	10	16	8	0	12	4	10	16	8
8	16	12	0	8	4	0	16	12	0	8	4
10	0	0	10	0	0	0	0	0	10	0	0
12	4	8	0	12	16	0	4	8	0	12	16
14	8	16	10	4	12	0	8	16	10	4	12
15	10	0	15	10	0	10	0	15	10	0	10
16	12	4	0	16	8	0	12	4	0	16	8
18	16	12	10	8	4	0	16	12	10	8	4

Berdasarkan Tabel 3.5, diketahui bahwa perkalian titik bukan 0 yang menghasilkan nilai 0 adalah titik 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Oleh karena itu, $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$ ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.3 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{20}$

Berdasarkan gambar 3.3, pada graf pembagi nol ring $\mathbb{Z}_{20}$ himpunan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$ adalah $\{8, 10\}$, karena titik 8 mendominasi titik $5, 10, 15$ dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$, sehingga $5, 10, 15 \in N[8]$, sedangakan titik 10 mendominasi titik $2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18$ dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$, sehingga $2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18 \in N[10]$. Karena kardinalitas minimal dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$ adalah 2 maka bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$ adalah $\gamma(\mathbb{Z}_{20}) = 2$.

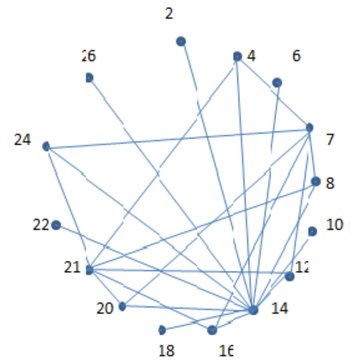
3.1.4. Bilangan Dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4\cdot 7})$

Akan ditentukan pembagi nol Z_{28}. Hasil operasi unsur-unsur $\mathbb{Z}_{28}$ ditunjukkan dengan tabel cayley berikut:

Tabel 3.6 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{28}$

$\times$	2	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24	26
2	4	8	12	14	16	20	24	0	4	8	12	14	16	20	24
4	8	16	24	0	4	12	20	0	8	16	24	0	4	12	20
6	12	24	8	14	20	4	16	0	12	24	8	14	20	4	16
7	14	0	14	21	0	14	0	14	0	14	0	7	14	0	14
8	16	4	20	0	8	24	12	0	16	4	20	0	8	24	12
10	20	12	4	14	24	16	8	0	20	12	4	14	24	16	8
12	24	20	16	0	12	8	4	0	24	20	16	0	12	8	4
14	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0	0
16	4	8	12	0	16	20	24	0	4	8	12	0	16	20	24
18	8	16	24	14	4	12	20	0	18	16	24	14	4	12	20
20	12	24	8	0	20	4	16	0	12	24	8	0	20	4	16
21	14	0	14	7	0	14	0	14	0	14	0	21	14	0	14
22	16	4	20	14	8	24	12	0	16	4	20	14	8	24	12
24	20	12	4	0	24	16	8	0	20	12	4	0	24	16	8
26	24	20	16	14	12	8	4	0	24	20	16	14	12	8	4

Berdasarkan Tabel 3.6 diketahui bahwa perkalian titik bukan 0 yang menghasilkan nilai 0 adalah titik 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26. Oleh karena itu, graf pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{28}$ ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.4 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{\mathbf{28}}$

Berdasarkan 3.4, himpunan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ adalah $\{4, 14\}$, karena titik 4 mendominasi titik $7, 14, 21$ dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$, sehingga $7, 14, 21 \in N[4]$, sedangakan titik 14 mendominasi titik $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$ dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$, sehingga $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 \in N[14]$. Karena kardinalitas minimal dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ adalah 2 maka bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ adalah $\gamma(\mathbb{Z}_{28}) = 2$.

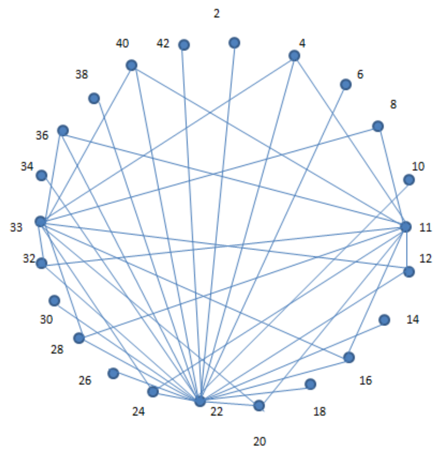
3.1.5. Bilangan Dominasi $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{4 \cdot 11})$

Akan ditentukan pembagi nol Z_{44}. Hasil operasi unsur-unsur $\mathbb{Z}_{44}$ ditunjukkan dengan tabel cayley berikut:

Tabel 3.7 Tabel Cayley Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{44}$

×	2	4	6	8	10	11	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	33	34	36	38	40	42
2	4	8	12	16	20	22	24	28	32	36	40	0	4	8	12	16	20	22	24	28	32	36	40
4	8	16	24	32	40	0	4	12	20	28	36	0	8	16	24	32	40	0	4	12	20	28	36
6	12	24	36	4	16	22	28	40	8	20	32	0	12	24	36	4	16	22	28	40	8	20	32
8	16	32	4	20	36	0	8	24	40	12	28	0	16	32	4	20	36	0	8	24	40	12	28
10	20	40	16	36	12	22	32	8	28	4	24	0	20	40	16	36	12	22	32	8	28	4	24
11	22	0	22	0	22	33	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	11	22	0	22	0	22
12	24	4	28	8	32	0	12	36	16	40	20	0	24	4	28	8	32	0	12	36	16	40	20
14	28	12	40	24	8	22	36	20	4	32	16	0	28	12	40	24	8	22	36	20	4	32	16
16	32	20	8	40	28	0	16	4	36	24	12	0	32	20	8	40	28	0	16	4	36	24	12
18	36	28	20	12	4	22	40	32	24	16	8	0	36	28	20	12	4	22	40	32	24	16	8
20	40	36	32	28	24	0	20	16	12	8	4	0	40	36	32	28	24	0	20	16	12	8	4
22	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0
24	4	8	12	16	20	0	24	28	32	36	40	0	4	8	12	16	20	0	24	28	32	36	40
26	8	16	24	32	40	22	4	12	20	28	36	0	8	16	24	32	40	22	4	12	20	28	36
28	12	24	36	4	16	0	28	40	8	20	32	0	12	24	36	4	16	0	28	40	8	20	32
30	16	32	4	20	36	22	8	24	40	12	28	0	16	32	4	20	36	22	8	24	40	12	28
32	20	40	16	36	12	0	32	8	28	4	24	0	20	40	16	36	12	0	32	8	28	4	24
33	22	0	22	0	22	11	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	33	22	0	22	0	22
34	24	4	28	8	32	22	12	36	16	40	20	0	24	4	28	8	32	22	12	36	16	40	20
36	28	12	40	24	8	0	36	20	4	32	16	0	28	12	40	24	8	0	36	20	4	32	16
38	32	20	8	40	28	22	16	4	36	24	12	0	32	20	8	40	28	22	16	4	36	24	12
40	36	28	20	12	4	0	40	32	24	16	8	0	36	28	20	12	4	0	40	32	24	16	8
42	40	36	32	28	24	22	20	16	12	8	4	0	40	36	32	28	24	22	20	16	12	8	4

Berdasarkan Tabel 3.7 diketahui bahwa perkalian titik bukan 0 yang menghasilkan nilai 0 adalah titik 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42. Oleh karena itu, graf pembagi nol ring komutatif $\mathbb{Z}_{44}$ ditunjukkan pada gambar berikut:

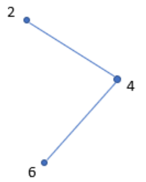
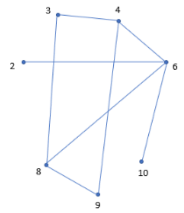
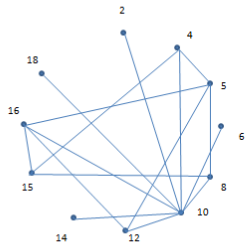
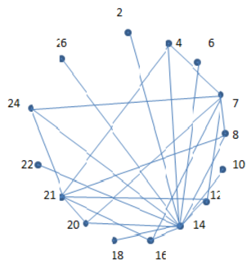


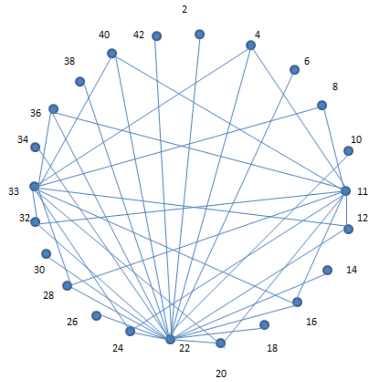
Gambar 3.5 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_{\mathbf{44}}$

Berdasarkan gambar 3.5, himpunan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$ adalah $\{4, 22\}$, karena titik 4 mendominasi titik $11, 22, 33$ dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$, sehingga $11, 22, 33 \in N[4]$, sedangakan titik 22 mendominasi titik 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42 dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$, sehingga 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42$\in N[22]$. Karena kardinalitas minimal dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$ adalah 2 maka bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$ adalah $\gamma(\mathbb{Z}_{44}) = 2$.

Berdasarkan subbab 3.1, dihasilkan tabel yang diperoleh dari hasil pencarian bilangan dominasi $\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$ dengan $n = 2,3,5,7,11$.

Tabel 3.8 Bilangan dominasi $\mathbb{Z}_{4n}$ untuk $\boldsymbol{n = 2, 3, 5, 7, 11}$

n	Gambar Graf	$\gamma(\mathbb{Z}_{4n})$
2		1
3		2
5		2
7		2

11		2
…		
p		2?

Berdasarkan tabel di atas diperoleh dugaan sebagai berikut :

1. Unsur pembagi nol $\mathbb{Z}_{4p}$, di mana p adalah bilangan prima adalah $p, 3p,$ dan semua bilangan genap dalam $\mathbb{Z}_{4p}$.
2. $2p$ terhubung langsung dengan semua bilangan genap dalam $\mathbb{Z}_{4p}$.
3. Titik 4 terhubung langsung dengan p dan $3p \in \mathbb{Z}_{4p}$.
4. $\gamma(\Gamma\mathbb{Z}_{4p}) = 2, \forall p > 2, p$ prima.

3.2 Teorema Bilangan Dominasi pada Graf Pembagi Nol Ring Z_{4p}

Pada subbab ini akan dibuktikan dugaan rumus bilangan dominasi graf pembagi nol ring komutatif Z_{4p}, di mana p adalah bilangan prima berdasarkan dugaan yang muncul pada subbab sebelumnya. Namun, sebelum menentukan teorema, akan dibahas terlebih dahulu lemma bilangan dominasi graf pembagi nol Ring $\mathbb{Z}_{4\mathrm{p}}$ yang digunakan untuk membangun teorema.

Lemma 3.1

Pembagi nol $\mathbb{Z}_{4p}$, di mana p bilangan prima adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{p, 3p\} \cup \{2k, k = 1,2, \dots, 2n - 1\}.$$

Bukti:

$p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$, karena terdapat $4 \in \mathbb{Z}_{4p}$ di mana $4 \cdot p = 0$. $3p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$, karena terdapat $4 \in \mathbb{Z}_{4p}$ di mana $4 \cdot 3p = 0$. Misal $q \in \mathbb{Z}_{4n}$ dan q genap, misalkan $q = 2a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$. Karena $2p \in \mathbb{Z}_{4p}$ dan $2p \cdot q = 2p \cdot 2a = 4n \cdot a = 0$, maka $q \in \mathbb{Z}_{4p}$.

Akibatnya, $|Z(\mathbb{Z}_{4p})| = 2p + 1$.

Lemma 3.2

$2p \in \Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ terhubung langsung dengan $m, \forall m \in \mathbb{Z}_{4p}$ di mana m genap.

Bukti:

Misal $m \in \mathbb{Z}_{4p}$ dan m genap, misal $m = 2a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$. Maka, $2p \cdot m = 2p \cdot 2a = 4p \cdot a = 0$.

Akibatnya, $2p$ terhubung langsung dengan $m, \forall m\mathbb{Z}_{4p}$ di mana m genap.

Lemma 3.3

$4 \in \Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ terhubung langsung dengan $p \in \Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ dan $3p \in \Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$.

Bukti:

Dari lemma 3.1, kita tahu bahwa $p, 3p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$. Akibatnya, 4 terhubung langsung dengan p dan $3p$.

Lemma 3.4

Tidak ada titik yang terhubung langsung dengan semua titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ di mana $p > 2$.

Bukti:

Misal $x \in \Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$. Maka $x = p$ atau $x = 3p$ atau $x = 2k, k = 1,2, \dots ,2n - 1$.

1. Jika $x = p$, terdapat $3p \in \mathbb{Z}_{4p}$, di mana $p \cdot 3p \neq 0(mod\ 4p)$. Karena p dan $3p$ pastilah bilangan ganjil pada $\mathbb{Z}_{4p}$, maka jelas bahwa $p \cdot 3p$ juga ganjil, yang artinya $p \cdot 3p \neq 0(mod\ 4p)$. Akibatnya p tidak terhubung langsung dengan $3p$.
2. Jika $x = 3p$, terdapat $p \in \mathbb{Z}_{4p}$, di mana $3p \cdot p \neq 0(mod\ 4_p)$. Menurut bukti pada kasus $x = p$, maka berlaku juga bahwa $3p$ tidak terhubung langsung dengan p.
3. Jika $x = 2k, k = 1,2, \dots ,2p - 1$,

   Kasus 1. Jika $k = 1$, terdapat $4 \in \mathbb{Z}_{4p}$, maka $x = 2 \cdot 4 = 8 \neq 0(mod\ 4p)$.

   Kasus 2. Jika $x = p$, terdapat $p \in \mathbb{Z}_{4p}$, maka $x = 2p \cdot p \neq 0(mod\ 4p)$. Andaikan $2p \cdot p \equiv 0(mod 4p)$, maka $2p \cdot p = a \cdot 4p$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$, sehingga $2p \cdot p = a \cdot 4p \Leftrightarrow p \cdot p = 2ap$. Artinya p genap dan p^2 genap. Kontradiksi karena p ganjil. Akibatnya $2p \cdot p \neq 0(mod\ 4p)$.

   Kasus 3. Jika $k \neq 1, k \neq p$, terdapat $2 \in \mathbb{Z}_{4p}$ di mana $2k \cdot 2 = 4k \neq 0(mod\ 4p)$. Andaikan $4k \equiv 0(mod\ 4p)$, maka $4k = 4p \cdot a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$. Sehingga $4k = 4p.a \Leftrightarrow k = ap$. Akibatnya $k = p$ atau $k = 2p$ atau $k = 3p$. $k = p$ jelas tidak mungkin karena dalam kasus ini $k \neq p$. $k \neq 2p$ dan $k \neq 3p$ karena $k \leq 2p - 1$, berlaku juga dengan $k = 3p$.

Akibatnya, karena tidak ada satu titik yang mendominasi semua titik, maka $\gamma\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\big) \geq 2$.

Teorema 3.1

$\gamma\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\big) = 2\ \forall p > 2$, p bilangan prima.

Bukti:

Menurut lemma 3.2 dan lemma 3.3 titik 4 terhubung langsung dengan titik p dan $3p$, titik $2p$ terhubung langsung dengan titik $m \in \mathbb{Z}_{4p}$, m genap. Akibatnya, 4 dan $2p$ mendominasi semua titik di $\mathbb{Z}_{4p}$, maka himpunan dominasi dari $\mathbb{Z}_{4n}$ adalah $\{4{,}2n\}$. Akibatnya

$$\gamma\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\big) \leq 2.$$

Menurut lemma 3.4, kita tahu bahwa

$$\gamma\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\big) \geq 2.$$

Dengan demikian $2 \geq \gamma(\Gamma\big(\mathbb{Z}_{4p}\big)) \geq 2$, sehingga $\gamma\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\big) = 2$.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan, dapat diambil kesimpulan bahwa bilangan dominasi graf pembagi nol ring $\mathbb{Z}_{4p}$, untuk p suatu bilangan prima adalah

$$\gamma\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \begin{cases} 1, \text{jika } p = 2 \\ 2, \text{jika } p > 2 \end{cases}$$

4.2 Saran

Penelitian ini membahas masalah tentang bilangan dominasi pada graf pembagi nol ring $\mathbb{Z}_{4p}$, p bilangan prima. Penelitian selanjutnya diharapkan membahas masalah tentang bilangan dominasi pada graf dan modulo lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah bin Muhammad. 2006. Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 1. Bogor: Pustaka Imam Asy-Safi'i Abidin.

Abdussakir, Azizah, N.N, dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Jaza'iri, A. B. J. (1976). Minhaj al-muslim. Alaf 21.

Al-Qur'an Terjemah. 2015. Departemen Agama RI. Bandung: CV Darus Sunnah.

Anderson, D. D., dan M. Naseer. 1993. *Beck's Coloring of Commutative Rings*. Journal of Algebra, 159(2), 500-514.

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Six Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Drs. Jong Jek Siang. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: ANDI Yogyakarta.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: a Division of Simon & Schuster, Inc.

Haynes. T.W, Hedetniemi, S.T, dan Slater, P.J. 1998. *Fundamentals of Dominantion in Graphs*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Hedetniemi, S. T., & Laskar, R. C. 1991. *Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters*. In *Annals of Discrete Mathematics* (Vol. 48, pp. 257-277). Elsevier.

Huang, J. dan Xu, J. *Domination and Total Domination Contraction Numbers of Graphs*. Jurnal tidak dipublikasikan. China: Departement of Mathematics University of Science and Technology of China.

Beck, I. 1998. *Coloring of Commutative Rings*. Journal of Algebra, 116, 208-216.

Sugeng Mardiyono. 1996. *Matematika Diskret*. Yogyakarta: FMIPA IKIP Yogyakarta.

Vaidya, S. K., & Pandit, R. M. 2014. *Edge domination in some path and cycle related graphs*. *International Scholarly Research Notices*.

Wicaksono, Satrio Adi dan Sholeha. 2013. *Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan*. Jurnal Sains dan Seni Pomits, 02(1):1-5.

RIWAYAT HIDUP

Maulana Akbar Wibi, lahir di Jakarta pada tanggal 5 Mei 1997 dari Bapak Rohmat Wahyudik dan Ibu Sri Ningsih, anak pertama dari dua bersaudara ini biasa dipanggil Wibi, tempat tinggal di Malang adalah di Pondok Pesantren Sabilurrosyad Mabna Tahfidzil Quran Gasek, Sukun.

Selama masa belajar, dia menempuh pendidikan mulai dari SDN Mojorejo 2 Batu lulus pada tahun 2009, kemudian melanjutkan studinya di MTs Negeri Batu lulus pada tahun 2012 dan melanjutkan studi di MAN Batu yang lulus pada tahun 2015, selama studinya pada jenjang SD-SMA dia juga belajar di Pondok Pesantren Daru Ulum Al Asyhar selama 14 tahun. Selanjutnya, pada tahun 2015 dia melanjutkan studinya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG FAKULTAS
SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Maulana Akbar Wibi
NIM : 15610023
Fakultas/Jurusan : *Sains dan Teknologi/Matematika*
Judul Skripsi : Bilangan Dominasi pada Graf Pembagi Nol Ring Bilangan Bulat Modulo 4p
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
Pembimbing II : Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	12 Pebruari 2021	Konsultasi BAB I,II,III	
2	12 Pebruari 2021	Konsultasi Agama	
3	19 Pebruari 2021	Revisi BAB I,II,III	
4	26 Pebruari 2021	Revisi BAB I,II,III	
5	3 Maret 2021	ACC BAB I,II,III	
6	3 Maret 2021	ACC Agama	
7	22 Mei 2021	Konsultasi Agama	
8	1 Juli 2021	Revisi BAB III, Konsultasi BAB IV	
9	20 Juli 2021	Revisi BAB III,IV	

10	17 Agustus 2021	Revisi BAB III	
11	1 September 2021	Revisi BAB III	
12	6 September 2021	Revisi Lemma Teorema	
13	1 Oktober 2021	Revisi Teorema	
14	24 Oktober 2021	Cek Keseluruhan	
15	25 Oktober 2021	ACC sidang	
16	25 Oktober 2021	ACC sidang	

Malang, 29 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005