

**ANALISIS MODEL STOKASTIK PENULARAN VIRUS HEPATITIS B**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ARINA NUR LAILA  
NIM. 17610034**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**ANALISIS MODEL STOKASTIK PENULARAN VIRUS HEPATITIS B**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Arina Nur Laila  
NIM. 17610034**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**


**ANALISIS MODEL STOKASTIK PENULARAN VIRUS HEPATITIS B**

**SKRIPSI**


**Oleh**  
**Arina Nur Laila**  
**NIM. 17610034**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji**  
**Tanggal, 7 Desember 2021**

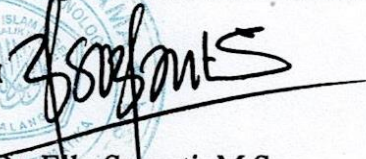
**Pembimbing I,**

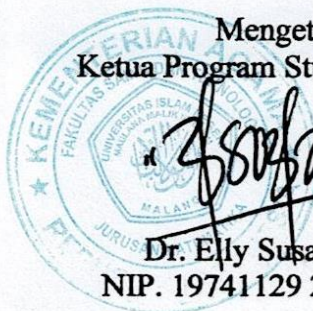
  
**Dr. Usman Pagalay, M.Si**  
**NIP. 19650414 200312 1 001**

**Pembimbing II,**

  
**Dr. Heni Widayani, M.Si**  
**NIDT. 19901006201802012229**

**Mengetahui,**  
**Ketua Program Studi Matematika**

  
**Dr. Elly Susanti, M.Sc.**  
**NIP. 19741129 200012 2 005**



# ANALISIS MODEL STOKASTIK PENULARAN VIRUS HEPATITIS B

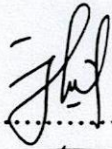
## SKRIPSI

Oleh  
**Arina Nur Laila**  
**NIM. 17610034**

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi  
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Tanggal, 17 Desember 2021

Penguji Utama : Juhari, S.Pd.,M.Si

.....  


Ketua Penguji : Fachrur Rozi, M.Si

.....  


Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

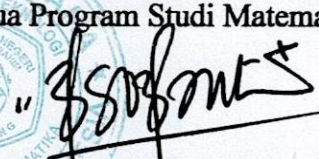
.....  


Anggota Penguji : Dr. Heni Widayani, M. Si

.....  




Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

  
Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005



## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Arina Nur Laila

NIM : 17610034

Jurusan : Matematika

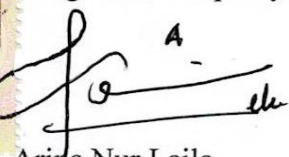
Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Desember 2021  
Yang membuat pernyataan,



  
Arina Nur Laila  
NIM. 17610034

## **MOTO**

“Percayalah pada dirimu sendiri dan ketahuilah bahwa ada sesuatu di dalam dirimu yang lebih besar dari rintangan apapun”. (Christian D. Larson)

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Alm. Bapak Sutrisno, ibunda Siti Fathonah, adik tersayang Muhammad Syaifudin Normansyah, serta Muhammad Endra Cahyo Nughroho yang kata-katanya selalu memberikan semangat yang berarti bagi penulis

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah SWT. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan, arahan, dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, MA selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri. Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasehat dan ilmunya kepada penulis.
5. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang juga telah banyak memberikan arahan, nasehat, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang



terutama kepada seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017 “MAGENTA’17”, yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, Desember 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR.....viii

DAFTAR ISI.....x

DAFTAR GAMBAR.....xii

DAFTAR SIMBOL .....xiii

ABSTRAK .....xv

ABSTRACT .....xvi

ملخص.....xvii

### BAB I PENDAHULUAN

1.1	Latar Belakang .....	1
1.2	Rumusan Masalah .....	5
1.3	Tujuan Penelitian .....	5
1.4	Manfaat Penelitian .....	5
1.5	Batasan Masalah.....	6
1.6	Metode Penelitian.....	7
1.7	Sistematika Penulisan.....	8

### BAB II KAJIAN PUSTAKA

3.1	Model Matematika .....	9
3.2	Persamaan Diferensial.....	10
3.3	Model Epidemic SIR.....	11
3.4	Distribusi Normal.....	12
2.4.1	Mean .....	13
2.4.2	Variansi dan Standar Deviasi.....	14
3.5	Probabilitas Transisi.....	15

3.6	Proses Stokastik .....	17
2.6.1	Persamaan Diferensial Stokastik .....	18
2.6.2	Proses Wiener .....	19
2.6.3	Proses Ito .....	21
3.7	Hepatitis B.....	22
3.8	Kajian Keagamaan .....	23

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Kontrusi Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B dengan Laju Infeksi Akut dan Kronis .....	24
3.2	Solusi Analitik Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B .....	32
3.3	Simulasi Analitik Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B .....	37
3.4	Integrasi Al-quran dan Hadist .....	45

### **BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan .....	48
4.2	Saran.....	49

### **DAFTAR PUSTAKA**

### **LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen SIR.....	12
Gambar 3.1	Diagram Kompartemen SIR dengan Laju Infeksi Akut dan Kronis.....	26
Gambar 3.2	Diagram Transisi $I(t)$ pada Interval $\Delta t$ .....	28
Gambar 3.3	Simulasi Solusi Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B ....	38
Gambar 3.4	Simulasi Proses Wiener $dW_S$ dan $dW_I$ .....	41
Gambar 3.5	Simulasi Proses Wiener dengan Variasi Nilai $\beta$ dan $\alpha$ .....	43
Gambar 3.6	Simulasi Proses Wiener dengan Variasi Nilai $\gamma$ .....	44
Gambar 3.7	Simulasi Proses Wiener dengan Variasi Nilai $I(0)$ .....	45

## DAFTAR SIMBOL

$E(x)$	:Nilai rata-rata atau nilai harapan suatu peubah acak $x$
$\sigma^2$	:Variansi peubah acak $x$
$\sigma$	:Standar deviasi peubah acak $x$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	:Variabel random $X$ berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu$ dan variansi $\sigma^2$
$p_{ij}(t)$	:Probabilitas transisi dari state $i$ pada waktu $t$ ke state $j$ pada waktu $t$
$X(t)$	:Variabel acak pada waktu $t$
$\mu(X(t), t)$	:Koefisien drift (mean) pada persamaan diferensial stokastik
$\sigma(X(t), t)$	:Koefisien diffusion (standar deviasi) pada persamaan diferensial stokastik
$W(t)$	:Proses wiener
$\mu(X(t), t) dt$	:Fungsi deterministic
$\sigma(X(t), t) dW(t)$	:Fungsi stokastik
$X(0) = X_0$	:Nilai awal (initial value) dari $X$ di titik $t = 0$
$B(t)$	:Gerak brown
$F$	:Fungsi yang kontinu hingga turunan kedua
$S(t)$	:Banyaknya individu yang rentan pada waktu $t$
$I(t)$	:Banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu $t$
$R(t)$	:Banyaknya individu yang sembuh pada waktu $t$
$N(t)$	:Jumlah populasi pada waktu $t$
$\theta$	:Laju kelahiran
$\delta$	:Laju kematian

$\beta$	:Laju infeksi akut virus hepatitis b
$\alpha$	:Laju infeksi kronis virus hepatitis b
$\gamma$	:Laju kesembuhan dari infeksi hepatitis b akut
$m$	:State dari banyaknya individu yang rentan pada waktu $t$
$n$	:State dari banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu $t$
$g$	:Besarnya perubahan yang terjadi pada individu yang rentan pada interval waktu $\Delta t$
$h$	:Besarnya perubahan yang terjadi pada individu yang terinfeksi pada interval waktu $\Delta t$
$o(\Delta t)$	:Probabilitas transisi pada interval $\Delta t$ yang kecil kemungkinan untuk individu yang bertransisi $> 1$

## ABSTRAK

Laila, Arina Nur. 2021. **Analisis Model Stokastik pada Penularan Virus Hepatitis B**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si (II) Dr. Heni Widayani, M.Si

**Kata Kunci:** Model Stokastik SIR, Formula Ito, Virus Hepatitis B

Penyebaran infeksi Virus Hepatitis B (VHB) banyak dikaji menggunakan model deterministik SIR, dimana individu yang sembuh dari infeksi akut memiliki kekebalan sementara terhadap virus. Namun, model deterministik ini menggunakan laju infeksi virus yang konstant di sepanjang waktu. Hal tersebut tidak sesuai dengan kenyataan dimana laju infeksi merupakan parameter acak yang bergantung waktu sehingga dikatakan sebagai proses stokastik. Dalam Penelitian ini dibahas mengenai analisis model stokastik penularan virus hepatitis B. Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mengkonstruksi model stokastik SIR dengan membagi laju infeksi menjadi dua yaitu laju infeksi akut dan kronis mengikuti proses wiener. Model tersebut kemudian dicari solusi analitiknya mengacu pada formula Ito. Solusi analitik dan proses wiener tersebut digambarkan dengan mensubstitusikan nilai parameter berupa laju infeksi akut dan kronis ( $\beta + \alpha$ ), laju kesembuhan ( $\gamma$ ), dan nilai awal ( $S(0)$  dan  $I(0)$ ) untuk memperoleh nilai mean ( $\mu$ ) dan standar deviasi ( $\sigma$ ) dari  $dS(t)$  dan  $dI(t)$ . Hasil dari simulasi menunjukkan bahwa banyaknya individu terinfeksi ( $I(t)$ ) akan cepat berkurang apabila ( $\gamma$ ) semakin besar namun akan cepat bertambah apabila ( $\beta + \alpha$ ) dan ( $I(0)$ ) semakin besar.



## ABSTRACT

Laila, Arina Nur. 2021. **On The Analysis of Stochastic Model on Transmission Hepatitis B Virus**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim Malang State Islamic University. Advisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si (II) Dr. Heni Widayani, M.Si.

**Keywords:** SIR Stochastic Model, Ito Formula, Hepatitis B Virus

The spread of hepatitis B virus (HBV) infection has been widely studied using the deterministic SIR model, in which individuals who recover from acute infection have temporary immunity to the virus. However, this deterministic model uses a constant rate of viral infection over time. This is not in accordance with the fact that the infection rate is a random parameter that depends on time. This study discusses the analysis of the stochastic model of hepatitis B virus transmission. The purpose of this study is to construct the SIR stochastic model by dividing the infection rate into two, namely the rate of acute and chronic infection following the Wiener process. The model is then searched for an analytical solution referring to the Ito formula. The analytical solution and the Wiener process are described by substituting parameter values in the form of acute and chronic infection rates ( $\beta + \alpha$ ), cure rates ( $\gamma$ ), and initial values ( $S(0)$  and  $I(0)$ ) to obtain the mean ( $\mu$ ) and the standard deviation ( $\sigma$ ) of  $dS(t)$  and  $dI(t)$ . The results of the simulation show that the number of infected individuals ( $I(t)$ ) will decrease rapidly if ( $\gamma$ ) is greater but will increase rapidly if ( $\beta + \alpha$ ) and ( $I(0)$ ) are greater.

## ملخص

ليلي ، أرنا نور. 2021. تحليل النموذج (العشوائي) لانتقال فيروس التهاب (الكبد الوبائي B). البحث الجامعي. الشعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المستشار: (1) الدكتور عثمان باجالاي، ماجستير (2) الدكتور هيني ويدايستي، الماجستير

**الكلمة الرئيسية:** النموذج العشوائي SIR، الصيغة Ito، فيروس التهاب الكبد ب

تمت دراسة انتشار عدوى فيروس التهاب الكبد B (HBV) على نطاق واسع باستخدام نموذج SIR الحتمي ، حيث يتمتع الأفراد الذين يتعافون من العدوى الحادة بمناعة مؤقتة ضد الفيروس. ومع ذلك ، يستخدم هذا النموذج القطعي معدلًا ثابتًا للعدوى الفيروسية بمرور الوقت. هذا لا يتوافق مع حقيقة أن معدل الإصابة هو معامل عشوائي يعتمد على الوقت. تناقش هذه الدراسة تحليل النموذج العشوائي لانتقال فيروس التهاب الكبد B. الغرض من هذه الدراسة هو بناء نموذج ستوكاستيك SIR عن طريق تقسيم معدل الإصابة إلى قسمين ، وهما معدل العدوى الحادة والمزمنة بعد عملية Ito. ثم يتم البحث في النموذج عن حل تحليلي يشير إلى صيغة إيتو. يتم وصف الحل التحليلي وعملية Wiener باستبدال قيم المعلومات في شكل معدلات عدوى حادة ومزمنة  $(\beta + \alpha)$  ، ومعدلات الشفاء  $(\gamma)$  ، والقيم الأولية  $(I(0) \text{ و } S(0))$  للحصول على المتوسط  $(\mu)$  والانحراف المعياري  $(\sigma)$  لـ  $dS(t)$  و  $dI(t)$ . تظهر نتائج المحاكاة أن عدد الأفراد المصابين  $(I(t))$  سينخفض بسرعة إذا كانت  $(\gamma)$  أكبر ولكنها ستزداد بسرعة إذا كانت  $(\beta + \alpha)$  و  $(I(0))$  أكبر.

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Dewasa ini perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi semakin meningkat, hal ini dapat mempermudah kita untuk mempelajari berbagai fenomena dalam kehidupan di alam semesta. Matematika merupakan salah satu bidang keilmuan yang diterapkan untuk mengamati dan mempelajari fenomena dalam berbagai bidang kehidupan misalnya dalam bidang kesehatan mengenai penyakit menular. Perilaku penyebaran penyakit yang menular dapat diamati dan digambarkan dengan menggunakan model matematika. Lakone & Finkenstad (2006) menjelaskan bahwa model matematika digunakan untuk mengetahui dinamika penularan suatu penyakit yang menular. Contoh peran matematika di bidang kesehatan adalah membuat pemodelan matematika mengenai suatu penyakit yang menular.

Model epidemi merupakan model matematika yang digunakan untuk menggambarkan penyebaran suatu penyakit pada wilayah tertentu misalnya model epidemi SIR, SEIR, SIRS dan lain sebagainya. Kategori pemodelan matematika pada epidemi dibagi menjadi dua yaitu deterministik dan stokastik. Suatu model apabila nilai dari variabelnya diketahui dengan pasti, maka disebut sebagai model deterministik. Sedangkan apabila nilai variabel dari model tersebut tidak diketahui dengan pasti karena berupa variabel random maka disebut sebagai model stokastik. Nasell (2002) berpendapat bahwa dari kedua model tersebut memiliki kekurangan dan kelebihan masing-masing, tetapi keduanya sama-sama dibutuhkan.

Penyakit menular merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh mikroorganisme seperti virus, bakteri, parasit, atau jamur yang dapat berpindah dari orang yang terinfeksi ke orang lain yang sehat. Di dunia terdapat banyak penyakit menular, yang paling umum diantaranya influenza, tuberculosis (TBC), campak, pneumonia, hepatitis, dan lain sebagainya. Dalam hal ini akan dibahas penularan penyakit yang disebabkan oleh virus hepatitis. Hepatitis merupakan penyakit menular dimana terdapat peradangan pada hati yang disebabkan oleh virus. Mengenai jumlah dan penyebarannya, hepatitis B menempati nomor pertama dimana jumlah orang yang menderita penyakit hepatitis B semakin meningkat dikarenakan rendahnya pengetahuan tentang hidup bersih dan sehat, pergaulan bebas, dan ekonomi rendah. Individu yang dapat terserang hepatitis B ini adalah semua kalangan dari usia, jenis kelamin, dan ras.

WHO mengatakan bahwa virus hepatitis B telah menginfeksi sekitar dua miliar orang didunia dan yang telah menderita infeksi kronis sebanyak lebih dari 240 juta dengan setiap tahunnya terdapat lebih dari 600.000 orang meninggal karena terinfeksi akut dan kronis. Penelitian dari berbagai daerah di Indonesia menunjukkan angka yang sangat bervariasi menurut tingkat endemisitas hepatitis B di tiap-tiap daerah (Soewignjo, 2008). Indonesia dikategorikan sebagai negara dengan endemisitas sedang hingga tinggi yang menduduki peringkat ketiga setelah cina dan india penderita hepatitis B terbanyak dengan tingkat prevalensi sebesar 10%, dengan rata-rata 5,5% dan variasi 3,5 – 9,1%. Nilai rata-rata dan variasi ini menunjukkan bahwa penyebaran virus hepatitis B merupakan kejadian random dan tidak pasti. Parzen (1962) mengatakan bahwa perubahan dari banyaknya individu rentan (*susceptible*), terinfeksi (*infected*) dan sembuh

(*recovered*) itu tidak bisa diprediksi dengan pasti. Begitu juga parameter yang mempengaruhi penyebaran virus hepatitis B seperti laju kelahiran, laju infeksi, laju kesembuhan, dan laju kematian yang memiliki nilai tidak pasti.

Hal tersebut menunjukkan bahwa Penyebaran virus hepatitis B dan penyakit menular lainnya merupakan suatu kejadian acak yang bergantung pada waktu, dengan demikian penyebaran penyakit ini termasuk pada proses stokastik. Variasi dan ketidakpastian nilai parameter merupakan ciri dari model epidemi yang tidak dapat dijelaskan dengan menggunakan model deterministik sehingga model stokastik merupakan model yang diperlukan untuk memodelkan penyebaran virus hepatitis B ini. Dalam model stokastik, perubahan banyaknya individu rentan ( $S$ ), terinfeksi ( $I$ ), dan sembuh ( $R$ ) pada endemisitas penyebaran virus hepatitis B merupakan peubah acak dalam interval waktu kontinu. Model epidemi yang dapat digunakan untuk menggambarkan pola penyebaran virus hepatitis B adalah model epidemi SIR dimana individu yang sembuh akan memiliki kekebalan terhadap penyakit dan tidak dapat terinfeksi kembali karena memiliki antibodi alami maupun vaksinasi. Model SIR berbentuk sistem persamaan diferensial biasa orde satu sehingga model SIR penularan virus hepatitis B dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial stokastik.

Sebelumnya, terdapat beberapa penelitian atau karya tulis yang membahas mengenai epidemi menggunakan model stokastik pada penelitiannya. Contohnya pada penelitian sebelumnya yaitu artikel karya Tahir Khan (2019) yang berjudul “A Stochastic Model for The Transmission Dynamics of Hepatitis B Virus”. Dalam artikel tersebut menjelaskan mengenai model stokastik dinamika penularan virus hepatitis B dengan model epidemi SIR menggunakan dua kelas

populasi terinfeksi yakni terinfeksi akut dan kronis. Namun, pada kenyataannya data pasien terinfeksi hepatitis B hanya tersedia data pasien terinfeksi secara umum. Oleh karena itu, pada penelitian ini dikaji tentang model stokastik SIR penularan virus hepatitis B.

Dalam karya tulis lain oleh Yunita (2013) yang berjudul “Model Stokastik *Susceptible Infected Recovered* (SIR)”. Penelitian tersebut membahas mengenai model stokastik SIR yang diterapkan pada penyebaran penyakit cacar air. Model ini menggunakan satu parameter untuk laju infeksi kelas rentan ke terinfeksi. Namun, pada penularan virus hepatitis B terdapat dua parameter laju infeksi yakni laju infeksi akut dan kronis berdasarkan tingkat rasio kematian individu terinfeksi virus hepatitis B. Dengan demikian pada penelitian ini mengkaji tentang model stokastik penularan virus hepatitis B dengan membagi laju infeksi menjadi dua yaitu laju infeksi akut dan kronis, mencari solusi analitik dari model, serta membuat simulasi analitiknya.

Dari uraian di atas, diketahui bahwa pada penyebaran virus hepatitis B terdapat variasi dan ketidakpastian pada nilai variabel dan parameternya. Hal tersebut tidak dapat dijelaskan dengan menggunakan model deterministik karena pada model deterministik mempertimbangkan kepastian dimana nilai parameternya berupa nilai pasti. Dengan demikian, penyebaran virus hepatitis B merupakan proses stokastik yang dapat diselesaikan dengan menggunakan model stokastik atau disebut juga dengan model probabilistik karena semua peluang kejadian yang terjadi dihitung dan mempertimbangkan ketidakpastian. Guna mengetahui pola penyebarannya maka perlu diketahui model stokastik penularan virus hepatitis B yang berupa persamaan diferensial stokastik dan solusinya.

Sedangkan, untuk mengetahui parameter apa saja yang mempengaruhi tinggi rendahnya penyebaran virus hepatitis B maka diperlukan simulasi model. Dengan demikian, penulis akan menganalisis model stokastik penularan virus hepatitis B.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut didapatkan rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana konstruksi model stokastik penularan virus hepatitis B dengan laju infeksi akut dan laju infeksi kronis?
2. Bagaimana solusi analitik dari model stokastik penularan virus hepatitis B?
3. Bagaimana simulasi analitik model stokastik penularan virus hepatitis B?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian berdasarkan rumusan masalah tersebut yaitu:

1. Diketahui model stokastik penularan virus hepatitis B dengan laju infeksi akut dan laju infeksi kronis.
2. Diketahui solusi analitik dari model stokastik penularan virus hepatitis B.
3. Diketahui simulasi analitik model stokastik penularan virus hepatitis B.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Dari penulisan ini, penulis berharap agar penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca khususnya masyarakat sebagai wawasan informasi dan pemerintah pada umumnya sebagai bahan pertimbangan dalam mengambil tindakan yang tepat untuk menangani penyebaran virus hepatitis B agar tidak semakin meluas.



### 1.5 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi perluasan dalam pembahasan pada penelitian ini, maka penulis memberikan batasan permasalahan sebagai berikut:

1. Penularan virus hepatitis B termasuk dalam model epidemi SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) yang telah direduksi menjadi SI (*susceptible, infected*) yang terjadi pada semua kalangan dengan populasi tertutup dan tetap.
2. Individu yang terinfeksi akut dapat menjadi individu sembuh sedangkan individu yang terinfeksi kronis tidak dapat menjadi individu sembuh dan akan mengalami kematian.
3. Individu yang telah sembuh dari infeksi virus hepatitis B akan menjadi individu yang memiliki kekebalan karena antibodi alami yang dimilikinya maupun vaksinasi sehingga tidak akan terinfeksi kembali.
4. Solusi analitik persamaan diferensial stokastik pada model penularan virus hepatitis B menggunakan formula Ito.
5. Simulasi model stokastik menggunakan software maple dengan parameter berupa nilai laju infeksi akut  $\beta = 0,6$ , laju infeksi kronis  $\alpha = 0,5$  dan laju kesembuhan penyakit  $\gamma = 0,4$  untuk  $N = 100$  dengan interval waktu  $0 \leq t \leq 50$ , nilai awal  $S(0) = 0,9$ , dan  $I(0) = 0,4$  yang diambil dari artikel karya Tahir Khan, IIHyoJung dan GulZaman (2019) yang berjudul “Astochastic Model For The Transmission Dynamics Of Hepatitis B Virus”.

## 1.6 Metode Penelitian

Penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan, yaitu metode penelitian yang dilakukan dengan cara membaca, menelaah, mencermati, mendalami, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Berikut langkah-langkah yang digunakan pada penelitian ini:

1. Konstruksi model stokastik penularan virus hepatitis B dengan langkah-langkah sebagai berikut:
  - a) Mencari probabilitas transisi dari  $S(t)$  ke  $I(t)$  dan  $I(t)$  ke  $R(t)$
  - b) Mencari mean ( $\mu$ ) dan standar deviasi ( $\sigma$ ) dari  $dS(t)$  dan  $dI(t)$  dengan proses wiener
  - c) Membentuk model stokastik penularan virus hepatitis B mengikuti proses wiener
2. Mencari solusi analitik model stokastik penularan virus hepatitis B dengan mengacu pada formula ito
3. Membuat simulasi analitik model stokastik penularan virus hepatitis B dengan langkah-langkah sebagai berikut:
  - a) Mensubstitusikan nilai parameter berdasarkan artikel karya Tahir Khan (2019) pada solusi analitik dari model untuk mendapatkan nilai mean dan standar deviasi
  - b) Membuat simulasi analitik dari solusi dan proses wiener berdasarkan nilai mean dan standar deviasi yang diperoleh
  - c) Mencari parameter yang berpengaruh terhadap tinggi rendahnya tingkat penularan virus hepatitis B dengan mengganti nilai parameter.
  - d) Menginterpretasikan hasil simulasi.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Secara garis besar sistematika pembahasan dalam penelitian ini sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

### BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini menyajikan kajian teori mengenai model matematika, persamaan diferensial, model epidemi SIR, distribusi normal, mean (nilai rata-rata), variansi dan standar deviasi, probabilitas transisi, proses stokastik, persamaan diferensial stokastik, proses Wiener, proses Ito, hepatitis B, dan kajian keagamaan.

### BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas tentang model stokastik penularan virus hepatitis B, solusi analitik dari model, serta simulasi analitiknya.

### BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan serta saran-saran yang berkaitan dengan penelitian berikutnya.

## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA**

#### **2.1 Model Matematika**

Berdasarkan derajat kepastian, model matematik dikategorikan menjadi dua yaitu:

##### **1) Model Deterministik**

Model deterministik merupakan model matematik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam keadaan yang pasti. Parameter yang digunakan dalam model deterministik bernilai pasti. Pada model epidemi pola penyebarannya berupa fungsi tertentu. Apabila dalam inputannya, suatu model tidak menggunakan variabel random maka model simulasinya merupakan model simulasi deterministik.

##### **2) Model Stokastik**

Model stokastik digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang bersifat random atau tidak pasti. Nilai parameter pada model stokastik tidak pasti karena menggunakan nilai peluang (probabilitas). Peluang dari masing-masing kejadian pada model stokastik dapat dihitung sehingga disebut juga sebagai model probablistik. Model stokastik pada epidemi memiliki pola penyebaran bersifat random dan mempunyai fungsi probabilitas tertentu. Apabila terdapat satu atau beberapa variabel random maka merupakan model simulasi stokstik dimana hasil akhirnya berupa output yang random (Banks et al, 2001). Dalam pembahasan digunakan model stokastik.

## 2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang menyertakan turunan satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 2010). Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua menurut jenisnya yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

- 1) Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas.

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} = 5u + v$$

- 2) Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan-turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Orde persamaan diferensial merupakan tingkat turunan tertinggi yang ada pada persamaan diferensial. Berdasarkan variabel terikatnya, persamaan diferensial orde  $n$  dibagi menjadi persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear. Dikatakan linear apabila memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Variabel terikat dan turunan-turunannya berderajat satu
2. Perkalian antara variabel terikat dengan turunan-turunannya dan perkalian antara turunan dengan turunannya pada persamaan tidak ada
3. Fungsi transenden dari variabel-variabel terikat tidak ada

Apabila suatu persamaan diferensial tidak memenuhi syarat tersebut maka disebut sebagai persamaan diferensial non linear (Ross, 1984). Dalam pembahasan akan digunakan persamaan diferensial biasa serta persamaan diferensial yang linier dan non linier.

### 2.3 Model Epidemi SIR

Terdapat beberapa model matematis untuk menggambarkan pola penyebaran penyakit pada suatu populasi salah satunya adalah model epidemi SIR (*Susceptible Infected Recovered*). Kermack dan mckendrik telah mengemukakan model SIR ini pertama kali pada tahun 1927. Model SIR Kermack dan mckendrik membagi populasi menjadi tiga yaitu:

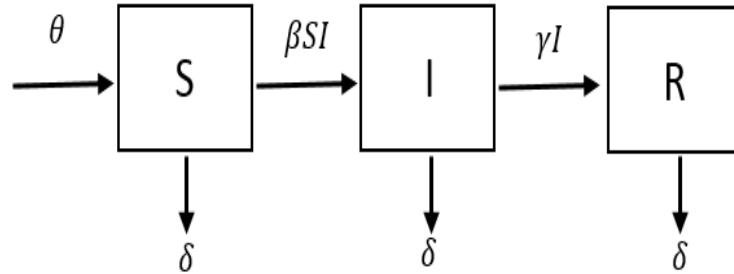
1.  $S$  (*Susceptible*) yaitu kelompok individu yang rentan terinfeksi oleh penyakit
2.  $I$  (*Infected*) yaitu kelompok individu yang terinfeksi oleh penyakit;
3.  $R$  (*Recovered*) yaitu kelompok individu yang sembuh dari penyakit.

Beberapa asumsi yang digunakan pada model SIR Kermack dan mckendrik yaitu:

1. Penyebaran penyakit menular pada lingkungan yang tertutup (tidak adanya imigrasi dan emigrasi)
2. Terdapat proses kelahiran dan kematian dengan laju kelahiran sama dengan laju kematian (populasi tetap)
3. Penularan penyakit melalui kontak secara langsung dengan individu yang terinfeksi
4. Individu yang telah sembuh dari penyakit memiliki kekebalan dan tidak dapat terinfeksi penyakit kembali karena imun alami tubuh maupun

vaksinasi.

Diagram kompartemen dari model epidemi SIR adalah sebagai berikut:



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen

Sehingga diperoleh model matematika berdasarkan diagram diatas adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \theta S - \beta SI - \delta S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \delta I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \delta R\end{aligned}\tag{2.1}$$

Apabila laju kelahiran sama dengan laju kematian (populasi bersifat tetap), maka persamaan (2.1) diatas dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{2.2}$$

(Kermack & McKendrik, 1927)

## 2.4 Distribusi Normal

Distribusi normal atau disebut juga dengan distribusi gauss yang dinotasikan sebagai  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  digunakan untuk meramalkan suatu peristiwa yang luas. Distribusi normal ini merupakan distribusi probabilitas pada variabel



acak yang bersifat kontinu. Suatu variabel random  $X$  berdistribusi normal dengan rata-rata  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$  apabila fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f(X; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$$

Untuk  $-\infty < X < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ , dan  $-\infty < \sigma < \infty$  (Engelhardt & Bain, 1992).

### 2.4.1 Mean

Mean dari suatu peubah acak disebut juga dengan nilai rata-rata adalah nilai terpenting pada pengukuran pemusatan data suatu populasi. Nilai rata-rata dari suatu peubah acak  $x$  ini biasa disimbolkan dengan  $\mu$ . Statistikawan menyebut nilai rata-rata ini dengan nilai harapan suatu peubah acak  $x$  yang disimbolkan dengan  $E(x)$  (Walpole & Myres, 1989). Apabila  $X$  merupakan variabel acak diskrit dengan nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dengan peluang  $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$  yang apabila seluruh peluang tersebut dijumlahkan akan menghasilkan nilai sama dengan satu. Nilai rata-rata pada variabel diskrit adalah

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i P(X) = x_i$$

Sedangkan nilai rata-rata pada variabel kontinu adalah

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Untuk menentukan rata-rata peubah acak diskrit yaitu setiap nilai dari peubah acak  $X$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) dikalikan dengan nilai peluangnya ( $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ ), selanjutnya dijumlahkan sebagai berikut

$$p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n) = 1$$

Nilai rata-rata pada peubah acak kontinu dapat ditentukan dengan metode yang hampir sama dengan peubah acak diskrit, yaitu mengganti penjumlahan dengan metode integral. (Harinaldi, 2005)

#### 2.4.2 Variansi dan Standar Deviasi

Dengan memisalkan  $g(X) = (X - \mu)^2$  maka akan diperoleh ukuran keragaman yang terpenting pada suatu variabel acak  $X$  yang diberi nama dengan variansi peubah acak  $X$  atau disebut juga dengan variansi distribusi peluang  $X$  dan disimbolkan dengan  $Var(X)/\sigma_x^2/\sigma^2$ . Dimana untuk menyatakan variansi peubah acak  $X$  digunakan  $Var(X)$ . Secara definisi yaitu misalkan  $X$  adalah peubah acak dengan rata-rata  $\mu$  serta distribusi peluang  $f(X)$ , maka variansi dari  $X$  adalah

a) Apabila  $X$  diskrit

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (X - \mu)^2 f(X)$$

b) Apabila  $X$  kontinu

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(X) d(X)$$

(Dudewicz & Misra, 1988)

Dalam notasi lain variansi dituliskan dengan

$$\sigma^2 = Var(X)$$

Rumus variansi yang lain, apabila  $X$  merupakan suatu peubah acak maka

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Pembuktiannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2, \quad \mu = E(X) \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

(Engelhardt & Bain, 1992)

Standar deviasi merupakan ukuran penyimpangan dari rataannya dan digunakan untuk mengukur persebaran data pada suatu populasi sampel dan untuk melihat seberapa dekat dengan nilai rataannya. Dengan notasi varian  $\sigma^2$ , standar deviasi (simpangan baku) dari peubah acak  $X$  didefinisikan dengan akar positif dari variansi (2.8) sebagai berikut:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

(Engelhardt & Bain, 1992)

## 2.5 Probabilitas Transisi

Probabilitas direpresentasikan dengan besarnya kemungkinan kejadian akan terjadi dengan besar nilai antara nol sampai satu. Probabilitas adalah nilai antara 0 dan 1 yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu peristiwa. Probabilitas dapat digunakan untuk mengamati ketidakpastian suatu keputusan yang digunakan. Secara definisi peluang kejadian  $A$  adalah jumlah keseluruhan dari titik sampel di  $A$ , sehingga:

- a.  $0 \leq P(A) \leq 1$
- b.  $P(\emptyset) = 0$
- c.  $P(S) = 1$

(Pransanna Sahoo, 2008)

Sedangkan probabilitas transisi atau peluang perpindahan satu langkah dari state  $i$  pada waktu  $t$  ke state  $j$  pada waktu  $t + 1$  dinotasikan dengan  $P_{ij(t)}$  dan dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$p_{ij}(t) = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

(Allen, 2003)

Contoh: Probabilitas transisi pada masalah pengoperasian angkutan umum. Diketahui bahwa angkutan umum akan terus berjalan apabila tidak mogok, hal ini mengartikan bahwa terdapat dua state yang mungkin yang dialami pada angkutan umum ini yaitu state jalan atau state mogok. Misalkan perubahan state pada hari berikutnya sebagaimana tabel probabilitas transisi berikut:

**Tabel 2.1 Probabilitas tranisi**

<i>State sekarang</i>	<i>State berikutnya</i>	
	Jalan	mogok
Jalan	0.6	0.4
Mogok	0.8	0.2

Probabilitas dari angkutan umum dengan status jalan ataupun mogok pada state sekarang (hari pertama) dapat dituliskan dalam suatu vector baris berikut:

$$[J_J(1) \ M_J(1)] = [1 \ 0]$$

Maka probabilitas dari angkutan umum dengan status jalan ataupun mogok pada state hari berikutnya (hari kedua), apabila angkutan umum tersebut berstatus jalan pada state sekarang dapat dicari dengan mengalikan vector baris (2.16) dengan matriks probabilitas transisinya sebagai berikut:

$$[J_J(2) \ M_J(2)] = [J_J(1) \ M_J(1)] \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [1 \ 0] \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\
&= [0.6 \ 0.4]
\end{aligned}$$

Selanjutnya, probabilitas dari angkutan umum dengan status jalan ataupun moggok pada state hari berikutnya (hari ketiga), apabila angkutan umum tersebut berstatus jalan pada state sekarang. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
[J_J(3) \ M_J(3)] &= [J_J(2) \ M_J(2)] \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\
&= [0.6 \ 0.4] \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\
&= [0.68 \ 0.32]
\end{aligned}$$

Dan begitu juga seterusnya.

## 2.6 Proses Stokastik

Menurut Parzen (1962), proses stokastik merupakan suatu kejadian random berdasarkan waktu yang secara kontinu terhadap perilaku yang berkaitan dengan peluang probabilitas. Banyaknya perubahan dari individu yang terinfeksi sangat berkaitan dengan peluang yang muncul pada suatu kejadian tertentu (probabilitas). Oleh karena itu, penyebaran penyakit ini dapat disebut proses stokastik karena termasuk kejadian random yang bergantung terhadap waktu dan mempunyai probabilitas. Sebagaimana yang dijelaskan oleh Taylor dan Karlin (1998) bahwa proses stokastik adalah kumpulan suatu variabel random  $\{X(t); t \in T\}$  dengan  $T$  himpunan indeks proses stokastik. Misalkan  $T = 0, 1, 2, \dots$ , maka termasuk proses stokastik waktu diskrit. Sedangkan untuk  $T \in [0; \infty)$ , maka termasuk proses stokastik waktu kontinu. Dengan  $t$  adalah waktu dan  $X(t)$

adalah state dari proses stokastik waktu  $t$ . Apabila ruang state merupakan bilangan real, maka Proses stokastik tersebut bernilai real.

### 2.6.1 Persamaan Diferensial Stokastik

Misalkan  $X(t), t > 0$  merupakan suatu fungsi yang dapat diturunkan dan  $\mu(X(t), t)$  adalah fungsi  $X$  yang bergantung pada waktu  $t, t \in [0, T]$ , dengan

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(X(t), t) ; \quad X(0) = X_0,$$

maka

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) disebut dengan persamaan diferensial biasa (PDB) pada model deterministik, dimana solusinya adalah

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X(t), t) dt$$

Sebuah persamaan diferensial stokastik dapat diperoleh dengan menambah sebuah suku gangguan yang bersifat random pada sebuah persamaan diferensial deterministik (2.3), misalkan gangguan tersebut adalah  $\sigma(X(t), t)$ . Suku gangguan tersebut merupakan sebuah proses wiener atau brownian motion  $W = (W(t), t \geq 0)$ . Sehingga persamaan (2.3) apabila memperoleh gangguan sebesar  $\sigma(X(t), t)$  dikalikan dengan proses wiener menjadi sebuah persamaan diferensial stokastik berikut:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) ; \quad X(0) = X_0 \quad (2.4)$$

Dengan  $\mu(X(t), t) dt$  adalah fungsi deterministic dan  $\sigma(X(t), t) dW(t)$  adalah fungsi stokastik. Untuk menentukan solusi dari persamaan di atas akan melibatkan sebuah integral stokastik, dan untuk menentukan solusi dari integral tersebut dibutuhkan kalkulus yang berdasarkan pada formula Ito yang akan

dibahas pada kajian pustaka selanjutnya.

Secara umum, persamaan (2.4) adalah suatu persamaan diferensial stokastik (PDS). Solusi dari persamaan (2.4) biasa ditulis dalam bentuk persamaan integral sebagai berikut:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X(t), t) dt + \int_0^t \sigma(X(t), t) dW(t) \quad (2.5)$$

Dimana  $X_0$  adalah nilai awal (initial value) dari  $X$  di titik  $t = 0$ . Koefisien pada suku pertama di persamaan (2.5) biasa dikenal sebagai koefisien “*drift*” dan koefisien pada suku kedua biasa disebut sebagai koefisien “*diffussion*”. Lebih lanjut lagi, apabila diperhatikan suku kedua pada persamaan (2.5) merupakan integral biasa yang bersifat deterministik (*ordinary integral*), namun integral pada suku ketiga mengandung proses stokastik  $W(t)$ . Dalam banyak model PDS, proses stokastik  $W(t)$  biasa berupa proses Wiener (*Brownian motion*). Meskipun demikian, pada beberapa kasus, dapat pula berupa proses Poisson (Klebaner, 1998).

### 2.6.2 Proses Wiener

Proses Wiener disebut juga dengan gerak brown. Proses gerak brown  $B(t)$  berfungsi sebagai model dasar untuk efek kumulatif noise murni. Nobert Wiener menuliskan model matematika untuk gerak acak berdasarkan teori pada proses stokastik, sehingga dihasilkan suatu model matematika yang disebut dengan proses wiener ( $W(t)$ ). proses wiener ini digunakan untuk membuat penggambaran terhadap perubahan yang terjadi pada proses stokastik.

Menurut Taylor dan Karlin (1998), proses stokastik dengan  $W(t), t \geq 0$  adalah proses Wiener apabila memenuhi asumsi-asumsi sebagai berikut:



1.  $W(0) = 0$
2. Untuk semua  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , kenaikan dari  $W(t_n) - W(t_{n-1}), \dots, W(t_2) - W(t_1)$  bersifat saling independen, hal ini menunjukkan bahwa nilai kenaikan tersebut tidak tergantung pada keadaan waktu sebelumnya
3. Untuk  $0 \leq s < t$ , kenaikan  $W(t) - W(s)$  berdistribusi normal dengan  $N(0; t - s)$ . Proses  $W(t)$  dengan lintasan yang kontinu

Hull (2003) membagi variabel random pada  $W(t), t \geq 0$  yang mengikuti proses wiener menjadi dua sifat :

1. Sifat yang pertama yaitu selama masa periode waktu kecil yang disimbolkan dengan  $dt$ , maka perubahan yang terjadi pada  $dW(t)$ , dapat dituliskan sebagai

$$dW(t) = W(t + \Delta t) - W(t) = \varepsilon \sqrt{dt}$$

Dengan  $\varepsilon = \varepsilon \sim N(0,1)$  yaitu bilangan random yang berdistribusi normal standar. Proses Wiener dasar ( $dW(t)$ ) pada sifat pertama ini dibangun oleh koefisien drift (*mean*) yang bernilai nol dan koefisien diffusion (*variance*) yang bernilai satu. drift (*mean*) bernilai nol mengartikan bahwa nilai mean atau disebut juga dengan nilai ekspektasi  $W(t)$  pada waktu yang akan datang sama dengan nilai pada waktu saat ini, sedangkan diffusion (*variance*) bernilai satu mengartikan bahwa perubahan yang terjadi pada  $W(t)$  pada interval waktu selama  $T$  adalah sama dengan waktu  $T$  itu sendiri.

Sifat pertama ini menunjukkan bahwa perubahan pada nilai  $X$  yang kecil  $dX(t)$  pada interval waktu  $dt$  yang dapat dituliskan pada

persamaan berikut

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) \quad (2.6)$$

berdistribusi normal dengan nilai mean  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$ .

2. Selanjutnya, sifat yang kedua yaitu pada dua interval pendek pada waktu  $dt$ , maka nilai  $dW(t)$  adalah bebas/independent (tidak tergantung pada waktu sebelumnya). Sifat yang kedua ini mengimplikasikan bahwa  $W(t)$  mengikuti proses Markov, yaitu untuk  $0 < s < t < u < T$  berlaku

$$P(W(u) | W(0), \dots, W(s), \dots, W(t)) = P(W(u) | W(t)).$$

Proses wiener ini disebut juga dengan gerak brown.

### 2.6.3 Proses Ito

Untuk mencari solusi dari persamaan diferensial stokastik yaitu menggunakan lemma ito. Sebelum perlu diketahui terlebih dahulu mengenai proses ito. Hull (2003) menjelaskan bahwa pada tahun 1951, Kiyosi Ito pertama kali menemukan Proses Ito dengan parameter drift  $\mu$  dan diffusion  $\sigma$  dengan suatu bentuk berupa fungsi dari variabel  $X$  dan  $t$  sebagai berikut:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) \quad (2.7)$$

Sedangkan definisi menurut Kloeden (1999),  $X = \{X(t), t > 0\}$  merupakan proses ito yang memiliki bentuk

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X(t), t) dt + \int_0^t \sigma(X(t), t) dW(t), \quad t > 0 \quad (2.8)$$

Dengan nilai awal  $X(0) = X_0$  bersifat random, komponen kontinu  $\mu(X(t), t)$  yang terdapat pada suku kedua di ruas kanan disebut sebagai koefisien drift dan komponen random kontinu  $\sigma(X(t), t)$  yang terdapat pada suku ketiga di ruas kanan disebut sebagai koefisien diffusion yang bersifat stokastik.

Untuk definisi dari Lemma Ito yaitu misalkan diketahui bahwa suatu variabel  $X = \{X(t), t > 0\}$  mengikuti proses Ito berikut:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) \quad (2.9)$$

Misalkan fungsi dari  $X$  dan  $t$  adalah  $F$  yang dimana turunan dari fungsi  $F$  bersifat kontinu hingga turunan kedua. perubahan dari fungsi  $F$  oleh formula Ito yaitu memenuhi

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dt \quad (2.10)$$

Sebuah fungsi  $F$  dari  $X$  dan  $t$  dapat ditunjukkan dengan lemma Ito mengikuti proses berikut:

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (X(t), t) dt + \left( \sigma \frac{\partial F}{\partial x} \right) (X(t), t) dW(t) \quad (2.11)$$

Dengan  $dW(t)$  merupakan suatu proses Wiener, Sehingga fungsi  $F$  memenuhi Proses Ito, dengan koefisien drift (mean) adalah  $\left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)$  dan koefisien difusi (variance) adalah  $\left( \sigma \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2$ .

## 2.7 Hepatitis B

Hepatitis B merupakan suatu penyakit yang disebabkan oleh virus hepatitis B (HBV) yang menginfeksi hati yang menyerang semua kalangan mulai umur, gender, dan ras di seluruh dunia (Widoyono, 2011). Infeksi virus hepatitis B dapat menyebabkan peradangan hati akut atau kronis yang dapat berlanjut menjadi kanker hati (Mustofa & Kurniawati, 2013). Infeksi virus ini diawali dengan proses hepatitis B akut, apabila proses ini tidak efektif maka sel yang terinfeksi tidak berhasil dihilangkan seluruhnya sehingga akan terjadi infeksi hepatitis B kronik. Diseluruh dunia, sedikitnya ada 300 juta orang yang terinfeksi hepatitis B kronik.

Dari berbagai penelitian yang ada, frekuensi pengidap HBsAg berkisar antara 3-20%. Penelitian dari berbagai daerah di Indonesia menunjukkan angka yang sangat bervariasi bergantung pada tingkat endemisitas hepatitis B di tiap-tiap daerah (Soewignjo, 2008).

Ada 2 golongan cara penularan infeksi VHB, yang pertama penularan secara vertikal yaitu terjadi dari seorang pengidap VHB yang hamil kepada bayi dan yang kedua penularan secara horizontal dapat terjadi melalui kulit (suntikan, transfusi darah,tato) atau melalui selaput lendir (mulut, mata, hidung). Berbagai penelitian epidemiologi yang pernah dilakukan di indonesia mengesankan bahwa penularan infeksi VHB vertikal ataupun horizontal yang banyak terjadi pada masa anak-anak dan bayi memegang peran yang sangat penting (Soewignjo, 2008).

## **2.8 Kajian Keagamaan**

Untuk meminimalisasikan dinamika fluktuasi persebaran penyakit yaitu dengan menjaga diri dari budaya lingkungan yang tidak baik, bagi seseorang yang teinfeksi penyakit menular sebaiknya melakukan pengobatan yang dianjurkan guna kesembuhan dan untuk sementara tidak melakukan kontak langsung dengan orang lain sedangkan bagi seseorang yang sehat sebaiknya menjaga diri dengan budaya hidup bersih dan sehat serta dalam hal pergaulannya, dengan demikian penyebaran penyakit menular dapat dipersempit dan tidak menyebar semakin luas lagi seperti yang dijelaskan dalam hadist bahwa nabi muhammad melarang umatnya berbuat yang membahayakan bagi dirinya sendiri maupun orang lain (madharat) yaitu “tidak boleh berbuat madharat dan segala sesuatu yang menyebabkan madharat” (HR Ibn majah dan Ahmad ibn Hanbal).

### BAB III

#### PEMBAHASAN

##### 3.1 Konstruksi Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B dengan Pengaruh Laju Infeksi Akut dan Laju Infeksi Kronis

Hepatitis B merupakan penyakit yang disebabkan oleh virus yang dapat menyebar dan menular ke orang yang belum terinfeksi sebelumnya dan rentan terhadap penyakit. Infeksi virus hepatitis B dibagi menjadi dua yaitu infeksi akut dan infeksi kronis. Karakteristik dari penyakit hepatitis B adalah apabila individu sembuh dari infeksi hepatitis B akut maka individu tersebut akan memiliki kekebalan dan tidak akan terinfeksi kembali dan menjadi *Recovered* (sembuh dari penyakit), namun berbeda pada individu yang terinfeksi secara kronis maka harapan sembuh individu yang terinfeksi hepatitis B kronis sangatlah kecil bahkan tidak ada harapan untuk sembuh. Sehingga untuk menggambarkan pola penyebaran virus hepatitis B dengan karakteristik berikut maka digunakan model matematika yaitu model SIR (*Susceptible Infected Recovered*) seperti pada persamaan 2.1. Model epidemic SIR pada persamaan 2.1 akan dikonstruksi ulang dengan membagi laju infeksi menjadi dua yaitu laju infeksi akut ( $\alpha$ ) dan laju infeksi kronis ( $\beta$ ).

Model epidemi SIR dengan laju infeksi akut dan laju infeksi kronis memiliki asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Individu yang termasuk dalam kategori rentan (*susceptible*) adalah semua kalangan dari usia, gender, dan ras
2. Terjadi pada populasi konstan dimana jumlah kelahiran sama dengan jumlah kematian

3. Populasi bersifat tertutup yaitu tidak adanya imigrasi maupun emigrasi, sehingga bertambah maupun berkurangnya jumlah penduduk hanya berdasarkan kelahiran dan kematian
4. Kematian terjadi baik secara alami maupun karena penyakit
5. Individu yang terinfeksi kronis tidak memiliki peluang kesembuhan
6. Individu yang terinfeksi akut akan dapat disembuhkan dan menjadi individu sembuh (recovered)
7. Individu yang telah sembuh akan memiliki kekebalan dan tidak akan terinfeksi penyakit kembali. Hal itu terjadi karena adanya vaksinasi maupun antibodi alami.

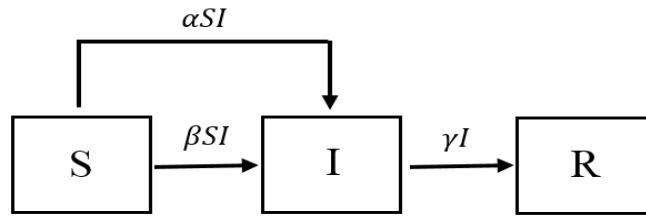
Adapun variabel dan parameter yang digunakan adalah:

1.  $N(t)$  menyatakan jumlah populasi pada waktu  $t$
2.  $S(t)$  menyatakan banyaknya individu yang rentan terhadap penyakit hepatitis B pada waktu  $t$ , dengan  $S(t) > 0$
3.  $I(t)$  menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi virus hepatitis B pada waktu  $t$  baik akut maupun kronis, dengan  $I(t) > 0$
4.  $R(t)$  menyatakan banyaknya individu yang telah sembuh dan memiliki kekebalan dari penyakit hepatitis B pada waktu  $t$ , dengan  $R(t) \geq 0$ .

Dengan  $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$ .

5.  $\beta$  menyatakan laju infeksi akut virus hepatitis B, dengan  $\beta > 0$
6.  $\alpha$  menyatakan laju infeksi kronis virus hepatitis B, dengan  $\alpha > 0$
7.  $\gamma$  menyatakan laju kesembuhan dari infeksi hepatitis B akut, dengan  $\gamma > 0$

Perubahan individu dari rentan (susceptible) menjadi terinfeksi (infected) dan menjadi sembuh (recovered) dapat digambarkan pada diagram berikut:



Gambar 3.1 Diagram Kompartemen SIR dengan Laju Infeksi Akut dan Laju Infeksi Kronis

Dalam diagram tersebut diketahui bahwa laju perubahan individu Susceptible, infected, dan recovered pada waktu  $t$  dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -(\alpha + \beta)S(t)I(t) & (a) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (\alpha + \beta)S(t)I(t) - \gamma I(t) & (b) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) & (c) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Misalkan  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$  dengan kondisi awal  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ , dan  $R(0) = R_0$  diperoleh  $\frac{dN}{dt} = 0$ . Hal ini berarti  $N$  konstan,  $N \in \mathbb{R}^+$ . Sehingga  $R(t) = N - (I(t) + S(t))$ . Persamaan (3.1) (a) dan (3.1) (b) tidak bergantung terhadap  $R(t)$  sehingga sistem persamaan (3.1) dapat direduksi menjadi sistem persamaan (3.2) berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -(\alpha + \beta)S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (\alpha + \beta)S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dengan kondisi awal  $S(0) = S_0$  dan  $I(0) = I_0$

Perubahan dari banyaknya individu rentan dan terinfeksi virus hepatitis B tidak dapat diprediksi dengan pasti karena merupakan suatu kejadian acak yang bergantung pada waktu. Banyaknya individu yang rentan dan individu yang terinfeksi hepatitis B pada waktu yang akan datang hanya dipengaruhi oleh banyaknya individu yang rentan dan terinfeksi pada waktu saat ini. Hal ini

menunjukkan bahwa penularan penyakit hepatitis B merupakan suatu proses Markov pada waktu yang kontinu dimana proses markov waktu kontinu merupakan salah satu proses stokastik, dengan demikian penularan penyakit hepatitis B dapat dimodelkan dengan model stokastik.

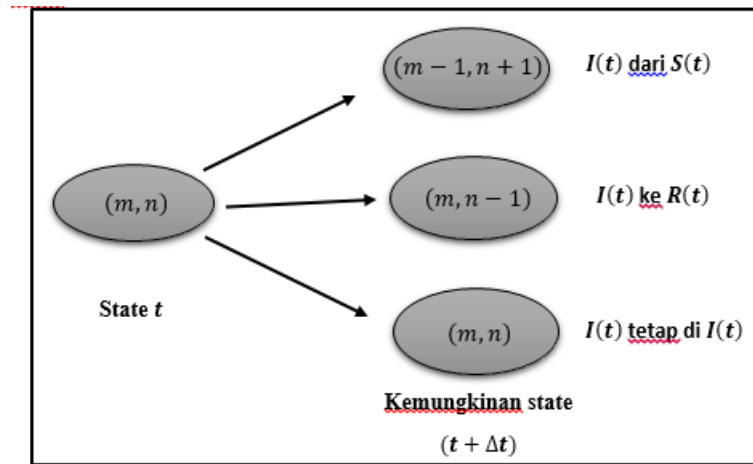
Model stokastik yaitu perubahan dari banyaknya individu yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu  $t$  ( $S(t)$ ) dan individu yang terinfeksi pada waktu  $t$  ( $I(t)$ ) yang mengikuti proses wiener ( $W(t)$ ). Dengan demikian, perubahan banyaknya individu yang rentan dan individu yang terinfeksi merupakan proses stokastik. Telah dijelaskan bahwa penularan penyakit hepatitis B merupakan suatu proses Markov waktu kontinu maka dengan itu langkah pertama akan dicari probabilitas perubahan keadaan (*state*) dari individu yang rentan ke individu yang terinfeksi tersebut.

Misalkan state dari banyaknya individu yang rentan pada waktu  $t$  ( $S(t)$ ) adalah  $m$ , state dari banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu  $t$  ( $I(t)$ ) adalah  $n$ , banyaknya perubahan ini terjadi setiap waktu pada individu rentan terinfeksi penyakit dan individu terinfeksi yang berada dalam interval waktu  $t = [0, \infty)$ . Jika besarnya perubahan yang terjadi pada individu yang rentan pada interval waktu  $\Delta t$  adalah  $g$  dan besarnya perubahan yang terjadi pada individu yang terinfeksi pada interval waktu  $\Delta t$  adalah  $h$ , maka perpindahan keadaan (*state*)  $m$  ke  $m + g$  dan  $n$  ke  $n + h$  disebut dengan transisi (peralihan). Dengan demikian probabilitas perubahan dari banyaknya individu pada transisi tersebut disebut dengan probabilitas transisi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$p_{(m,n),(m+g,n+h)}(\Delta t) \\ = p[(S(t + \Delta t), I(t + \Delta t)) = (m + g, n + h) | (S(t), I(t)) = (m, n)]$$



Terjadinya transisi tersebut pada interval waktu  $\Delta t \rightarrow 0$  dan diasumsikan bahwa individu yang bertransisi hanya satu. Kemungkinan transisi tersebut mengacu pada penularan virus hepatitis B yaitu individu yang terinfeksi pada waktu  $t$  ( $I(t)$ ) oleh karena itu, terdapat tiga kemungkinan transisi yang terjadi pada  $I(t)$  selama  $\Delta t$  yaitu transisi  $I(t)$  dari  $S(t)$ ,  $I(t)$  sembuh menjadi  $R(t)$ ,  $I(t)$  tetap pada kondisi  $I(t)$  yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Diagram Transisi  $I(t)$  pada Interval  $\Delta t$

Ketika individu tersebut melakukan transisi  $(m, n)$  ke  $(m - 1, n + 1)$ , maka terjadi perpindahan dari individu yang rentan ( $S$ ) ke individu yang terinfeksi ( $I$ ) sebanyak satu karena adanya infeksi pada individu rentan yang mengakibatkan individu rentan menjadi kronis. Jika laju infeksi hepatitis B akut ( $\beta$ ), laju infeksi hepatitis B kronis ( $\alpha$ ), maka probabilitas transisi dari  $(m, n)$  ke  $(m - 1, n + 1)$  adalah

$$p_{(m,n),(m-1,n+1)} = \frac{(\beta + \alpha)mn}{N} \Delta t + o(\Delta t) \quad (3.3)$$

Diasumsikan bahwa  $o(\Delta t) \rightarrow 0$ , dengan  $o(\Delta t)$  adalah kemungkinan individu yang bertransisi pada interval waktu ( $\Delta t$ ) lebih dari satu individu.

Ketika terjadi transisi  $(m, n)$  ke  $(m, n - 1)$  maka menunjukkan bahwa banyaknya individu yang terinfeksi berkurang sebanyak satu. Berkurangnya satu individu tersebut terjadi karena adanya kesembuhan dari individu yang terinfeksi dengan laju kesembuhan sebesar  $\gamma$ , maka probabilitas transisi  $(m, n)$  ke  $(m, n - 1)$  adalah

$$p_{(m,n),(m,n-1)} = \gamma n \Delta t + o(\Delta t) \quad (3.4)$$

Ketika transisi  $(m, n)$  ke  $(m, n)$  maka menunjukkan bahwa individu yang terinfeksi tetap berada dalam keadaan (*state*)  $(m, n)$  karenanya tidak terjadi penambahan dari individu rentan yang terinfeksi maupun pengurangan karena adanya kesembuhan dari individu yang terinfeksi, sehingga besarnya probabilitas transisi dari  $(m, n)$  ke  $(m, n)$  adalah

$$\begin{aligned} p_{(m,n),(m-1,n+1)} + p_{(m,n),(m,n-1)} + p_{(m,n),(m,n)} &= 1 \\ \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \Delta t + \gamma n \Delta t + p_{(m,n),(m,n)} &= 1 \\ p_{(m,n),(m,n)} &= 1 - \left( \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} + \gamma n \right) \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dengan demikian persamaan (3.3), (3.4), (3.5) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$p_{(m,n),(m+g,n+h)}(\Delta t) = \begin{cases} \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \Delta t + o(\Delta t), & (g, h) = (-1, 1) \\ \gamma n \Delta t + o(\Delta t), & (g, h) = (0, -1) \\ 1 - \left( \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \Delta t + \gamma n \right) \Delta t + o(\Delta t), & (g, h) = (0, 0) \\ o(\Delta t), & \text{selainnya} \end{cases} \quad (3.6)$$

Probabilitas transisi dari state  $dI(t)$  ke  $dI(t + \Delta t)$  menunjukkan bahwa tidak ada penambahan jumlah individu rentan maupun terinfeksi selama interval waktu  $\Delta t$ .

Dengan demikian, perubahan transisi state  $(m, n)$  ke  $(m, n)$  dalam perhitungan nilai mean dan standar deviasi dari laju perubahan populasi  $S$  dan  $I$ . Sehingga yang digunakan untuk membuat model stokastik penularan virus hepatitis B adalah probabilitas transisi dari transisi  $(m, n)$  ke  $(m - 1, n + 1)$  dan probabilitas transisi dari transisi  $(m, n)$  ke  $(m, n - 1)$  seperti pada persamaan 3.7 berikut:

$$p_{(m,n),(m+g,n+h)}(\Delta t) = \begin{cases} \frac{(\beta+\alpha)mn}{N}\Delta t + o(\Delta t), & (g, h) = (-1, 1) \\ \gamma n \Delta t + o(\Delta t), & (g, h) = (0, -1) \end{cases} \quad (3.7)$$

Nilai dari transisi dan probabilitas transisi tersebut akan digunakan untuk mencari nilai mean dan nilai standart deviasi pada model stokastik penularan virus hepatitis B. Berikut penjelasannya:

Diketahui bahwa persamaan pada (2.4) merupakan persamaan umum dari model stokastik. Untuk membuat model stokastik tersebut pada model (3.2) maka diperlukan nilai mean  $\mu(X(t), t)$  dan standar deviasi  $\sigma(X(t), t)$  sebagai suatu suku gangguan (*noise*). Nilai-nilai tersebut diperoleh dari probabilitas transisi dan perubahan keadaan (*state*) yang ada pada persamaan (3.7). Untuk membuat model stokastik SIR penularan virus hepatitis B maka perlu diasumsikan bahwa perubahan individu yang rentan pada waktu  $t$  ( $\Delta S(t)$ ) dan perubahan individu yang terinfeksi pada waktu  $t$  ( $\Delta I(t)$ ) berdistribusi normal atau disebut juga dengan distribusi gauss yang memiliki bentuk  $\Delta X(t) \sim N(\mu(X)\Delta t, \sigma^2(X)\Delta t)$  sehingga

$$\begin{aligned} \Delta S(t) &\sim N(\mu(S)\Delta t, \sigma^2(S)\Delta t) \\ \Delta I(t) &\sim N(\mu(I)\Delta t, \sigma^2(I)\Delta t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dengan perubahan dari banyaknya suatu individu mengikuti proses wiener  $W(t)$ .

Dengan demikian bentuk dari model stokastik (3.2) yang mengikuti proses wiener dapat dirumuskan dengan mengikuti persamaan (2.4) yaitu

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dW(t) \\ dI(t) &= \mu(I(t), t)dt + \sigma(I(t), t)dW(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Diperoleh dimensi sistem persamaan stokastik sama dengan dimensi sistem persamaan deterministik.

Perhitungan nilai mean secara umum diperoleh dengan menjumlahkan perkalian antara transisi dan probabilitas transisinya (3.7) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[\Delta X] &= \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \right) + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \gamma n \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \\ \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \\ \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} - \gamma n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Selanjutnya, menghitung nilai standar deviasi yaitu dengan menghitung nilai variansi terlebih dahulu dengan mengalikan probabilitas transisi dan kuadrat dari transisinya didapatkan hasil berikut:

$$\sigma^2(\Delta X) = \begin{pmatrix} -\left(1^2\right) \cdot \left(\frac{(\beta + \alpha) mn}{N}\right) & 0^2 \cdot (\gamma n) \\ 1^2 \cdot \left(\frac{(\beta + \alpha) mn}{N}\right) & -\left(1^2\right) \cdot (\gamma n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(\beta + \alpha) mn}{N} & 0 \\ \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} & -\gamma n \end{pmatrix}$$

Tanda (-) menunjukkan perubahan state, sehingga  $\sigma(\Delta X)$  diperoleh sebagai berikut

$$\sigma(\Delta X) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) mn}{N}} & 0 \\ \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) mn}{N}} & -\sqrt{\gamma n} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Dengan  $(\Delta X)$  yaitu perubahan jumlah individu yang rentan pada waktu  $t$  ( $\Delta S(t)$ ) dan perubahan jumlah individu yang terinfeksi pada waktu  $t$  ( $\Delta I(t)$ )

$$\Delta X = (\Delta S(t), \Delta I(t))$$

Dari hasil (3.11) dan (3.12) diperoleh

$$\begin{pmatrix} \mu(S(t), t) \\ \mu(I(t), t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(\beta + \alpha) mn}{N} \\ \frac{(\beta + \alpha) mn}{N} - \gamma n \end{pmatrix}_{2 \times 1}, \begin{pmatrix} \sigma(S(t), t) \\ \sigma(I(t), t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) mn}{N}} & 0 \\ \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) mn}{N}} & -\sqrt{\gamma n} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad (3.13)$$

Bentuk model stokastik penularan virus hepatitis B diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (3.13) ke persamaan (3.10). Dengan demikian, diperoleh bentuk dari model stokastik penularan virus hepatitis B adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dS(t) &= -\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N} dt - \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} dW(t) \\ dI(t) &= \left( \frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) dW(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.2 Solusi Analitik Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B

Pada penulisan ini, model stokastik yang berbentuk persamaan diferensial stokastik penularan virus hepatitis B pada persamaan (3.14) akan diselesaikan secara analitik dengan menggunakan formula ito atau bisa disebut dengan lemma ito. Model (3.14) tersebut mengikuti persamaan diferensial stokastik secara umum yaitu persamaan (2.15) sebagaimana model stokastik penularan virus hepatitis B (3.10). Sedangkan proses ito memiliki bentuk seperti persamaan (2.9) berikut:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t) \quad (3.15)$$

Dengan  $\mu$  sebagai koefisien driff dan  $\sigma$  sebagai koefisien diffusion dimana keduanya merupakan fungsi yang bergantung pada waktu.

Model (3.14) dapat dikatakan memenuhi proses Ito (2.9) dengan koefisien driff dan koefisien diffusion pada  $dS(t)$  berturut-turut adalah  $-\frac{(\beta+\alpha) S(t)I(t)}{N}$  dan

$-\sqrt{\frac{(\beta+\alpha) S(t)I(t)}{N}}$  serta pada  $dI(t)$  berturut-turut adalah  $\frac{(\beta+\alpha) S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$  dan

$\sqrt{\frac{(\beta+\alpha) S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)}$ . Dengan demikian model stokastik penularan virus

hepatitis B (3.14) telah memenuhi Proses Ito. Solusi analitiknya akan dicari dengan mengacu pada Lemma Ito (2.10), yaitu dengan memisalkan  $F = \ln x$ , perubahan dari fungsi  $F$  oleh formula Ito yaitu memenuhi

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dt$$

Substitusikan persamaan (3.15) ke persamaan (2.10) diperoleh

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} (\mu dt + \sigma dW(t))(X(t), t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (X(t), t) dt \quad (3.16)$$

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (X(t), t) dt + \left( \sigma \frac{\partial F}{\partial x} \right) (X(t), t) dW(t) \quad (3.17)$$

Dimana persamaan (3.17) sesuai dengan lemma ito (2.11). Digunakan  $F = \ln x$ , agar didapatkan turunan-turunan yang kontinu sampai turunan kedua dari fungsi  $F$  terhadap  $X$  dan  $t$  sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln x}{\partial x} = \frac{1}{x}, \frac{\partial^2 \ln x}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial \ln x}{\partial t} = 0 \quad (3.18)$$

Substitusikan  $F = \ln x$  ke persamaan (3.17) sehingga didapatkan

$$d \ln x = \left( \frac{\partial \ln x}{\partial t} + \mu \frac{\partial \ln x}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \ln x}{\partial x^2} \right) (X(t), t) dt + \left( \sigma \frac{\partial \ln x}{\partial x} \right) (X(t), t) dW(t) \quad (3.19)$$

Substitusikan persamaan pada (3.18) ke persamaan (3.19) dan mengalikan  $x$  pada turunan-turunan dari fungsi  $F$  terhadap  $X$  dan  $t$ , dengan  $x$  menyesuaikan terhadap turunan-turunan fungsi tersebut sebagai berikut

$$d \ln x = \left( 0 \cdot x + \mu \frac{1}{x} \cdot x - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \right) (X(t), t) dt + \left( \sigma \frac{1}{x} \cdot x \right) (X(t), t) dW(t) \quad (3.20)$$

Persamaan (3.20) dapat disederhanakan menjadi

$$d \ln x = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (X(t), t) dt + \sigma (X(t), t) dW(t) \quad (3.21)$$

Persamaan (3.21) dalam bentuk yang lebih sederhana dapat ditulis sebagai berikut

$$d \ln x = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \quad (3.22)$$

Persamaan (3.22) tersebut telah mengikuti process Wiener, dengan  $\mu - \frac{1}{2} \sigma^2$  sebagai koefisien driff (mean) dan  $\sigma$  sebagai koefisien difussion (standart deviasi) dimana keduanya merupakan konstanta.

Selanjutnya mencari solusi analitik dari  $x$  yaitu dengan mengintegalkan persamaan (3.22) dengan integral nol sampai dengan  $t$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_0^t d \ln x &= \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dW(t) \\ \ln x(t) - \ln x(0) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - 0) + \sigma (W(t) - W(0)) \\ \ln x(t) - \ln x(0) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Persamaan (3.23) dapat ditulis ulang dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned} \ln \frac{x(t)}{x(0)} &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \\ \frac{x(t)}{x(0)} &= \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right] \end{aligned}$$

$$x(t) = x(0) \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right] \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) merupakan solusi analitik dari model stokastik virus hepatitis B secara umum.

Sehingga, untuk  $x(t) = S(t)$  dan  $x(0) = S(0)$ . Substitusikan  $\mu = -\frac{(\beta+\alpha) S(t)I(t)}{N}$  dan  $\sigma = -\sqrt{\frac{(\beta+\alpha) S(t)I(t)}{N}}$  yang sesuai pada persamaan (3.14) ke persamaan (3.24), sehingga didapatkan solusi dari  $S(t)$  yaitu

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp \left[ \left( \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} \right) - \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} \right)^2 \right) t \right. \\ &\quad \left. + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} \right) W(t) \right] \\ S(t) &= S(0) \exp \left[ \left( 1 \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} \right) \right) t \right. \\ &\quad \left. + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} \right) W(t) \right] \\ S(t) &= S(0) \exp \left[ \left( \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} \right) \right) t \right. \\ &\quad \left. + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} \right) W(t) \right] \end{aligned}$$



$$S(t) = S(0) \exp \left[ \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} \right) \right) t + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} \right) W(t) \right] \quad (3.25)$$

Dengan cara yang sama, untuk  $x(t) = I(t)$  dan  $x(0) = I(0)$  Substitusikan

$\mu = \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t)$  dan  $\sigma = \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)}$  yang sesuai pada persamaan (3.14) ke persamaan (3.24), sehingga didapatkan solusi dari  $I(t)$  adalah

$$I(t) = I(0) \exp \left[ \left( \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right)^2 \right) t + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) W(t) \right]$$

$$I(t) = I(0) \exp \left[ \left( 1 \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) \right) t + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) W(t) \right]$$

$$\begin{aligned}
I(t) &= I(0) \exp \left[ \left( \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) \right) t \right. \\
&\quad \left. + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) W(t) \right] \\
I(t) &= I(0) \exp \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) \right) t \right. \\
&\quad \left. + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) W(t) \right] \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Sehingga, dengan demikian didapatkan solusi model stokastik virus hepatitis B (3.14) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0) \exp \left[ \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} \right) \right) t + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} \right) W(t) \right]
\end{aligned}$$

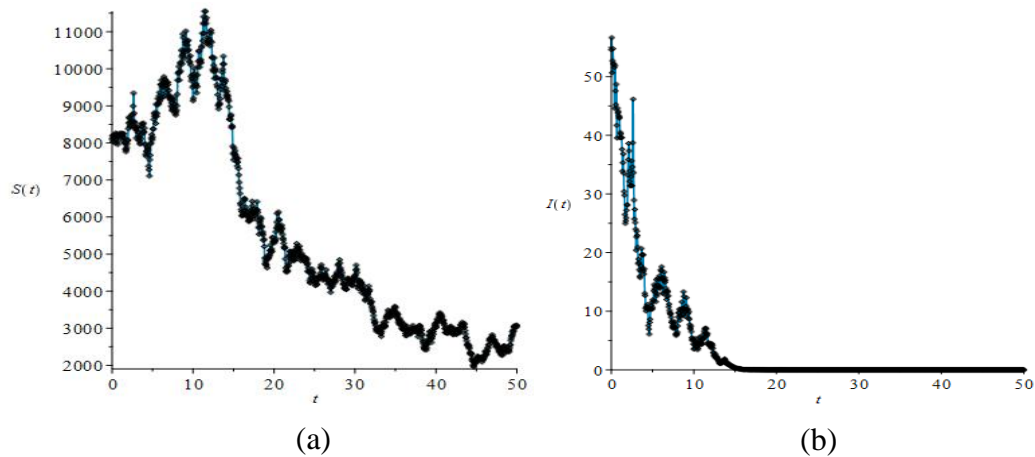
Dan

$$\begin{aligned}
I(t) &= I(0) \exp \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) \right) t \right. \\
&\quad \left. + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t) I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) W(t) \right] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

### 3.3 Simulasi Analitik Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B

Model stokastik penularan virus hepatitis B dan juga solusi yang telah diperoleh, akan disimulasikan menggunakan software maple dengan menggunakan parameter yang diambil dari artikel karya Tahir Khan (2019) yang

berjudul “A stochastic Model For The Transmission Dynamics Of Hepatitis B Virus”. Dengan demikian dapat diketahui bagaimana penggambaran penularan virus hepatitis B dengan nilai laju infeksi akut  $\beta = 0,6$ , laju infeksi kronis  $\alpha = 0,5$  dan laju kesembuhan penyakit  $\gamma = 0,4$  untuk  $N = 100$  dengan nilai awal  $S(0) = 0,9$  dan  $I(0) = 0,4$ . Karena untuk menggambarkan simulasi model stokastik penularan virus hepatitis B diperlukan nilai mean dan standar deviasi, maka setelah mensubstitusikan nilai parameter ke dalam model (3.14) individu rentan ( $dS(t)$ ) didapatkan  $-\frac{(\beta+\alpha)S(t)I(t)}{N} = -0,011 S(t)I(t)$  sebagai nilai mean ( $\mu$ ) atau koefisien driff dan  $-\sqrt{\frac{(\beta+\alpha)S(t)I(t)}{N}} = -\sqrt{0,011 S(t)I(t)}$  sebagai nilai standar deviasi ( $\sigma$ ) atau koefisien diffusion. Dengan demikian didapatkan hasil simulasi solusi (3.27) dalam interval waktu  $0 \leq t \leq 50$  adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3 Simulasi Solusi Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B

Gambar 3.3 (a) menunjukkan bahwa banyaknya individu yang rentan pada waktu  $t$  dengan mengikuti proses wiener akan berfluktuasi naik turun karena adanya pengaruh acak dan kemungkinan individu yang rentan akan terinfeksi virus hepatitis B masih tetap terus terjadi karena dipengaruhi faktor-faktor tertentu selama epidemi tersebut masih ada. Selama periode waktu tersebut akan ada saat

dimana epidemi tersebut mencapai jumlah maksimum maupun minimum dan pergerakannya akan semakin menurun seiring berjalannya waktu karena adanya perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi dengan pergerakan yang tidak stabil.

Gambar 3.3 (b) menunjukkan bahwa banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu  $t$  dengan mengikuti proses wiener akan berfluktuasi naik turun karena adanya pengaruh acak dimana grafik cenderung menurun yang mengartikan bahwa banyaknya individu yang terinfeksi dengan seiring bertambahnya waktu akan semakin berkurang karena adanya kesembuhan dari individu yang terinfeksi dan akan terus menurun sampai pada nilai nol yang menunjukkan penyakit hepatitis B tersebut sudah tidak menyebar dan selanjutnya pada waktu seterusnya akan stabil tidak mengalami perubahan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa terjadinya infeksi virus hepatitis B dapat dihentikan oleh faktor dan cara – cara tertentu sehingga epidemi tersebut dapat punah dan tidak menyebar kembali.

Simulasi pada model stokastik 3.14 akan berbeda dengan simulasi model deterministik 3.2. Pada model deterministik garis yang terbentuk berupa garis lurus karena variabel yang digunakan pada model deterministic bersifat pasti sedangkan pada model stokastik membentuk garis yang berfluktuasi naik turun karena pengaruh dari gerak brown atau proses wiener. Perbedaannya juga dapat terlihat dari ada dan tidaknya pengaruh waktu, pada model stokastik terdapat pengaruh waktu sedangkan pada model deterministik tidak.

Selanjutnya akan dibahas mengenai parameter apa saja yang mempengaruhi tinggi rendahnya penularan virus hepatitis B. Dengan melihat pergerakan dari gerak brown pada model stokastik penularan virus hepatitis B

maka akan diketahui pergerakan acak yang terjadi pada setiap individu pada waktu  $t$ , dengan demikian akan disimulasikan proses wiener dari model stokastik penularan virus hepatitis B (3.14). Seperti halnya simulasi solusi model stokastik penularan virus hepatitis B dimana diperlukan nilai dari koefisien driff ( $\mu$ ) dan koefisien diffusion ( $\sigma$ ). Model (3.14) apabila disubstitusikan dengan nilai parameter yang sama diperoleh:

$$dS(t) = -\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N} dt - \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} dW(t)$$

$$dS(t) = -0,011 S(t)I(t) dt - \sqrt{0,011 S(t)I(t)} dW(t)$$

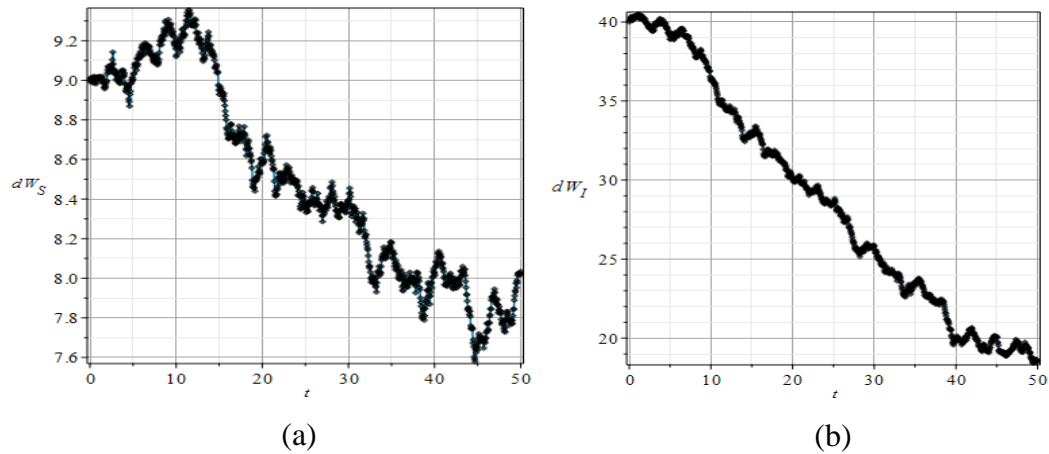
Dengan nilai koefisien driff ( $\mu$ ) pada  $dS(t)$  adalah  $-0,011$  dan koefisien diffusion ( $\sigma$ ) pada  $dS(t)$  adalah  $-\sqrt{0,011}$ .

$$dI = \left( \frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) dW(t)$$

$$dI = 0,011 S(t)I(t) - 0,4 I(t) dt + (\sqrt{0,011 S(t)I(t)} - \sqrt{0,4 I(t)}) dW(t)$$

Dengan nilai koefisien driff ( $\mu$ ) pada  $dI(t)$  adalah  $0,011 - 0,4$  dan koefisien diffusion ( $\sigma$ ) pada  $dI$  adalah  $\sqrt{0,011} - \sqrt{0,4}$ .

Simulasi proses wiener dari banyaknya individu yang rentan dan terinfeksi virus hepatitis B dalam interval waktu  $0 \leq t \leq 50$  dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.4 Simulasi Proses Wiener  $dw_s$  dan  $dw_I$

Gambar 3.4 (a) menunjukkan pergerakan acak dari banyaknya individu yang rentan pada waktu  $t$ . Pada gambar tersebut terlihat bahwa banyaknya individu yang rentan akan menurun seiring berjalannya waktu akan tetapi tidak stabil dan berfluktuasi naik turun. Menurunnya individu yang rentan tersebut karena adanya infeksi virus yang menyebabkan individu rentan menjadi individu terinfeksi. Sedangkan, gambar 3.4 (b) menunjukkan pergerakan acak dari banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu  $t$ . Dari gambar tersebut terlihat bahwa banyaknya individu yang terinfeksi dengan seiring bertambahnya waktu akan semakin berkurang karena adanya kesembuhan. Penurunan dari banyaknya individu yang terinfeksi ini tidak berupa garis lurus, akan tetapi berfluktuasi naik turun.

Dapat dilihat dari model (3.14) bahwa besar kecilnya laju infeksi akut ( $\beta$ ), laju infeksi kronis ( $\alpha$ ), laju kesembuhan ( $\gamma$ ), dan nilai awal ( $I(0)$ ) serta waktu ( $t$ ) akan memiliki pengaruh terhadap besar kecilnya penularan virus hepatitis B. Untuk melihat pengaruh tersebut, model (3.14) akan disimulasikan proses wiener sebagai berikut:

1. Apabila laju infeksi akut ( $\beta$ ) dan laju infeksi kronis ( $\alpha$ ) dibuat variasi nilai berupa  $\beta + \alpha = 0,3$  dengan ( $\beta = 0,2; \alpha = 0,1$ ) dan  $\beta + \alpha = 0,7$  dengan ( $\beta = 0,4; \alpha = 0,3$ ) dimana nilai ini menunjukkan laju infeksi akut dan kronis ( $\beta + \alpha$ ) semakin besar dengan nilai awal ( $S(0) = 90$ ), maka dengan cara yang sama yaitu mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam model (3.14) pada persamaan  $dS(t)$  didapatkan hasil:

- a. Untuk laju infeksi akut dan kronis  $\beta + \alpha = 0,3$  ( $\beta = 0,2; \alpha = 0,1$ )

$$dS(t) = -\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}dt - \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} dW(t)$$

$$dS = -0,003 S(t)I(t) dt - \sqrt{0,003 S(t)I(t)} dW(t)$$

Diperoleh nilai koefisien driff ( $\mu$ ) pada  $dS(t)$  adalah  $-0,003$  dan koefisien diffusion ( $\sigma$ ) pada  $dS(t)$  adalah  $\sqrt{0,003}$ .

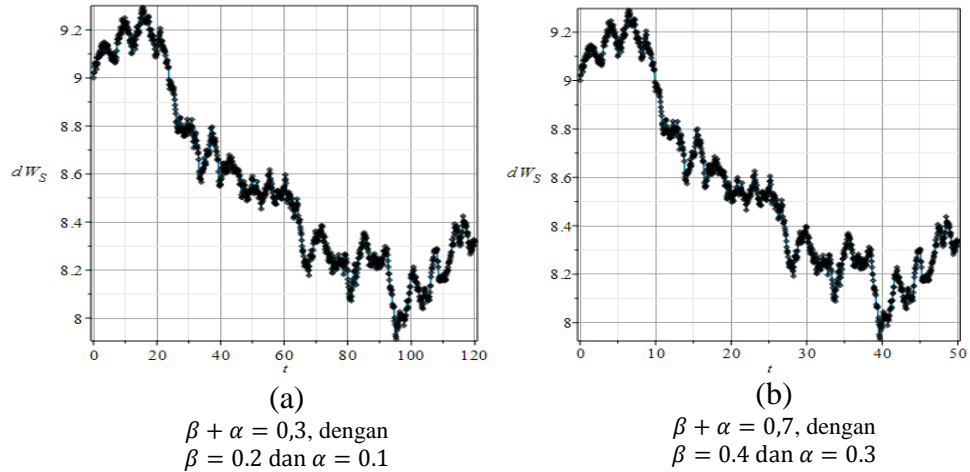
- b. Untuk laju infeksi akut dan kronis  $\beta + \alpha = 0,7$  ( $\beta = 0,4; \alpha = 0,3$ )

$$dS(t) = -\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}dt - \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} dW(t)$$

$$dS(t) = -0,007 S(t)I(t) dt - \sqrt{0,007 S(t)I(t)} dW(t)$$

Diperoleh nilai koefisien driff ( $\mu$ ) pada  $dS(t)$  adalah  $-0,007$  dan koefisien diffusion ( $\sigma$ ) pada  $dS(t)$  adalah  $-\sqrt{0,007}$ .

Dari kedua nilai tersebut, diperoleh hasil simulasi proses wiener menggunakan maple sebagai berikut:



Gambar 3.5 Simulasi Proses Wiener dengan Variasi Nilai  $\beta$  dan  $\alpha$

Gambar 3.5 (a) dan 3.5 (b) menunjukkan bahwa apabila nilai pada laju infeksi akut dan kronis ( $\beta + \alpha$ ) semakin besar maka banyaknya individu yang rentan akan semakin berkurang dengan waktu yang cepat karena banyaknya perubahan yang terjadi pada individu rentan menjadi individu terinfeksi, hal ini mengakibatkan individu yang terinfeksi akan semakin meningkat.

2. Apabila nilai laju infeksi akut ( $\beta = 0,6$ ), laju infeksi kronis ( $\alpha = 0,5$ ) dan nilai awal ( $I(0) = 40$ ) sedangkan laju kesembuhan ( $\gamma$ ) bernilai 0,6 dan 0,8 dimana nilai ini menunjukkan ( $\gamma$ ) semakin besar, maka dengan cara yang sama yaitu dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam model (3.14) pada persamaan  $dI(t)$ , maka didapatkan hasil:

- a. Untuk laju kesembuhan ( $\gamma$ ) bernilai 0,6

$$dI(t) = \left( \frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) dW(t)$$

$$dI(t) = 0,011 S(t)I(t) - 0,6 I(t)dt + (\sqrt{0,011 S(t)I(t)} - \sqrt{0,6 I(t)}) dW(t)$$

Diperoleh nilai koefisien driff ( $\mu$ ) pada  $dI(t)$  adalah  $0,011 - 0,6$  dan

koefisien diffusion ( $\sigma$ ) pada  $dI(t)$  adalah  $\sqrt{0,011} - \sqrt{0,6}$ .



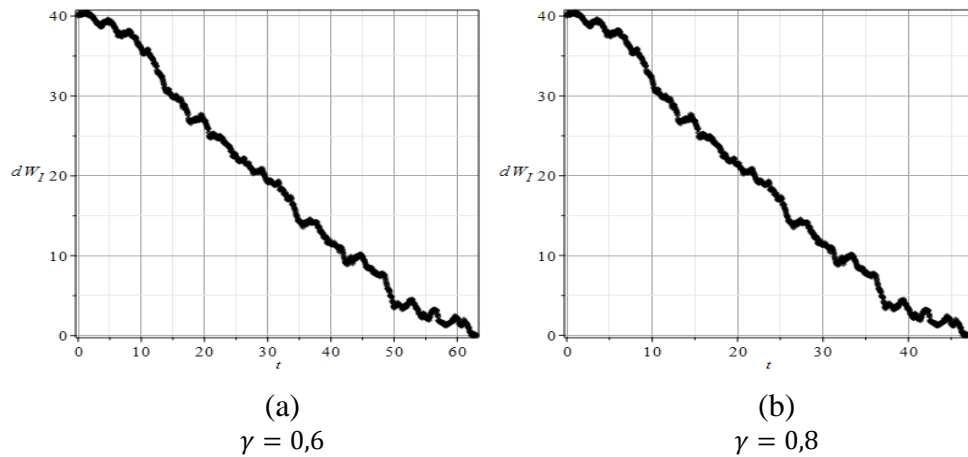
- b. Untuk laju kesembuhan ( $\gamma$ ) bernilai 0,8

$$dI(t) = \left( \frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha)S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) dW(t)$$

$$dI(t) = 0,011 S(t)I(t) - 0,8 I(t) dt + (\sqrt{0,011 S(t)I(t)} - \sqrt{0,8 I(t)}) dW(t)$$

Diperoleh nilai koefisien driff ( $\mu$ ) pada  $dI(t)$  adalah  $0,011 - 0,8$  dan koefisien diffusion ( $\sigma$ ) pada  $dI(t)$  adalah  $\sqrt{0,011} - \sqrt{0,8}$ .

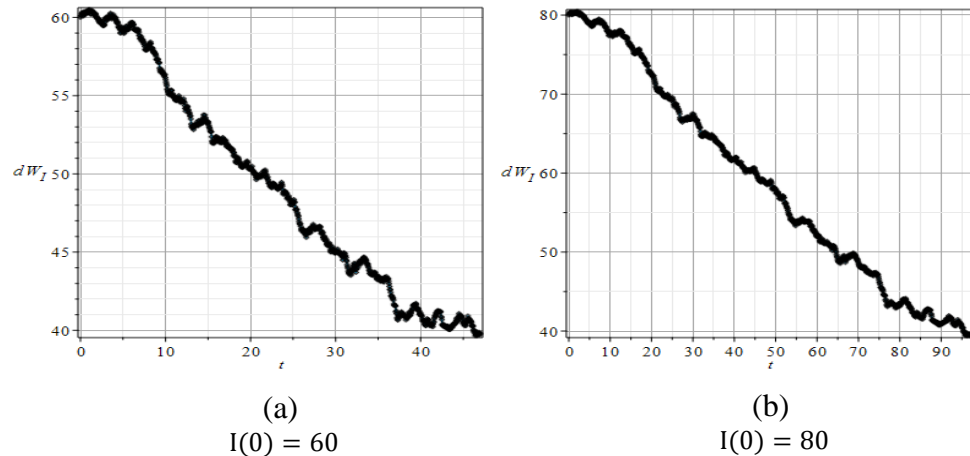
Dari kedua nilai tersebut, digambarkan simulasi proses wiener menggunakan maple sebagai berikut:



Gambar 3.6 Simulasi Proses Wiener dengan Variasi Nilai  $\gamma$

Gambar 3.6 (a) dan 3.6 (b) menunjukkan bahwa apabila nilai pada laju kesembuhan ( $\gamma$ ) semakin besar maka banyaknya individu yang terinfeksi akan cepat berkurang. Hal ini mengartikan bahwa semakin besar laju kesembuhan maka banyaknya individu terinfeksi akan semakin berkurang.

3. Apabila nilai laju infeksi akut ( $\beta = 0,6$ ), laju infeksi kronis ( $\alpha = 0,5$ ) dan laju kesembuhan ( $\gamma = 0,4$ ). Sedangkan nilai awal ( $I(0)$ ) bernilai 60 dan 80, dimana nilai ini menunjukkan nilai awal ( $I(0)$ ) semakin besar, maka dengan menggunakan maple di dapatkan hasil simulasi proses wiener sebagai berikut:



Gambar 3.7 simulasi proses wiener dengan variasi nilai  $I(0)$

Gambar 3.7 (a) dan 3.7 (b) menunjukkan bahwa nilai awal ( $I(0)$ ) mempengaruhi banyaknya individu yang terinfeksi. Semakin besar nilai awal ( $I(0)$ ), maka banyaknya individu terinfeksi juga akan semakin tinggi dan waktu yang dibutuhkan untuk menjadi individu sembuh akan semakin lama.

### 3.4 Integrasi al-quran dan hadist

Kehidupan manusia yang ada di dunia ini sebenarnya merupakan proses stokastik. Segala sesuatu memiliki peluang, peluang bahagia dalam kesedihan, peluang sukses dalam kegagalan, dan peluang-peluang lain yang terjadi dalam kehidupan manusia. Peluang tersebut merupakan kejadian acak dimana setiap orang memiliki peluang yang berbeda-beda sesuai dengan kehendak allah yang mengatur alam semesta dan seisinya. Djatnika (1996) mengatakan bahwa, manusia akan selalu mencari kebahagiaan (*As-sa'adah*) didalam hidupnya dan kebaikan yang tertinggi (*Al-Khair al-Kulliy*). Setiap manusia pasti memiliki tujuan yang ingin dicapai dalam hidupnya, tidak ada manusia yang ingin celaka atau gagal. Andai manusia adalah model stokastik, maka tentu ia akan mencari parameter-parameter yang mampu membuatnya optimal sehingga manusia akan

bertafakur mencari optimasi yang terbaik dalam hidupnya baik untuk di dunia saat ini maupun di akhirat kelak.

Proses stokastik yaitu misalkan  $X(t)$  adalah sebuah variabel acak dengan  $t$  elemen dari  $T$ , dan semua kemungkinan atau peluang yang terjadi pada  $X(t)$  disebut state space maka jika dianalogikan kehidupan adalah proses stokastik, maka state spacenya bisa merupakan kejadian kesuksesan, kegagalan, kesedihan, kebahagiaan, dan semua yang dialami dalam kehidupan yang semuanya memiliki peluang untuk terjadi. Peluang tersebut tergantung pada parameter yang digunakan atau tindakan manusia itu sendiri. Al-quran telah banyak menyebutkan mengenai konsep yang berkaitan dengan perilaku manusia seperti khair, birra, salih, ma'ruf, hasan, qist, sayyi'ah dan fasad. kebaikan yang ingin dicapai oleh manusia dan keburukan yang ingin dihindari oleh manusia dalam hidupnya ini berdimensi tauhid, di dalamnya ada suatu peluang yang menjadi misteri takdir sesuai kehendak Allah. Kebijakan dan keadilan-Nya, kekuasaan dan kasih sayang-Nya tergantung pada perbuatan dan sikap manusia kepada-Nya, hal tersebut akan mempengaruhi besarnya peluang kebaikan yang ingin didapat. Sebagai manusia hanyalah bisa berusaha sebaik mungkin dengan mencari parameter-parameter untuk mengoptimalkan hidupnya sesuai apa yang diinginkan. Untuk memperbesar peluang kebaikan yang diinginkan, manusia perlu berfikir untuk bertindak melakukan usaha, berdoa, dan bertawakal kepada Allah agar apa yang diinginkan dapat tercapai. Seperti apa yang sudah dijelaskan dalam Al-Quran surat Ar-Rad 13:11 berarti:

“Bagi manusia ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran, di muka dan di belakangnya, mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap sesuatu kaum, maka

tak ada yang dapat menolaknya, dan sekali-kali tak ada pelindung bagi mereka selain Dia”

Dalam ayat tersebut menjelaskan bahwa pada hakikatnya memang Allah lah penentu takdir manusia. Tetapi, takdir tersebut berdasarkan ayat di atas akan berubah sesuai dengan apa yang diperbuat manusia itu sendiri. Ketika manusia telah melakukan perbuatan yang bertentangan dengan apa yang diperintahkan Allah maka nasib yang semula baik bisa menjadi buruk. Sebagai manusia hendaknya selalu melakukan kebaikan di jalan Allah agar kita mendapatkan takdir dan nasib yang baik atas pertolongan Allah. Usaha yang dapat kita lakukan untuk menangani suatu penyakit menular atau wabah agar tidak membahayakan diri sendiri dan orang lain yaitu dengan menjaga diri dari budaya lingkungan yang tidak baik, bagi seseorang yang terinfeksi penyakit menular sebaiknya melakukan pengobatan yang dianjurkan guna kesembuhan dan untuk sementara tidak melakukan kontak langsung dengan orang lain sedangkan bagi seseorang yang sehat sebaiknya menjaga diri dengan budaya hidup bersih dan sehat serta dalam hal pergaulannya, seperti yang dijelaskan dalam hadist sebagai berikut:

“Apabila kamu mendengar ada wabah penyakit di suatu negeri maka janganlah kamu memasukinya; dan apabila (wabah itu) berjangkit sedangkan kamu berada di dalam negeri itu, maka janganlah kamu keluar melarikan diri.” (HR. al-Bukhari).

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab tiga, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Model stokastik penularan virus hepatitis B dengan laju infeksi akut dan laju infeksi kronis adalah sebagai berikut:

$$dS(t) = -\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} dt - \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} dW(t)$$

$$dI(t) = \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) dW(t)$$

2. Solusi analitik dari model stokastik penularan virus hepatitis B yang dicari dengan menggunakan formula ito adalah sebagai berikut:

$$S(t) = S(0) \exp \left[ \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} \right) \right) t + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} \right) W_t \right]$$

$$I(t) = I(0) \exp \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \right) \right) t + \left( -\sqrt{\frac{(\beta + \alpha) S(t)I(t)}{N}} - \sqrt{\gamma I(t)} \right) W_t \right]$$

3. Hasil simulasi analitik dari solusi menunjukkan bahwa kemungkinan individu yang rentan akan terinfeksi virus hepatitis B masih tetap terus terjadi selama epidemi tersebut masih ada dan banyaknya individu yang terinfeksi dengan seiring bertambahnya waktu akan terus menurun sampai pada nilai nol yang menunjukkan penyakit hepatitis B tersebut sudah tidak menyebar. Untuk simulasi dari proses wiener dapat diketahui bahwa besar kecilnya laju infeksi akut dan kronis  $(\beta + \alpha)$ , laju

kesembuhan ( $\gamma$ ), dan nilai awal ( $I(0)$ ) memiliki pengaruh terhadap besar kecilnya penularan virus hepatitis B, yaitu:

- a. Apabila laju infeksi akut dan kronis ( $\beta + \alpha$ ) semakin besar maka banyaknya individu yang rentan akan semakin cepat berkurang karena perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi sehingga jumlah individu terinfeksi akan cepat bertambah.
- b. Apabila nilai pada laju kesembuhan ( $\gamma$ ) semakin besar maka banyaknya individu yang terinfeksi akan semakin cepat berkurang karena perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh sehingga jumlah individu terinfeksi akan cepat berkurang.
- c. Semakin besar nilai awal ( $I(0)$ ) maka banyaknya individu terinfeksi akan semakin tinggi sehingga membutuhkan waktu lama untuk individu terinfeksi menjadi individu sembuh.

## 4.2 Saran

Penulis menggunakan model stokastik pada penularan virus hepatitis B. Oleh karena itu, penulis berharap penelitian ini dapat dilanjutkan pada pembahasan mengenai penanganan penyebaran virus hepatitis B yang tepat dan juga mengembangkan pembahasan mengenai model stokastik pada model epidemik dan penyakit yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Quran dan Terjemah* . Cetakan ke-7: Al-Mizan Publishing House
- Allen, L.J.S., *an introduction to stochastic processes with application to biology*, prentice hall, upper saddle river, new jersey, 2003
- Bain, L, & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California: Wadsworth Publishing Company.
- Banks, Jerry, et al., 2001. *Third Edition Discrete-Event System Simulation*, New Jersey: Prentice Hall
- Djatnika, Rachmat. 1996. *Sistem Ethika Islami (Akhlak Mulia)*. (Jakarta: Pustaka Panji Mas). hlm. 17.
- Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik Untuk Teknik dan Sains*, Erlangga, Jakarta.
- Hull, J.C. 2003. *Option Future and Other Derivative*. Toronto: Prentice Hall.
- Ibnu Katsir, *Tafsir Al-Quranul Adzim*terj. Bahrurun Abu Bakar, dkk (Bandung Sinar Baru Algesindo,2000) juz 5 hlm 322
- J Dudewicz, Edward dan Satya N Mishra. *Modern Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, Inc. 1988.
- Karlin, Samuel & Taylor, Howard M. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press.
- Kermack, W. O.; McKendrick, A. G. (1927). "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics". *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 115 (772): 700
- Klebaner, F.C. 1998. *Introduction To Stochastic Calculus With Applications*. London: Imperial College Press.
- Kloeden, P.E., and E.Platen. 1999. *Aplication of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. New York: Springer.
- Mustofa, S., Kurniawati, E. Hepatitis B :PanduanBagiDokterUmum. Aura printing& Publishing, Bandar Lampung.(2013).
- Nasell, I. 2002. *Stochastic Models of Some Endemic Infections*. *Mathematical Biosciences*, 179: 1-19.
- Parzen, E., *Stochastic Processes*, Holden-Day Inc., United State of America, 1962.

- Ross, S. L. 2010. *Differential Equations Third Edition*. New Delhi: Wiley India.
- Sahoo, Prasanna. 2008. *Probability and Mathematical Statistics*. University of Louisville. USA.
- Soewignjo, S., 2008. *Hepatitis Virus B Edisi 2*. Penerbit Buku Kedokteran Egc, Jakarta
- T. Khan, II Hyo Jung & Gul Zaman. 2019. *A stochastic model for the transmission dynamics of hepatitis B virus*, Journal of Biological Dynamics, 13:1, 328-344
- Lekone, P.E., & B. F. Finkenstädt. 2006. *Statistical Inference in a Stochastic Epidemic SEIR Model with Control Intervention: Ebola as a Case Study*. *Biometrics*, 62 : 1170-1177.
- L.Ross, S. (1984). *Differential Equations*. 3rd.Ed. New York: John Wiley and Sons.
- Walpole, E. R and Myers, H. R., 1989. *Probability and Statistics For Engineers And Scientists*. Diterjemahkan oleh R.K. Sembiring., 1995. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Widoyono. 2011. *Penyakit Tropis Epidemiologi, Penularan, Pencegahan dan Pemberantasannya*. Edisi ke-2. Jakarta: Erlangga
- Yunita, Felin. 2013. *Model Stokastik Susceptible Infected Recovered (SIR)*. Other thesis, Universitas Sebelas Maret



## LAMPIRAN

### 1. Script maple simulasi solusi model stokastik dan model deterministik

```

[> restart : with(Finance) :
[> S := ItoProcess(9.0, mu, sigma, x, t);
[> Drift(S(t));
[> Diffusion(S(t));
[> Drift(exp(S(t)));
[> Diffusion(exp(S(t)));
[> mu := -0.011;
[> sigma := -sqrt(0.011);
[> PathPlot(exp(S(t)), t=0..50, timesteps=1000, replications=1);

[> restart : with(Finance) :
[> In := ItoProcess(4.0, mu, sigma, x, t);
[> Drift(In(t));
[> Diffusion(In(t));
[> Drift(exp(In(t)));
[> Diffusion(exp(In(t)));
[> mu := 0.011 - 0.4;
[> sigma := sqrt(0.011) - sqrt(0.4);
[> PathPlot(exp(In(t)), t=0..50, timesteps=1000, replications=1);

[> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
[> alpha := 0.5; beta := 0.6; gama := 0.4;

[> ode1 := diff(S(t), t) = -(beta + alpha) * S(t) * In(t);

[> ode2 := diff(In(t), t) = (beta + alpha) * S(t) * In(t) - (gama) * In(t);
[> inits := [S(0) = 0.9, In(0) = 0.4];

[> myopts := stepsize = 50, arrows = NONE :
[> plot1 := DEplot([ode1, ode2], [S, In], t = 0..50, [inits], scene = [t, S], linecolour = black, myopts) :

[> plot2 := DEplot([ode1, ode2], [S, In], t = 0..50, [inits], scene = [t, In], linecolour = red, myopts) :
[> display(plot1);

[> display(plot2);
[> display(plot1, plot2);

```

### 2. Script maple simulasi proses wiener $dw_s$ dan $dw_t$

```

[> restart : with(Finance) :
[> alpha := 0.5; beta := 0.6; gama := 0.4; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 40;
[> dS := -((beta + alpha) * S(t) * In(t)) / N * dt - sqrt((beta + alpha) * S(t) * In(t)) / N * dW(t)
[> dIn := ((beta + alpha) * S(t) * In(t)) / N * dt + (sqrt((beta + alpha) * S(t) * In(t)) / N - sqrt(gama * In(t))) * dW(t)
[> restart, with(Finance) :
[> T := 50.0
[> S := BrownianMotion(9.0, -0.011, -sqrt(0.011));
[> PathPlot(S(t), t=0..T, timesteps=1000, replications=1, axes=BOXED, gridlines=true)

```

```

> restart; with(Finance) :
> T := 50.0
> In := BrownianMotion(40.0, 0.011 - 0.4, sqrt(0.011) - sqrt(0.4)) :
> A := SamplePath(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)

```

### 3. Script maple simulasi proses wiener dengan variasi nilai $\beta$ dan $\alpha$

**beta:0.2 , alpha:0.1**

```

> restart; with(Finance) :
> beta := 0.2; alpha := 0.1; gama := 0.4; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 40;
> dS := - (beta + alpha) * S(t) * In(t) / N dt - sqrt((beta + alpha) * S(t) * In(t) / N) dW(t)
>
> restart; with(Finance) :
> T := 120.0
> S := BrownianMotion(9.0, -0.003, -sqrt(0.003)) :
> A := SamplePath(S(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(S(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)

```

**beta:0.4 , alpha:0.3**

```

> restart; with(Finance) :
> beta := 0.4; alpha := 0.3; gama := 0.4; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 40;
> dS := - (beta + alpha) * S(t) * In(t) / N dt - sqrt((beta + alpha) * S(t) * In(t) / N) dW(t)
>
> restart; with(Finance) :
> T := 120.0
> S := BrownianMotion(9.0, -0.007, -sqrt(0.007)) :
> A := SamplePath(S(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(S(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)

```

### 4. Script maple simulasi proses wiener dengan variasi nilai $\gamma$

**gama:0.6**

```

> restart; with(Finance) :
> beta := 0.6; alpha := 0.5; gama := 0.6; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 40;
> dIn := ( (beta + alpha) * S(t) * In(t) / N - gama * In(t) ) dt + ( sqrt((beta + alpha) * S(t) * In(t) / N) - sqrt(gama * In(t)) ) dW(t)
>
> restart; with(Finance) :
> T := 63.0
> In := BrownianMotion(40.0, 0.011 - 0.6, sqrt(0.011) - sqrt(0.6)) :
> A := SamplePath(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)

```

**gama:0.8**

```

> restart; with(Finance) :
> beta := 0.6; alpha := 0.5; gama := 0.8; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 40;
> dIn := ( (beta + alpha) * S(t) * In(t) / N - gama * In(t) ) dt + ( sqrt((beta + alpha) * S(t) * In(t) / N) - sqrt(gama * In(t)) ) dW(t)
>
> restart; with(Finance) :
> T := 47.0
> In := BrownianMotion(40.0, 0.011 - 0.8, sqrt(0.011) - sqrt(0.8)) :
> A := SamplePath(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)

```

## 5. Script maple simulasi proses wiener dengan variasi nilai $I(0)$

▼ **I(0):0.6**

```
> restart; with(Finance) :
> beta := 0.6; alpha := 0.5; gama := 0.4; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 60;
> dIn :=  $\left( \frac{(\text{beta} + \text{alpha}) \cdot S(t) \cdot \ln(t)}{N} - \text{gama} \cdot \ln(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\text{beta} + \text{alpha}) \cdot S(t) \cdot \ln(t)}{N}} - \sqrt{\text{gama} \cdot \ln(t)} \right) dW(t)$ 
> restart; with(Finance) :
> T := 47.0
> In := BrownianMotion(60.0, 0.011 - 0.4,  $\sqrt{0.011} - \sqrt{0.4}$ ) :
> A := SamplePath(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)
```

▼ **I(0):0.8**

```
> restart; with(Finance) :
> beta := 0.6; alpha := 0.5; gama := 0.4; N := 100; S(0) := 90; In(0) := 80;
> dIn :=  $\left( \frac{(\text{beta} + \text{alpha}) \cdot S(t) \cdot \ln(t)}{N} - \text{gama} \cdot \ln(t) \right) dt + \left( \sqrt{\frac{(\text{beta} + \text{alpha}) \cdot S(t) \cdot \ln(t)}{N}} - \sqrt{\text{gama} \cdot \ln(t)} \right) dW(t)$ 
> restart; with(Finance) :
> T := 97.0
> In := BrownianMotion(80.0, 0.011 - 0.4,  $\sqrt{0.011} - \sqrt{0.4}$ ) :
> A := SamplePath(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 100, replications = 1) :
> PathPlot(In(t), t = 0 .. T, timesteps = 1000, replications = 1, axes = BOXED, gridlines = true)
```

## RIWAYAT HIDUP



Arina Nur Laila, lahir di kota “reog” Ponorogo pada tanggal 10 Mei 1999, biasa dipanggil Arina, tinggal di Jl. Joyoboyo, Krajan, Sukosari, Babadan, Ponorogo. Anak pertama dari dua bersaudara yang lahir dari Bapak Sutrisno dan Ibu Siti Fatonah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 2 Sukosari dan lulus pada tahun 2013, setelah itu melanjutkan ke MTs Ma’arif Sukosari dan lulus pada tahun 2015. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MA Darul Huda Mayak Tonatan Ponorogo dan lulus tahun 2017. Selanjutnya, pada tahun 2017 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Program Studi Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra dan ekstra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Dalam organisasi intra kampus dia pernah menjadi anggota dari sie eksternal Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2018/2019 dan dalam organisasi ekstra kampus dia pernah menjadi bendahara KOPRI dari PMII rayon “Pencerahan” Galileo. Selama menempuh pendidikan dia pernah meraih beberapa prestasi. Prestasi yang pernah penulis raih di antaranya selalu meraih ranking tiga besar, Juara I Olimpiade sains tingkat Kabupaten, dan sering mengikuti ajang lomba dan olimpiade lainnya dalam bidang akademik khususnya matematika selama duduk di bangku sekolah.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Arina Nur Laila  
NIM : 17610034  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Model Stokastik Penularan Virus Hepatitis B  
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M. Si  
Pembimbing II : Dr. Heni Widayani, M. Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	03 Maret 2021	Konsultasi Bab I & II	1.
2	04 Mei 2021	Revisi Bab I & II	2.
3	04 Mei 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I	3.
4	08 Mei 2021	Revisi Kajian Agama Bab I	4.
5	13 Juni 2021	Konsultasi Bab I, II & III	5.
6	21 Juni 2021	Revisi Bab I, II & III	6.
7	27 September 2021	ACC untuk diseminarkan	7.
8	05 Oktober 2021	Konsultasi BAB III	8.
9	11 Oktober 2021	Revisi BAB III	9.
10	16 November 2021	Konsultasi Bab IV & Abstrak	10.
11	17 November 2021	Revisi Bab IV & abstrak	11.
12	25 November 2021	ACC Keseluruhan untuk disidangkan	12.

Malang, Desember 2021

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005