

**INDEKS HARMONIK DAN INDEKS GUTMAN GRAF NILRADIKAL  
PADA GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN SATUAN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
LULUK AFIFAH  
NIM. 16610052**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**INDEKS HARMONIK DAN INDEKS GUTMAN GRAF NILRADICAL  
PADA GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN SATUAN**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh:  
Luluk Afifah  
NIM. 16610052**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

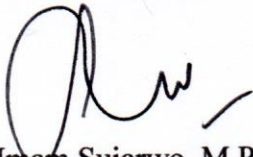
**INDEKS HARMONIK DAN INDEKS GUTMAN GRAF NILRADICAL  
PADA GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN SATUAN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
LULUK AFIFAH  
NIM. 16610052**

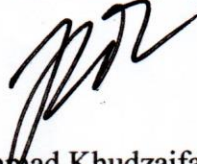
Telah Disetujui untuk Diuji  
Malang, 14 Desember 2021

Dosen Pembimbing I,



Dr. Imam Sujarwo, M.Pd  
NIP. 19630502 198703 1 005

Dosen Pembimbing II,



Muhammad Khudzaifah, M.Si  
NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**INDEKS HARMONIK DAN INDEKS GUTMAN GRAF NILRADICAL  
PADA GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN SATUAN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
LULUK AFIFAH  
NIM. 16610052**

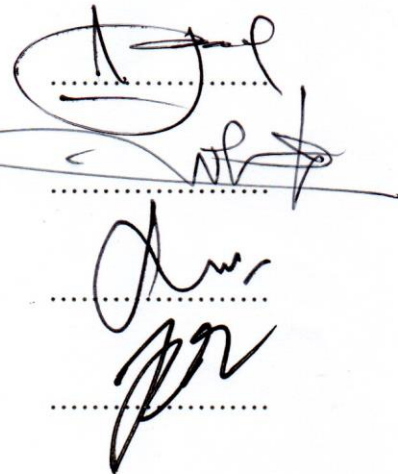
Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal 27 Desember 2021

Penguji Utama : Prof. Dr. Turmudi, M.Si., Ph.D

Ketua Penguji : Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Sekretaris Penguji : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Anggota Penguji : Muhammad Khudzaifah, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Program Studi



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Luluk Afifah

NIM : 16610052

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Harmonik dan Indeks Gutman Graf Nilradikal pada

Gelanggang Komutatif dengan Satuan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Desember 2021  
yang membuat pernyataan,



Luluk Afifah  
NIM.16610052

## **MOTO**

*“Pengetahuan yang baik adalah yang memberi manfaat,  
bukan yang hanya diingat”*

*“Sesungguhnya syurga itu ada dibawah telapak kaki ibu”*

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

*“Sesungguhnya beserta kesulitan itu terdapat kemudahan”*

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua (Bapak Abd. Rahman dan Ibu Budiya),

Kedua mertua (Bapak H. Zainal (Alm.) dan Ibu Zaitunah),

Suami tercinta Ferli Yanto yang selalu mensupport penulis,

M. Fathir Thibbil Quluby buah hati tercinta yang telah menjadi anak kuat,

Serta seluruh keluarga besar yang selalu mendukung dan mendoakan penulis.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah SWT. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Ayah, Ibu, mertua, suami, anak tercinta, serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini. Seluruh teman-teman Matematika angkatan 2016, terutama Rifa dan Irma. Teman main saat masih di asrama al- Ikhsan Ulfa dan Hana. Serta sepupu (Inayah) yang selalu menyemangati dan menjaga Fathir. Penulis tanpa henti mengucapkan terima kasih kepada semua pihak atas dukungannya terhadap penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, April 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL .....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
ABSTRAK .....	xiv
ABSTRACT.....	xv
ملخص.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	6
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA.....	9
2.1 Graf.....	9
2.2 Jarak ( <i>distance</i> ).....	11
2.3 Graf – Graf Khusus.....	12
2.4 Graf Nilradikal.....	14
2.5 Indeks Topologi.....	18
2.6 Indeks Harmonik .....	18
2.7 Indeks Gutman.....	20
2.8 Gelanggang.....	23
2.9 Gelanggang Komutatif dengan Satuan.....	24
2.10 Kajian Keislaman.....	25

<b>BAB III PEMBAHASAN .....</b>	<b>30</b>
3.1 Indeks Harmonik Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan.....	30
3.1.1 Bilangan Bulat modulo 9 ( $\mathbb{Z}_9$ ).....	30
3.1.2 Bilangan Bulat modulo 25 ( $\mathbb{Z}_{25}$ ).....	32
3.1.3 Bilangan Bulat Modulo 49 ( $\mathbb{Z}_{49}$ ) .....	34
3.1.4 Bilangan Bulat Modulo 121 ( $\mathbb{Z}_{121}$ ) .....	37
3.1.5 Bilangan Bulat Modulo 169 ( $\mathbb{Z}_{169}$ ) .....	39
3.1.6 Bilangan Bulat Modulo $n$ .....	42
3.2 Indeks Gutman Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan .....	44
3.2.1 Bilangan Bulat modulo 9 ( $\mathbb{Z}_9$ ).....	45
3.2.2 Bilangan Bulat Modulo 25 ( $\mathbb{Z}_{25}$ ) .....	46
3.2.3 Bilangan Bulat Modulo 49 ( $\mathbb{Z}_{49}$ ) .....	47
3.2.4 Bilangan Bulat Modulo 121 ( $\mathbb{Z}_{121}$ ) .....	49
3.2.5 Bilangan Bulat Modulo 169 ( $\mathbb{Z}_{169}$ ) .....	53
3.2.6 Bilangan Bulat Modulo $n$ .....	53
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>58</b>
4.1 Kesimpulan.....	58
4.2 Saran .....	58

#### **DAFTAR PUSTAKA**

#### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**

#### **RIWAYAT HIDUP**

#### **BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Bilangan Bulat Modulo 9 .....	31
Tabel 3.2 Bentuk Umum Indeks Harmonik Graf Nilradikal $N(\mathbb{Z}n)$ .....	43
Tabel 3.3 Bentuk Umum Indeks Gutman Graf Nilradikal $N(\mathbb{Z}n)$ .....	55

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G$ .....	10
Gambar 2.2 Graf $G_1$ .....	11
Gambar 2.3 Gambar Graf Beraturan- $r$ .....	12
Gambar 2.4 Gambar Graf Komplit .....	13
Gambar 2.5 Graf Bipartisi .....	13
Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit .....	14
Gambar 2.7 Graf Nilradikal dari $\mathbb{Z}_{18}$ .....	16
Gambar 2.8 Graf $G$ .....	19
Gambar 2.9 Graf $G_1$ .....	21
Gambar 3.1 Graf Nilradikal $N(\mathbb{Z}_9)$ .....	31
Gambar 3.2 Graf Nilradikal $N(\mathbb{Z}_{25})$ .....	33
Gambar 3.3 Graf Nilradikal $N(\mathbb{Z}_{49})$ .....	35
Gambar 3.4 Graf Nilradikal $N(\mathbb{Z}_{121})$ .....	38
Gambar 3.5 Graf nilradikal .....	41
Gambar 3.6 Graf nilradikal bilangan bulat modulo 9 $N(\mathbb{Z}_{49})$ .....	47
Gambar 3.7 Graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 121 $N(\mathbb{Z}_{121})$ .....	50
Gambar 3.8 Graf nilradikal bilangan bulat modulo 169 .....	54

## ABSTRAK

Afifah, Luluk. 2021. **Indeks Harmonik dan Indeks Gutman Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan**. Tugas Akhir/Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. pembimbing: (I) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

**Kata Kunci:** Indeks Harmonik, Indeks Gutman, Graf Komplit, Graf Nilradikal

Teori graf merupakan topik yang sampai saat ini masih menjadi materi yang sangat penting untuk dibahas. Hal tersebut dikarenakan sampai saat ini teori graf memiliki banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu sosial. Yang melatar belakangi penelitian ini adalah jurnal dari Shalini Chandra, Om Prakash, dan Sheela Suthar (2017:182), jurnal dari Jianxi Li dan Wai Chee Shiu (2014:1608), serta jurnal dari Vesna Andova, Darko Dimitrov, Jiri Fink, Riste Skrekovski (2011). Dari penelitian-penelitian yang ada belum ditemukan penelitian tentang indeks harmonik dan indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan, sehingga kami menganggap perlu melakukan penelitian ini.

Suatu graf nilradikal yang titik-titiknya merupakan unsur *nilpotent* tak nol, saat domainnya adalah gelanggang komutatif dengan satuan, ia membentuk graf komplit hanya jika gelanggang komutatif dengan satuan yang kita pakai dibatasi pada bilangan bulat positif modulo  $n$  ( $\mathbb{Z}_n$ ), dimana  $n$  merupakan kuadrat dari bilangan prima  $p$  yang kurang dari sama dengan 3 ( $n = p^2, p \geq 3$ ). Penelitian ini menjelaskan tentang bentuk umum indeks harmonik dan indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan berturut-turut adalah  $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$  dan  $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)(p-2)^2$ . Dalam pengaplikasiannya, bentuk tersebut dapat berguna sebagai parameter numerik suatu graf pada *chemical graph theory*, topologi molekuler, dan *mathematical chemistry*.

## ABSTRACT

Afifah, Luluk. 2021. **On the Harmonic and Gutman Indices of Nilradikal Graph of Commutative Ring with Unity**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

**Keyword:** Harmonic Index, Gutman Index, complete Graph, Nilradical Graph

Graph theory is a topic that is still very important to discuss. This is because until now, graph theory has many practical applications in various disciplines, for example in biology, computer science, economics, informatics engineering, linguistics, mathematics, health, and social sciences. The background of this research are the journals of Shalini Chandra, Om Prakash, and Sheela Suthar (2017: 182), the journals of Jianxi Li and Wai Chee Shiu (2014:1608), and the journals of Vesna Andova, Darko Dimitrov, Jiri Fink, Riste Skrekovski (2011). From existing studies, no research has been found on the harmonic and the Gutman indices of a nilradical graph in the commutative ring with unity, so we consider it necessary to carry out this research.

A nilradical graph which vertices are nonzero nilpotent elements, and when its domain is a commutative ring with unity, then it forms a complete graph only if the commutative ring with unity that we use is limited to the positive integer modes by  $n$  ( $\mathbb{Z}_n$ ), where  $n$  is the square of the prime  $p$  that is less than 3 ( $n = p^2, p \geq 3$ ). This study concluded that the general form of the harmonic index and the Gutman index of the nilradical graph of commutative ring with unity sequentially are  $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$  and  $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)(p-2)^2$ . In its application, the form can be useful as a numerical parameter for a graph in chemical graph theory, molecular topology, and mathematical chemistry.

## ملخص

عفيفة, لولؤ. ٢٠٢١. فهرس التوافقي وفهرس جوتمان (Gutman) للرسوم البيانية النيلية (Nilradikal) في الحقول التبادلية مع الوحدات. بحث جامعي. دراسة الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: ﴿١﴾ الدكتور إمام سوجارو, الماجستير الحاج ﴿٢﴾ محمد حذيفة, الماجستير.

الكلمة المفتاحية: فهرس التوافقي, فهرس جوتمان, الرسم البياني الكامل, الرسم النيلي (Nilradikal)

نظرية الرسم البياني هي موضوع مهم جداً للمناقشة. لأن هذه نظرية الرسم البياني لها التطبيقات العملية في مختلف التخصصات ، على في جميع العلوم مثال في علم الحياة, وعلم الحاسوب, والاقتصادي, والهندسة المعلوماتية, واللغويات, والرياضيات, والصحة, والعلوم الاجتماعية. و هذا البحث مأخوذ من مجلات شاليني شاندرنا ، وأوم براكاش ، وشيلا سوثار (2017: 182) ، ومجلات جيانكسي لي وواي تشي شيو (2014: 1608) ، ومجلات فيسنا أندوفا ، داركو ديميتروف ، جيرى فينك ، ريسيتي سكريكوفسكي (2011). ومن الدراسات الحاليالبحوث السابقة ، لم يتم العثور على أي بحث حول الفهرس التوافقي ومؤشر جوتمان للرسم البياني ذو الجذور الصفرية في المجال التبادلي بالوحدات ، لذلك نعتبر أنه من الضروري إجراء هذا البحث.

رسم بياني ذو جذور صفرية تكون رؤوسه عناصر غير صفرية ، عندما يكون المجال عبارة عن حلقة تبادلية بوحدات ، فإنه يشكل رسمًا بيانيًا كاملاً فقط إذا كانت الحلقة التبادلية مع الوحدات المستخدمة تقتصر على العدد الصحيح  $(\mathbb{Z}_n)n$ . حيث  $n$  هو مربع العدد الأولي  $p$  أصغر من ٣ . ومن هذا البحث يعرف أن الشكل العام للمؤشر التوافقي ومؤشر جوتمان للرسم البياني النيلي للحلقة التبادلية مع الوحدة بالتتابع, هما  $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$  و  $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)(p-2)^2$  يمكن أن يكون النموذج مفيداً كمعامل رقمي للرسم البياني في نظرية الرسم البياني الكيميائي ، والطوبولوجيا الجزئية ، والكيمياء الرياضي.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan topik yang sampai saat ini masih menjadi materi yang sangat penting untuk dibahas. Hal tersebut dikarenakan sampai saat ini teori graf memiliki banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik informatika, linguistik, matematik, kesehatan, dan ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan. Menurut Chartrand, Lesniak, dan Zhang (1986: 3), Graf  $G$  adalah himpunan titik (*vertices*) tak kosong yang terbatas yang dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan garis atau sisi (*edges*) yang mungkin kosong yang dinotasikan dengan  $E(G)$ . Artinya, suatu graf bisa jadi tidak memiliki sisi, akan tetapi setidaknya memiliki satu titik saja atau disebut sebagai graf trivial.

Setiap titik pada graf pasti memiliki derajat (*degree*) dan jarak (*distance*), kecuali pada graf trivial yang hanya memiliki satu titik saja. Menurut Abdussakir, Azizah, dan Novandika (2009: 9), derajat (*degree*) dari titik  $v$  di graf  $G$   $deg(v)$  adalah banyaknya sisi di  $G$  yang terkait langsung dengan  $v$ . Sedangkan, jarak (*distance*)  $d(u, v)$  dari titik  $u$  ke titik  $v$  pada graf terhubung  $G$  menurut Chartrand, Lesniak, dan Zhang (1986: 44) adalah lintasan terpendek dari  $u - v$  di  $G$ . Berdasarkan titik, sisi, dan derajatnya, graf dibagi menjadi 5, yaitu: graf beraturan- $r$  atau graf beraturan berderajat  $r$ , graf komplit, graf bipartisi, graf bipartisi komplit, dan graf bipartisi- $n$  komplit.

Indeks topologi yang memiliki banyak kegunaan sampai saat ini masih menjadi topik hangat untuk dibahas, hal tersebut karena ada banyak cabang dari indeks topologi yang mungkin diteliti lebih lanjut disandingkan dengan graf-graf invariant. Salah satu indeks topologi yang menarik untuk diteliti adalah indeks harmonik dan indeks Gutman. Indeks harmonik merupakan indeks yang diperoleh dari perluasan *randic index*. Indeks harmonik telah banyak diteliti oleh penelitian sebelumnya, diantaranya adalah penelitian tentang karakteristik harmonik indek pada graf-graf khusus oleh Jinxi Li dan Wai Chee Shiu pada tahun 2014. Pada tahun tersebut juga terdapat penelitian tentang hubungan antara indeks harmonik, indeks geometri-aritmatik pertama, dan indeks konektivitas penjumlahan, serta karakteristik graf dengan indeks harmonik minimum dan derajat  $\Delta$  maksimum oleh Khosro Sayehvand dan Mohammadreza Rostami. Pada tahun 2017, Rodrigueza dan Sigarreta meneliti tentang ketidaksetaraan baru yang melibatkan indeks harmonik dan indeks jumlah-konektivitas (umum), serta karakteristik graf dari kedua indeks tersebut. Pada tahun yang sama juga terdapat penelitian tentang indeks harmonik hasil kali suatu graf yang diteliti oleh Onagh. Pada tahun berikutnya, yakni tahun 2018 Xinli Xu meneliti tentang hubungan antara indeks harmonik dan beberapa indeks topologi yang lain.

Sedangkan, indeks Gutman merupakan modifikasi dari indeks Schultz. Yang mana keduanya merupakan perluasan dari indeks wiener. penelitian terkait indeks Gutman yang telah diteliti adalah indeks Gutman dari graf terhubung terbatas berorde  $n$  dan derajat minimum  $\delta$  yang diteliti oleh Jaya Percival Mazorodzea, Simon Mukwembib, dan Tomas Vetrikc pada tahun 2014. Pada tahun 2015, Ramakrishnan dan Baskar Babujee meneliti tentang indeks Schultz dan indeks

Gutman pada komplemen graf. Pada tahun 2016, Kinkar Ch. Das, Guifu Su, dan Liming Xiong meneliti tentang relasi atau keterkaitan antara *Degree Distance* dan indeks Gutman pada suatu graf. Kemudian, Kavithaa dan Kaladevi meneliti tentang indeks Gutman dan indeks Gutman *detour* pada graf *pseudo-regular* pada tahun 2017. Pada tahun 2017 De-Qiang Wang, Meng-meng Feng, dan Ke-lun Wang juga meneliti tentang nilai ekstremal dan urutan dari indeks Gutman pada  $k$  – *caterpillar*. Mahdieh Azari meneliti tentang indeks Gutman pada graf kipas pada tahun 2018. Pada tahun yang sama, Yaping Mao dan Kinkar Ch. Das melakukan penelitian tentang penggabungan  $SDD_k$  (*k-center Steiner degree distance*) dan *k-center Steiner Gutman* ( $SGut_k$ ) dari suatu graf.

Graf yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah graf nilradikal. Graf nilradikal adalah graf yang titik-titiknya adalah unsur-unsur nilpotent tak-nol dan dua titiknya dihubungkan oleh satu sisi jika dan hanya jika hasil kali kedua titik tersebut adalah nol. Penelitian tentang graf nilradikal diantaranya adalah penelitian tentang klasifikasi *solvable real rigid lie algebras* dengan nilradikal berdimensi  $n \leq 6$  yang diteliti oleh J. M. Ancochea Bermúdez dan R. Campoamor-Stursberg pada tahun 2015. Penelitian tentang sifat-sifat dari nil-graf dengan domainnya adalah ideal dari gelanggang komutatif oleh R. Nikandish dan F. Shaveishi pada tahun 2016. Penelitian tentang unsur-unsur nilradikal dari gelanggang monoid hasil kali yang khusus (unik) yang telah diteliti oleh Abdollah Alhaevaz, Ebrahim Hashemi, dan Michal Ziemkowski pada tahun 2017. Penelitian tentang sifat-sifat dari graf nilradikal dan non-nilradikal dengan domain gelanggang komutatif  $\mathbb{Z}_n$  yang telah diteliti oleh Shalini Chandra, Om Prakash, and Sheela Suthar pada tahun 2017.

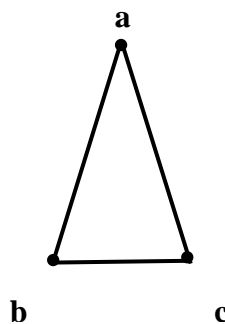
Al-Qur'an merupakan kitab suci umat islam yang memuat berbagai ilmu, tidak terkecuali ilmu yang berkaitan dengan teori graf. Salah satu ayat yang mengimplementasikan suatu graf terdapat pada Q.S. Ali-Imran: 112 yang berbunyi:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذَّلِيلَةُ أَئِنَّ مَا تُقِفُوا إِلَّا بِحَبْلِ مِنَ اللَّهِ وَحَبْلِ مِنَ النَّاسِ وَبَاءُوا بِغَضَبٍ مِنَ اللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ... ﴿١١٢﴾

Artinya:

*“Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. ... (Q.S. Ali-Imran (30): 112).*

Pada ayat tersebut dijelaskan tentang hubungan seorang manusia dengan Allah (*hablum minallah*) dan hubungan seorang manusia dengan sesama manusia (*hablum minannas*). Dari ayat tersebut dimisalkan bahwa Allah (pencipta) sebagai titik (*vertex*) *a*, manusia (pertama) sebagai titik *b*, dan manusia yang lain sebagai titik *c*. Dengan demikian dari permisalan tersebut dapat digambarkan suatu graf sebagai berikut:



Gambar 1. 1 Hubungan Manusia dengan Tuhan dan sesamanya

Gambar 1. 1 diatas menyatakan bahwa hubungan sesama hamba disimbolkan dengan garis vertikal, artinya kedudukan seorang hamba dimata Tuhan sama atau tidak berat sebelah. Sedangkan hubungan seorang hamba dengan Tuhannya disimbolkan dengan garis miring, artinya Tuhan berada diatas segalanya, Maha

Mengatur, dan Maha Mengetahui atas segala sesuatu yang terjadi diantara makhluknya, bahkan daun gugurpun sudah ditentukan takdirnya.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah disebutkan, belum ditemukan penelitian mengenai bentuk umum indeks harmonik dan indeks Gutman dari graf nilradikal, sehingga dianggap perlu untuk melakukan penelitian terkait indeks harmonik dan indeks Gutman dari graf nilradikal dengan domain gelanggang komutatif dengan satuan.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan dapat diambil rumusan masalah dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk umum indeks harmonik graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan?
2. Bagaimana bentuk umum indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Sesuai dengan rumusan masalah sebelumnya, tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui bentuk umum indeks harmonik graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan.
2. Mengetahui bentuk umum indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi peneliti

Sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai pengembangan teori graf dan struktur aljabar.

2. Bagi lembaga

Dapat dijadikan rujukan bahan perkuliahan dan literatur, khususnya tentang teori graf dan struktur aljabar.

#### 1.5 Batasan Masalah

Dikarenakan judul penelitian yang masih terlalu umum, yang dapat membuat penjelasan dan pemaparan tentang materi tersebut meluas, maka penulis membatasi masalah pada gelanggang komutatif dengan satuan yang akan diteliti, yakni bilangan bulat positif modulo  $n$  ( $\mathbb{Z}_n$ ), dengan  $n$  adalah kuadrat bilangan prima ( $p$ ) dan  $p$  adalah bilangan prima lebih dari sama dengan 3 ( $n = p^2, p \geq 3$ ).

#### 1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian pustaka (*library research*), dimana penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku dan jurnal yang berkaitan dengan teori graf dan struktur aljabar, yakni mengolah informasi yang telah dikaji penulis sebelumnya dan menerapkan pada objek yang akan diteliti. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai graf nilradikal, indeks harmonik dan indeks Gutman suatu graf.

Sedangkan kajian pada buku-buku struktur aljabar dikhususkan pada pembahasan tentang gelanggang, yakni gelanggang komutatif dengan satuan.

Penulisan penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Penulisan penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah, yakni sebagai berikut:

1. Menggambar graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 9, modulo 25, modulo 49, dan modulo 121.
2. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan gambar graf nilradikal  $N(\mathbb{Z}_9)$ ,  $N(\mathbb{Z}_{25})$ ,  $N(\mathbb{Z}_{49})$ ,  $N(\mathbb{Z}_{121})$ .
3. Menentukan bentuk umum indeks harmonik dan indeks Gutman berdasarkan gambar graf nilradikal  $N(\mathbb{Z}_9)$ ,  $N(\mathbb{Z}_{25})$ ,  $N(\mathbb{Z}_{49})$ ,  $N(\mathbb{Z}_{121})$ .
4. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Penelitian ini ditulis secara sistematis yang bertujuan untuk memudahkan pembaca memahami tulisan ini. Penulis membagi tulisan ini menjadi empat bab, yakni sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

## BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat definisi graf, jarak (*distance*), graf-graf khusus, indeks harmonik dan indeks Gutman, gelanggang, gelanggang komutatif dengan satuan, dan graf nilradikal.

## BAB III PEMBAHASAN

Bab ini memaparkan tentang hasil penelitian, yakni bagaimana indeks harmonik dan indeks Gutman graf nilradikal dengan domain gelanggang komutatif dengan satuan disertai dengan pembuktian konjektur yang diperoleh.

## BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dikemukakan kesimpulan akhir yang merupakan jawaban dari rumusan masalah dan diberikan beberapa saran untuk penelitian selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Graf

Menurut Chartrand dan Lesniak (1986: 3) yang menyatakan bahwa graf  $G$  adalah himpunan unsur tak kosong  $V$  yang terbatas yang dikatakan *vertex* atau titik bersama dengan himpunan unsur  $E$  (mungkin kosong) yang merupakan pasangan unsur dari subset-subset  $V$  yang disebut *edge* atau sisi. Hal tersebut sesuai dengan definisi dibawah ini:

#### Definisi 4

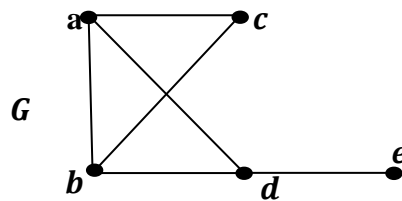
Graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009: 4).

Banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , sedangkan banyaknya unsur di  $E(G)$  atau banyaknya sisi dari graf  $G$  disebut *size* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Akan tetapi jika graf yang dibicarakan hanya satu graf maka order dan ukuran dari graf tersebut dapat di tulis dengan  $p$  dan  $q$  saja. Nama graf diberikan karena graf dapat disajikan dalam bentuk grafik atau gambar, dan pada bentuk gambar inilah sifat graf dapat diketahui secara lebih detail. Misalkan terdapat graf  $G$  yang memuat himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  seperti berikut ini:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

Maka jika digambar graf  $G$  tersebut akan menjadi sebagai berikut:



Gambar 2. 1 Graf  $G$

Dari gambar diatas dapat diketahui bahwa order dari graf  $G$  diatas adalah 5 atau  $p = 5$  dan ukuran graf  $G$  adalah 6 atau  $q = 6$ .

Jika  $(a, b)$  ditulis sebagai  $e_1$  maka di peroleh  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ .

Jika sisi  $e_1$  menghubungkan titik  $a, b$ , maka  $a$  dan  $b$  dikatakan terhubung langsung (*adjacent*),  $a$  dan  $e_1$  serta  $b$  dan  $e_1$  disebut terkait langsung (*incident*).

Titik  $a$  dan  $b$  disebut ujung dari  $e_1$ . Dua sisi  $e_1$  dan  $e_2$  yang berbeda dikatakan *adjacent* jika terkait langsung pada titik yang sama (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009: 6).

### Definisi 5

Jika  $a$  merupakan titik pada graf  $G$ , dan hanya ada satu graf yaitu graf  $G$ , maka himpunan semua titik di  $G$  yang terhubung langsung dengan  $a$  disebut lingkungan dari  $a$  atau disimbolkan dengan  $N(a)$ . Sedangkan banyaknya garis di  $G$  yang terkait langsung dengan  $a$  disebut dengan derajat dari titik  $a$  atau disimbolkan dengan  $deg(a)$  (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009: 6).

Dengan kata lain, derajat titik  $a$  di  $G$  adalah banyaknya anggota lingkungan dari  $a$  atau  $deg(a) = |N(a)|$ . Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.1 sebelumnya. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa:

$$N(a) = \{b, c, d\}, N(b) = \{a, c, d\}, N(c) = \{a, b\}, N(d) = \{b, e\}, N(e) = \{d\}$$

Dengan demikian, maka:

$$\deg(a) = 3, \deg(b) = 3, \deg(c) = 2, \deg(d) = 2, \deg(e) = 1$$

## 2.2 Jarak (*distance*)

Jarak dalam teori graf merupakan lintasan terpendek dari suatu titik ke titik yang lain. Hal tersebut sesuai dengan definisi jarak (*distance*) menurut Gary Chartrand, Linda Lesniak, dan Ping Zhang (1986: 44) dibawah ini:

### Definisi 6

“The distance  $d(u, v)$  from a vertex  $u$  to a vertex  $v$  in a connected graph  $G$  is the smallest length of a  $u - v$  path in  $G$ ”.

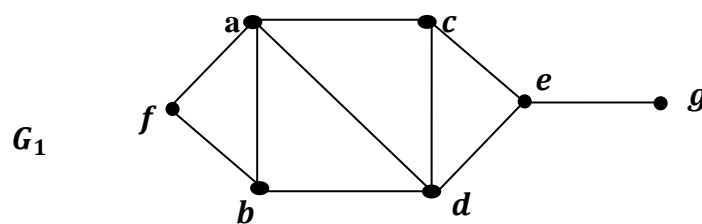
Abdussakir, Azizah, dan Novandika (2009: 56) menyatakan misalkan  $G$  graf terhubung dan misalkan  $u$  dan  $v$  titik di  $G$ . Jarak dari  $u$  ke  $v$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $d(u, v)$ , adalah panjang lintasan terpendek dari titik  $u$  ke titik  $v$  di graf  $G$ .

### Definisi 7

Himpunan titik di  $G$  dengan fungsi jarak membentuk ruang metrik. Untuk setiap titik  $u, v, w \in G$ , maka:

1.  $d(u, v) \geq 0$  dan  $d(u, v) = 0$  jika dan hanya jika  $u = v$ .
2.  $d(u, v) = d(v, u)$ .
3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ .

Perhatikan graf berikut:



Gambar 2. 2 Graf  $G_1$

Pada graf  $G_1$  diatas diperoleh bahwa  $d(a,b) = 1$ ,  $d(a,c) = 1$ ,  $d(a,e) = 2$ ,  $d(a,d) = 1$ ,  $d(a,f) = 1$ , dan  $d(a,g) = 3$ . Dari contoh diatas jelas bahwa jarak titik satu ke titik yang lain adalah lintasan terpendek dari titik tersebut ke titik yang lain.

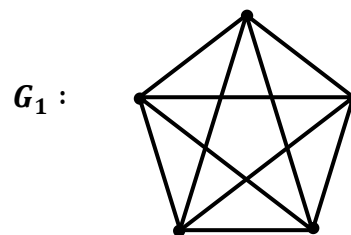
### 2.3 Graf – Graf Khusus

Terdapat beberapa graf yang memiliki sifat-sifat khusus berdasarkan titik, sisi, dan derajatnya. Yaitu graf beraturan- $r$ , graf komplit, graf bipartisi, dan graf bipartisi komplit.

#### Definisi 8

Graf  $G$  dikatakan beraturan- $r$  atau beraturan dengan derajat  $r$  apabila masing-masing titik  $v$  di  $G$ , sehingga  $deg(v) = r$ , untuk  $r$  adalah bilangan bulat tak negatif.

Contoh: graf  $G_1$  adalah graf yang beraturan-4 maka  $deg(u) = 4$ . Dimana  $u$  adalah semua titik dari graf  $G_1$ .

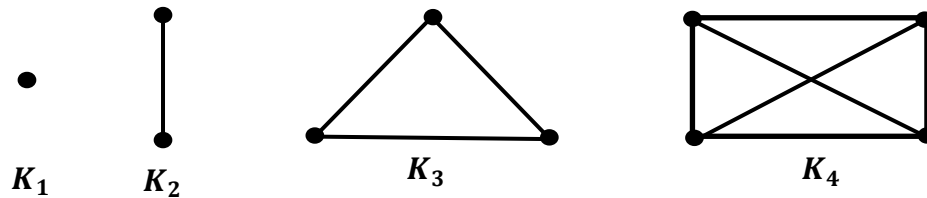


Gambar 2. 3 Gambar Graf Beraturan- $r$

#### Definisi 9

Graf  $G$  dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling berhubungan langsung (*adjacent*).

Graf komplit dengan order  $n$  dinyatakan dengan  $K_n$ . Dengan demikian, maka graf  $K_n$  merupakan graf beraturan- $(n - 1)$  dengan order  $p = n$  dan size  $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ . Berikut ini adalah beberapa gambar graf komplit:

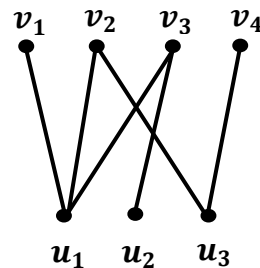


Gambar 2. 4 Gambar Graf Komplit

### Definisi 10

Graf  $G$  dikatakan graf bipartisi jika himpunan titik pada  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  tersebut menghubungkan satu titik di  $V_1$  dengan satu titik di  $V_2$ . Jika  $G$  adalah graf bipartisi beraturan- $r$ , dengan  $r \geq 1$ , maka  $|V_1| = |V_2|$ .

Perhatikan contoh berikut:

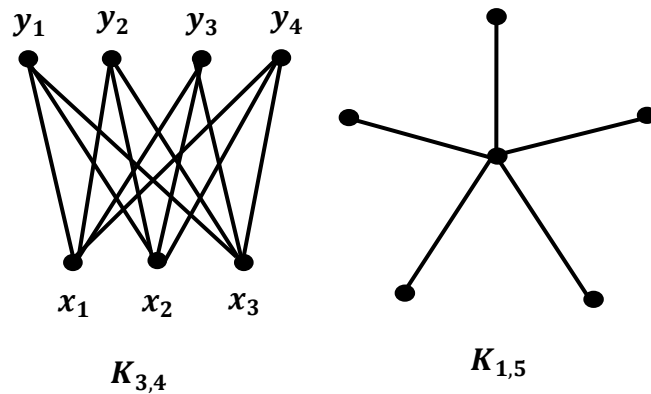


Gambar 2. 5 Graf Bipartisi

### Definisi 11

Graf  $G$  disebut bipartisi komplit jika masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung (*adjacent*) dengan semua titik pada partisi yang lain. Misalkan terdapat graf partisi dengan  $m$  titik pada salah satu partisi dan  $n$  titik pada partisi yang lain maka graf tersebut dapat ditulis  $K_{m,n}$ .

Perhatikan contoh berikut:



Gambar 2. 6 Graf Bipartisi Komplit

## 2.4 Graf Nilradikal

Graf nilradikal merupakan graf yang titik-titiknya merupakan suatu unsur *nilpotent* tak nol dari  $G$  dan sebarang dua titik dikatakan terhubung langsung atau adjacent jika dan hanya jika kedua titik tersebut hasil perkaliannya adalah 0. Hal tersebut sesuai dengan definisi yang terdapat dalam jurnal Shalini Chandra, Om Prakash, dan Sheela Suthar (2017:182).

### Definisi 12

*The nilradical graph, denoted  $N(G)$ , is the graph whose vertices are the nonzero nilpotents of  $G$  and where two vertices are connected by an edge if and only if their product is 0.*

Pada definisi diatas diketahui bahwa  $N(G)$  adalah graf nilradikal, yang merupakan subgraf dari graf pembagi nol  $R(\Gamma(G))$ , yang hanya memuat titik-titik *nilpotent* yang tak nol dan titik-titik tersebut terhubung langsung jika dan hanya jika hasil kali keduanya adalah nol atau *zero divisor*. Untuk mengetahui

apakah suatu unsur (titik) adalah unsur *nilpotent* atau apakah unsur tersebut adalah unsur pembagi nol, maka perhatikan definisi unsur *nilpotent* dibawah ini:

### Definisi 13

Misalkan  $(R, *, \#)$  adalah gelanggang komutatif dengan identitas penjumlahan yang dinotasikan dengan 0. Suatu unsur  $r \in R$  dikatakan *nilpotent* jika terdapat suatu  $n \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga  $r^n = 0$ .

Untuk lebih memahami graf nilradikal perhatikan contoh berikut: diberikan bilangan bulat modulo 18  $\mathbb{Z}_{18}$ , yang merupakan gelanggang komutatif dengan satuan. Dengan menggunakan tabel Cayley, pada  $\mathbb{Z}_{18}$  diperoleh unsur-unsur yang hasil kalinya adalah nol, yaitu  $\Gamma(\mathbb{Z}_{18}) = \{ [2], [3], [4], [6], [8], [9], [10], [12], [14], [15], [16] \}$ . Kemudian ditunjukkan apakah unsur-unsur di  $\Gamma(\mathbb{Z}_{18})$  adalah unsur *nilpotent*.

$$[2]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

$$[3]^{18} \equiv [0] \pmod{18}$$

$$[4]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

$$[6]^{18} \equiv [0] \pmod{18}$$

$$[8]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

$$[9]^{18} \equiv [0] \pmod{18}$$

$$[10]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

$$[12]^{18} \equiv [0] \pmod{18}$$

$$[14]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

$$[15]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

$$[16]^{18} \not\equiv [0] \pmod{18}$$

Karena tidak semua unturnya *nilpotent*, hanya unsur [12] dan [6] yang merupakan unsur *nilpotent*, maka graf nilradikal dari  $\mathbb{Z}_{18}$  ( $N(\mathbb{Z}_{18})$ ) dapat digambar sebagai berikut:



**Gambar 2. 7 Graf Nilradikal dari  $\mathbb{Z}_{18}$**

Sedangkan unsur selain [6] dan [12], yaitu [2], [3], [4], [8], [9], [10], [14], [15] dan [16] merupakan unsur *non-nilpotent*, sehingga termasuk dalam kategori graf non-nilradikal.

Sebagaimana graf pada umumnya, graf nilradikal juga memiliki bilangan kromatik dan keplanaran. Bilangan kromatik dari suatu graf, misalnya graf  $G$ , merupakan bilangan bulat  $k$  terkecil sehingga graf  $G$  dapat diwarnai dengan  $k$  warna. Biasanya bilangan kromatik dilambangkan dengan  $\chi$ , sehingga jelas bahwa  $\chi(G) \leq |V(G)|$  (Purwanto, 1998: 73). Menurut Wijaya (2009: 81), graf planar adalah graf yang dapat digambar pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong (bersilangan). Sedangkan jika graf tersebut saling memotong (bersilangan), maka graf tersebut merupakan graf tak-planar.

### **Teorema 1**

Jika  $p$  dan  $q$  adalah bilangan prima yang berbeda dan  $n$  adalah bilangan bulat positif, maka

1.  $\chi(N(\mathbb{Z}_n)) = 0$  if  $n = pq$ ;
2.  $\chi(N(\mathbb{Z}_n)) = p - 1$  if  $n = p^2$ .

**Bukti:** (1) misalkan  $n = pq$ , dimana  $p$  dan  $q$  adalah bilangan prima yang berbeda. Maka  $N(\mathbb{Z}_{pq})$  adalah graf kosong. Jadi, tidak diperlukan warna-warna untuk mewarnai graf tersebut. Sehingga bilangan kromatikya dalah nol. (2) misalkan  $n = p^2$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima. Jika  $p = 2$ , maka  $N(\mathbb{Z}_n)$  hanya memiliki 1 titik (*vertex*). Artinya bilangan kromatiknya adalah satu. Jika  $p \geq 3$ , maka banyak unsur-unsur *nilpotent* yang habis dibagi (dimodulo)  $p^2$  adalah  $(p - 1)$  dan unsur-unsur nilpotent tersebut membentuk graf komplit. Jadi, dibutuhkan  $(p - 1)$  warna untuk mewarnai graf  $N(\mathbb{Z}_{p^2})$  dan  $(p - 1)$  warna tersebut adalah jumlah terkecil yang dibutuhkan. Sehingga, bilangan kromatikya adalah  $(p - 1)$ .

## **Teorema 2**

Jika  $p$  dan  $q$  adalah bilangan prima yang berbeda dan  $n$  adalah bilangan bulat positif, maka

1.  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah planar, dimana  $n = pq$ ;
2.  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah planar untuk  $p \leq 5$  dan non-planar untuk  $p > 5$ , dimana  $n = p^2$ .

**Bukti:** (1) jika  $n = pq$ , dimana  $p$  dan  $q$  adalah bilangan prima yang berbeda. Maka  $N(\mathbb{Z}_{pq})$  adalah graf kosong. Sedemikian sehingga  $N(\mathbb{Z}_{pq})$  adalah graf planar. (2) jika  $n = p^2$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima, maka unsur-unsur nilpotent dari  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah kelipatan dari  $p$ . Jadi, terdapat  $(p - 1)$  unsur nilpotent yang membentuk graf komplit dengan titik sebanyak  $(p - 1)$  dan semua titiknya saling terhubung langsung (*adjacent*) satu sama lain. Jika  $p = 2$ , maka  $N(\mathbb{Z}_4)$  hanya memiliki 1 titik saja dan saat  $p = 3$ , maka  $N(\mathbb{Z}_9)$  memiliki 2 titik. Dalam kasus ini,  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah graf planar. Jika  $p = 5$ , maka  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah graf

komplit yang memiliki 4 titik dan semua titiknya *adjacent* satu sama lain. Sehingga  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah graf planar. Untuk  $p > 5$ ,  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah graf yang memuat  $K_{3,3}$  atau  $K_5$  sebagai subgraf sejati. Jadi,  $N(\mathbb{Z}_n)$  bukan graf planar untuk  $p > 5$ .

## 2.5 Indeks Topologi

Dalam lapangan bahasan *chemical graph theory*, topologi molekuler, dan *mathematical chemistry*, indeks topologi yang juga diketahui sebagai indeks konektifitas adalah alat yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan jenis molekul yang dihitung berdasarkan pada graf molekuler suatu senyawa kimia. Indeks topologi merupakan parameter numerik suatu graf yang mencirikan suatu topologi dan biasanya berupa graf invarian. Beberapa penggunaan indeks topologi misalnya dalam pengembangan *quantitative structure-activity relationships* (QSARs) pada aktifitas biologis atau sifat-sifat molekul lainnya yang berkaitan dengan struktur kimia (Lowel H., Lemont B., 1976: 36).

## 2.6 Indeks Harmonik

Indeks harmonik merupakan indeks topologi yang diperoleh dari perluasan *randic index*, yang merupakan penjumlahan bobot  $\frac{2}{deg(u)+deg(v)}$  dari setiap titik pada suatu graf, dengan  $u$  dan  $v$  adalah titik-titik yang ada di graf tersebut.

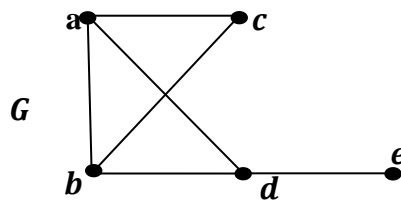
### Definisi 1

Misalkan terdapat graf  $G$ , menurut Jianxi Li dan Wai Chee Shiu (2014:1608), indeks harmonik dari graf  $G$  didefinisikan sebagai:

$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{deg(u) + deg(v)}$$

Dimana  $deg(u)$  adalah *degree* atau derajat dari titik  $u$ .

Untuk lebih memahami indeks harmonik, perhatikan contoh berikut:



Gambar 2. 8 Graf  $G$

Dari gambar graf  $G$  diatas diketahui bahwa:

$$deg(a) = 3$$

$$deg(b) = 3$$

$$deg(c) = 2$$

$$deg(d) = 3$$

$$deg(e) = 1$$

Sehingga indeks harmonik dari graf  $G$  tersebut adalah

$$\begin{aligned} H(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{deg(u) + deg(v)} \\ &= \frac{2}{deg(a) + deg(b)} + \frac{2}{deg(a) + deg(c)} + \frac{2}{deg(a) + deg(d)} \\ &\quad + \frac{2}{deg(a) + deg(e)} + \frac{2}{deg(b) + deg(c)} + \frac{2}{deg(b) + deg(d)} \\ &\quad + \frac{2}{deg(b) + deg(e)} + \frac{2}{deg(c) + deg(d)} + \frac{2}{deg(c) + deg(e)} \\ &\quad + \frac{2}{deg(d) + deg(e)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+2} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+1} + \frac{2}{3+2} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+1} + \frac{2}{2+3} \\
&\quad + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{3+1} \\
&= \frac{2}{6} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \\
&= \frac{40}{120} + \frac{48}{120} + \frac{40}{120} + \frac{60}{120} + \frac{48}{120} + \frac{40}{120} + \frac{60}{120} + \frac{48}{120} + \frac{80}{120} + \frac{60}{120} \\
&= \frac{524}{120} \\
&= \frac{131}{30}
\end{aligned}$$

## 2.7 Indeks Gutman

Indeks Gutman atau yang biasa disebut sebagai indeks Schultz versi kedua, merupakan perluasan dari indeks wiener. Indeks wiener sendiri merupakan penjumlahan bobot dari jarak (*distance*) dari tiap titik ke titik lainnya.

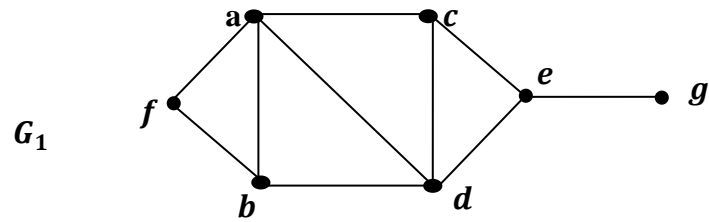
### Definisi 2

Misalkan terdapat graf  $G$ , menurut Kavithaa dan Kaladevi (2017), indeks wiener dari graf  $G$  didefinisikan sebagai berikut:

$$W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$$

Dimana  $d(u,v)$  dari  $u$  ke  $v$ .

Untuk lebih memahami indeks wiener suatu graf, perhatikan contoh berikut:



Gambar 2. 9 Graf  $G_1$

Dari gambar graf  $G_1$  diatas diketahui:

$$\begin{array}{lll}
 d(a, b) = 1 & d(b, d) = 1 & d(c, g) = 2 \\
 d(a, c) = 1 & d(b, e) = 2 & d(d, e) = 1 \\
 d(a, d) = 1 & d(b, f) = 1 & d(d, f) = 2 \\
 d(a, e) = 2 & d(b, g) = 3 & d(d, g) = 2 \\
 d(a, f) = 1 & d(c, d) = 1 & d(e, f) = 3 \\
 d(a, g) = 3 & d(c, e) = 1 & d(e, g) = 1 \\
 d(b, c) = 2 & d(c, f) = 2 & d(f, g) = 4
 \end{array}$$

Sehingga diketahui indeks wiener dari graf  $G_1$  diatas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W(G_1) &= \sum_{u, v \in V(G_1)} d(u, v) \\
 &= d(a, b) + d(a, c) + d(a, d) + d(a, e) + d(a, f) + d(a, g) + d(b, c) \\
 &\quad + d(b, d) + d(b, e) + d(b, f) + d(b, g) + d(c, d) + d(c, e) + d(c, f) \\
 &\quad + d(c, g) + d(d, e) + d(d, f) + d(d, g) + d(e, f) + d(e, g) + d(f, g) \\
 &= 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + \\
 &\quad 2 + 2 + 3 + 1 + 4 \\
 &= 37
 \end{aligned}$$

### Definisi 3

Misalkan terdapat graf  $G$ , menurut Mahdiah Azari (2018: 35), Indeks Gutman dari graf  $G$  didefinisikan sebagai:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

Dimana  $deg(u)$  dan  $deg(v)$  adalah derajat (*degree*) dari titik  $u$  dan titik  $v$  di graf  $G$ . Sedangkan  $d(u,v)$  adalah jarak dari titik  $u$  ke titik  $v$  di graf  $G$ .

Perhatikan gambar 2.2 diatas, dari gambar tersebut diketahui:

$$deg(a) = 4$$

$$deg(b) = 3$$

$$deg(c) = 3$$

$$deg(d) = 4$$

$$deg(e) = 3$$

$$deg(f) = 2$$

$$deg(g) = 1$$

Sehingga, indeks Gutman dari graf  $G_1$  diatas adalah:

$$\begin{aligned} Gut(G_1) &= \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v) \\ &= deg(a)deg(b)d(a,b) + deg(a)deg(c)d(a,c) + deg(a)deg(d) \\ &\quad d(a,d) + deg(a)deg(e)d(a,e) + deg(a)deg(f)d(a,f) + deg(a) \\ &\quad deg(g)d(a,g) + deg(b)deg(c)d(b,c) + deg(b)deg(d)d(b,d) \\ &\quad + deg(b)deg(e)d(b,e) + deg(b)deg(f)d(b,f) + deg(b)deg(g) \\ &\quad d(b,g) + deg(c)deg(d)d(c,d) + deg(c)deg(e)d(c,e) + deg(c) \\ &\quad deg(f)d(c,f) + deg(c)deg(g)d(c,g) + deg(d)deg(e)d(d,e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \deg(d)\deg(f)d(d, f) + \deg(d)\deg(g)d(d, g) + \deg(e)\deg(f) \\
& d(e, f) + \deg(e)\deg(g)d(e, g) + \deg(f)\deg(g)d(f, g) \\
= & (4)(3)(1) + (4)(3)(1) + (4)(4)(1) + (4)(3)(2) + (4)(2)(1) + \\
& (4)(1)(3) + (3)(3)(2) + (3)(4)(1) + (3)(3)(2) + (3)(2)(1) + \\
& (3)(1)(3) + (3)(4)(1) + (3)(3)(1) + (3)(2)(2) + (3)(1)(2) + \\
& (4)(3)(1) + (4)(2)(2) + (4)(1)(2) + (3)(2)(3) + (3)(1)(1) + \\
& (2)(1)(4) \\
= & 12 + 12 + 16 + 24 + 8 + 12 + 18 + 12 + 18 + 6 + 9 + 12 + 9 + \\
& 12 + 6 + 12 + 16 + 8 + 18 + 3 + 8 \\
= & 251
\end{aligned}$$

## 2.8 Gelanggang

Menurut Gilbert dan Jimmie (2009: 257), grup merupakan salah satu struktur aljabar sederhana yang hanya memiliki satu operasi biner. Selangkah di atasnya terdapat struktur aljabar yang lebih lengkap, yaitu gelanggang. Gelanggang memiliki dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian.

### Definisi 15

Misalkan  $(R, +, \cdot)$  adalah himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan  $(+)$  dan perkalian  $(\cdot)$ , maka  $R$  adalah Gelanggang jika kondisi berikut terpenuhi:

1.  $R$  tertutup terhadap penjumlahan. Artinya ada  $x \in R$  dan  $y \in R$  sehingga  $x + y \in R$ .
2. Penjumlahan pada  $R$  adalah asosiatif, yaitu  $x + (y + z) = (x + y) + z$  untuk semua  $x, y, z$  di  $R$ .

3.  $R$  memuat identitas penjumlahan 0. Artinya,  $x + 0 = 0 + x = x$ , dengan  $x \in R$ .
4.  $R$  memuat invers penjumlahan. Artinya, untuk  $x \in R$ , ada  $-x \in R$  sehingga  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ .
5. Penjumlahan pada  $R$  adalah komutatif, yaitu  $x + y = y + x$  untuk semua  $x, y$  di  $R$ .
6.  $R$  tertutup terhadap perkalian. Artinya, untuk setiap  $x \in R$  dan  $y \in R$  sedemikian sehingga,  $x \cdot y \in R$ .
7. Perkalian pada  $R$  adalah Asosiatif. Artinya,  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  untuk semua  $x, y, z$  di  $R$ .
8. Dua hukum distribusi berlaku pada  $R$ , yaitu:
  - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ , Untuk semua  $x, y, z$  di  $R$ .
  - $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ , Untuk semua  $x, y, z$  di  $R$ .

## 2.9 Gelanggang Komutatif dengan Satuan

### Definisi 16

Misalkan  $(R, +, \cdot)$  adalah gelanggang. Jika terdapat unsur  $e \in R$  sedemikian sehingga  $x \cdot e = e \cdot x = x$  untuk setiap  $x \in R$ , maka  $e$  disebut unsur satuan (identitas), dan  $R$  adalah gelanggang dengan unsur satuan (identitas). Jika operasi perkalian pada  $(R, +, \cdot)$  komutatif, maka  $(R, +, \cdot)$  disebut dengan gelanggang komutatif (Gilbert dan Jimmie, 2009: 261).

untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut: Gelanggang  $\mathbb{Z}$  adalah semua bilangan bulat yang memiliki 2 sifat tersebut, yaitu memiliki unsur satuan

(identitas) dan operasi perkaliannya komutatif, Sehingga  $\mathbb{Z}$  disebut dengan gelanggang komutatif dengan satuan.

## 2.10 Kajian Keislaman

Mencari ilmu merupakan kewajiban bagi setiap umat islam. Hal tersebut sesuai dengan sabda Nabi SAW. yang diriwayatkan oleh Ibn Majah berikut:

عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ قَالَ: قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ ...  
(رواه ابن ماجه)

Artinya:

"Dari Anas bin Malik ra. ia berkata, Rasulullah SAW. bersabda: Mencari ilmu itu wajib bagi setiap muslim, ..." (HR. Ibnu Majah).

Allah SWT. juga berfirman dalam Q.S. Al-Mujadalah ayat 11 tentang keutamaan mencari ilmu.

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَاَنْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

Artinya :

"Wahai orang-orang yang beriman! Apabila dikatakan kepadamu, "Berilah kelapangan didalam majelis, maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan berdirilah kamu, maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat derajat orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang berilmu beberapa derajat" (Q.S. Al-Mujadalah: 11).

Penafsiran menurut Ahmad Musthafa Al-Muraghi (Tafsir al-Maraghi) Ayat ini mencakup pemberian kelapangan dalam menyampaikan segala macam kebaikan kepada kaum muslimin dan yang menyenangkannya. Dan Allah SWT akan meninggikan derajat orang-orang mukmin dengan mengikuti perintah-perintah-Nya, khususnya orang-orang yang berilmu dan ridho dalam

mengamalkan dan menularkan ilmunya, mereka yang dijanjikan derajat yang tinggi dan pahala yang berlimpah.

Menurut Sholeh (2016: 221), Q.S. Al-Mujadalah ayat 11 berhubungan dengan etika dan sopan pendidikan yakni: Pertama, Kajian Tekstual. Dalam pandangan Al-Quran, ilmu adalah keistimewaan yang menjadikan manusia unggul dan melebihi dari makhluk-makhluk lain guna menjalankan kekhalifahan di muka bumi ini. Sementara itu manusia, menurut al-Qur'an memiliki potensi untuk meraih ilmu dan mengembangkannya dengan seizin Allah. Berkali-kali Allah menunjukkan betapa tinggi derajat dan kedudukan orang-orang yang memiliki ilmu pengetahuan. Kedua, Kajian Kontekstual. Al-Quran menginformasikan kepada umat manusia bahwa ada beberapa alat yang dapat digunakan untuk meraih ilmu pengetahuan, diantaranya: (1) panca indra dan akal yang memiliki empat sarana yang dapat digunakan untuk memperoleh ilmu, yaitu telinga (pendengaran), mata (penglihatan), akal dan hati; (2) Observasi dan *trial and error* (coba-coba), pengamatan, percobaan dan *probability* (tes-tes kemungkinan); dan (3) Akal (*intellenc*) dan pemikiran (*reflection*). Di samping mata, telinga, dan pikiran sebagai sarana untuk meraih pengetahuan. Al-Quran pun menggaris bawahi bagaimana pentingnya peran kesucian hati. Ilmu pengetahuan akan mudah diraih dan dipahami dengan baik, apabila hati seorang itu bersih. Dari sinilah para ilmuwan Muslim menerangkan pentingnya Takziah alNafs (penyucian jiwa) guna memperoleh hidayah (petunjuk dan pengajaran serta bimbingan Allah).

Menurut penulis ayat tersebut menjelaskan tentang keutamaan orang yang berilmu. Orang berilmu akan mendapat beberapa derajat dari Allah SWT. dan

memperoleh kelapangan dalam segala urusan. Sebagai bentuk syukur atas ilmu yang didapat, kita dapat mengamalkan ilmu yang diperoleh dan menularkan pada orang-orang sekitar, serta mengkaji dan meneliti peristiwa-peristiwa di alam yang telah banyak diulas dalam Al-Qur'an. Karena sesuai dengan *fitrah*-nya, Al-Qur'an diturunkan sebagai pedoman, sumber hukum, dan sumber ilmu bagi umat manusia dan umat islam khususnya.

Sebagaimana ilmu-ilmu yang lain, pengenalan tentang graf nilradikal dalam Al-Qur'an dapat dilihat pada Q.S. Al-Qashash (28): 77. Pada ayat tersebut terdapat implementasi graf nilradikal dalam kehidupan beragama, yang dimisalkan dengan hubungan antara manusia dengan sesama, alam, dan Tuhan. Yang mana ayatnya berbunyi sebagai berikut:

وَابْتَغِ فِيمَا آتَاكَ اللَّهُ الدَّارَ الْآخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَأَحْسِنْ كَمَا أَحْسَنَ اللَّهُ إِلَيْكَ وَلَا تَبْغِ الْفُسَادَ فِي الْأَرْضِ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِينَ ﴿٧٧﴾

Artinya:

*“Dan carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bahagianmu dari (kenikmatan) duniawi dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik, kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di (muka) bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan”* (Q.S. Al-Qashash (28): 77).

Menurut Sepdhani (2014: Wordpress.com) dalam ayat tersebut Allah SWT. menerangkan empat macam nasihat kepada hamba-hambaNya, yakni:

- a. Orang-orang yang memiliki harta lebih hendaklah ia memanfaatkan dijalan Allah, patuhi segala perintah dan jauhi laranganNya, serta mendekatlah kepada Allah.
- b. Segala urusan dan kenikmatan dunia sebagai bekal dari mencari kelapangan urusan di akhirat.

- c. Sebagai seorang hamba harus berbuat baik kepada sesama hamba Allah, sebagaimana Allah berbuat baik kepadanya.
- d. Janganlah seorang hamba berbuat kerusakan dimuka bumi, karena Allah menciptakan manusia sebagai khalifah di muka bumi.

Dari paparan Sepdhani penulis menyimpulkan bahwa manusia sebagai makhluk Tuhan harus selalu berhubungan dengan Tuhan. Agar hubungan tersebut terus terjalin, maka seorang manusia memiliki tanggung jawab untuk melakukan kewajibannya sebagai makhluk, yaitu dengan beramal soleh. Beramal merupakan hubungan manusia dengan Tuhan, yaitu menjalankan semua perintah-Nya dan menjauhi segala larangan-Nya. Akan tetapi hal tersebut tidaklah cukup, dibutuhkan kesolehan untuk melengkapi amal (ibadah) kepada Tuhan, yaitu dengan berhubungan baik dengan sesama manusia dan alam, menjadi khalifah di bumi sesuai dengan tujuan Tuhan menciptakan manusia dimuka bumi. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Q.S. Al-Baqarah (2) ayat 30 yang berbunyi:

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلَائِكَةِ إِنِّي جَاعِلٌ فِي الْأَرْضِ خَلِيفَةً قَالُوا أَتَجْعَلُ فِيهَا مَنْ يُفْسِدُ فِيهَا وَيَسْفِكُ  
الدِّمَاءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ قَالَ إِنِّي أَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya:

*“Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para Malaikat: "Sesungguhnya Aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi". Mereka berkata: "Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?" Tuhan berfirman: "Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui" (Q.S. Al-Baqarah (2): 30).*

Dari ayat diatas dijelaskan bahwa manusia diciptakan oleh Allah SWT. dengan dua peran yaitu sebagai hamba Allah dan sebagai khalifah di muka bumi. Sebagai hamba Allah, manusia memiliki tugas atau kewajiban beribadah

(beramal) kepada Allah. Manusia sebagai khalifah Allah atau pengganti Allah, diberikan tugas untuk memelihara dan melestarikan alam, mengambil manfaat, serta mengelola kekayaan alamnya sehingga terwujud kedamaian dan kesejahteraan manusia.

## **BAB III**

### **PEMBAHASAN**

#### **3.1 Indeks Harmonik Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan**

Gelanggang komutatif dengan satuan yang akan diteliti menurut jurnal rujukan yaitu jurnal dari Shalini Chandra, Om Prakash, dan Sheela Suthar adalah bilangan bulat modulo  $n$  ( $\mathbb{Z}_n$ ), dan kami membatasi penelitian kami pada nilai  $n$  nya, yang mana  $n$  tersebut adalah kuadrat bilangan prima yang lebih dari sama dengan 3 ( $n = p^2, p \geq 3$ ). Alasan dipilihnya  $n$  adalah kuadrat dari bilangan prima adalah jika dipilih  $n = 4$  atau  $p = 2$  maka graf yang terbentuk adalah graf trivial atau graf yang hanya memiliki 1 titik saja. Sehingga, dipilihlah  $p$  yang lebih dari sama dengan 3, yaitu  $p = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots, \infty\}$ . Karena  $n$  merupakan kuadrat dari  $p$ , maka  $n = \{9, 25, 49, 121, 169, \dots, \infty\}$  yang mana graf-graf tersebut membentuk graf komplit, sehingga dapat ditemukan bentuk umum indeks harmonik dan indeks Gutman dari graf-graf tersebut. Kami hanya melakukan penelitian dengan 5 sampel saja yaitu,  $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{49}, \mathbb{Z}_{121}, \mathbb{Z}_{169}$ . Hal tersebut dikarenakan ketidak mampuan kami menghitung secara manual dalam menentukan vertex-vertex dari graf yang nilradikal dari bilangan prima lebih dari 13 ( $p > 13$ ).

##### **3.1.1 Bilangan Bulat modulo 9 ( $\mathbb{Z}_9$ )**

Percobaan pertama adalah pada bilangan bulat modulo 9. Bilangan tersebut memiliki unsur-unsur sebagai berikut

$\{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]\}$ . Apabila unsur-unsur tersebut dioperasikan dengan operasi perkalian ( $\cdot$ ) maka diperoleh tabel Cayley seperti dibawah ini:

**Tabel 3. 1 Bilangan Bulat Modulo 9**

$\mathbb{Z}_9/.$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[1]	[3]	[5]	[7]
[3]	[0]	[3]	[6]	[0]	[3]	[6]	[0]	[3]	[6]
[4]	[0]	[4]	[8]	[3]	[7]	[2]	[6]	[1]	[5]
[5]	[0]	[5]	[1]	[6]	[2]	[7]	[3]	[8]	[4]
[6]	[0]	[6]	[3]	[0]	[6]	[3]	[0]	[6]	[3]
[7]	[0]	[7]	[5]	[3]	[1]	[8]	[6]	[4]	[2]
[8]	[0]	[8]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

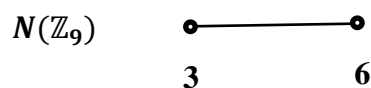
Berdasarkan definisi graf nilradikal, dari tabel 3.1 diketahui bahwa unsur-unsur yang hasil kalinya nol adalah [3] dan [6] atau dapat ditulis  $\Gamma(\mathbb{Z}_9) = \{[3], [6]\}$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa [3] dan [6] merupakan unsur *nilpotent*.

$$[3]^9 \equiv [0] \pmod{9}$$

$$[6]^9 \equiv [0] \pmod{9}$$

Karena [3] dan [6] adalah unsur *nilpotent*, maka diperoleh gambar graf nilradikal dari  $\mathbb{Z}_9$  berikut:



**Gambar 3. 1 Graf Nilradikal  $N(\mathbb{Z}_9)$**

Graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 9 ( $N(\mathbb{Z}_9)$ ) diatas memiliki 2 titik dan 1 sisi dan dari gambar 3.1 diketahui *degree* dari setiap titik, yaitu:

$$\deg(3) = 1$$

$$\deg(6) = 1$$

Sehingga indeks harmonik dari graf nilradikal  $H(N(\mathbb{Z}_9))$  adalah

$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)}$$

$$\begin{aligned} H(N(\mathbb{Z}_9)) &= \frac{2}{\deg(3) + \deg(6)} \\ &= \frac{2}{1 + 1} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

### 3.1.2 Bilangan Bulat modulo 25 ( $\mathbb{Z}_{25}$ )

Unsur-unsur dari bilangan bulat modulo 25 ( $\mathbb{Z}_{25}$ ) adalah  $\{[0], [1], [2], \dots, [24]\}$ . Jika unsur-unsur tersebut dioperasikan dengan operasi perkalian ( $\cdot$ ) maka diperoleh tabel *Cayley* seperti pada lampiran tabel (lampiran 1). Dari tabel tersebut diketahui bahwa yang termasuk unsur-unsur yang hasil kalinya nol (selain nol) adalah unsur  $[5]$ ,  $[10]$ ,  $[15]$ , dan  $[20]$  atau dapat ditulis  $\Gamma(\mathbb{Z}_{25}) = \{[5], [10], [15], [20]\}$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $[5]$ ,  $[10]$ ,  $[15]$ , dan  $[20]$  merupakan unsur *nilpotent*.

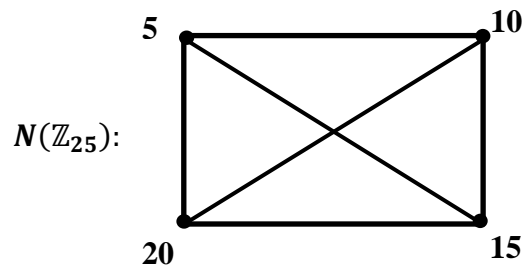
$$[5]^{25} \equiv [0](\text{mod } 25)$$

$$[10]^{25} \equiv [0](\text{mod } 25)$$

$$[15]^{25} \equiv [0](\text{mod } 25)$$

$$[20]^{25} \equiv [0](\text{mod } 25)$$

berdasarkan definisi *nilpotent*, diketahui bahwa semua unsur *zero divisor* selain nol diatas merupakan unsur *nilpotent*. Sehingga diperoleh gambar graf nilradikal dari  $\mathbb{Z}_{25}$  adalah sebagai berikut:



Gambar 3. 2 Graf Nilradikal  $N(\mathbb{Z}_{25})$

Graf tersebut memiliki 4 titik, 6 sisi dan membentuk graf komplit. Dari gambar 3.2 diketahui *degree* atau derajat tiap titiknya sama yaitu 3.

$$\text{deg}(5) = 3$$

$$\text{deg}(10) = 3$$

$$\text{deg}(15) = 3$$

$$\text{deg}(20) = 3$$

Sehingga indeks harmonik dari graf nilradikal  $H(N(\mathbb{Z}_{25}))$  adalah

$$\begin{aligned} H(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{\text{deg}(u) + \text{deg}(v)} \\ H(N(\mathbb{Z}_{25})) &= \frac{2}{\text{deg}(5) + \text{deg}(10)} + \frac{2}{\text{deg}(5) + \text{deg}(15)} + \frac{2}{\text{deg}(5) + \text{deg}(20)} \\ &\quad + \frac{2}{\text{deg}(10) + \text{deg}(15)} + \frac{2}{\text{deg}(10) + \text{deg}(20)} \\ &\quad + \frac{2}{\text{deg}(15) + \text{deg}(20)} \\ &= \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \left( \frac{2}{3+3} \right) \\
&= 6 \left( \frac{2}{6} \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

### 3.1.3 Bilangan Bulat Modulo 49 ( $\mathbb{Z}_{49}$ )

Unsur-unsur dari bilangan bulat modulo 49 ( $\mathbb{Z}_{49}$ ) yaitu  $\{[0], [1], [2], \dots, [48]\}$ . Apabila unsur-unsur tersebut dioperasikan dengan operasi perkalian ( $\cdot$ ) diperoleh tabel *Cayley* seperti pada lampiran tabel (lampiran 2). Dari tabel tersebut diketahui bahwa unsur-unsur yang hasil kalinya nol adalah unsur  $[7], [14], [21], [28], [35], [42]$  atau dapat ditulis  $\Gamma(\mathbb{Z}_{49}) = \{[7], [14], [21], [28], [35], [42]\}$ . Berikutnya, unsur-unsur *zero divisor* tersebut diteliti apakah termasuk unsur *nilpotent* atau tidak.

$$[7]^{49} \equiv [0](\text{mod } 49)$$

$$[14]^{49} \equiv [0](\text{mod } 49)$$

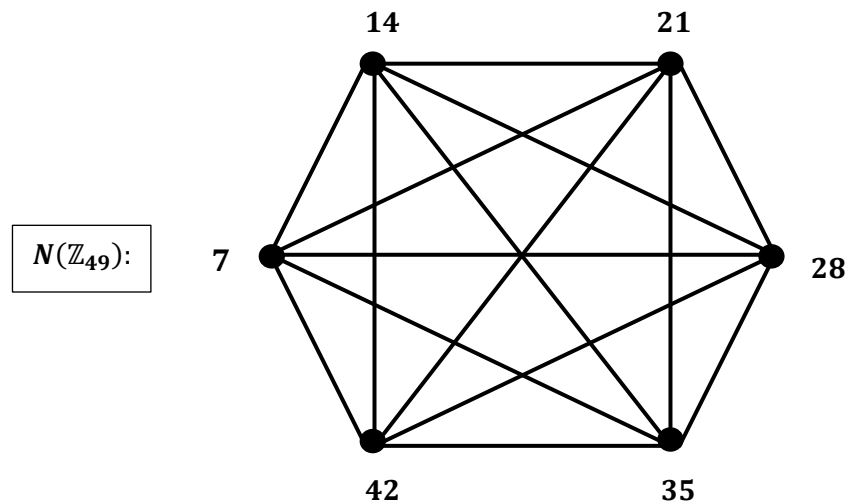
$$[21]^{49} \equiv [0](\text{mod } 49)$$

$$[28]^{49} \equiv [0](\text{mod } 49)$$

$$[35]^{49} \equiv [0](\text{mod } 49)$$

$$[42]^{49} \equiv [0](\text{mod } 49)$$

Sesuai dengan pengertian unsur *nilpotent* diketahui bahwa semua unsur-unsur graf pembagi nol tersebut merupakan unsur *nilpotent*. Sehingga graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 49 tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 3 Graf Nilradikal  $N(\mathbb{Z}_{49})$

Berdasarkan gambar 3.3 dapat diketahui derajat (*degree*) dari setiap titik sama, karena membentuk graf komplit, yaitu:

$$\deg(7) = 5$$

$$\deg(14) = 5$$

$$\deg(21) = 5$$

$$\deg(28) = 5$$

$$\deg(35) = 5$$

$$\deg(42) = 5$$

Sehingga, indek harmonik dari graf nilradikal bilangan bulat modulo 49 atau  $H(N(\mathbb{Z}_{49}))$  adalah sebagai berikut:

$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)}$$

$$H(N(\mathbb{Z}_{49})) = \frac{2}{\deg(7) + \deg(14)} + \frac{2}{\deg(7) + \deg(21)} + \frac{2}{\deg(7) + \deg(28)} \\ + \frac{2}{\deg(7) + \deg(35)} + \frac{2}{\deg(7) + \deg(42)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\deg(14) + \deg(21)} + \frac{2}{\deg(14) + \deg(28)} \\
& + \frac{2}{\deg(14) + \deg(35)} + \frac{2}{\deg(14) + \deg(42)} \\
& + \frac{2}{\deg(21) + \deg(28)} + \frac{2}{\deg(21) + \deg(35)} \\
& + \frac{2}{\deg(21) + \deg(42)} + \frac{2}{\deg(28) + \deg(35)} \\
& + \frac{2}{\deg(28) + \deg(42)} + \frac{2}{\deg(35) + \deg(42)} \\
& = \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} \\
& \quad + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} + \frac{2}{5+5} \\
& = 15 \left( \frac{2}{5+5} \right) \\
& = 15 \left( \frac{2}{10} \right) \\
& = 3
\end{aligned}$$

### 3.1.4 Bilangan Bulat Modulo 121 ( $\mathbb{Z}_{121}$ )

Unsur-unsur dari bilangan bulat modulo 121 ( $\mathbb{Z}_{121}$ ) yaitu  $\{[0], [1], [2], \dots, [120]\}$ . Apabila unsur-unsur tersebut dioperasikan dengan operasi perkalian ( $\cdot$ ) diperoleh tabel *Cayley* seperti pada lampiran tabel (lampiran 3). Dari tabel tersebut diketahui bahwa yang termasuk unsur-unsur yang hasil kalinya nol adalah unsur  $[11], [22], [33], [44], [55], [66], [77], [88], [99]$ , dan  $[110]$  atau dapat ditulis  $\Gamma(\mathbb{Z}_{121}) = \{[11], [22], [33], [44], [55], [66], [77], [88], [99], [110]\}$ .

Selanjutnya, sesuai dengan definisi unsur *nilpotent*, akan dibuktikan bahwa unsur-unsur tersebut adalah unsur *nilpotent*.

$$[11]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[22]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[33]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[44]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[55]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[66]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

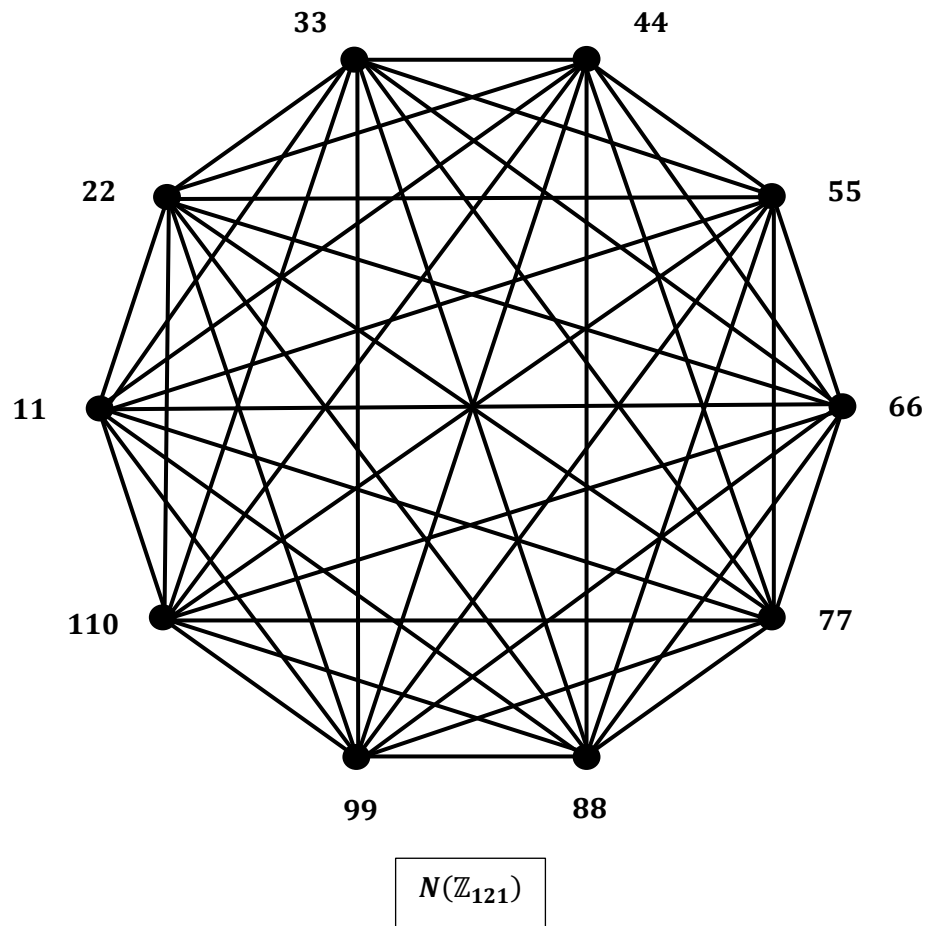
$$[77]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[88]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[99]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

$$[110]^{121} \equiv [0](\text{mod } 121)$$

Karena unsur-unsur tersebut saat dipangkatkan dengan 121 dan di modulo 121 sama dengan nol, artinya sesuai atau memenuhi definisi *nilpotent*, maka semua unsur tersebut adalah unsur *nilpotent*. Sehingga graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 121 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 4 Graf Nilradikal  $N(\mathbb{Z}_{121})$

Dari gambar 3.4 diketahui derajat (*degree*) tiap titik, yaitu:

$$\text{deg}(11) = 9$$

$$\text{deg}(22) = 9$$

$$\text{deg}(33) = 9$$

$$\text{deg}(44) = 9$$

$$\text{deg}(55) = 9$$

$$\text{deg}(66) = 9$$

$$\deg(77) = 9$$

$$\deg(88) = 9$$

$$\deg(99) = 9$$

$$\deg(110) = 9$$

Sehingga indeks harmonik dari graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 121 tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} \\ H(N(\mathbb{Z}_{121})) &= \frac{2}{\deg(11) + \deg(22)} + \frac{2}{\deg(11) + \deg(33)} \\ &\quad + \frac{2}{\deg(11) + \deg(44)} + \frac{2}{\deg(11) + \deg(55)} \\ &\quad + \frac{2}{\deg(11) + \deg(66)} + \dots + \frac{2}{\deg(99) + \deg(110)} \\ &= \frac{2}{9+9} + \frac{2}{9+9} + \frac{2}{9+9} + \frac{2}{9+9} + \frac{2}{9+9} + \dots + \frac{2}{9+9} \\ &= 45 \left( \frac{2}{9+9} \right) \\ &= 45 \left( \frac{2}{18} \right) \\ &= 5 \end{aligned}$$

### 3.1.5 Bilangan Bulat Modulo 169 ( $\mathbb{Z}_{169}$ )

Unsur-unsur dari bilangan bulat modulo 169 ( $\mathbb{Z}_{169}$ ) yaitu  $\{[0], [1], [2], \dots, [168]\}$ . Apabila unsur-unsur tersebut dioperasikan dengan operasi perkalian ( $\cdot$ ) diperoleh unsur-unsur yang hasil kalinya nol yaitu unsur  $[13], [26], [39], [52], [65], [78], [91], [104], [117], [130], [143],$  dan  $[156]$  atau

dapat ditulis  $\Gamma(\mathbb{Z}_{169}) = \{[13], [26], [39], [52], [65], [78], [91], [104], [117], [130], [143], [156]\}$ .

Selanjutnya, sesuai dengan definisi unsur *nilpotent*, akan dibuktikan bahwa unsur-unsur tersebut adalah unsur *nilpotent*.

$$[13]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[26]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[39]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[52]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[65]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[78]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[91]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[104]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

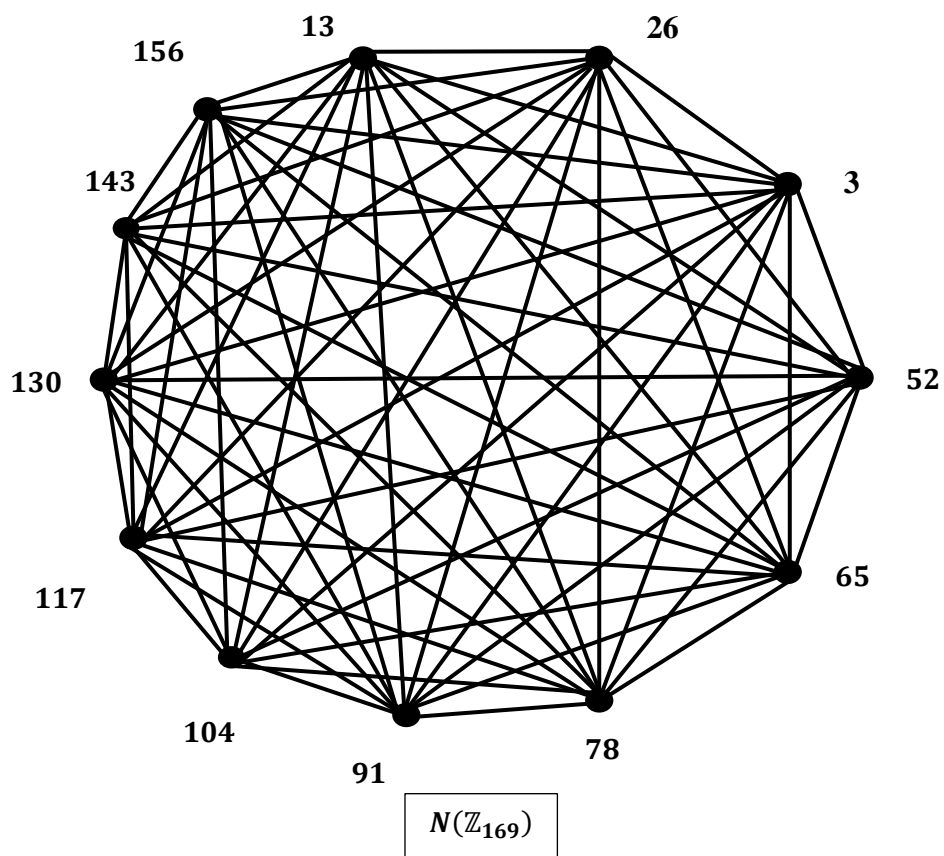
$$[117]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[130]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[143]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

$$[156]^{169} \equiv [0](\text{mod } 169)$$

Karena unsur-unsur tersebut saat dipangkatkan dengan 169 dan di modulo 169 sama dengan nol, artinya sesuai atau memenuhi definisi *nilpotent*, maka semua unsur tersebut adalah unsur *nilpotent*. Sehingga graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 169 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 5 graf nilradikal  $N(\mathbb{Z}_{169})$

Dari gambar 3.4 diketahui derajat (*degree*) tiap titik, yaitu:

$$\text{deg}(13) = 11$$

$$\text{deg}(26) = 11$$

$$\text{deg}(39) = 11$$

$$\text{deg}(52) = 11$$

$$\text{deg}(65) = 11$$

$$\text{deg}(78) = 11$$

$$\text{deg}(91) = 11$$

$$\text{deg}(104) = 11$$

$$\text{deg}(117) = 11$$

$$\text{deg}(130) = 11$$

$$\deg(143) = 11$$

$$\deg(156) = 11$$

Sehingga indeks harmonik dari graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 121 tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} \\ H(N(\mathbb{Z}_{169})) &= \frac{2}{\deg(13) + \deg(26)} + \frac{2}{\deg(13) + \deg(39)} \\ &\quad + \frac{2}{\deg(13) + \deg(52)} + \frac{2}{\deg(13) + \deg(65)} \\ &\quad + \frac{2}{\deg(13) + \deg(78)} + \dots + \frac{2}{\deg(143) + \deg(156)} \\ &= \frac{2}{11 + 11} + \frac{2}{11 + 11} + \frac{2}{11 + 11} + \frac{2}{11 + 11} + \frac{2}{11 + 11} + \dots \\ &\quad + \frac{2}{11 + 11} \\ &= 66 \left( \frac{2}{11 + 11} \right) \\ &= 66 \left( \frac{2}{22} \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

### 3.1.6 Bilangan Bulat Modulo $n$

Dari beberapa penelitian yang telah dilakukan, yaitu pada bilangan bulat modulo 9, modulo 25, modulo 49, dan modulo 121, diketahui bahwa terdapat bentuk indeks harmonik pada gelanggang komutatif dengan satuan tersebut.

Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut:

Tabel 3. 2 Bentuk Umum Indeks Harmonik Graf Nilradikal  $N(\mathbb{Z}_n)$ 

Bilangan bulat modulo $n = p^2$	Indeks Harmonik
bilangan bulat modulo $9 = 3^2$	1
bilangan bulat modulo $25 = 5^2$	2
bilangan bulat modulo $49 = 7^2$	3
bilangan bulat modulo $121 = 11^2$	5
bilangan bulat modulo $169 = 13^2$	6
$\vdots$	$\vdots$
bilangan bulat modulo $n = p^2$	$\frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2(p-2)}$

Dimana  $n$  adalah kuadrat dari  $p$  dan  $p$  merupakan bilangan prima lebih besar sama dengan 3 ( $p \geq 3$ ). Dari tabel tersebut didapat suatu teorema sebagai berikut:

### Teorema 3.1

Bentuk umum indeks harmonik graf nilradikal pada gelanggang komutatif modulo  $n$ ,  $N(\mathbb{Z}_n)$ , dengan  $n = p^2$  dan  $p$  adalah bilangan prima lebih besar sama dengan 3 adalah

$$H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2(p-2)}$$

Bukti:

jika  $n = p^2$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima yang lebih besar sama dengan tiga  $p \geq 3$ , maka unsur-unsur *nilpotent (vertex)* dari  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah kelipatan dari  $p$ , yang banyaknya adalah  $(p-1)$  dan titik-titik tersebut membentuk graf komplit (berdasarkan bukti dari Teorema 1 dan Teorema 2). Karena indeks harmonik adalah penjumlahan bobot dari  $\frac{2}{deg(u)+deg(v)}$  yang mana banyaknya dua titik

berpasangannya membentuk pola bilangan segitiga yaitu  $\left(\frac{1}{2}((p-2)^2 + (p-2))\right)$  Sehingga, bentuk umum untuk indeks harmonik graf nilradikal pada bilangan bulat modulo  $n$  adalah:

$$\begin{aligned}
 H(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{deg(u) + deg(v)} \\
 H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) &= \sum_{u,v \in V(N(\mathbb{Z}_n))} \frac{2}{deg(u) + deg(v)} \\
 &= \frac{2}{deg(u) + deg(v)} \left( \text{sebanyak} \left( \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{(p-2) + (p-2)} \left( \text{sebanyak} \left( \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{2(p-2)} \left( \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2} \right) \\
 &= \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2(p-2)}
 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2(p-2)} \quad (\text{Terbukti}).$$

### 3.2 Indeks Gutman Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan

Indeks Gutman dari graf  $G$ , sebagaimana yang telah dijelaskan pada sub bab 2.5, didefinisikan sebagai:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

Dimana  $deg(u)$  dan  $deg(v)$  adalah derajat (*degree*) dari titik  $u$  dan titik  $v$  di graf  $G$ . Sedangkan  $d(u, v)$  adalah jarak dari titik  $u$  ke titik  $v$  di graf  $G$ . Dengan berpedoman pada graf nilradikal yang telah digambar pada beberapa sub-bab sebelumnya, akan diteliti indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan.

### 3.2.1 Bilangan Bulat modulo 9 ( $\mathbb{Z}_9$ )

Berdasarkan gambar yang telah diperoleh pada sub-bab 3.1.1 diketahui bahwa derajat atau *degree* dari tiap titik dan jarak atau *distance* antara dua titik adalah sebagai berikut:

$$deg(3) = 1$$

$$deg(6) = 1$$

$$d(3,6) = 1$$

$$d(6,3) = 1$$

Karena  $d(3,6)$  dan  $d(6,3)$  adalah sama (berdasarkan definisi 4) maka cukup ditulis  $d(3,6)$  saja. Sehingga, indeks Gutman dari graf nilradikal  $Gut(N(\mathbb{Z}_9))$  adalah:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u, v)$$

$$Gut(N(\mathbb{Z}_9)) = deg(3)deg(6)d(3,6)$$

$$= (1)(1)(1)$$

$$= 1$$

### 3.2.2 Bilangan Bulat Modulo 25 ( $\mathbb{Z}_{25}$ )

Pada sub-bab 3.1.2 diketahui bahwa unsur *nilpotent* dari bilangan bulat modulo 25 adalah sebagai berikut:

$$5^{25} \bmod 25 = 0$$

$$10^{25} \bmod 25 = 0$$

$$15^{25} \bmod 25 = 0$$

$$20^{25} \bmod 25 = 0$$

Dan menurut gambar 3.2 diketahui bahwa:

$$\text{deg}(5) = 3$$

$$\text{deg}(10) = 3$$

$$\text{deg}(15) = 3$$

$$\text{deg}(20) = 3$$

$$d(5,10) = 1$$

$$d(5,15) = 1$$

$$d(5,20) = 1$$

$$d(10,15) = 1$$

$$d(10,20) = 1$$

$$d(15,20) = 1$$

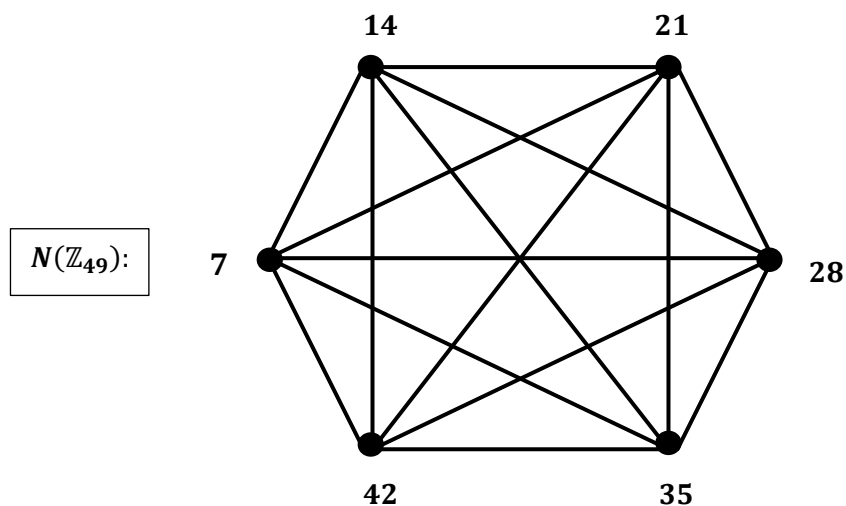
Berdasarkan definisi 4 point 2 disebutkan bahwa  $d(u, v) = d(v, u)$  untuk setiap  $u, v \in G$  dan  $u \neq v$ , Sehingga untuk  $d(5,10)$  dan  $d(10,5)$  cukup ditulis  $d(5,10)$  saja, begitupun seterusnya, artinya aturan tersebut berlaku untuk setiap titik-titik yang saling adjacent. Jadi indeks Gutman dari graf nilradikal  $Gut(N(\mathbb{Z}_{25}))$  adalah sebagai berikut:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$\begin{aligned} Gut(N(\mathbb{Z}_{25})) &= deg(5)deg(10)d(5,10) + deg(5)deg(15)d(5,15) + \\ &\quad deg(5)deg(20)d(5,20) + deg(10)deg(15)d(10,15) + \\ &\quad deg(10)deg(20)d(10,20) + deg(15)deg(20)d(15,20) \\ &= (3)(3)(1) + (3)(3)(1) + (3)(3)(1) + (3)(3)(1) + \\ &\quad (3)(3)(1) + (3)(3)(1) \\ &= 6(3^2)(1) \\ &= 54 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Bilangan Bulat Modulo 49 ( $\mathbb{Z}_{49}$ )

Berdasarkan informasi yang didapat pada sub bab 3.1.3, bilangan bulat modulo 49 dapat membentuk graf komplit sebagai berikut:



Gambar 3. 6 Graf nilradikal bilangan bulat modulo 9  $N(\mathbb{Z}_{49})$

Dari gambar tersebut dapat diketahui *degree* dari setiap titik dan *distance* dari 2 buah titik yang berbeda, yakni sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
deg(7) = 5 & d(7,21) = 1 & d(14,42) = 1 \\
deg(14) = 5 & d(7,28) = 1 & d(21,28) = 1 \\
deg(21) = 5 & d(7,35) = 1 & d(21,35) = 1 \\
deg(28) = 5 & d(7,42) = 1 & d(21,42) = 1 \\
deg(35) = 5 & d(14,21) = 1 & d(28,35) = 1 \\
deg(42) = 5 & d(14,28) = 1 & d(28,42) = 1 \\
d(7,14) = 1 & d(14,35) = 1 & d(35,42) = 1
\end{array}$$

Dengan aturan yang sama seperti sebelumnya (sesuai dengan definisi 4), *distance* dari titik-titik yang saling *adjacent* ditulis satu saja, seperti  $d(21,42)$  dan  $d(42,21)$ , berdasarkan definisi 4 jarak antara titik 21 dan 24 dengan jarak antara titik 24 dan 21 adalah sama sehingga cukup ditulis satu jarak saja yakni  $d(21,42)$ . Sehingga indeks Gutman dari graf nilradikal bilangan bulat modulo 49  $Gut(N(\mathbb{Z}_{49}))$  adalah sebagai berikut:

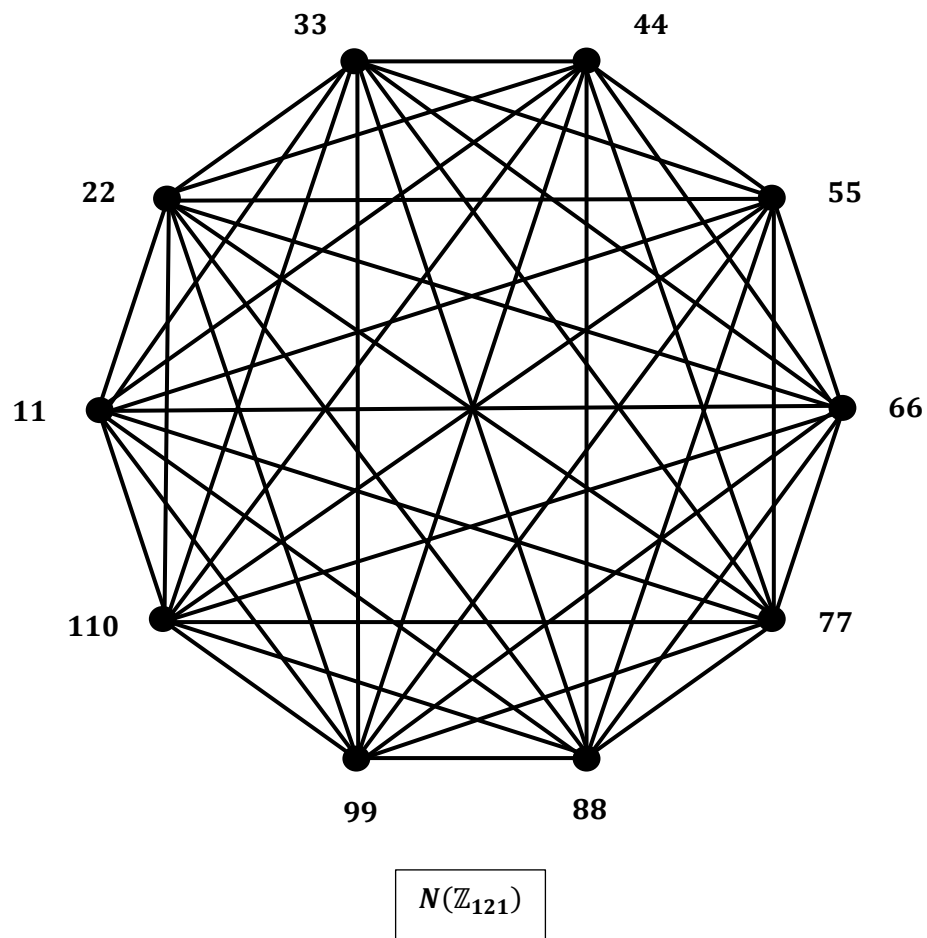
$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$\begin{aligned}
Gut(N(\mathbb{Z}_{49})) = & deg(7)deg(14)d(7,14) + deg(7)deg(21)d(7,21) + \\
& deg(7)deg(28)d(7,28) + deg(7)deg(35)d(7,35) + \\
& deg(7)deg(42)d(7,42) + deg(14)deg(21)d(14,21) + \\
& deg(14)deg(28)d(14,28) + deg(14)deg(35)d(14,35) + \\
& deg(14)deg(42)d(14,42) + deg(21)deg(28)d(21,28) + \\
& deg(21)deg(35)d(21,35) + deg(21)deg(42)d(21,42) + \\
& deg(28)deg(35)d(28,35) + deg(28)deg(42)d(28,42) + \\
& deg(35)deg(42)d(35,42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + \\ &\quad (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + \\ &\quad (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + \\ &\quad (5)(5)(1) + (5)(5)(1) + (5)(5)(1) \\ &= 15(5^2)(1) \\ &= 15(25) \\ &= 375 \end{aligned}$$

### 3.2.4 Bilangan Bulat Modulo 121 ( $\mathbb{Z}_{121}$ )

Pada sub bab 3.1.4 diperoleh gambar dari graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 121 yaitu sebagai berikut:



Gambar 3. 7 Graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 121  $N(\mathbb{Z}_{121})$

Berdasarkan graf  $N(\mathbb{Z}_{121})$  diatas diketahui *degree* dari setiap titik sama yaitu 9, sedangkan *distance* dari setiap dua buah titik yang *adjacent* juga sama yaitu 1, hal tersebut dikarenakan graf tersebut adalah graf komplit.

$$\deg(11) = 9 \qquad \deg(77) = 9 \qquad d(11,44) = 1$$

$$\deg(22) = 9 \qquad \deg(88) = 9 \qquad d(11,55) = 1$$

$$\deg(33) = 9 \qquad \deg(99) = 9 \qquad d(11,66) = 1$$

$$\deg(44) = 9 \qquad \deg(110) = 9 \qquad d(11,77) = 1$$

$$\deg(55) = 9 \qquad d(11,22) = 1 \qquad d(11,88) = 1$$

$$\deg(66) = 9 \qquad d(11,33) = 1 \qquad d(11,99) = 1$$

$$\begin{array}{lll}
d(11,110) = 1 & d(33,88) = 1 & d(55,110) = 1 \\
d(22,33) = 1 & d(33,99) = 1 & d(66,77) = 1 \\
d(22,44) = 1 & d(33,110) = 1 & d(66,88) = 1 \\
d(22,55) = 1 & d(44,55) = 1 & d(66,99) = 1 \\
d(22,66) = 1 & d(44,66) = 1 & d(66,110) = 1 \\
d(22,77) = 1 & d(44,77) = 1 & d(77,88) = 1 \\
d(22,88) = 1 & d(44,88) = 1 & d(77,99) = 1 \\
d(22,99) = 1 & d(44,99) = 1 & d(77,110) = 1 \\
d(22,110) = 1 & d(44,110) = 1 & d(88,99) = 1 \\
d(33,44) = 1 & d(55,66) = 1 & d(88,110) = 1 \\
d(33,55) = 1 & d(55,77) = 1 & d(99,110) = 1 \\
d(33,66) = 1 & d(55,88) = 1 & \\
d(33,77) = 1 & d(55,99) = 1 & 
\end{array}$$

Sehingga indeks Gutman dari graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 121

$Gut(N(\mathbb{Z}_{121}))$  adalah sebagai berikut:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

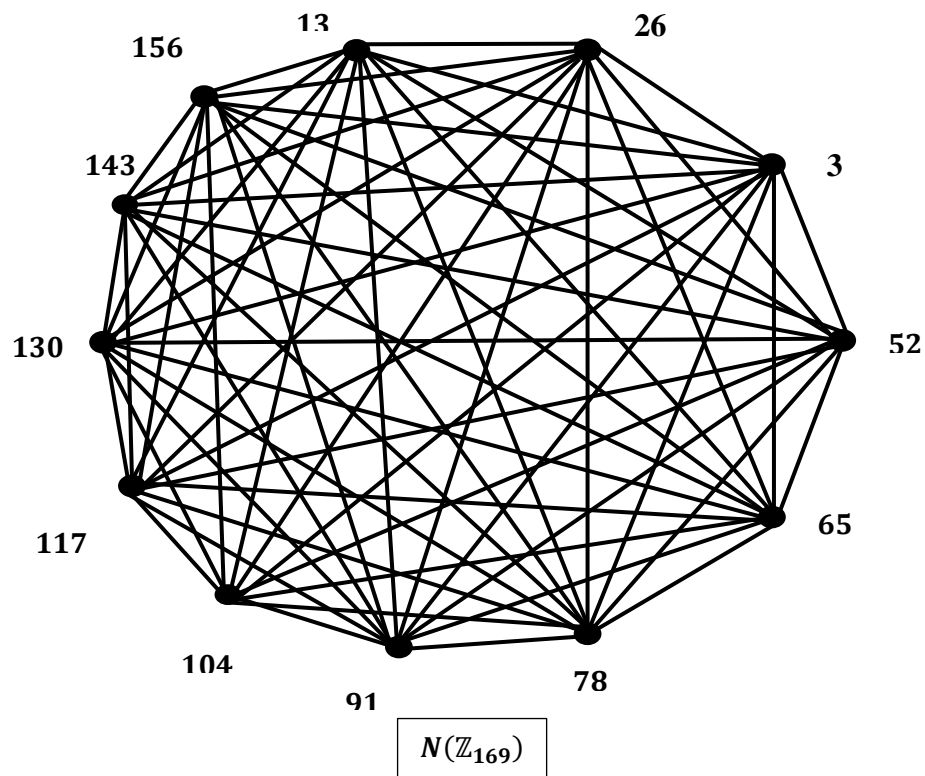
$$\begin{aligned}
Gut(N(\mathbb{Z}_{121})) = & deg(11)deg(22)d(11,22) + deg(11)deg(33)d(11,33) + \\
& deg(11)deg(44)d(11,44) + deg(11)deg(55)d(11,55) + \\
& deg(11)deg(66)d(11,66) + deg(11)deg(77)d(11,77) + \\
& deg(11)deg(88)d(11,88) + deg(11)deg(99)d(11,99) + \\
& deg(11)deg(110)d(11,110) + \\
& deg(22)deg(33)d(22,33) + deg(22)deg(44)d(22,44) + \\
& deg(22)deg(55)d(22,55) + deg(22)deg(66)d(22,66) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& deg(22)deg(77)d(22,77) + deg(22)deg(88)d(22,88) + \\
& deg(22)deg(99)d(22,99) + \\
& deg(22)deg(110)d(22,110) + \\
& deg(33)deg(44)d(33,44) + deg(33)deg(55)d(33,55) + \\
& deg(33)deg(66)d(33,66) + deg(33)deg(77)d(33,77) + \\
& deg(33)deg(88)d(33,88) + deg(33)deg(99)d(33,99) + \\
& deg(33)deg(110)d(33,110) + \\
& deg(44)deg(55)d(44,55) + deg(44)deg(66)d(44,66) + \\
& deg(44)deg(77)d(44,77) + deg(44)deg(88)d(44,88) + \\
& deg(44)deg(99)d(44,99) + \\
& deg(44)deg(110)d(44,110) + \\
& deg(55)deg(66)d(55,66) + deg(55)deg(77)d(55,77) + \\
& deg(55)deg(88)d(55,88) + deg(55)deg(99)d(55,99) + \\
& deg(55)deg(110)d(55,110) + \\
& deg(66)deg(77)d(66,77) + deg(66)deg(88)d(66,88) + \\
& deg(66)deg(99)d(66,99) + \\
& deg(66)deg(110)d(66,110) + \\
& deg(77)deg(88)d(77,88) + deg(77)deg(99)d(77,99) + \\
& deg(77)deg(110)d(77,110) + \\
& deg(88)deg(99)d(88,99) + \\
& deg(88)deg(110)d(88,110) + deg(14)deg(42)d(99,110) \\
= & (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + (9)(9)(1) + \\
& (9)(9)(1) \\
& = 45(9^2)(1) \\
& = 45(81) \\
& = 3645
\end{aligned}$$

### 3.2.5 Bilangan Bulat Modulo 169 ( $\mathbb{Z}_{169}$ )

Pada sub bab 3.1.5 diperoleh gambar dari graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 169 yaitu sebagai berikut:



Gambar 3. 8 graf nilradikal bilangan bulat modulo 169

Berdasarkan graf  $N(\mathbb{Z}_{121})$  diatas diketahui *degree* dari setiap titik sama yaitu 9, sedangkan *distance* dari setiap dua buah titik yang *adjacent* juga sama yaitu 1, hal tersebut dikarenakan graf tersebut adalah graf komplit.

$$\begin{array}{lll}
 \text{deg}(13) = 11 & \text{deg}(130) = 11 & d(13,104) = 1 \\
 \text{deg}(26) = 11 & \text{deg}(143) = 11 & d(13,117) = 1 \\
 \text{deg}(39) = 11 & \text{deg}(156) = 11 & d(13,130) = 1 \\
 \text{deg}(52) = 11 & d(13,26) = 1 & d(13,143) = 1 \\
 \text{deg}(65) = 11 & d(13,39) = 1 & d(13,156) = 1 \\
 \text{deg}(78) = 11 & d(13,52) = 1 & d(26,39) = 1 \\
 \text{deg}(91) = 11 & d(13,65) = 1 & d(26,52) = 1 \\
 \text{deg}(104) = 11 & d(13,78) = 1 & \vdots \\
 \text{deg}(117) = 11 & d(13,91) = 1 & d(143,156) = 1
 \end{array}$$

Sehingga indeks Gutman dari graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 169  $Gut(N(\mathbb{Z}_{169}))$  adalah sebagai berikut:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$\begin{aligned} Gut(N(\mathbb{Z}_{169})) &= deg(13)deg(26)d(13,26) + deg(13)deg(39)d(13,39) + \\ &\quad deg(13)deg(52)d(13,52) + deg(13)deg(65)d(13,65) + \\ &\quad deg(13)deg(78)d(13,78) + deg(13)deg(91)d(13,104) + \\ &\quad \dots + deg(143)deg(156)d(143,156) \\ &= (11)(11)(1) + (11)(11)(1) + (11)(11)(1) + (11)(11)(1) \\ &\quad + (11)(11)(1) + (11)(11)(1) + \dots + (11)(11)(1) \\ &= 66(11^2)(1) \\ &= 66(121) \\ &= 7986 \end{aligned}$$

### 3.2.6 Bilangan Bulat Modulo $n$

Pada penelitian sebelumnya, yaitu indeks Gutman graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 9, modulo 25, modulo 79, modulo 121, dan modulo 169 diketahui bahwa indeks-indeks tersebut membentuk bentuk yang unik yang mencirikan dirinya sendiri. Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut:

**Tabel 3. 3 Bentuk Umum Indeks Gutman Graf Nilradikal  $N(\mathbb{Z}_n)$**

<b>Bilangan bulat modulo <math>n = p^2</math></b>	<b>Indeks Gutman</b>
Bilangan bulat modulo 9 = $3^2$	1
Bilangan bulat modulo 25 = $5^2$	54
Bilangan bulat modulo 49 = $7^2$	375

Bilangan bulat modulo $121 = 11^2$	3645
Bilangan bulat modulo $169 = 13^2$	7986
$\vdots$	$\vdots$
Bilangan bulat modulo $n = p^2$	$\left(\frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2}\right)(p-2)^2$

Dimana  $n$  adalah kuadrat dari bilangan prima  $p$  yang lebih besar sama dengan 3 ( $n = p^2, p \geq 3$ ). Pada tabel diatas didapat suatu terema sebagai berikut:

**Teorema 3.2**

Bentuk umum indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif modulo  $n$ ,  $N(\mathbb{Z}_n)$ , dengan  $n = p^2$  dan  $p$  adalah bilangan prima lebih besar sama dengan 3 adalah

$$Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2}\right)(p-2)^2$$

Bukti:

jika  $n = p^2$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima yang lebih besar sama dengan tiga  $p \geq 3$ , maka unsur-unsur *nilpotent* dari  $N(\mathbb{Z}_n)$  adalah kelipatan dari  $p$ , dimana banyaknya unsur *nilpotent* yang habis dibagi (dimodulo)  $p^2$  adalah  $(p-1)$  dan unsur-unsur tersebut membentuk graf komplit (berdasarkan bukti dari Teorema 1 dan Teorema 2). Sebagai akibat dari definisi 4, banyaknya *distance* (jarak) yang diperoleh membentuk pola bilangan segitiga yaitu  $\left(\frac{1}{2}((p-2)^2 + (p-2))\right)$  yang mana tiap jarak memiliki nilai yang sama yaitu 1, hal tersebut dikarenakan graf tersebut adalah graf komplit, yang juga menyebabkan *degree*

(derajat) dari tiap titiknya sama yaitu sebanyak  $(p - 2)$ . Sehingga bentuk umum dari indeks Gutman graf nilradikal pada bilangan bulat modulo  $n$  adalah:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$\begin{aligned} Gut(N(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{u,v \in V(N(\mathbb{Z}_n))} deg(u)deg(v)d(u,v) \\ &= deg(u)deg(v)d(u,v) + \dots + deg(y)deg(z)d(y,z) \\ &\quad \left( \text{sebanyak } \left( \frac{1}{2}((p-2)^2 + (p-2)) \right) \right), \exists y, z \in V(N(\mathbb{Z}_n)) \\ &= (p-2)(p-2)(1) + \dots + (p-2)(p-2)(1) \\ &\quad \left( \text{sebanyak } \left( \frac{1}{2}((p-2)^2 + (p-2)) \right) \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}((p-2)^2 + (p-2)) \right) (p-2)(p-2)(1) \\ &= \left( \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2} \right) (p-2)^2 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left( \frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2} \right) (p-2)^2 \text{ (terbukti).}$$

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan, dapat diambil simpulan bahwa:

1. bentuk umum indeks harmonik graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yang dibatasi pada bilangan bulat modulo  $n$ , dengan  $n = p^2$

dan  $p \geq 3$ , adalah  $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$

2. bentuk umum indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yang dibatasi pada bilangan bulat modulo  $n$ , dengan  $n = p^2$

dan  $p \geq 3$ , adalah  $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right) (p-2)^2$

#### 4.2 Saran

Dikarenakan pada penelitian ini gelanggang komutatif dengan satuan yang dipakai adalah bilangan bulat modulo  $n$  dengan  $n = p^2$  dan  $p \geq 3$  yang menyebabkan penulis sedikit kewalahan karena penghitungan yang dilakukan adalah secara manual, sehingga terdapat saran dari penulis untuk penelitian selanjutnya yaitu:

1. Menciptakan aplikasi yang dapat menentukan banyaknya vertex dan degree dari graf nilradikal yang terbentuk.
2. Mengembangkan gelanggang komutatif dengan satuan yang dijadikan objek penelitian.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdusakir, Azizah, dan Nofandika, 2009. Teori Graf. Malang: UIN-Malang Press.
- Alhaevaz, Hashemi, dan Ziemkowski. 2017. Nilradicals of The Unique Product Monoid Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. Vol. 16. No. 07
- Al-Qur'an Terjemahan. 2015. *Departmen Agama RI*. Bandung: CV. Darus Sunnah
- Azari, Mahdieh. 2018. on The Gutman Index of Thorn Graphs. *Kragujevac J. Sci.* Vol. 40. No. 33-48
- Bermúdez, J. M. Ancochea dan R.Campoamor, Stursberg. 2015. Classification of solvable real rigid Lie algebras with a nilradical of dimension  $n$ . *Linear Algebra and its Applications*. Vol. 471. No. 54-75
- Das, Kinkar Ch., Guifu Su, dan Liming Zao. 2018. Relation between Degree Distance and Gutman Index of Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. Vol. 76. No. 0340-6253
- Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang. 1986. *Graph and Digraphs Sixth Edition*, New York: CRC Press
- Lowel Hall. and Kier, Lemont B. 1976. *Molecular Connectivity in Chemistry and Drug Research*. Boston: Academic press. ISBN 0-12-406560-0
- Kavithaa dan Kaladevi. 2017. Gutman Index and Detour Gutman Index of Pseudo-Regular Graphs. *Hindawi Journal of Applied Mathematics*. Vol. 2017. No. 4180650
- Li, Jian Xi dan Shiu, Wai Chee. 2014. The Harmonic Index of a Graph. *Rocky Montain Journal of Mathematics*. Vol. 44. No. 5
- Linda G. And Jimmie Gilbert. 2009. *Element of Modern Algebra, Seventh Edition*. USA: Cengage Learning
- Mao, Yaping dan Das, Kinkar Ch. 2018. Steiner Gutman Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. Vol. 79. No. 0340-6253
- Mazorodzea, Jaya Percival, Mukwembi, dan Vetrik. 2014. On the Gutman Index and Minimum Degree. *Discrete Applied Mathematics*. Vol.173.No.77-82
- Nikandish dan Shaveisi. 2016. Some Properties of the Nil-Graphs of Ideals of Commutative Rings. *Math. AC*. Vol. 03. No. 1611
- Onagh, B. N. 2017. The Harmonic Index of Product Graphs. *Original Research*. Vol. 11. No. 203-209

- Purwanto. 1998. Matematika Diskrit. Malang: IKIP Malang
- Ramakrishnan dan Babujee. 2015. Schultz and Gutman Indices for Graph Complements. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 105. No. 3
- Rodrigueza, and Sigarreta. 2017. New Result on The Harmonic Index and Its Generalizations. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. Vol. 78. No. 0340-6253
- Sayehvand, Khosro dan Rostami, Mohammadreza. 2014. Further Results on Harmonic Index and Some New Relations Between Harmonic Index and Other Topological Indices. Journal of mathematics and computer Science. Vol. 11. No. 123-136
- Sepdhani. Kandungan Surat Al-Qashash ayat 77. 2014. <https://sepdhani.wordpress.com/fokuslah-untuk-kehidupan-akhiratmu-namun-jangan-lupakan-duniamu/>. Diakses pada Tanggal 16 Mei
- Shalini Chandra, Om Prakash and Sheela Suthar. 2017. Some properties of the nilradical and non-nilradical graphs over finite commutative ring. Algebra and Discrete Mathematics Research Article. Vol. 24. No. 2
- Soleh. 2016. Pendidikan dalam Al-Qur'an (Konsep Ta'lim QS. Al-Mujadalah ayat 11). Jurnal Al-Thariqah Vol. 1, No. 2.
- Wang, De-qiang, Meng-meng Feng, dan Ke-lun Wang. 2017. The Extremal Values and Rankings of the Gutman Index of -Caterpillar. 2nd International Conference on Computational Modeling, Simulation and Applied Mathematics. Vol. 2. No. 978-1-60595-499-8
- Wijaya, A. 2009. Matematika Diskrit. {Book Online}. Bandung: Politeknik Telkom
- Xu, Xinli. 2018. Relationships between Harmonic Index and other Topological Indices. Applied Mathematical Sciences. Vol. 6. No.41

## RIWAYAT HIDUP



Luluk Afifah, lahir di Sumenep pada tanggal 03 September 1996. Anak sulung dari 2 bersaudara yakni dari pasangan Bapak Abd. Rahman dan Ibu Budiya. Pada tanggal 04 Juni 2019, perempuan yang biasa dipanggil Luluk ini melepas masa lajangnya, hingga pada tanggal 05 Mei 2020 ia melahirkan seorang putera yang sangat menggemaskan yang diberi nama M. Fathir Thibbil Quluby.

Luluk telah menempuh Pendidikan formal mulai dari TK. Nurul Islam, lalu Pendidikan dasarnya ditrmpuh di MI. Tarbiyatul Athfal dan lulus pada tahun 2009, juga mengenyam Pendidikan di MTs. Nurul Islam sambil menimba ilmu di Pondok Al-Kautsar Puteri Karang Cempaka, selanjutnya melanjutkan ke MA. Nurul Islam Karang Cempaka dan lulus tahun 2015. Selanjutnya pada tahun 2016 menenpuh kuliah di Universitas Islama Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa rutinitas sebagai mahasiswa dilakukan dengan tekun, selain menjadi mahasiswa dengan tugas pada umumnya, juga menjadi Asisten praktikum untuk mengisi waktu luang. Selain hal itu juga sering belajar bersama dengan teman seangkatan yang forumnya diadakan oleh HMJ Integral Matematika dan juga SeMaTa baik secara formal atau tidak. Selain aktif dibidang akademik juga mengikuti kelas bahasa arab yang dibina oleh Ustadz Nafie Jauhari pada setiap hari Kamis setelah matakuliah selesai.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA**  
**MALIK IBRAHIM MALANG FAKULTAS**  
**SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Luluk Afifah  
NIM : 16610052  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Indeks Harmonik dan Indeks Gutman Graf Nilradikal  
pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan  
Pembimbing I : Dr. Imam Sujarwo, M.Pd.  
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si.

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	4 September 2019	Konsultasi Bab I & II	1. <i>R</i>
2	4 Februari 2020	ACC Bab I & Bab II	2. <i>a</i>
3	18 Februari 2020	Konsultasi Bab III	3. <i>a</i>
4	20 Februari 2020	Pembenahan Bab III	4. <i>a</i>
5	1 April 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	5. <i>Imam</i>
6	5 April 2020	ACC Bab III	6. <i>Imam</i>
7	9 April 2020	ACC Kajian Keagamaan	7. <i>Imam</i>
8	27 Desember 2021	Konsultasi Bab IV	8. <i>a</i>
9	28 Desember 2021	Konsultasi abstrak	9. <i>a</i>
10	29 Desember 2021	ACC keseluruhan	10. <i>a</i>

Malang, 28 Desember 2021

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

## LAMPIRAN-LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Tabel bilangan bulat modulo 25 ( $\mathbb{Z}_{25}$ ) dengan operasi kedua ( $\circ$ )

$\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	2	5	8	11	14	17	20	23	1	4	7	10	13	16	19	22
4	0	4	8	12	16	20	24	3	7	11	15	19	23	2	6	10	14	18	22	1	5	9	13	17	21
5	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20
6	0	6	12	18	24	5	11	17	23	4	10	16	22	3	9	15	21	2	8	14	20	1	7	13	19
7	0	7	14	21	3	10	17	24	6	13	20	2	9	16	23	5	12	19	1	8	15	22	4	11	18
8	0	8	16	24	7	15	23	6	14	22	5	13	21	4	12	20	3	11	19	2	10	18	1	9	17
9	0	9	18	2	11	20	4	13	22	6	15	24	8	17	1	10	19	3	12	21	5	14	23	7	16
10	0	10	20	5	15	0	10	20	5	15	0	10	20	5	15	0	10	20	5	15	0	10	20	5	15
11	0	11	22	8	19	5	16	2	13	24	10	21	7	18	4	15	1	12	23	9	20	6	17	3	14
12	0	12	24	11	23	10	22	9	21	8	20	7	19	6	18	5	17	4	16	3	15	2	14	1	13
13	0	13	1	14	2	15	3	16	4	17	5	18	6	19	7	20	8	21	9	22	10	23	11	24	12
14	0	14	3	17	6	20	9	23	12	1	15	4	18	7	21	10	24	13	2	16	5	19	8	22	11
15	0	15	5	20	10	0	15	5	20	10	0	15	5	20	10	0	15	5	20	10	0	15	5	20	10
16	0	16	7	23	14	5	21	12	3	19	10	1	17	8	24	15	6	22	13	4	20	11	2	18	9
17	0	17	9	1	18	10	2	19	11	3	20	12	4	21	13	5	22	14	6	23	15	7	24	16	8
18	0	18	11	4	22	15	8	1	19	12	5	23	16	9	2	20	13	6	24	17	10	3	21	14	7
19	0	19	13	7	1	20	14	8	2	21	15	9	3	22	16	10	4	23	17	11	5	24	18	12	6
20	0	20	15	10	5	0	20	15	10	5	0	20	15	10	5	0	20	15	10	5	0	20	15	10	5
21	0	21	17	13	9	5	1	22	18	14	10	6	2	23	19	15	11	7	3	24	20	16	12	8	4
22	0	22	19	16	13	10	7	4	1	23	20	17	14	11	8	5	2	24	21	18	15	12	9	6	3
23	0	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
24	0	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

**Lampiran 2.** Tabel bilangan bulat modulo 49 ( $\mathbb{E}_{49}$ ) dengan operasi kedua ( $^\circ$ )

$^\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	2	5	8	11	14	17	20	23
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	2	7	12	17	22
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	5	11	17	23	29	35	41	47	4	10	16	22	28	34	40	46
7	0	7	14	21	28	35	42	0	7	14	21	28	35	42	0	7	14	21	28	35	42	0	7	14	21
8	0	8	16	24	32	40	48	7	15	23	31	39	47	6	14	22	30	38	46	5	13	21	29	37	45
9	0	9	18	27	36	45	5	14	23	32	41	1	10	19	28	37	46	6	15	24	33	42	2	11	20
10	0	10	20	30	40	1	11	21	31	41	2	12	22	32	42	3	13	23	33	43	4	14	24	34	44
11	0	11	22	33	44	6	17	28	39	1	12	23	34	45	7	18	29	40	2	13	24	35	46	8	19
12	0	12	24	36	48	11	23	35	47	10	22	34	46	9	21	33	45	8	20	32	44	7	19	31	43
13	0	13	26	39	3	16	29	42	6	19	32	45	9	22	35	48	12	25	38	2	15	28	41	5	18
14	0	14	28	42	7	21	35	0	14	28	42	7	21	35	0	14	28	42	7	21	35	0	14	28	42
15	0	15	30	45	11	26	41	7	22	37	3	18	33	48	14	29	44	10	25	40	6	21	36	2	17
16	0	16	32	48	15	31	47	14	30	46	13	29	45	12	28	44	11	27	43	10	26	42	9	25	41
17	0	17	34	2	19	36	4	21	38	6	23	40	8	25	42	10	27	44	12	29	46	14	31	48	16
18	0	18	36	5	23	41	10	28	46	15	33	2	20	38	7	25	43	12	30	48	17	35	4	22	40
19	0	19	38	8	27	46	16	35	5	24	43	13	32	2	21	40	10	29	48	18	37	7	26	45	15
20	0	20	40	11	31	2	22	42	13	33	4	24	44	15	35	6	26	46	17	37	8	28	48	19	39
21	0	21	42	14	35	7	28	0	21	42	14	35	7	28	0	21	42	14	35	7	28	0	21	42	14
22	0	22	44	17	39	12	34	7	29	2	24	46	19	41	14	36	9	31	4	26	48	21	43	16	38
23	0	23	46	20	43	17	40	14	37	11	34	8	31	5	28	2	25	48	22	45	19	42	16	39	13
24	0	24	48	23	47	22	46	21	45	20	44	19	43	18	42	17	41	16	40	15	39	14	38	13	37

°	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47
3	26	29	32	35	38	41	44	47	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46
4	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
5	27	32	37	42	47	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	4	9	14	19	24	29	34	39	44
6	3	9	15	21	27	33	39	45	2	8	14	20	26	32	38	44	1	7	13	19	25	31	37	43
7	28	35	42	0	7	14	21	28	35	42	0	7	14	21	28	35	42	0	7	14	21	28	35	42
8	4	12	20	28	36	44	3	11	19	27	35	43	2	10	18	26	34	42	1	9	17	25	33	41
9	29	38	47	7	16	25	34	43	3	12	21	30	39	48	8	17	26	35	44	4	13	22	31	40
10	5	15	25	35	45	6	16	26	36	46	7	17	27	37	47	8	18	28	38	48	9	19	29	39
11	30	41	3	14	25	36	47	9	20	31	42	4	15	26	37	48	10	21	32	43	5	16	27	38
12	6	18	30	42	5	17	29	41	4	16	28	40	3	15	27	39	2	14	26	38	1	13	25	37
13	31	44	8	21	34	47	11	24	37	1	14	27	40	4	17	30	43	7	20	33	46	10	23	36
14	7	21	35	0	14	28	42	7	21	35	0	14	28	42	7	21	35	0	14	28	42	7	21	35
15	32	47	13	28	43	9	24	39	5	20	35	1	16	31	46	12	27	42	8	23	38	4	19	34
16	8	24	40	7	23	39	6	22	38	5	21	37	4	20	36	3	19	35	2	18	34	1	17	33
17	33	1	18	35	3	20	37	5	22	39	7	24	41	9	26	43	11	28	45	13	30	47	15	32
18	9	27	45	14	32	1	19	37	6	24	42	11	29	47	16	34	3	21	39	8	26	44	13	31
19	34	4	23	42	12	31	1	20	39	9	28	47	17	36	6	25	44	14	33	3	22	41	11	30
20	10	30	1	21	41	12	32	3	23	43	14	34	5	25	45	16	36	7	27	47	18	38	9	29
21	35	7	28	0	21	42	14	35	7	28	0	21	42	14	35	7	28	0	21	42	14	35	7	28
22	11	33	6	28	1	23	45	18	40	13	35	8	30	3	25	47	20	42	15	37	10	32	5	27
23	36	10	33	7	30	4	27	1	24	47	21	44	18	41	15	38	12	35	9	32	6	29	3	26
24	12	36	11	35	10	34	9	33	8	32	7	31	6	30	5	29	4	28	3	27	2	26	1	25

°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	0	25	1	26	2	27	3	28	4	29	5	30	6	31	7	32	8	33	9	34	10	35	11	36	12
26	0	26	3	29	6	32	9	35	12	38	15	41	18	44	21	47	24	1	27	4	30	7	33	10	36
27	0	27	5	32	10	37	15	42	20	47	25	3	30	8	35	13	40	18	45	23	1	28	6	33	11
28	0	28	7	35	14	42	21	0	28	7	35	14	42	21	0	28	7	35	14	42	21	0	28	7	35
29	0	29	9	38	18	47	27	7	36	16	45	25	5	34	14	43	23	3	32	12	41	21	1	30	10
30	0	30	11	41	22	3	33	14	44	25	6	36	17	47	28	9	39	20	1	31	12	42	23	4	34
31	0	31	13	44	26	8	39	21	3	34	16	47	29	11	42	24	6	37	19	1	32	14	45	27	9
32	0	32	15	47	30	13	45	28	11	43	26	9	41	24	7	39	22	5	37	20	3	35	18	1	33
33	0	33	17	1	34	18	2	35	19	3	36	20	4	37	21	5	38	22	6	39	23	7	40	24	8
34	0	34	19	4	38	23	8	42	27	12	46	31	16	1	35	20	5	39	24	9	43	28	13	47	32
35	0	35	21	7	42	28	14	0	35	21	7	42	28	14	0	35	21	7	42	28	14	0	35	21	7
36	0	36	23	10	46	33	20	7	43	30	17	4	40	27	14	1	37	24	11	47	34	21	8	44	31
37	0	37	25	13	1	38	26	14	2	39	27	15	3	40	28	16	4	41	29	17	5	42	30	18	6
38	0	38	27	16	5	43	32	21	10	48	37	26	15	4	42	31	20	9	47	36	25	14	3	41	30
39	0	39	29	19	9	48	38	28	18	8	47	37	27	17	7	46	36	26	16	6	45	35	25	15	5
40	0	40	31	22	13	4	44	35	26	17	8	48	39	30	21	12	3	43	34	25	16	7	47	38	29
41	0	41	33	25	17	9	1	42	34	26	18	10	2	43	35	27	19	11	3	44	36	28	20	12	4
42	0	42	35	28	21	14	7	0	42	35	28	21	14	7	0	42	35	28	21	14	7	0	42	35	28
43	0	43	37	31	25	19	13	7	1	44	38	32	26	20	14	8	2	45	39	33	27	21	15	9	3
44	0	44	39	34	29	24	19	14	9	4	48	43	38	33	28	23	18	13	8	3	47	42	37	32	27
45	0	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5	1	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
46	0	46	43	40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	47	44	41	38	35	32	29	26
47	0	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
48	0	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25

°	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
25	37	13	38	14	39	15	40	16	41	17	42	18	43	19	44	20	45	21	46	22	47	23	48	24
26	13	39	16	42	19	45	22	48	25	2	28	5	31	8	34	11	37	14	40	17	43	20	46	23
27	38	16	43	21	48	26	4	31	9	36	14	41	19	46	24	2	29	7	34	12	39	17	44	22
28	14	42	21	0	28	7	35	14	42	21	0	28	7	35	14	42	21	0	28	7	35	14	42	21
29	39	19	48	28	8	37	17	46	26	6	35	15	44	24	4	33	13	42	22	2	31	11	40	20
30	15	45	26	7	37	18	48	29	10	40	21	2	32	13	43	24	5	35	16	46	27	8	38	19
31	40	22	4	35	17	48	30	12	43	25	7	38	20	2	33	15	46	28	10	41	23	5	36	18
32	16	48	31	14	46	29	12	44	27	10	42	25	8	40	23	6	38	21	4	36	19	2	34	17
33	41	25	9	42	26	10	43	27	11	44	28	12	45	29	13	46	30	14	47	31	15	48	32	16
34	17	2	36	21	6	40	25	10	44	29	14	48	33	18	3	37	22	7	41	26	11	45	30	15
35	42	28	14	0	35	21	7	42	28	14	0	35	21	7	42	28	14	0	35	21	7	42	28	14
36	18	5	41	28	15	2	38	25	12	48	35	22	9	45	32	19	6	42	29	16	3	39	26	13
37	43	31	19	7	44	32	20	8	45	33	21	9	46	34	22	10	47	35	23	11	48	36	24	12
38	19	8	46	35	24	13	2	40	29	18	7	45	34	23	12	1	39	28	17	6	44	33	22	11
39	44	34	24	14	4	43	33	23	13	3	42	32	22	12	2	41	31	21	11	1	40	30	20	10
40	20	11	2	42	33	24	15	6	46	37	28	19	10	1	41	32	23	14	5	45	36	27	18	9
41	45	37	29	21	13	5	46	38	30	22	14	6	47	39	31	23	15	7	48	40	32	24	16	8
42	21	14	7	0	42	35	28	21	14	7	0	42	35	28	21	14	7	0	42	35	28	21	14	7
43	46	40	34	28	22	16	10	4	47	41	35	29	23	17	11	5	48	42	36	30	24	18	12	6
44	22	17	12	7	2	46	41	36	31	26	21	16	11	6	1	45	40	35	30	25	20	15	10	5
45	47	43	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
46	23	20	17	14	11	8	5	2	48	45	42	39	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
47	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
48	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

**Lampiran 3.** Tabel bilangan bulat modulo 121 ( $\mathbb{Z}_{121}$ ) dengan operasi kedua ( $\circ$ )

$\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	4
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	5	11	17	23	29
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	5	12	19	26	33	40	47	54
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	7	15	23	31	39	47	55	63	71	79
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119	8
11	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33
12	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	10	22	34	46	58
13	0	13	26	39	52	65	78	91	104	117	9	22	35	48	61	74	87	100	113	5	18	31	44	57	70	83
14	0	14	28	42	56	70	84	98	112	5	19	33	47	61	75	89	103	117	10	24	38	52	66	80	94	108
15	0	15	30	45	60	75	90	105	120	14	29	44	59	74	89	104	119	13	28	43	58	73	88	103	118	12
16	0	16	32	48	64	80	96	112	7	23	39	55	71	87	103	119	14	30	46	62	78	94	110	5	21	37
17	0	17	34	51	68	85	102	119	15	32	49	66	83	100	117	13	30	47	64	81	98	115	11	28	45	62
18	0	18	36	54	72	90	108	5	23	41	59	77	95	113	10	28	46	64	82	100	118	15	33	51	69	87
19	0	19	38	57	76	95	114	12	31	50	69	88	107	5	24	43	62	81	100	119	17	36	55	74	93	112
20	0	20	40	60	80	100	120	19	39	59	79	99	119	18	38	58	78	98	118	17	37	57	77	97	117	16
21	0	21	42	63	84	105	5	26	47	68	89	110	10	31	52	73	94	115	15	36	57	78	99	120	20	41
22	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66
23	0	23	46	69	92	115	17	40	63	86	109	11	34	57	80	103	5	28	51	74	97	120	22	45	68	91
24	0	24	48	72	96	120	23	47	71	95	119	22	46	70	94	118	21	45	69	93	117	20	44	68	92	116
25	0	25	50	75	100	4	29	54	79	104	8	33	58	83	108	12	37	62	87	112	16	41	66	91	116	20

°	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
2	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100
3	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
4	104	108	112	116	120	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79
5	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79	84	89	94	99	104	109	114	119	3	8
6	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58
7	61	68	75	82	89	96	103	110	117	3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87	94	101	108
8	87	95	103	111	119	6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94	102	110	118	5	13	21	29	37
9	113	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	6	15	24	33	42	51	60	69	78	87
10	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117	6	16
11	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66
12	70	82	94	106	118	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116
13	96	109	1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	10	23	36	49	62	75	88	101	114	6	19	32	45
14	1	15	29	43	57	71	85	99	113	6	20	34	48	62	76	90	104	118	11	25	39	53	67	81	95
15	27	42	57	72	87	102	117	11	26	41	56	71	86	101	116	10	25	40	55	70	85	100	115	9	24
16	53	69	85	101	117	12	28	44	60	76	92	108	3	19	35	51	67	83	99	115	10	26	42	58	74
17	79	96	113	9	26	43	60	77	94	111	7	24	41	58	75	92	109	5	22	39	56	73	90	107	3
18	105	2	20	38	56	74	92	110	7	25	43	61	79	97	115	12	30	48	66	84	102	120	17	35	53
19	10	29	48	67	86	105	3	22	41	60	79	98	117	15	34	53	72	91	110	8	27	46	65	84	103
20	36	56	76	96	116	15	35	55	75	95	115	14	34	54	74	94	114	13	33	53	73	93	113	12	32
21	62	83	104	4	25	46	67	88	109	9	30	51	72	93	114	14	35	56	77	98	119	19	40	61	82
22	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11
23	114	16	39	62	85	108	10	33	56	79	102	4	27	50	73	96	119	21	44	67	90	113	15	38	61
24	19	43	67	91	115	18	42	66	90	114	17	41	65	89	113	16	40	64	88	112	15	39	63	87	111
25	45	70	95	120	24	49	74	99	3	28	53	78	103	7	32	57	82	107	11	36	61	86	111	15	40

°	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
2	102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
3	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104
4	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58
5	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	118	2	7	12
6	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87
7	115	1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120	6	13	20	27	34	41
8	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116
9	96	105	114	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	7	16	25	34	43	52	61	70
10	26	36	46	56	66	76	86	96	106	116	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	4	14	24
11	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	5	17	29	41	53
13	58	71	84	97	110	2	15	28	41	54	67	80	93	106	119	11	24	37	50	63	76	89	102	115	7
14	109	2	16	30	44	58	72	86	100	114	7	21	35	49	63	77	91	105	119	12	26	40	54	68	82
15	39	54	69	84	99	114	8	23	38	53	68	83	98	113	7	22	37	52	67	82	97	112	6	21	36
16	90	106	1	17	33	49	65	81	97	113	8	24	40	56	72	88	104	120	15	31	47	63	79	95	111
17	20	37	54	71	88	105	1	18	35	52	69	86	103	120	16	33	50	67	84	101	118	14	31	48	65
18	71	89	107	4	22	40	58	76	94	112	9	27	45	63	81	99	117	14	32	50	68	86	104	1	19
19	1	20	39	58	77	96	115	13	32	51	70	89	108	6	25	44	63	82	101	120	18	37	56	75	94
20	52	72	92	112	11	31	51	71	91	111	10	30	50	70	90	110	9	29	49	69	89	109	8	28	48
21	103	3	24	45	66	87	108	8	29	50	71	92	113	13	34	55	76	97	118	18	39	60	81	102	2
22	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77
23	84	107	9	32	55	78	101	3	26	49	72	95	118	20	43	66	89	112	14	37	60	83	106	8	31
24	14	38	62	86	110	13	37	61	85	109	12	36	60	84	108	11	35	59	83	107	10	34	58	82	106
25	65	90	115	19	44	69	94	119	23	48	73	98	2	27	52	77	102	6	31	56	81	106	10	35	60

°	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
3	107	110	113	116	119	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58
4	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
5	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	82	87	92	97	102	107	112	117	1	6	11	16
6	93	99	105	111	117	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116
7	48	55	62	69	76	83	90	97	104	111	118	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	88	95
8	3	11	19	27	35	43	51	59	67	75	83	91	99	107	115	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74
9	79	88	97	106	115	3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	8	17	26	35	44	53
10	34	44	54	64	74	84	94	104	114	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103	113	2	12	22	32
11	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11
12	65	77	89	101	113	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111
13	20	33	46	59	72	85	98	111	3	16	29	42	55	68	81	94	107	120	12	25	38	51	64	77	90
14	96	110	3	17	31	45	59	73	87	101	115	8	22	36	50	64	78	92	106	120	13	27	41	55	69
15	51	66	81	96	111	5	20	35	50	65	80	95	110	4	19	34	49	64	79	94	109	3	18	33	48
16	6	22	38	54	70	86	102	118	13	29	45	61	77	93	109	4	20	36	52	68	84	100	116	11	27
17	82	99	116	12	29	46	63	80	97	114	10	27	44	61	78	95	112	8	25	42	59	76	93	110	6
18	37	55	73	91	109	6	24	42	60	78	96	114	11	29	47	65	83	101	119	16	34	52	70	88	106
19	113	11	30	49	68	87	106	4	23	42	61	80	99	118	16	35	54	73	92	111	9	28	47	66	85
20	68	88	108	7	27	47	67	87	107	6	26	46	66	86	106	5	25	45	65	85	105	4	24	44	64
21	23	44	65	86	107	7	28	49	70	91	112	12	33	54	75	96	117	17	38	59	80	101	1	22	43
22	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22
23	54	77	100	2	25	48	71	94	117	19	42	65	88	111	13	36	59	82	105	7	30	53	76	99	1
24	9	33	57	81	105	8	32	56	80	104	7	31	55	79	103	6	30	54	78	102	5	29	53	77	101
25	85	110	14	39	64	89	114	18	43	68	93	118	22	47	72	97	1	26	51	76	101	5	30	55	80

°	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
2	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119
3	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118
4	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117
5	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81	86	91	96	101	106	111	116
6	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97	103	109	115
7	102	109	116	2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	100	107	114
8	82	90	98	106	114	1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113
9	62	71	80	89	98	107	116	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
10	42	52	62	72	82	92	102	112	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
12	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109
13	103	116	8	21	34	47	60	73	86	99	112	4	17	30	43	56	69	82	95	108
14	83	97	111	4	18	32	46	60	74	88	102	116	9	23	37	51	65	79	93	107
15	63	78	93	108	2	17	32	47	62	77	92	107	1	16	31	46	61	76	91	106
16	43	59	75	91	107	2	18	34	50	66	82	98	114	9	25	41	57	73	89	105
17	23	40	57	74	91	108	4	21	38	55	72	89	106	2	19	36	53	70	87	104
18	3	21	39	57	75	93	111	8	26	44	62	80	98	116	13	31	49	67	85	103
19	104	2	21	40	59	78	97	116	14	33	52	71	90	109	7	26	45	64	83	102
20	84	104	3	23	43	63	83	103	2	22	42	62	82	102	1	21	41	61	81	101
21	64	85	106	6	27	48	69	90	111	11	32	53	74	95	116	16	37	58	79	100
22	44	66	88	110	11	33	55	77	99	0	22	44	66	88	110	11	33	55	77	99
23	24	47	70	93	116	18	41	64	87	110	12	35	58	81	104	6	29	52	75	98
24	4	28	52	76	100	3	27	51	75	99	2	26	50	74	98	1	25	49	73	97
25	105	9	34	59	84	109	13	38	63	88	113	17	42	67	92	117	21	46	71	96

°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	0	26	52	78	104	9	35	61	87	113	18	44	70	96	1	27	53	79	105	10	36	62	88	114	19	45
27	0	27	54	81	108	14	41	68	95	1	28	55	82	109	15	42	69	96	2	29	56	83	110	16	43	70
28	0	28	56	84	112	19	47	75	103	10	38	66	94	1	29	57	85	113	20	48	76	104	11	39	67	95
29	0	29	58	87	116	24	53	82	111	19	48	77	106	14	43	72	101	9	38	67	96	4	33	62	91	120
30	0	30	60	90	120	29	59	89	119	28	58	88	118	27	57	87	117	26	56	86	116	25	55	85	115	24
31	0	31	62	93	3	34	65	96	6	37	68	99	9	40	71	102	12	43	74	105	15	46	77	108	18	49
32	0	32	64	96	7	39	71	103	14	46	78	110	21	53	85	117	28	60	92	3	35	67	99	10	42	74
33	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99
34	0	34	68	102	15	49	83	117	30	64	98	11	45	79	113	26	60	94	7	41	75	109	22	56	90	3
35	0	35	70	105	19	54	89	3	38	73	108	22	57	92	6	41	76	111	25	60	95	9	44	79	114	28
36	0	36	72	108	23	59	95	10	46	82	118	33	69	105	20	56	92	7	43	79	115	30	66	102	17	53
37	0	37	74	111	27	64	101	17	54	91	7	44	81	118	34	71	108	24	61	98	14	51	88	4	41	78
38	0	38	76	114	31	69	107	24	62	100	17	55	93	10	48	86	3	41	79	117	34	72	110	27	65	103
39	0	39	78	117	35	74	113	31	70	109	27	66	105	23	62	101	19	58	97	15	54	93	11	50	89	7
40	0	40	80	120	39	79	119	38	78	118	37	77	117	36	76	116	35	75	115	34	74	114	33	73	113	32
41	0	41	82	2	43	84	4	45	86	6	47	88	8	49	90	10	51	92	12	53	94	14	55	96	16	57
42	0	42	84	5	47	89	10	52	94	15	57	99	20	62	104	25	67	109	30	72	114	35	77	119	40	82
43	0	43	86	8	51	94	16	59	102	24	67	110	32	75	118	40	83	5	48	91	13	56	99	21	64	107
44	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11
45	0	45	90	14	59	104	28	73	118	42	87	11	56	101	25	70	115	39	84	8	53	98	22	67	112	36
46	0	46	92	17	63	109	34	80	5	51	97	22	68	114	39	85	10	56	102	27	73	119	44	90	15	61
47	0	47	94	20	67	114	40	87	13	60	107	33	80	6	53	100	26	73	120	46	93	19	66	113	39	86
48	0	48	96	23	71	119	46	94	21	69	117	44	92	19	67	115	42	90	17	65	113	40	88	15	63	111
49	0	49	98	26	75	3	52	101	29	78	6	55	104	32	81	9	58	107	35	84	12	61	110	38	87	15
50	0	50	100	29	79	8	58	108	37	87	16	66	116	45	95	24	74	3	53	103	32	82	11	61	111	40

°	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
26	71	97	2	28	54	80	106	11	37	63	89	115	20	46	72	98	3	29	55	81	107	12	38	64	90
27	97	3	30	57	84	111	17	44	71	98	4	31	58	85	112	18	45	72	99	5	32	59	86	113	19
28	2	30	58	86	114	21	49	77	105	12	40	68	96	3	31	59	87	115	22	50	78	106	13	41	69
29	28	57	86	115	23	52	81	110	18	47	76	105	13	42	71	100	8	37	66	95	3	32	61	90	119
30	54	84	114	23	53	83	113	22	52	82	112	21	51	81	111	20	50	80	110	19	49	79	109	18	48
31	80	111	21	52	83	114	24	55	86	117	27	58	89	120	30	61	92	2	33	64	95	5	36	67	98
32	106	17	49	81	113	24	56	88	120	31	63	95	6	38	70	102	13	45	77	109	20	52	84	116	27
33	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77
34	37	71	105	18	52	86	120	33	67	101	14	48	82	116	29	63	97	10	44	78	112	25	59	93	6
35	63	98	12	47	82	117	31	66	101	15	50	85	120	34	69	104	18	53	88	2	37	72	107	21	56
36	89	4	40	76	112	27	63	99	14	50	86	1	37	73	109	24	60	96	11	47	83	119	34	70	106
37	115	31	68	105	21	58	95	11	48	85	1	38	75	112	28	65	102	18	55	92	8	45	82	119	35
38	20	58	96	13	51	89	6	44	82	120	37	75	113	30	68	106	23	61	99	16	54	92	9	47	85
39	46	85	3	42	81	120	38	77	116	34	73	112	30	69	108	26	65	104	22	61	100	18	57	96	14
40	72	112	31	71	111	30	70	110	29	69	109	28	68	108	27	67	107	26	66	106	25	65	105	24	64
41	98	18	59	100	20	61	102	22	63	104	24	65	106	26	67	108	28	69	110	30	71	112	32	73	114
42	3	45	87	8	50	92	13	55	97	18	60	102	23	65	107	28	70	112	33	75	117	38	80	1	43
43	29	72	115	37	80	2	45	88	10	53	96	18	61	104	26	69	112	34	77	120	42	85	7	50	93
44	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22
45	81	5	50	95	19	64	109	33	78	2	47	92	16	61	106	30	75	120	44	89	13	58	103	27	72
46	107	32	78	3	49	95	20	66	112	37	83	8	54	100	25	71	117	42	88	13	59	105	30	76	1
47	12	59	106	32	79	5	52	99	25	72	119	45	92	18	65	112	38	85	11	58	105	31	78	4	51
48	38	86	13	61	109	36	84	11	59	107	34	82	9	57	105	32	80	7	55	103	30	78	5	53	101
49	64	113	41	90	18	67	116	44	93	21	70	119	47	96	24	73	1	50	99	27	76	4	53	102	30
50	90	19	69	119	48	98	27	77	6	56	106	35	85	14	64	114	43	93	22	72	1	51	101	30	80

°	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
26	116	21	47	73	99	4	30	56	82	108	13	39	65	91	117	22	48	74	100	5	31	57	83	109	14
27	46	73	100	6	33	60	87	114	20	47	74	101	7	34	61	88	115	21	48	75	102	8	35	62	89
28	97	4	32	60	88	116	23	51	79	107	14	42	70	98	5	33	61	89	117	24	52	80	108	15	43
29	27	56	85	114	22	51	80	109	17	46	75	104	12	41	70	99	7	36	65	94	2	31	60	89	118
30	78	108	17	47	77	107	16	46	76	106	15	45	75	105	14	44	74	104	13	43	73	103	12	42	72
31	8	39	70	101	11	42	73	104	14	45	76	107	17	48	79	110	20	51	82	113	23	54	85	116	26
32	59	91	2	34	66	98	9	41	73	105	16	48	80	112	23	55	87	119	30	62	94	5	37	69	101
33	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55
34	40	74	108	21	55	89	2	36	70	104	17	51	85	119	32	66	100	13	47	81	115	28	62	96	9
35	91	5	40	75	110	24	59	94	8	43	78	113	27	62	97	11	46	81	116	30	65	100	14	49	84
36	21	57	93	8	44	80	116	31	67	103	18	54	90	5	41	77	113	28	64	100	15	51	87	2	38
37	72	109	25	62	99	15	52	89	5	42	79	116	32	69	106	22	59	96	12	49	86	2	39	76	113
38	2	40	78	116	33	71	109	26	64	102	19	57	95	12	50	88	5	43	81	119	36	74	112	29	67
39	53	92	10	49	88	6	45	84	2	41	80	119	37	76	115	33	72	111	29	68	107	25	64	103	21
40	104	23	63	103	22	62	102	21	61	101	20	60	100	19	59	99	18	58	98	17	57	97	16	56	96
41	34	75	116	36	77	118	38	79	120	40	81	1	42	83	3	44	85	5	46	87	7	48	89	9	50
42	85	6	48	90	11	53	95	16	58	100	21	63	105	26	68	110	31	73	115	36	78	120	41	83	4
43	15	58	101	23	66	109	31	74	117	39	82	4	47	90	12	55	98	20	63	106	28	71	114	36	79
44	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33
45	117	41	86	10	55	100	24	69	114	38	83	7	52	97	21	66	111	35	80	4	49	94	18	63	108
46	47	93	18	64	110	35	81	6	52	98	23	69	115	40	86	11	57	103	28	74	120	45	91	16	62
47	98	24	71	118	44	91	17	64	111	37	84	10	57	104	30	77	3	50	97	23	70	117	43	90	16
48	28	76	3	51	99	26	74	1	49	97	24	72	120	47	95	22	70	118	45	93	20	68	116	43	91
49	79	7	56	105	33	82	10	59	108	36	85	13	62	111	39	88	16	65	114	42	91	19	68	117	45
50	9	59	109	38	88	17	67	117	46	96	25	75	4	54	104	33	83	12	62	112	41	91	20	70	120

°	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
26	40	66	92	118	23	49	75	101	6	32	58	84	110	15	41	67	93	119	24	50	76	102	7	33	59
27	116	22	49	76	103	9	36	63	90	117	23	50	77	104	10	37	64	91	118	24	51	78	105	11	38
28	71	99	6	34	62	90	118	25	53	81	109	16	44	72	100	7	35	63	91	119	26	54	82	110	17
29	26	55	84	113	21	50	79	108	16	45	74	103	11	40	69	98	6	35	64	93	1	30	59	88	117
30	102	11	41	71	101	10	40	70	100	9	39	69	99	8	38	68	98	7	37	67	97	6	36	66	96
31	57	88	119	29	60	91	1	32	63	94	4	35	66	97	7	38	69	100	10	41	72	103	13	44	75
32	12	44	76	108	19	51	83	115	26	58	90	1	33	65	97	8	40	72	104	15	47	79	111	22	54
33	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33
34	43	77	111	24	58	92	5	39	73	107	20	54	88	1	35	69	103	16	50	84	118	31	65	99	12
35	119	33	68	103	17	52	87	1	36	71	106	20	55	90	4	39	74	109	23	58	93	7	42	77	112
36	74	110	25	61	97	12	48	84	120	35	71	107	22	58	94	9	45	81	117	32	68	104	19	55	91
37	29	66	103	19	56	93	9	46	83	120	36	73	110	26	63	100	16	53	90	6	43	80	117	33	70
38	105	22	60	98	15	53	91	8	46	84	1	39	77	115	32	70	108	25	63	101	18	56	94	11	49
39	60	99	17	56	95	13	52	91	9	48	87	5	44	83	1	40	79	118	36	75	114	32	71	110	28
40	15	55	95	14	54	94	13	53	93	12	52	92	11	51	91	10	50	90	9	49	89	8	48	88	7
41	91	11	52	93	13	54	95	15	56	97	17	58	99	19	60	101	21	62	103	23	64	105	25	66	107
42	46	88	9	51	93	14	56	98	19	61	103	24	66	108	29	71	113	34	76	118	39	81	2	44	86
43	1	44	87	9	52	95	17	60	103	25	68	111	33	76	119	41	84	6	49	92	14	57	100	22	65
44	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44
45	32	77	1	46	91	15	60	105	29	74	119	43	88	12	57	102	26	71	116	40	85	9	54	99	23
46	108	33	79	4	50	96	21	67	113	38	84	9	55	101	26	72	118	43	89	14	60	106	31	77	2
47	63	110	36	83	9	56	103	29	76	2	49	96	22	69	116	42	89	15	62	109	35	82	8	55	102
48	18	66	114	41	89	16	64	112	39	87	14	62	110	37	85	12	60	108	35	83	10	58	106	33	81
49	94	22	71	120	48	97	25	74	2	51	100	28	77	5	54	103	31	80	8	57	106	34	83	11	60
50	49	99	28	78	7	57	107	36	86	15	65	115	44	94	23	73	2	52	102	31	81	10	60	110	39

°	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
26	85	111	16	42	68	94	120	25	51	77	103	8	34	60	86	112	17	43	69	95
27	65	92	119	25	52	79	106	12	39	66	93	120	26	53	80	107	13	40	67	94
28	45	73	101	8	36	64	92	120	27	55	83	111	18	46	74	102	9	37	65	93
29	25	54	83	112	20	49	78	107	15	44	73	102	10	39	68	97	5	34	63	92
30	5	35	65	95	4	34	64	94	3	33	63	93	2	32	62	92	1	31	61	91
31	106	16	47	78	109	19	50	81	112	22	53	84	115	25	56	87	118	28	59	90
32	86	118	29	61	93	4	36	68	100	11	43	75	107	18	50	82	114	25	57	89
33	66	99	11	44	77	110	22	55	88	0	33	66	99	11	44	77	110	22	55	88
34	46	80	114	27	61	95	8	42	76	110	23	57	91	4	38	72	106	19	53	87
35	26	61	96	10	45	80	115	29	64	99	13	48	83	118	32	67	102	16	51	86
36	6	42	78	114	29	65	101	16	52	88	3	39	75	111	26	62	98	13	49	85
37	107	23	60	97	13	50	87	3	40	77	114	30	67	104	20	57	94	10	47	84
38	87	4	42	80	118	35	73	111	28	66	104	21	59	97	14	52	90	7	45	83
39	67	106	24	63	102	20	59	98	16	55	94	12	51	90	8	47	86	4	43	82
40	47	87	6	46	86	5	45	85	4	44	84	3	43	83	2	42	82	1	41	81
41	27	68	109	29	70	111	31	72	113	33	74	115	35	76	117	37	78	119	39	80
42	7	49	91	12	54	96	17	59	101	22	64	106	27	69	111	32	74	116	37	79
43	108	30	73	116	38	81	3	46	89	11	54	97	19	62	105	27	70	113	35	78
44	88	11	55	99	22	66	110	33	77	0	44	88	11	55	99	22	66	110	33	77
45	68	113	37	82	6	51	96	20	65	110	34	79	3	48	93	17	62	107	31	76
46	48	94	19	65	111	36	82	7	53	99	24	70	116	41	87	12	58	104	29	75
47	28	75	1	48	95	21	68	115	41	88	14	61	108	34	81	7	54	101	27	74
48	8	56	104	31	79	6	54	102	29	77	4	52	100	27	75	2	50	98	25	73
49	109	37	86	14	63	112	40	89	17	66	115	43	92	20	69	118	46	95	23	72
50	89	18	68	118	47	97	26	76	5	55	105	34	84	13	63	113	42	92	21	71

°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
51	0	51	102	32	83	13	64	115	45	96	26	77	7	58	109	39	90	20	71	1	52	103	33	84	14	65
52	0	52	104	35	87	18	70	1	53	105	36	88	19	71	2	54	106	37	89	20	72	3	55	107	38	90
53	0	53	106	38	91	23	76	8	61	114	46	99	31	84	16	69	1	54	107	39	92	24	77	9	62	115
54	0	54	108	41	95	28	82	15	69	2	56	110	43	97	30	84	17	71	4	58	112	45	99	32	86	19
55	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44
56	0	56	112	47	103	38	94	29	85	20	76	11	67	2	58	114	49	105	40	96	31	87	22	78	13	69
57	0	57	114	50	107	43	100	36	93	29	86	22	79	15	72	8	65	1	58	115	51	108	44	101	37	94
58	0	58	116	53	111	48	106	43	101	38	96	33	91	28	86	23	81	18	76	13	71	8	66	3	61	119
59	0	59	118	56	115	53	112	50	109	47	106	44	103	41	100	38	97	35	94	32	91	29	88	26	85	23
60	0	60	120	59	119	58	118	57	117	56	116	55	115	54	114	53	113	52	112	51	111	50	110	49	109	48
61	0	61	1	62	2	63	3	64	4	65	5	66	6	67	7	68	8	69	9	70	10	71	11	72	12	73
62	0	62	3	65	6	68	9	71	12	74	15	77	18	80	21	83	24	86	27	89	30	92	33	95	36	98
63	0	63	5	68	10	73	15	78	20	83	25	88	30	93	35	98	40	103	45	108	50	113	55	118	60	2
64	0	64	7	71	14	78	21	85	28	92	35	99	42	106	49	113	56	120	63	6	70	13	77	20	84	27
65	0	65	9	74	18	83	27	92	36	101	45	110	54	119	63	7	72	16	81	25	90	34	99	43	108	52
66	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77
67	0	67	13	80	26	93	39	106	52	119	65	11	78	24	91	37	104	50	117	63	9	76	22	89	35	102
68	0	68	15	83	30	98	45	113	60	7	75	22	90	37	105	52	120	67	14	82	29	97	44	112	59	6
69	0	69	17	86	34	103	51	120	68	16	85	33	102	50	119	67	15	84	32	101	49	118	66	14	83	31
70	0	70	19	89	38	108	57	6	76	25	95	44	114	63	12	82	31	101	50	120	69	18	88	37	107	56
71	0	71	21	92	42	113	63	13	84	34	105	55	5	76	26	97	47	118	68	18	89	39	110	60	10	81
72	0	72	23	95	46	118	69	20	92	43	115	66	17	89	40	112	63	14	86	37	109	60	11	83	34	106
73	0	73	25	98	50	2	75	27	100	52	4	77	29	102	54	6	79	31	104	56	8	81	33	106	58	10
74	0	74	27	101	54	7	81	34	108	61	14	88	41	115	68	21	95	48	1	75	28	102	55	8	82	35
75	0	75	29	104	58	12	87	41	116	70	24	99	53	7	82	36	111	65	19	94	48	2	77	31	106	60

°	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	116	46	97	27	78	8	59	110	40	91	21	72	2	53	104	34	85	15	66	117	47	98	28	79	9
52	21	73	4	56	108	39	91	22	74	5	57	109	40	92	23	75	6	58	110	41	93	24	76	7	59
53	47	100	32	85	17	70	2	55	108	40	93	25	78	10	63	116	48	101	33	86	18	71	3	56	109
54	73	6	60	114	47	101	34	88	21	75	8	62	116	49	103	36	90	23	77	10	64	118	51	105	38
55	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88
56	4	60	116	51	107	42	98	33	89	24	80	15	71	6	62	118	53	109	44	100	35	91	26	82	17
57	30	87	23	80	16	73	9	66	2	59	116	52	109	45	102	38	95	31	88	24	81	17	74	10	67
58	56	114	51	109	46	104	41	99	36	94	31	89	26	84	21	79	16	74	11	69	6	64	1	59	117
59	82	20	79	17	76	14	73	11	70	8	67	5	64	2	61	120	58	117	55	114	52	111	49	108	46
60	108	47	107	46	106	45	105	44	104	43	103	42	102	41	101	40	100	39	99	38	98	37	97	36	96
61	13	74	14	75	15	76	16	77	17	78	18	79	19	80	20	81	21	82	22	83	23	84	24	85	25
62	39	101	42	104	45	107	48	110	51	113	54	116	57	119	60	1	63	4	66	7	69	10	72	13	75
63	65	7	70	12	75	17	80	22	85	27	90	32	95	37	100	42	105	47	110	52	115	57	120	62	4
64	91	34	98	41	105	48	112	55	119	62	5	69	12	76	19	83	26	90	33	97	40	104	47	111	54
65	117	61	5	70	14	79	23	88	32	97	41	106	50	115	59	3	68	12	77	21	86	30	95	39	104
66	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33
67	48	115	61	7	74	20	87	33	100	46	113	59	5	72	18	85	31	98	44	111	57	3	70	16	83
68	74	21	89	36	104	51	119	66	13	81	28	96	43	111	58	5	73	20	88	35	103	50	118	65	12
69	100	48	117	65	13	82	30	99	47	116	64	12	81	29	98	46	115	63	11	80	28	97	45	114	62
70	5	75	24	94	43	113	62	11	81	30	100	49	119	68	17	87	36	106	55	4	74	23	93	42	112
71	31	102	52	2	73	23	94	44	115	65	15	86	36	107	57	7	78	28	99	49	120	70	20	91	41
72	57	8	80	31	103	54	5	77	28	100	51	2	74	25	97	48	120	71	22	94	45	117	68	19	91
73	83	35	108	60	12	85	37	110	62	14	87	39	112	64	16	89	41	114	66	18	91	43	116	68	20
74	109	62	15	89	42	116	69	22	96	49	2	76	29	103	56	9	83	36	110	63	16	90	43	117	70
75	14	89	43	118	72	26	101	55	9	84	38	113	67	21	96	50	4	79	33	108	62	16	91	45	120

°	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
51	60	111	41	92	22	73	3	54	105	35	86	16	67	118	48	99	29	80	10	61	112	42	93	23	74
52	111	42	94	25	77	8	60	112	43	95	26	78	9	61	113	44	96	27	79	10	62	114	45	97	28
53	41	94	26	79	11	64	117	49	102	34	87	19	72	4	57	110	42	95	27	80	12	65	118	50	103
54	92	25	79	12	66	120	53	107	40	94	27	81	14	68	1	55	109	42	96	29	83	16	70	3	57
55	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11
56	73	8	64	120	55	111	46	102	37	93	28	84	19	75	10	66	1	57	113	48	104	39	95	30	86
57	3	60	117	53	110	46	103	39	96	32	89	25	82	18	75	11	68	4	61	118	54	111	47	104	40
58	54	112	49	107	44	102	39	97	34	92	29	87	24	82	19	77	14	72	9	67	4	62	120	57	115
59	105	43	102	40	99	37	96	34	93	31	90	28	87	25	84	22	81	19	78	16	75	13	72	10	69
60	35	95	34	94	33	93	32	92	31	91	30	90	29	89	28	88	27	87	26	86	25	85	24	84	23
61	86	26	87	27	88	28	89	29	90	30	91	31	92	32	93	33	94	34	95	35	96	36	97	37	98
62	16	78	19	81	22	84	25	87	28	90	31	93	34	96	37	99	40	102	43	105	46	108	49	111	52
63	67	9	72	14	77	19	82	24	87	29	92	34	97	39	102	44	107	49	112	54	117	59	1	64	6
64	118	61	4	68	11	75	18	82	25	89	32	96	39	103	46	110	53	117	60	3	67	10	74	17	81
65	48	113	57	1	66	10	75	19	84	28	93	37	102	46	111	55	120	64	8	73	17	82	26	91	35
66	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110
67	29	96	42	109	55	1	68	14	81	27	94	40	107	53	120	66	12	79	25	92	38	105	51	118	64
68	80	27	95	42	110	57	4	72	19	87	34	102	49	117	64	11	79	26	94	41	109	56	3	71	18
69	10	79	27	96	44	113	61	9	78	26	95	43	112	60	8	77	25	94	42	111	59	7	76	24	93
70	61	10	80	29	99	48	118	67	16	86	35	105	54	3	73	22	92	41	111	60	9	79	28	98	47
71	112	62	12	83	33	104	54	4	75	25	96	46	117	67	17	88	38	109	59	9	80	30	101	51	1
72	42	114	65	16	88	39	111	62	13	85	36	108	59	10	82	33	105	56	7	79	30	102	53	4	76
73	93	45	118	70	22	95	47	120	72	24	97	49	1	74	26	99	51	3	76	28	101	53	5	78	30
74	23	97	50	3	77	30	104	57	10	84	37	111	64	17	91	44	118	71	24	98	51	4	78	31	105
75	74	28	103	57	11	86	40	115	69	23	98	52	6	81	35	110	64	18	93	47	1	76	30	105	59

°	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
51	4	55	106	36	87	17	68	119	49	100	30	81	11	62	113	43	94	24	75	5	56	107	37	88	18
52	80	11	63	115	46	98	29	81	12	64	116	47	99	30	82	13	65	117	48	100	31	83	14	66	118
53	35	88	20	73	5	58	111	43	96	28	81	13	66	119	51	104	36	89	21	74	6	59	112	44	97
54	111	44	98	31	85	18	72	5	59	113	46	100	33	87	20	74	7	61	115	48	102	35	89	22	76
55	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55
56	21	77	12	68	3	59	115	50	106	41	97	32	88	23	79	14	70	5	61	117	52	108	43	99	34
57	97	33	90	26	83	19	76	12	69	5	62	119	55	112	48	105	41	98	34	91	27	84	20	77	13
58	52	110	47	105	42	100	37	95	32	90	27	85	22	80	17	75	12	70	7	65	2	60	118	55	113
59	7	66	4	63	1	60	119	57	116	54	113	51	110	48	107	45	104	42	101	39	98	36	95	33	92
60	83	22	82	21	81	20	80	19	79	18	78	17	77	16	76	15	75	14	74	13	73	12	72	11	71
61	38	99	39	100	40	101	41	102	42	103	43	104	44	105	45	106	46	107	47	108	48	109	49	110	50
62	114	55	117	58	120	61	2	64	5	67	8	70	11	73	14	76	17	79	20	82	23	85	26	88	29
63	69	11	74	16	79	21	84	26	89	31	94	36	99	41	104	46	109	51	114	56	119	61	3	66	8
64	24	88	31	95	38	102	45	109	52	116	59	2	66	9	73	16	80	23	87	30	94	37	101	44	108
65	100	44	109	53	118	62	6	71	15	80	24	89	33	98	42	107	51	116	60	4	69	13	78	22	87
66	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66
67	10	77	23	90	36	103	49	116	62	8	75	21	88	34	101	47	114	60	6	73	19	86	32	99	45
68	86	33	101	48	116	63	10	78	25	93	40	108	55	2	70	17	85	32	100	47	115	62	9	77	24
69	41	110	58	6	75	23	92	40	109	57	5	74	22	91	39	108	56	4	73	21	90	38	107	55	3
70	117	66	15	85	34	104	53	2	72	21	91	40	110	59	8	78	27	97	46	116	65	14	84	33	103
71	72	22	93	43	114	64	14	85	35	106	56	6	77	27	98	48	119	69	19	90	40	111	61	11	82
72	27	99	50	1	73	24	96	47	119	70	21	93	44	116	67	18	90	41	113	64	15	87	38	110	61
73	103	55	7	80	32	105	57	9	82	34	107	59	11	84	36	109	61	13	86	38	111	63	15	88	40
74	58	11	85	38	112	65	18	92	45	119	72	25	99	52	5	79	32	106	59	12	86	39	113	66	19
75	13	88	42	117	71	25	100	54	8	83	37	112	66	20	95	49	3	78	32	107	61	15	90	44	119

°	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
51	69	120	50	101	31	82	12	63	114	44	95	25	76	6	57	108	38	89	19	70
52	49	101	32	84	15	67	119	50	102	33	85	16	68	120	51	103	34	86	17	69
53	29	82	14	67	120	52	105	37	90	22	75	7	60	113	45	98	30	83	15	68
54	9	63	117	50	104	37	91	24	78	11	65	119	52	106	39	93	26	80	13	67
55	110	44	99	33	88	22	77	11	66	0	55	110	44	99	33	88	22	77	11	66
56	90	25	81	16	72	7	63	119	54	110	45	101	36	92	27	83	18	74	9	65
57	70	6	63	120	56	113	49	106	42	99	35	92	28	85	21	78	14	71	7	64
58	50	108	45	103	40	98	35	93	30	88	25	83	20	78	15	73	10	68	5	63
59	30	89	27	86	24	83	21	80	18	77	15	74	12	71	9	68	6	65	3	62
60	10	70	9	69	8	68	7	67	6	66	5	65	4	64	3	63	2	62	1	61
61	111	51	112	52	113	53	114	54	115	55	116	56	117	57	118	58	119	59	120	60
62	91	32	94	35	97	38	100	41	103	44	106	47	109	50	112	53	115	56	118	59
63	71	13	76	18	81	23	86	28	91	33	96	38	101	43	106	48	111	53	116	58
64	51	115	58	1	65	8	72	15	79	22	86	29	93	36	100	43	107	50	114	57
65	31	96	40	105	49	114	58	2	67	11	76	20	85	29	94	38	103	47	112	56
66	11	77	22	88	33	99	44	110	55	0	66	11	77	22	88	33	99	44	110	55
67	112	58	4	71	17	84	30	97	43	110	56	2	69	15	82	28	95	41	108	54
68	92	39	107	54	1	69	16	84	31	99	46	114	61	8	76	23	91	38	106	53
69	72	20	89	37	106	54	2	71	19	88	36	105	53	1	70	18	87	35	104	52
70	52	1	71	20	90	39	109	58	7	77	26	96	45	115	64	13	83	32	102	51
71	32	103	53	3	74	24	95	45	116	66	16	87	37	108	58	8	79	29	100	50
72	12	84	35	107	58	9	81	32	104	55	6	78	29	101	52	3	75	26	98	49
73	113	65	17	90	42	115	67	19	92	44	117	69	21	94	46	119	71	23	96	48
74	93	46	120	73	26	100	53	6	80	33	107	60	13	87	40	114	67	20	94	47
75	73	27	102	56	10	85	39	114	68	22	97	51	5	80	34	109	63	17	92	46

°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
76	0	76	31	107	62	17	93	48	3	79	34	110	65	20	96	51	6	82	37	113	68	23	99	54	9	85
77	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110
78	0	78	35	113	70	27	105	62	19	97	54	11	89	46	3	81	38	116	73	30	108	65	22	100	57	14
79	0	79	37	116	74	32	111	69	27	106	64	22	101	59	17	96	54	12	91	49	7	86	44	2	81	39
80	0	80	39	119	78	37	117	76	35	115	74	33	113	72	31	111	70	29	109	68	27	107	66	25	105	64
81	0	81	41	1	82	42	2	83	43	3	84	44	4	85	45	5	86	46	6	87	47	7	88	48	8	89
82	0	82	43	4	86	47	8	90	51	12	94	55	16	98	59	20	102	63	24	106	67	28	110	71	32	114
83	0	83	45	7	90	52	14	97	59	21	104	66	28	111	73	35	118	80	42	4	87	49	11	94	56	18
84	0	84	47	10	94	57	20	104	67	30	114	77	40	3	87	50	13	97	60	23	107	70	33	117	80	43
85	0	85	49	13	98	62	26	111	75	39	3	88	52	16	101	65	29	114	78	42	6	91	55	19	104	68
86	0	86	51	16	102	67	32	118	83	48	13	99	64	29	115	80	45	10	96	61	26	112	77	42	7	93
87	0	87	53	19	106	72	38	4	91	57	23	110	76	42	8	95	61	27	114	80	46	12	99	65	31	118
88	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22
89	0	89	57	25	114	82	50	18	107	75	43	11	100	68	36	4	93	61	29	118	86	54	22	111	79	47
90	0	90	59	28	118	87	56	25	115	84	53	22	112	81	50	19	109	78	47	16	106	75	44	13	103	72
91	0	91	61	31	1	92	62	32	2	93	63	33	3	94	64	34	4	95	65	35	5	96	66	36	6	97
92	0	92	63	34	5	97	68	39	10	102	73	44	15	107	78	49	20	112	83	54	25	117	88	59	30	1
93	0	93	65	37	9	102	74	46	18	111	83	55	27	120	92	64	36	8	101	73	45	17	110	82	54	26
94	0	94	67	40	13	107	80	53	26	120	93	66	39	12	106	79	52	25	119	92	65	38	11	105	78	51
95	0	95	69	43	17	112	86	60	34	8	103	77	51	25	120	94	68	42	16	111	85	59	33	7	102	76
96	0	96	71	46	21	117	92	67	42	17	113	88	63	38	13	109	84	59	34	9	105	80	55	30	5	101
97	0	97	73	49	25	1	98	74	50	26	2	99	75	51	27	3	100	76	52	28	4	101	77	53	29	5
98	0	98	75	52	29	6	104	81	58	35	12	110	87	64	41	18	116	93	70	47	24	1	99	76	53	30
99	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55
100	0	100	79	58	37	16	116	95	74	53	32	11	111	90	69	48	27	6	106	85	64	43	22	1	101	80

°	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
76	40	116	71	26	102	57	12	88	43	119	74	29	105	60	15	91	46	1	77	32	108	63	18	94	49
77	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99
78	92	49	6	84	41	119	76	33	111	68	25	103	60	17	95	52	9	87	44	1	79	36	114	71	28
79	118	76	34	113	71	29	108	66	24	103	61	19	98	56	14	93	51	9	88	46	4	83	41	120	78
80	23	103	62	21	101	60	19	99	58	17	97	56	15	95	54	13	93	52	11	91	50	9	89	48	7
81	49	9	90	50	10	91	51	11	92	52	12	93	53	13	94	54	14	95	55	15	96	56	16	97	57
82	75	36	118	79	40	1	83	44	5	87	48	9	91	52	13	95	56	17	99	60	21	103	64	25	107
83	101	63	25	108	70	32	115	77	39	1	84	46	8	91	53	15	98	60	22	105	67	29	112	74	36
84	6	90	53	16	100	63	26	110	73	36	120	83	46	9	93	56	19	103	66	29	113	76	39	2	86
85	32	117	81	45	9	94	58	22	107	71	35	120	84	48	12	97	61	25	110	74	38	2	87	51	15
86	58	23	109	74	39	4	90	55	20	106	71	36	1	87	52	17	103	68	33	119	84	49	14	100	65
87	84	50	16	103	69	35	1	88	54	20	107	73	39	5	92	58	24	111	77	43	9	96	62	28	115
88	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44
89	15	104	72	40	8	97	65	33	1	90	58	26	115	83	51	19	108	76	44	12	101	69	37	5	94
90	41	10	100	69	38	7	97	66	35	4	94	63	32	1	91	60	29	119	88	57	26	116	85	54	23
91	67	37	7	98	68	38	8	99	69	39	9	100	70	40	10	101	71	41	11	102	72	42	12	103	73
92	93	64	35	6	98	69	40	11	103	74	45	16	108	79	50	21	113	84	55	26	118	89	60	31	2
93	119	91	63	35	7	100	72	44	16	109	81	53	25	118	90	62	34	6	99	71	43	15	108	80	52
94	24	118	91	64	37	10	104	77	50	23	117	90	63	36	9	103	76	49	22	116	89	62	35	8	102
95	50	24	119	93	67	41	15	110	84	58	32	6	101	75	49	23	118	92	66	40	14	109	83	57	31
96	76	51	26	1	97	72	47	22	118	93	68	43	18	114	89	64	39	14	110	85	60	35	10	106	81
97	102	78	54	30	6	103	79	55	31	7	104	80	56	32	8	105	81	57	33	9	106	82	58	34	10
98	7	105	82	59	36	13	111	88	65	42	19	117	94	71	48	25	2	100	77	54	31	8	106	83	60
99	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110
100	59	38	17	117	96	75	54	33	12	112	91	70	49	28	7	107	86	65	44	23	2	102	81	60	39

°	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	4	80	35	111	66	21	97	52	7	83	38	114	69	24	100	55	10	86	41	117	72	27	103	58	13
77	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88
78	106	63	20	98	55	12	90	47	4	82	39	117	74	31	109	66	23	101	58	15	93	50	7	85	42
79	36	115	73	31	110	68	26	105	63	21	100	58	16	95	53	11	90	48	6	85	43	1	80	38	117
80	87	46	5	85	44	3	83	42	1	81	40	120	79	38	118	77	36	116	75	34	114	73	32	112	71
81	17	98	58	18	99	59	19	100	60	20	101	61	21	102	62	22	103	63	23	104	64	24	105	65	25
82	68	29	111	72	33	115	76	37	119	80	41	2	84	45	6	88	49	10	92	53	14	96	57	18	100
83	119	81	43	5	88	50	12	95	57	19	102	64	26	109	71	33	116	78	40	2	85	47	9	92	54
84	49	12	96	59	22	106	69	32	116	79	42	5	89	52	15	99	62	25	109	72	35	119	82	45	8
85	100	64	28	113	77	41	5	90	54	18	103	67	31	116	80	44	8	93	57	21	106	70	34	119	83
86	30	116	81	46	11	97	62	27	113	78	43	8	94	59	24	110	75	40	5	91	56	21	107	72	37
87	81	47	13	100	66	32	119	85	51	17	104	70	36	2	89	55	21	108	74	40	6	93	59	25	112
88	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66
89	62	30	119	87	55	23	112	80	48	16	105	73	41	9	98	66	34	2	91	59	27	116	84	52	20
90	113	82	51	20	110	79	48	17	107	76	45	14	104	73	42	11	101	70	39	8	98	67	36	5	95
91	43	13	104	74	44	14	105	75	45	15	106	76	46	16	107	77	47	17	108	78	48	18	109	79	49
92	94	65	36	7	99	70	41	12	104	75	46	17	109	80	51	22	114	85	56	27	119	90	61	32	3
93	24	117	89	61	33	5	98	70	42	14	107	79	51	23	116	88	60	32	4	97	69	41	13	106	78
94	75	48	21	115	88	61	34	7	101	74	47	20	114	87	60	33	6	100	73	46	19	113	86	59	32
95	5	100	74	48	22	117	91	65	39	13	108	82	56	30	4	99	73	47	21	116	90	64	38	12	107
96	56	31	6	102	77	52	27	2	98	73	48	23	119	94	69	44	19	115	90	65	40	15	111	86	61
97	107	83	59	35	11	108	84	60	36	12	109	85	61	37	13	110	86	62	38	14	111	87	63	39	15
98	37	14	112	89	66	43	20	118	95	72	49	26	3	101	78	55	32	9	107	84	61	38	15	113	90
99	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44
100	18	118	97	76	55	34	13	113	92	71	50	29	8	108	87	66	45	24	3	103	82	61	40	19	119

°	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
76	89	44	120	75	30	106	61	16	92	47	2	78	33	109	64	19	95	50	5	81	36	112	67	22	98
77	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77
78	120	77	34	112	69	26	104	61	18	96	53	10	88	45	2	80	37	115	72	29	107	64	21	99	56
79	75	33	112	70	28	107	65	23	102	60	18	97	55	13	92	50	8	87	45	3	82	40	119	77	35
80	30	110	69	28	108	67	26	106	65	24	104	63	22	102	61	20	100	59	18	98	57	16	96	55	14
81	106	66	26	107	67	27	108	68	28	109	69	29	110	70	30	111	71	31	112	72	32	113	73	33	114
82	61	22	104	65	26	108	69	30	112	73	34	116	77	38	120	81	42	3	85	46	7	89	50	11	93
83	16	99	61	23	106	68	30	113	75	37	120	82	44	6	89	51	13	96	58	20	103	65	27	110	72
84	92	55	18	102	65	28	112	75	38	1	85	48	11	95	58	21	105	68	31	115	78	41	4	88	51
85	47	11	96	60	24	109	73	37	1	86	50	14	99	63	27	112	76	40	4	89	53	17	102	66	30
86	2	88	53	18	104	69	34	120	85	50	15	101	66	31	117	82	47	12	98	63	28	114	79	44	9
87	78	44	10	97	63	29	116	82	48	14	101	67	33	120	86	52	18	105	71	37	3	90	56	22	109
88	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88
89	109	77	45	13	102	70	38	6	95	63	31	120	88	56	24	113	81	49	17	106	74	42	10	99	67
90	64	33	2	92	61	30	120	89	58	27	117	86	55	24	114	83	52	21	111	80	49	18	108	77	46
91	19	110	80	50	20	111	81	51	21	112	82	52	22	113	83	53	23	114	84	54	24	115	85	55	25
92	95	66	37	8	100	71	42	13	105	76	47	18	110	81	52	23	115	86	57	28	120	91	62	33	4
93	50	22	115	87	59	31	3	96	68	40	12	105	77	49	21	114	86	58	30	2	95	67	39	11	104
94	5	99	72	45	18	112	85	58	31	4	98	71	44	17	111	84	57	30	3	97	70	43	16	110	83
95	81	55	29	3	98	72	46	20	115	89	63	37	11	106	80	54	28	2	97	71	45	19	114	88	62
96	36	11	107	82	57	32	7	103	78	53	28	3	99	74	49	24	120	95	70	45	20	116	91	66	41
97	112	88	64	40	16	113	89	65	41	17	114	90	66	42	18	115	91	67	43	19	116	92	68	44	20
98	67	44	21	119	96	73	50	27	4	102	79	56	33	10	108	85	62	39	16	114	91	68	45	22	120
99	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99
100	98	77	56	35	14	114	93	72	51	30	9	109	88	67	46	25	4	104	83	62	41	20	120	99	78

°	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
76	53	8	84	39	115	70	25	101	56	11	87	42	118	73	28	104	59	14	90	45
77	33	110	66	22	99	55	11	88	44	0	77	33	110	66	22	99	55	11	88	44
78	13	91	48	5	83	40	118	75	32	110	67	24	102	59	16	94	51	8	86	43
79	114	72	30	109	67	25	104	62	20	99	57	15	94	52	10	89	47	5	84	42
80	94	53	12	92	51	10	90	49	8	88	47	6	86	45	4	84	43	2	82	41
81	74	34	115	75	35	116	76	36	117	77	37	118	78	38	119	79	39	120	80	40
82	54	15	97	58	19	101	62	23	105	66	27	109	70	31	113	74	35	117	78	39
83	34	117	79	41	3	86	48	10	93	55	17	100	62	24	107	69	31	114	76	38
84	14	98	61	24	108	71	34	118	81	44	7	91	54	17	101	64	27	111	74	37
85	115	79	43	7	92	56	20	105	69	33	118	82	46	10	95	59	23	108	72	36
86	95	60	25	111	76	41	6	92	57	22	108	73	38	3	89	54	19	105	70	35
87	75	41	7	94	60	26	113	79	45	11	98	64	30	117	83	49	15	102	68	34
88	55	22	110	77	44	11	99	66	33	0	88	55	22	110	77	44	11	99	66	33
89	35	3	92	60	28	117	85	53	21	110	78	46	14	103	71	39	7	96	64	32
90	15	105	74	43	12	102	71	40	9	99	68	37	6	96	65	34	3	93	62	31
91	116	86	56	26	117	87	57	27	118	88	58	28	119	89	59	29	120	90	60	30
92	96	67	38	9	101	72	43	14	106	77	48	19	111	82	53	24	116	87	58	29
93	76	48	20	113	85	57	29	1	94	66	38	10	103	75	47	19	112	84	56	28
94	56	29	2	96	69	42	15	109	82	55	28	1	95	68	41	14	108	81	54	27
95	36	10	105	79	53	27	1	96	70	44	18	113	87	61	35	9	104	78	52	26
96	16	112	87	62	37	12	108	83	58	33	8	104	79	54	29	4	100	75	50	25
97	117	93	69	45	21	118	94	70	46	22	119	95	71	47	23	120	96	72	48	24
98	97	74	51	28	5	103	80	57	34	11	109	86	63	40	17	115	92	69	46	23
99	77	55	33	11	110	88	66	44	22	0	99	77	55	33	11	110	88	66	44	22
100	57	36	15	115	94	73	52	31	10	110	89	68	47	26	5	105	84	63	42	21

°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
101	0	101	81	61	41	21	1	102	82	62	42	22	2	103	83	63	43	23	3	104	84	64	44	24	4	105
102	0	102	83	64	45	26	7	109	90	71	52	33	14	116	97	78	59	40	21	2	104	85	66	47	28	9
103	0	103	85	67	49	31	13	116	98	80	62	44	26	8	111	93	75	57	39	21	3	106	88	70	52	34
104	0	104	87	70	53	36	19	2	106	89	72	55	38	21	4	108	91	74	57	40	23	6	110	93	76	59
105	0	105	89	73	57	41	25	9	114	98	82	66	50	34	18	2	107	91	75	59	43	27	11	116	100	84
106	0	106	91	76	61	46	31	16	1	107	92	77	62	47	32	17	2	108	93	78	63	48	33	18	3	109
107	0	107	93	79	65	51	37	23	9	116	102	88	74	60	46	32	18	4	111	97	83	69	55	41	27	13
108	0	108	95	82	69	56	43	30	17	4	112	99	86	73	60	47	34	21	8	116	103	90	77	64	51	38
109	0	109	97	85	73	61	49	37	25	13	1	110	98	86	74	62	50	38	26	14	2	111	99	87	75	63
110	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88
111	0	111	101	91	81	71	61	51	41	31	21	11	1	112	102	92	82	72	62	52	42	32	22	12	2	113
112	0	112	103	94	85	76	67	58	49	40	31	22	13	4	116	107	98	89	80	71	62	53	44	35	26	17
113	0	113	105	97	89	81	73	65	57	49	41	33	25	17	9	1	114	106	98	90	82	74	66	58	50	42
114	0	114	107	100	93	86	79	72	65	58	51	44	37	30	23	16	9	2	116	109	102	95	88	81	74	67
115	0	115	109	103	97	91	85	79	73	67	61	55	49	43	37	31	25	19	13	7	1	116	110	104	98	92
116	0	116	111	106	101	96	91	86	81	76	71	66	61	56	51	46	41	36	31	26	21	16	11	6	1	117
117	0	117	113	109	105	101	97	93	89	85	81	77	73	69	65	61	57	53	49	45	41	37	33	29	25	21
118	0	118	115	112	109	106	103	100	97	94	91	88	85	82	79	76	73	70	67	64	61	58	55	52	49	46
119	0	119	117	115	113	111	109	107	105	103	101	99	97	95	93	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	71
120	0	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97	96

°	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
101	85	65	45	25	5	106	86	66	46	26	6	107	87	67	47	27	7	108	88	68	48	28	8	109	89
102	111	92	73	54	35	16	118	99	80	61	42	23	4	106	87	68	49	30	11	113	94	75	56	37	18
103	16	119	101	83	65	47	29	11	114	96	78	60	42	24	6	109	91	73	55	37	19	1	104	86	68
104	42	25	8	112	95	78	61	44	27	10	114	97	80	63	46	29	12	116	99	82	65	48	31	14	118
105	68	52	36	20	4	109	93	77	61	45	29	13	118	102	86	70	54	38	22	6	111	95	79	63	47
106	94	79	64	49	34	19	4	110	95	80	65	50	35	20	5	111	96	81	66	51	36	21	6	112	97
107	120	106	92	78	64	50	36	22	8	115	101	87	73	59	45	31	17	3	110	96	82	68	54	40	26
108	25	12	120	107	94	81	68	55	42	29	16	3	111	98	85	72	59	46	33	20	7	115	102	89	76
109	51	39	27	15	3	112	100	88	76	64	52	40	28	16	4	113	101	89	77	65	53	41	29	17	5
110	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55
111	103	93	83	73	63	53	43	33	23	13	3	114	104	94	84	74	64	54	44	34	24	14	4	115	105
112	8	120	111	102	93	84	75	66	57	48	39	30	21	12	3	115	106	97	88	79	70	61	52	43	34
113	34	26	18	10	2	115	107	99	91	83	75	67	59	51	43	35	27	19	11	3	116	108	100	92	84
114	60	53	46	39	32	25	18	11	4	118	111	104	97	90	83	76	69	62	55	48	41	34	27	20	13
115	86	80	74	68	62	56	50	44	38	32	26	20	14	8	2	117	111	105	99	93	87	81	75	69	63
116	112	107	102	97	92	87	82	77	72	67	62	57	52	47	42	37	32	27	22	17	12	7	2	118	113
117	17	13	9	5	1	118	114	110	106	102	98	94	90	86	82	78	74	70	66	62	58	54	50	46	42
118	43	40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	119	116	113	110	107	104	101	98	95	92
119	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
120	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72	71

°	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
101	69	49	29	9	110	90	70	50	30	10	111	91	71	51	31	11	112	92	72	52	32	12	113	93	73
102	120	101	82	63	44	25	6	108	89	70	51	32	13	115	96	77	58	39	20	1	103	84	65	46	27
103	50	32	14	117	99	81	63	45	27	9	112	94	76	58	40	22	4	107	89	71	53	35	17	120	102
104	101	84	67	50	33	16	120	103	86	69	52	35	18	1	105	88	71	54	37	20	3	107	90	73	56
105	31	15	120	104	88	72	56	40	24	8	113	97	81	65	49	33	17	1	106	90	74	58	42	26	10
106	82	67	52	37	22	7	113	98	83	68	53	38	23	8	114	99	84	69	54	39	24	9	115	100	85
107	12	119	105	91	77	63	49	35	21	7	114	100	86	72	58	44	30	16	2	109	95	81	67	53	39
108	63	50	37	24	11	119	106	93	80	67	54	41	28	15	2	110	97	84	71	58	45	32	19	6	114
109	114	102	90	78	66	54	42	30	18	6	115	103	91	79	67	55	43	31	19	7	116	104	92	80	68
110	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22
111	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	116	106	96	86	76	66	56	46	36	26	16	6	117	107	97
112	25	16	7	119	110	101	92	83	74	65	56	47	38	29	20	11	2	114	105	96	87	78	69	60	51
113	76	68	60	52	44	36	28	20	12	4	117	109	101	93	85	77	69	61	53	45	37	29	21	13	5
114	6	120	113	106	99	92	85	78	71	64	57	50	43	36	29	22	15	8	1	115	108	101	94	87	80
115	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	118	112	106	100	94	88	82	76	70	64	58	52	46	40	34
116	108	103	98	93	88	83	78	73	68	63	58	53	48	43	38	33	28	23	18	13	8	3	119	114	109
117	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2	119	115	111	107	103	99	95	91	87	83	79	75	71	67	63
118	89	86	83	80	77	74	71	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41	38	35	32	29	26	23	20	17
119	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	120	118	116	114	112	110	108	106	104	102	100	98	96	94	92
120	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46

°	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	53	33	13	114	94	74	54	34	14	115	95	75	55	35	15	116	96	76	56	36	16	117	97	77	57
102	8	110	91	72	53	34	15	117	98	79	60	41	22	3	105	86	67	48	29	10	112	93	74	55	36
103	84	66	48	30	12	115	97	79	61	43	25	7	110	92	74	56	38	20	2	105	87	69	51	33	15
104	39	22	5	109	92	75	58	41	24	7	111	94	77	60	43	26	9	113	96	79	62	45	28	11	115
105	115	99	83	67	51	35	19	3	108	92	76	60	44	28	12	117	101	85	69	53	37	21	5	110	94
106	70	55	40	25	10	116	101	86	71	56	41	26	11	117	102	87	72	57	42	27	12	118	103	88	73
107	25	11	118	104	90	76	62	48	34	20	6	113	99	85	71	57	43	29	15	1	108	94	80	66	52
108	101	88	75	62	49	36	23	10	118	105	92	79	66	53	40	27	14	1	109	96	83	70	57	44	31
109	56	44	32	20	8	117	105	93	81	69	57	45	33	21	9	118	106	94	82	70	58	46	34	22	10
110	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110
111	87	77	67	57	47	37	27	17	7	118	108	98	88	78	68	58	48	38	28	18	8	119	109	99	89
112	42	33	24	15	6	118	109	100	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1	113	104	95	86	77	68
113	118	110	102	94	86	78	70	62	54	46	38	30	22	14	6	119	111	103	95	87	79	71	63	55	47
114	73	66	59	52	45	38	31	24	17	10	3	117	110	103	96	89	82	75	68	61	54	47	40	33	26
115	28	22	16	10	4	119	113	107	101	95	89	83	77	71	65	59	53	47	41	35	29	23	17	11	5
116	104	99	94	89	84	79	74	69	64	59	54	49	44	39	34	29	24	19	14	9	4	120	115	110	105
117	59	55	51	47	43	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	120	116	112	108	104	100	96	92	88	84
118	14	11	8	5	2	120	117	114	111	108	105	102	99	96	93	90	87	84	81	78	75	72	69	66	63
119	90	88	86	84	82	80	78	76	74	72	70	68	66	64	62	60	58	56	54	52	50	48	46	44	42
120	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21

°	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
101	37	17	118	98	78	58	38	18	119	99	79	59	39	19	120	100	80	60	40	20
102	17	119	100	81	62	43	24	5	107	88	69	50	31	12	114	95	76	57	38	19
103	118	100	82	64	46	28	10	113	95	77	59	41	23	5	108	90	72	54	36	18
104	98	81	64	47	30	13	117	100	83	66	49	32	15	119	102	85	68	51	34	17
105	78	62	46	30	14	119	103	87	71	55	39	23	7	112	96	80	64	48	32	16
106	58	43	28	13	119	104	89	74	59	44	29	14	120	105	90	75	60	45	30	15
107	38	24	10	117	103	89	75	61	47	33	19	5	112	98	84	70	56	42	28	14
108	18	5	113	100	87	74	61	48	35	22	9	117	104	91	78	65	52	39	26	13
109	119	107	95	83	71	59	47	35	23	11	120	108	96	84	72	60	48	36	24	12
110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11
111	79	69	59	49	39	29	19	9	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
112	59	50	41	32	23	14	5	117	108	99	90	81	72	63	54	45	36	27	18	9
113	39	31	23	15	7	120	112	104	96	88	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8
114	19	12	5	119	112	105	98	91	84	77	70	63	56	49	42	35	28	21	14	7
115	120	114	108	102	96	90	84	78	72	66	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6
116	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
117	80	76	72	68	64	60	56	52	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
118	60	57	54	51	48	45	42	39	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
119	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
120	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1