SIFAT-SIFAT INTEGRAL PERRON DITINJAU DARI INTEGRAL DARBOUX PADA FUNGSI KONTINU $[a, b]$

SKRIPSI

OLEH
ZAHROTUL FAJRIYAH
NIM. 15610083

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SIFAT-SIFAT INTEGRAL PERRON DITINJAU DARI INTEGRAL DARBOUX PADA FUNGSI KONTINU $[a, b]$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Zahrotul Fajriyah
NIM. 15610083

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

SIFAT-SIFAT INTEGRAL PERRON DITINJAU DARI INTEGRAL DARBOUX PADA FUNGSI KONTINU $[a, b]$

SKRIPSI

Oleh
Zahrotul Fajriyah
NIM. 15610083

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 25 November 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II
Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 195710051982031006	NIDT. 19870218201608011056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005

SIFAT-SIFAT INTEGRAL PERRON DITINJAU DARI INTEGRAL DARBOUX PADA FUNGSI KONTINU $[a, b]$

SKRIPSI

Oleh
Zahrotul Fajriyah
NIM. 15610083

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 25 November 2021

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Ketua Penguji	: Juhari, S.Pd., M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zahrotul Fajriyah

NIM : 15610083

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-sifat Integral Perron Ditinjau dari Integral Darboux pada Fungsi Kontinu $[a, b]$.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Sidoarjo, 25 November 2021

Yang membuat pernyataan

Zahrotul Fajriyah

NIM. 15610083

MOTTO

"... Sesungguhnya Allah Maha Pengasih lagi Maha Penyayang kepada manusia"

(QS. Al-Baqarah ayat 143)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrohmaanirrohiim

Alhamdulillahi Robbil'alamin, dengan mengucap syukur kepada Allah SWT., Penulis mempersembahkan skripsi ini untuk kedua orang tua, Moh. Yudi dan Eni Suliyati, serta keluarga yang selalu memberikan doa, dukungan dan lain sebagainya yang tidak mungkin bisa penulis balas dengan apapun.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh

Segala puji bagi Allah SWT. atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari beberapa pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penguji utama yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga bagi penulis.
5. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Juhari, S.Pd., M.Si, selaku ketua penguji yang telah memberikan saran, arahan, dan ilmunya kepada penulis.

7. Seluruh dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen di Jurusan Matematika yang telah memberi banyak pengalaman dan ilmu kepada penulis.
8. Kedua orang tua dan saudara-saudara tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 (LATTICE) terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan yang terukir rapi dan abadi.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah SWT. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya, skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Aamiin.*

Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Sidoarjo, 25 November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

No	Simbol		Keterangan
1	$[\dots]$		Interval tertutup
2	$\lVert\dots\rVert$		Norm
3	sup		Supremum
4	inf		Infimum
5	Q		Simbol partisi
6	$U(Q;f)$		Jumlah Darboux atas
7	$L(Q;f)$		Jumlah Darboux bawah
8	$S(Q;f)$		Jumlahan Darboux
9	$U(f)$		Integral Darboux atas
10	$L(f)$		Integral Darboux bawah
11	$D\int_a^b \dots$		Integral Darboux
12	$D[a,b]$		Simbol integral Darboux
13	$\omega(Q;f)$		Simbol integral Darboux
14	A		Hasil integral
15	$D^+ \dots (x)$		Turunan kanan atas
16	$D_+ \dots (x)$		Turunan kanan bawah
17	$D^- \dots (x)$		Turunan kiri atas
18	$D_- \dots (x)$		Turunan kiri bawah
19	$\overline{D} \dots (x)$		Turunan atas
20	$\underline{D} \dots (x)$		Turunan bawah
21	U_b^a		Fungsi mayor pada $[a,b]$
22	V_b^a		Fungsi minor pada $[a,b]$
23	$P\int_a^b \dots$		Integral Perron
24	$P[a,b]$		Simbol integral Perron
25	$\omega(F,[c,d])$		Simbol integral Perron

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Fajriyah, Zahrotul. 2021. **Sifat-sifat Integral Perron Ditinjau dari Integral Darboux pada Fungsi Kontinu $[a, b]$.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I). Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II). Muhammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Fungsi kontinu, Partisi, Integral Darboux, Integral Perron, Sifat-sifat Integral Perron.

Integral Darboux merupakan pengembangan integral Riemann. Integral Darboux memodifikasi definisi integral Riemann dengan mendefinisikan Jumlah Darboux atas dan jumlah Darboux bawah. Integral Perron merupakan pengembangan integral Lebesgue. Integral Perron mendefinisikan fungsi mayor dan fungsi minor untuk menginteralkan suatu fungsi yang tak terintegralkan Lebesgue. Sama halnya dengan integral Darboux, integral Perron juga memiliki sifat-sifat dasar integral di antaranya ketunggalan, kelinieran, dan keterbatasan. Integral Darboux dan integral Perron terbukti ekuivalen. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji sifat-sifat integral Perron ditinjau dari integral Darboux, dengan menganalisis dan meninjau kembali sifat-sifat integral Perron menggunakan partisi, definisi, dan teorema-teorema integral Darboux. Sehingga terbukti bahwa sifat ketunggalan, sifat kelinieran, dan sifat keterbatasan berlaku pada integral Perron.

ABSTRACT

Fajriyah, Zahrotul. 2021. **On the Properties of the Perron Integral in Term of the Darboux Integral on the Continuous Function on $[a, b]$**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I). Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II). Muhammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Continuous Functions, Partitions, Darboux Integrals, Perron Integrals, Properties of Perron Integrals.

The Darboux integral is a development of the Riemann integral. The Darboux integral modifies the definition of the Riemann integral by defining the upper Darboux sum and the lower Darboux sum. The Perron integral is a development of the Lebesgue integral. Perron integral defines a major function and a minor function to integrate a function that is not a Lebesgue integral. Similar to the Darboux integral, the Perron integral also has basic integral properties including singularity, linearity, and limitations. The Darboux integral and the Perron integral are shown to be equivalent. Therefore, in this study, the properties of the Perron integral will be studied in terms of the Darboux integral, by analyzing and reviewing the properties of Perron integrals using partitions, definitions, and theorems of Darboux integrals. So it is proven that the singularity, linearity, and finiteness properties apply to the Perron integral.

ملخص

الفجريّة ، زهرة. ٢٠٢١. خصائص تكامل بيرون (Perron) من تكامل داربو (Darboux) في الدوال المستمرة [أ ، ب]. الرسالة. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية في مالانج. المشرف: (١) البروفيسور، الدكتور، ترمذي ،الماجستير, الحاخ. (٢) محمد نافع الجوهري, الماجستير.

الكلمة الرئيسية: الدوال المستمرة، الأقسام، تكاملات داربو، تكاملات بيرون، خصائص تكاملات بيرون.

تكامل داربو (Darboux) هو تطوير تكامل من ريمان (Riemann). يعدل تكامل داربو (Darboux) تعريف تكامل ريمان (Riemann) من خلال تحديد مجموع داربو (Darboux) العلوي ومجموع داربو السفلي. تكامل بيرون (Perron) هو تطوير تكامل من ليبيسق (Lebesgue). يشرح تكامل بيرون (Perron) الدالة الرئيسية و الدالة الثانوية لدمج دالة ليست جزءا لا يتجزأ من ليبيسق (Lebesgue). وسواء على غرار تكامل داربو (Darboux)، فإن تكامل بيرون (Perron) له خصائص تكامل اساسية ايضا مثل من التفرد والخطية والقيود. تم إظهار تكامل داربو (Darboux) وتكامل بيرون (Perron) ليكونا متكافئين. لذلك، في هذه الدراسة، سيتم دراسة خصائص تكامل بيرون (Perron) من حيث تكامل داربو (Darboux) من خلال تحليل ومراجعة خصائص تكاملات بيرون (Perron) باستخدام اقسام وتعريفات ونظريات تكاملات داربو (Darboux). لذلك ثبت أن خصائص التفرد والخطية والحدودية تنطبق على تكامل بيرون (Perron) .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam matematika kita mengenal kalkulus yang merupakan ilmu dasar Matematika. Salah satu materi yang ada di kalkulus adalah integral. Integral dikenal sejak di sekolah menengah atas yang sederajat sebagai salah satu materi matematika. Pengenalan integral di tingkat tersebut masih bersifat teknis, yaitu menentukan nilai integral fungsi f pada $[a, b]$, disertai pemakaian integral untuk penghitungan luas daerah diantara dua kurva dan volume benda putaran.

Perhitungan volume dan luas yang merupakan fungsi utama dari kalkulus integral bisa ditelusuri kembali pada Papirus Moskow Mesir (1800SM) di mana orang Mesir menghitung volume dari frustrum pyramid. Archimedes kemudian mengembangkan pemikiran ini lebih jauh dan menciptakan heuristic yang menyerupai kalkulus integral (Alhidayah, 2009).

Sekitar tahun 1670, Newton dan Lebienz berhasil mengembangkan Teorema Fundamental (Sinay&Talakua, 2012). Teorema ini menghubungkan nilai dari anti derivative dengan integral tertentu (Alhidayah, 2009). Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu (Sinay&Talakua, 2012).

Definisi yang digunakan oleh Cauchy tersebut diperhalus oleh Benhard Riemann pada tahun 1854. Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat mudah untuk didefinisikan, yang disebut integral Riemann.

Selanjutnya dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah, Darboux berhasil memodifikasi integral Riemann pada tahun 1875, sehingga terdefinisi integral baru yang ekuivalen dengan integral Riemann, yang disebut dengan integral Darboux (Sinay&Talakua, 2012).

Namun teori integral ini masih memiliki kekurangan. Pada tahun 1902, ditemukan suatu pendekatan baru yang dapat mengatasi kekurangan yang dimiliki integral sebelumnya oleh Henry Lebesgue. Metode integral tersebut sering disebut integral Lebesgue (Sinay&Talakua, 2012). Definisi integral Lebesgue menggunakan teori ukuran, sehingga fungsi yang tidak terintegralkan Riemann dapat terintegralkan oleh lebesgue. Namun integral Lebesgue masih mempunyai kekurangan, yaitu mengharuskan F sebagai fungsi yang kontinu mutlak, agar F' terintegralkan Lebesgue, sehingga integral Lebesgue dari suatu interval tidak secara lengkap menyelesaikan masalah rekontruksi fungsi primitive dari turunannya.

Integral Lebesgue dikembangkan oleh Perron yang dalam pendefinisiannya melibatkan fungsi mayor dan fungsi minor. Selain itu, Denjoy melakukan pengembangan dari integral Lebesgue dengan mensyaratkan adanya suatu anti turunan dari suatu fungsi yang merupakan fungsi yang kontinu mutlak diperumum agar fungsi tersebut terintegralkan Denjoy, sehingga terdapat keterkaitan dan telah dibuktikan bahwa integral Denjoy dan integral Perron ekuivalen (Pratama, 2020)

Dalam penelitian lain yang dilakukan oleh Dimas Adi Pratama, telah dibahas tentang bagaimana pendekatan integral Darboux dan integral Denjoy-Perron. Dalam penelitian tersebut juga telah dibuktikan bahwa integral Darboux dan integral Perron ekuivalen. Karena keduanya ekuivalen, maka penulis akan menggunakan partisi, definisi, dan teorema-teorema integral Darboux untuk membuktikan sifat-sifat integral Perron.

Dalam penelitian ini penulis mengambil Batasan yang sederhana, di mana dijelaskan dalam QS. Al-Maidah ayat 101 yang berbunyi:

يَا أَيُّهَا الَذِيْنَ آمَنُوا لاَ تَسْأَلُوا عَنْ أَشْيَاءَ إِنْ تُبْدَ لَكُمْ تَسُؤْكُمْ وَإِنْ تَسْأَلُوا عَنْهَا حِينَ يُنَزَّلُ الْقُرآنُ تُبْدَ لَكُمْ عَفَا اللَّهُ عَنْهَا وَاللَّهُ غَفُورٌ حَلِيمٌ

“Wahai orang-orang yang beriman! Janganlah kamu menanyakan (kepada Nabimu) hal-hal yang jika diterangkan kepada kamu, (justru) akan menyusahkan kamu. Jika kamu menanyakannya ketika al-Qur’an sedang diturunkan, (niscaya) akan diterangkan kepadamu, Allah telah memaafkan (kamu) tentang hal itu. Dan Allah Maha Pengampun, Maha Penyantun.”

Menurut Ibn Kasir di dalam “Tafsir Ibn Kasir” (Juz 3, halaman 203), ayat tersebut merupakan pendidikan dari Allah bagi hamba-hamba-Nya dan larangan untuk bertanya mengenai sesuatu yang tidak berfaedah. Hal ini ini karena jika dijelaskan mengenai hal tersebut bisa jadi menjadi keburukan dan memberatkan bagi orang mukmin yang mendengarnya.

Oleh karena itu, dalam penulisan ini akan membahas beberapa sifat-sifat integral Perron menggunakan partisi, definisi, dan teorema-teorema integral Darboux

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dalam pembahasan ini akan diajukan rumusan masalah bagaimana sifat-sifat integral Perron ditinjau dari integral Darboux?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan penulisan ini adalah untuk mengidentifikasi sifat-sifat integral Perron ditinjau dari integral Darboux.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penulisan ini, permasalahan hanya dibatasi pada sifat-sifat dasar integral Perron untuk fungsi kontinu $[a, b]$ di $\mathbb{R}$, yaitu sifat ketunggalan, sifat kelinieran, dan sifat keterbatasan, yang akan ditinjau menggunakan definisi integral Darboux.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah

1. Bagi peniliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai Integral Perron dan Integral Darboux.
2. Bagi pengamat matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya bidang analisis.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dan menelaah serta memahami skripsi ini yang terdiri dari empat bab dan masing-masing bab mempunyai sub-bab dengan rumusannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori

Kajian teori dalam bab ini menjelaskan tentang teori-teori dan literatur pendukung objek permasalahan yang dikaji, antara lain adalah Partisi, Fungsi Kontinu, Integral Darboux, Sifat-sifat Integral Darboux, Integral Perron, Sifat-sifat Integral Perron, Ekuivalensi Integral Darboux dengan Integral Perron, dan Integrasi dalam Al-Qur’an.

Bab III Metode Penelitian

Metode penelitian dalam bab ini menjelaskan tentang metode kajian pustaka dengan mendalami, menelaah, dan mengidentifikasi sumber kepustakaan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

Bab IV Pembahasan

Pembahasan dalam bab ini tersusun langkah-langkah penyelesaian penelitian dengan membuktikan sifat-sifat integral Perron menggunakan partisi, definisi, dan teorema-teorema yang berlaku di integral Darboux.

Bab V Penutup

Penutup berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah dilakukan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

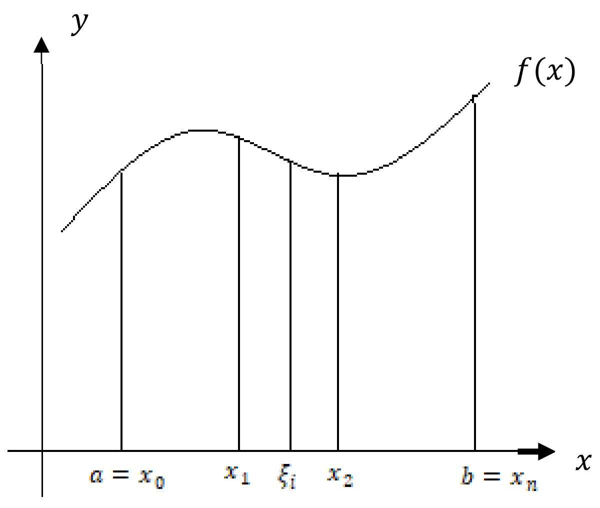
Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, dan lemma yang dibutuhkan penulis dalam menyelesaikan rumusan masalah.

2.1 Partisi

Diketahui fungsi positif $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Jika a dan b adalah bilangan riil dengan $a < b$ maka terdapat bilangan riil x_1 sehigga $a < x_1 < b$. Karena $x_1 < b$ tentu terdapat bilangan riil x_2 sehingga memenuhi $x_1 < x_2 < b$. Karena $x_2 < b$ tentu terdapat bilangan riil x_3 sehingga memenuhi $x_2 < x_3 < b$. Proses ini jika diteruskan akan diperoeh bilangan-bilangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sehinga $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_n = b$. Jadi untuk setiap interval tertutup $[a,b]$ dapat dibentuk himpunan

$$Q = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

(Sinay&Talakua, 2012)



Gambar 1. Partisi 1

Definisi 1. *Untuk setiap bilangan riil a dan b dengan $a < b$ himpunan terturut*

$$Q = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

Dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ dan $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ disebut partisi-Q pada $[a, b]$.

Titik x_i dengan $i = 0,1,2, \dots, n$ pada Q disebut titik partisi *(partition point)* dan $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ disebut titik tag *(tag point).*

Definisi 2. *Norm partisi Q dinotasikan $\|Q\|$ didefinisikan sebagai panjang interval yang terbentuk dari partisi Q. Jadi $\|Q\| = \sup\{\Delta x_i \mid i = 1,2,3, \dots, n\}$ dengan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$* (Thobirin, 2015).

Definisi 3. *Suatu partisi Q_1 pada $[a, b]$ disebut penghalus partisi Q_2 pada $[a, b]$ jika $Q_2 \subset Q_1$, artinya setiap titik partisi dalam Q_2 termuat juga di dalam* $Q_1 (Q_2\ lebih\ halus\ dari\ Q_1)$ (Sinay&Talakua, 2012).

Teorema 4. *Untuk setiap bilangan real $\delta > 0$ terdapat partisi Q pada $[a, b]$ sehingga $\|Q\| < \delta$.*

Bukti

Diberikan interval tertutup $[a, b]$. Karena $a < b$, maka berdasarkan sifat urutan bilangan real diperoleh $b - a > 0$. Oleh karenanya sembarang $\delta > 0$ dan berdasarkan sifat Archimedes, terdapat bilangan asli n sehingga

$$\frac{b - a}{n} < \delta$$

Jadi pada interval $[a, b]$ dapat dibuat partisi $Q = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ demikian sehingga $\|Q\| < \delta$ (Thobirin, 2015).

Teorema 5. *Misalkan f_1, f_2, masing-masing merupakan fungsi bernilai riil positif pada $[a, b]$, dengan $f = \min\{f_1, f_2\}$. Jika Q partisi-f pada $[a, b]$ maka Q juga merupakan partisi-f_1 dan partisi-f_2 pada $[a, b]$.*

Bukti:

Misalkan Q *partisi*-f *pada* $[a, b]$ *yang diberikan oleh* $Q = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ dengan $\xi_i - f < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + f; i = 1,2, \dots, n$.

Karena $f = \min\{f_1, f_2\}$ *maka* $f \leq f_1 atau\ f \leq f_2$.

Akibatnya $\xi_i - f_1 \leq \xi_i - f < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + f \leq \xi_i + f_1$.

Dan juga $\xi_i - f_2 \leq \xi_i - f < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + f \leq \xi_i + f_2$. Untuk $i = 1,2, \dots, n$.

Jadi Q merupakan partisi-f_1 dan partisi f_2 pada $[a, b]$ dan terbukti pula bahwa Q partisi-f lebih halus dari partisi-f_1 dan partisi-f_2. (Sinay&Talakua, 2012).

2.2 Fungsi Kontinu

Berikut akan dijelaskan definisi dan teorema dari fungsi kontinu.

Definisi 6. *f dikatakan kontinu pada x_0 jika $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ atau bisa dikatakan untuk $\varepsilon > 0$ maka $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ di mana $|x - x_0| < \delta$.*

Dari definisi di atas maka dapat dikatakan terdapat tiga syarat kontinu terpenuhi, yaitu:

1. $f(x_0)$ ada atau terdefinisikan.
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ada, dan
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(Parzynski&Zipse, 1987)

Teorema 7. *Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka f terintegralkan pada $[a,b]$.*

Bukti:

Fungsi kontinu pada $[a,b]$ mestilah kontinu seragam pada $[a,b]$ (Gunawan;2016). Karena itu diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $x, y \in [a,b]$ dengan $|x-y| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Selanjutnya setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > \frac{b-a}{\delta}$,tinjau partisi $Q = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dengan $x_i = a + i.\frac{b-a}{\delta}, i = 0, 1, \dots, n$ (disini interval $[a,b]$ terbagi menjadi n, sub interval sama panjang).

Setiap sub interval sama panjang $[x_{i-1}, x_i], f$ mencapai nilai maksimum M_i dan minimum m_i maka

$$f(u_i) = M_i \; dan \; f(v_i) = m_i$$

dalam hal ini diperoleh

$$M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dan akibatnya

$$0 \leq U(Q,f) - L(Q,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

Adanya partisi Q yang memenuhi ketaksamaan di atas berarti bahwa

f terintegralkan pada $[a,b]$ (Gunawan, 2008).

2.3 Integral

Berikut akan diuraikan beberapa definisi dan teorema mengenai integral secara umum yang akan digunakan penulis menyelesaikan rumusan masalah yang ada.

Definisi 8. *Diberikan fungsi f real dan terbatas pada selang $[a, b]$. Untuk setiap partisi Q pada $[a, b]$ dibentuk jumlah*

$$S(Q; f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Di mana ξ_i titik sembarang pada subselang tertutup $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \ldots, n$. Bilangan real A disebut limit $S(Q; f)$ untuk $\|Q\| \to 0$ dan ditulis $\lim_{\|Q\| \to 0} S(Q; f) = A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan dan sembarang pengambilan titik $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian untuk semua partisi Q pada $[a, b]$ dengan $\|Q\| < \delta$ berlaku

$$|S(Q; f) - A| < \varepsilon$$

(Rahman, 2008)

Definisi 9. *Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$. Jika $\lim_{\|Q\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ ada, kita katakan f adalah terintegralkan pada $[a, b]$. Lebih lanjut*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|Q\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Teorema 10. *Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan misalkan F sebarang anti turunan dari f di sana, maka*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bukti:

Misalkan $Q \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ adalah partisi sebarang dari $[a, b]$, maka akal “kurangkan dan tambahkan” yang baru memberikan:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Menurut Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan yang ditetapkan pada F pada selang $[x_{i-1}, x_i]$.

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i)\Delta x_i$$

Untuk suatu pilihan x_i dalam selang terbuka (x_{i-1}, x_i), jadi

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Bilamana kedua ruas diambil limitnya untuk $\|Q\| \to 0$, diperoleh

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|Q\|\to} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

(Purcell, 1987)

2.3.1 Integral Darboux

Pada tahun 1875, I.G. Darboux secara konstruktif memodifikasi definisi integral Riemann dengan terlebih dahulu mendefinisikan jumlah Darboux atas dan jumlah Darboux bawah, selanjutnya mendefinisikan integral Darboux atas dan integral Darboux bawah

a. Jumlah Darboux atas dan jumlah Darboux bawah

Diberikan interval tertutup $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, dan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi bernilai real yang terbatas pada $[a, b]$ maka didefinisikan

$$M = \sup\{f(\xi_i): \xi_i \in [a, b]\}\ dan\ m = \inf\{f(\xi_i): \xi_i \in [a, b]\}$$

Keterbatasan fungsi f dapat menjamin eksistensi dua bilangan M dan m tersebut.

Selanjutnya untuk $i = 1,2, \dots, n$ didefinisikan

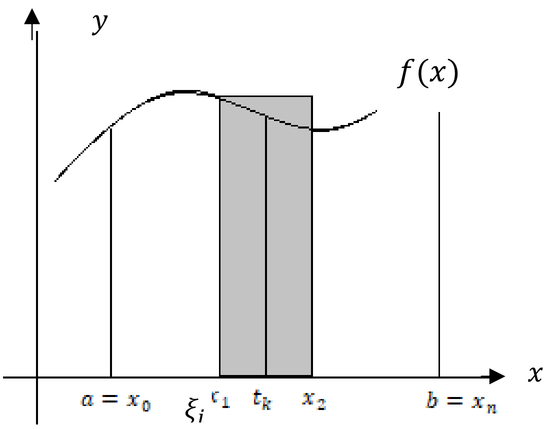
$$M_i = \sup\{f(\xi_i): \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i = \inf\{f(\xi_i): \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Dapat dipahami bahwa $m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.

Definisi1 11. *Jumlah Darboux atas fungsi f terkait dengan partisi Q, dinyatakan dengan $U(Q; f)$, didefinisikan sebagai*

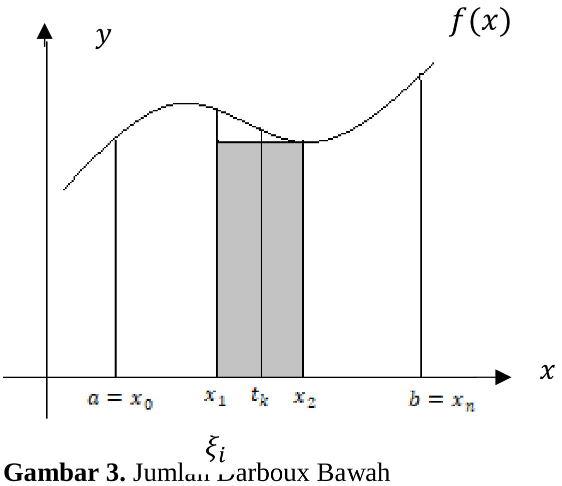
$$U(Q; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$



Gambar 2. Jumlah Darboux Atas

dan jumlah Darboux bawah fungsi f terkait dengan partisi Q, dinyatakan dengan $L(Q; f)$, didefinisikan sebagai

$$L(Q; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$



Gambar 3. Jumlah Darboux Bawah

Dengan $M_i = \sup\{f(\xi_i): \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$ dan $m_i = \inf\{f(\xi_i): \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

Akibatnya

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Atau

$$L(Q; f) \leq S(Q; f) \leq U(Q; f)$$

(Thobirin, 2015)

Lemma 12. *Diberikan* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, *jika* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *fungsi yang terbatas pada* $[a, b]$ *dan* $Q = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ *sebarang partisi pada* $[a, b]$, *maka berlaku*

$$L(Q; f) \leq U(Q; f)$$

Bukti

Diberikan $Q = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sebarang partisi pada $[a, b]$, berdasarkan definisi supremum dan infimum suatu himpunan maka diperoleh $m_i \leq M_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Oleh karenanya diperoleh,

$$L(Q; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U(Q; f)$$

Lemma 13. *Diberikan* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, *jika* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *fungsi yang terbatas pada* $[a,b]$, *jika* Q_1 *dan* Q_2 *sebarang dua partisi pada* $[a,b]$, *dengan* $Q_2 \subseteq Q_1$ *maka berlaku*

$$L(Q_1; f) \leq L(Q_2; f)$$

Dan

$$U(Q_2; f) \leq U(Q_1; f)$$

Bukti

Diberikan $Q_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sebarang partisi pada $[a,b]$ dan Q_2 sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan $Q_2 \subseteq Q_1$, maka dapat dimengerti bahwa setiap sub interval $[x_{i-1}, x_i]$ dalam Q_1 pasti memuat titik dari partisi Q_2, minimal x_{i-1} dan x_i itu sendiri. Namakan titik-titik tambahannya tersebut

$$x_{i-1} = t_{i_0}, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_{p_i}} = x_i$$

Dengan sifat

$$x_{i-1} = t_{i_0} < t_{i_1} < t_{i_2} < \cdots < t_{i_{p_i}} = x_i$$

Sehingga diperoleh

$$M_{i_j} = \sup\left\{f\left(\xi_{i_j}\right) : \xi_{i_j} \in \left[t_{i_{j-1}}, t_{i_j}\right]\right\},$$

Dan

$$m_{i_j} = \inf\left\{f\left(\xi_{i_j}\right) : \xi_{i_j} \in \left[t_{i_{j-1}}, t_{i_j}\right]\right\}$$

Selanjutnya untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, p_i$ diperoleh

$$m_i \leq m_{i_j} \leq M_{i_j} \leq M_i$$

Untuk suku ke-i di dalam $L(Q_1; f)$ berlaku

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i \sum_{j=1}^{p_i} \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right) = \sum_{j=1}^{p_i} m_i \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p_i} m_{i_j} \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right)$$

Jika hasil tersebut di atas dijumlahkan untuk semua indeks i, maka diperoleh

$$L(Q_1; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} m_{i_j} \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right) = L(Q_2; f)$$

Terbukti $L(Q_1; f) \leq\ L(Q_2; f)$

Selanjutnya untuk sukuk e-i di dalam $U(Q_1; f)$ berlaku

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i \sum_{j=1}^{p_i} \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right) = \sum_{j=1}^{p_i} M_i \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{p_i} M_{i_j} \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right)$$

Jika hasil tersebut di atas dijumlahkan untuk semua indeks i, maka diperoleh

$$U(Q_1; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} M_{i_j} \left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right) = U(Q_2; f)$$

Terbukti $U(Q_2; f) \leq\ U(Q_1; f)$ (Bartle & Sherbert, 2000).

Teorema 14. *Diberikan* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, *jika* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *fungsi yang terbatas pada* $[a, b]$. *Jika* Q_1 *dan* Q_2 *sebarang dua partisi pada* $[a, b]$, *maka berlaku*

$$L(Q_1; f) \leq U(Q_2; f)$$

Bukti

Dibentuk $Q = Q_1 \cup Q_2$, maka $Q_1 \subseteq Q$ dan $Q_2 \subseteq Q$, sehingga berdasarkan Lemma 14 diperoleh $L(Q;f) \leq L(Q_1;f)$ dan $U(Q_2;f) \leq U(Q;f)$.

Berdasarkan Lemma 13 diperoleh $L(Q;f) \leq U(Q;f)$.

Akibatnya diperoleh

$$L(Q_1;f) \leq U(Q_2;f)$$

(Bartle & Sherbrt, 2000)

b. Integral Darboux atas dan integral Darboux bawah

Berikut adalah definisi dan teorema tentang integral Darboux atas dan integral Darboux bawah.

Definisi 15. *Integral Darboux atas fungsi* f *pada interval* $[a,b]$, *dinotasikan dengan* $U(f)$ *atau* $D\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx$ *didefinisikan sebagai*

$$U(f) = D\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = inf\{U(Q;f) : Q \in \forall[a,b]\}$$

Integral Darboux bawah fungsi f *pada interval* $[a,b]$, *dinotasikan dengan* $L(f)$ *atau* $D\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx$ *didefinisikan sebagai*

$$L(f) = D\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx = sup\{L(Q;f) : Q \in \forall[a,b]\}$$

(Thobirin, 2015)

Teorema 16. *Diberikan* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, *jika* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *fungsi yang terbatas pada* $[a,b]$. *Jika fungsi* f *terintegralkan Darboux atas dan terintegralkan Darboux bawah pada interval* $[a,b]$, *maka*

$$L(f) \leq U(f)$$

Bukti

Diketahui fungsi f terintegral Darboux atas dan terintegral Darboux bawah, artinya dapat dipilih sebarang partisi $Q_1 \in \forall[a,b]$ dan $Q_2 \in \forall[a,b]$. Dipilih $Q = Q_1 \cup Q_2$, maka berdasarkan Lemma 14 dan Teorema 15 berlaku

$$L(Q;f) \leq L(Q_1;f) \leq U(Q_2;f) \leq U(Q;f)$$

Jadi bilangan real $U(Q;f)$ merupakan suatu batas atas dari $\{L(Q;f): Q \in \forall[a,b]\}$. Akibatnya

$$L(f) = \sup\{L(Q;f): Q \in \forall[a,b]\} \leq U(Q;f)$$

Demikian pula $L(f)$ merupakan batas bawah dari $\{U(Q;f): Q \in \forall[a,b]\}$. Akibatnya

$$L(f) = \inf\{U(Q;f): Q \in \forall[a,b]\} = U(f)$$

Jadi terbukti $L(f) \leq U(f)$ (Thobirin, 2015).

Dari uraian di atas, selanjutnya diberikan definisi integral Darboux sebagai berikut

Definisi 17. *Fungsi bernilai real dan terbatas* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *dikatakan terintegral Darboux pada* $[a,b]$, *jika*

$$L(f) = U(f)$$

Atau

$$D\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = D\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx = D\int_a^b f(x)\,dx$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan Darboux pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $f \in D[a,b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(D)\int_a^b f$ dan didefinisikan $(D)\int_a^b f = L(f) = U(f)$.

Atau bisa didefinisikan

$$\omega(Q; f) = U(Q; f) - L(Q; f) < \varepsilon$$

Integral Darboux menggunakan partisi Riemann yang lebih kecil yakni $Q_\varepsilon \subseteq Q$ (Thobirin, 2015).

Teorema 18. *Fungsi bernilai real dan terbatas* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegral Darboux pada* $[a, b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$, *terdapat partisi*

Riemann Q_ε *pada* $[a, b]$ *sehingga untuk setiap partisi Riemann* Q *pada interval* $[a, b]$ *dengan sifat* $Q_\varepsilon \subseteq Q$, *berlaku*

$$U(Q; f) - L(Q; f) < \varepsilon$$

Bukti

Syarat perlu

Diketahui fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Darboux pada $[a, b]$, berarti $L(f) = U(f)$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, berdasarkan definisi $U(f)$ maka terdapat partisi Riemann Q_1 pada $[a, b]$ sehingga

$$U(f) \leq U(Q_1; f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} \ldots (1)$$

Karena $L(f) = U(f)$ maka berlaku

$$L(f) \leq U(Q_1; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2} \ldots (2)$$

Selanjutnya, untuk bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut, berdasarkan definisi $L(f)$ maka terdapat partisi Riemann Q_2 pada $[a, b]$ sehingga

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(Q_2; f) \leq L(f) \ldots (3)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (2) dan (3) berlaku $L(Q_2; f) \leq U(Q_1; f)$

Oleh karena itu, diperoleh

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q_2;f)\leq\ U(Q_1;f)<L(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $Q_\varepsilon = Q_1 \cup Q_2$, maka $Q_1 \subseteq Q_\varepsilon$ dan $Q_2 \subseteq Q_\varepsilon$, sehingga berdasarkan Lemma 14 dan Teorema 15 diperoleh

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q_\varepsilon;f)\leq L(Q_2;f)\leq U(Q_1;f)\leq U(Q_\varepsilon;f)<L(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Akibatnya

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q_\varepsilon;f)\leq U(Q_\varepsilon;f)<L(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Selanjutnya jika diambil sebarang partisi Riemann Q pada interval $[a,b]$ dengan sifat $Q_\varepsilon \subseteq Q$, berlaku

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q;f)\leq L(Q_\varepsilon;f)\leq U(Q_\varepsilon;f)\leq U(Q;f)<L(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Maka diperoleh

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q;f)\leq U(Q;f)<L(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Akhirnya diperoleh

$$U(Q;f)-L(Q;f)<\varepsilon$$

Syarat cukup

Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi Riemann Q_ε pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi Riemann Q pada interval $[a,b]$ dengan sifat $Q_\varepsilon \subseteq Q$, berlaku

$$U(Q;f)-L(Q;f)<\varepsilon$$

Ini ekuivalen dengan $U(Q;f) < L(Q;f) + \varepsilon$

Berdasarkan definisi $L(f)$ dan $U(f)$, maka untuk setiap partisi Riemann Q pada $[a,b]$ berlaku $U(f) \leq U(Q;f)$ dan $L(Q;f) \leq L(f)$, sehingga diperoleh

$$U(f) \leq U(Q;f) < L(Q;f) + \varepsilon \leq L(f) + \varepsilon$$

Diperoleh

$$U(f) < L(f) + \varepsilon$$

Karena bilangan $\varepsilon > 0$ diambil sebarang maka didapatkan

$$U(f) \leq L(f)$$

Terbukti f terintegral Darboux (Bartle & Sherbert, 2000)

Akibat 19. *Diberikan fungsi bernilai real dan terbatas* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, *jika* (Q_n) *barisan partisi Riemann pada interval* $[a,b]$ *dengan* $\lim\big(U(Q_n;f) - L(Q_n;f)\big) = 0$, *maka terintegral Darboux pada* $[a,b]$ *dan*

$$\lim\big(U(Q_n;f)\big) = D\int_a^b f(x)\,dx = \lim\big(L(Q_n f)\big)$$

(Bartle & Sherbert, 2000)

Teorema 20. *Diberikan* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *suatu fungsi bernilai real dan terbatas,* f *terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika* f *terintegral Darboux pada* $[a,b]$.

Bukti

Syarat perlu

Diketahui fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral Riemann pada $[a,b]$, berarti terdapat bilangan $A = R\int_a^b f(x)\,dx$, artinya untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $Q = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $\|Q\| < \delta$

Berlaku

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

Atau

$$|S(Q;f) - A| < \varepsilon$$

Ambil sebarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2, \dots, n$, berdasarkan definisi m_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ demikian sehingga

$$m_i \leq f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Sehingga

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n}\left(m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$L(Q;f) \leq S(Q;f) < L(Q;f) + \frac{\varepsilon}{2} \dots (4)$$

Demikian pula untuk sebarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2, \dots, n$, berdasarkan definisi M_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ demikian sehingga

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(\xi_i) \leq M_i$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$U(Q;f)-\frac{\varepsilon}{2}<S(Q;f)\leq U(Q;f)\ \dots(5)$$

Dari pertidaksamaan (4) dan (5) diperoleh

$$U(Q;f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(Q;f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(Q;f)-L(Q;f)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Menurut definisi integral Darboux yaitu $U(Q;f)-L(Q;f)<\varepsilon$, terbukti bahwa f terintegral darboux.

Syarat cukup

Definisi integral Darboux

$$L(f)=U(f)$$

Atau

$$\omega(Q;f)=U(Q;f)-L(Q;f)<\varepsilon$$

Berdasarkan definisi jumlah Darboux atas dan Darboux bawah, maka

$$U(Q;f)-L(Q;f)<\varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

Misalkan $M_i=f(x_i)$ dan $m_i=f(x_{i-1})$

Diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

Karena $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) < \varepsilon$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \big(f(a) - f(b)\big) < \varepsilon$$

Berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\frac{b-a}{n} < \delta$

Menurut teorema 5, bahwa untuk setiap bilangan $\delta > 0$ terdapat partisi Q pada $[a,b]$ sehingga $\|Q\| < \delta$. Sehingga berlaku

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

Hasil di atas merupakan definisi dari integral Riemann

(Alhidayah, 2009)

c. Sifat Ketunggalan Integral Darboux

Berikut akan dibuktikan sifat ketunggalan integral Darboux.

Teorema 21. *Jika $f \in D[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal*

Bukti

Jika $S(Q;f)$ pada teorema Darboux menyatakan jumlah Darboux yang terkait dengan partisi Q maka

$$\left|S(Q;f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Sedangkan $\int_a^b f(x)\,dx = A$ maka $|S(Q;f) - A| < \varepsilon$

Andaikan nilai integralnya tidak tunggal, misalkan A_1 dan A_2 dengan $A_1 \neq A_2$.

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Misalkan A_1 dan A_2 keduanya nilai integral Darboux fungsi f

A_1 nilai integral fungsi f, maka terdapat $\delta_1 > 0$ untuk setiap partisi Q_1 dengan $\|Q_1\| < \delta_1$ sehingga untuk setiap $\|Q_1\| < \delta_1$ berlaku

$$|S(Q_1; f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

A_2 nilai integral fungsi f, maka terdapat $\delta_2 > 0$ untuk setiap partisi Q_2 dengan $\|Q_2\| < \delta_2$ sehingga untuk setiap $\|Q_2\| < \delta_2$ berlaku

$$|S(Q_2; f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $f = \min\{f_1, f_2\}$, berdasarkan teorema 6, akibatnya jika Q sebarang partisi pada $[a, b]$ dengan sifat $\|Q\| < \delta$ berlaku $\|Q\| < \delta_1$ dan $\|Q\| < \delta_2$. Akibatnya

$$|S(Q; f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dan

$$|S(Q; f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Lebih lanjut

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| &= |A_1 - S(Q; f) + S(Q; f) - A_2| \\ &\leq |A_1 - S(Q; f)| + |S(Q; f) - A_2| \\ &\leq |S(Q; f) - A_1| + |S(Q; f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga permisalan salah karena dari hasil di atas diperoleh bahwa $A_1 = A_2$. Jadi terbukti bahwa nilai integral Darboux tunggal.

d. Sifat Kelinieran Integral Darboux

Berikut akan dibuktikan sifat kelinieran integral Darboux.

Teorema 23. *Jika* $f, g \in D[a,b]$ *dan* α *adalah sembarang bilangan real, maka*

1. $D\int_a^b (f+g)(x)\,dx = D\int_a^b (f)(x)\,dx + D\int_a^b (g)(x)\,dx$
2. $D\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha(D)\int_a^b f(x)\,dx$

Bukti

1. Menurut definisi integral Darboux yaitu

$$\omega(Q;f) = U(Q;f) - L(Q;f)$$

$$\omega(Q;f+g) = U(;f+g) - L(;f+g)$$

Pada sisi lain kita tidak bisa mengatakan bahwa

$$U(Q;f+g) = U(Q;f) + U(Q;g)$$

Karena

$$\sup_{x\in A}\big(f(x)+g(x)\big) \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$

Ini menunjukkan bahwa

$$U(Q;f+g) \leq U(Q;f) + U(Q;g)$$

Hal tersebut juga berlaku untuk

$$L(Q;f+g) \leq L(Q;f)L(Q;g)$$

Ambil sembarang partisi Q_1 sehingga $\omega(Q_1;f) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan partisi Q_2 maka

$$\omega(Q_2;f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seperti kita ketahui bahwa

$$Q = Q_1 \cup Q_2$$

Sehingga

$$\omega(Q;f) \leq \omega(Q_1;f)\ dan\ \omega(Q;f) \leq \omega(Q_2;g)$$

Diperoleh

$$\omega(Q;f+g) = U(Q;f+g) - L(Q;f+g)$$

$$\leq U(Q;f) + U(Q;g) - L(Q;f) - L(Q;g)$$

$$= U(Q;f) - L(Q;f) + U(Q;g) - L(Q;g)$$

$$= \omega(Q;f) + \omega(Q;g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Jadi

$$D\int_a^b (f+g)(x)\,dx = D\int_a^b (f)(x)\,dx + D\int_a^b (g)(x)\,dx$$

2. Menurut definisi integral Darboux yaitu

$$\omega(Q;f) = U(Q;f) - L(Q;f)$$

$$\omega(Q;\alpha f) = U(Q;\alpha f) - L(Q;\alpha f) \leq \alpha U(Q;f) - \alpha L(Q;f)$$

$$= \alpha\big(U(Q;f) - L(Q;f)\big)$$

Karena α adalah konstanta maka α bisa dikeluarkan. Dan sesuai dengan definisi

$$D\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = D\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx = D\int_a^b f(x)\,dx$$

Atau

$$\omega(Q;f) = U(Q;f) - L(Q;f) < \varepsilon$$

Dan

$$L(f) = U(f)$$

Sehingga

$$D\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha(D)\int_a^b f(x)\,dx$$

e. Sifat Keterbatasan Integral Darboux

Berikut akan dibuktikan sifat keterbatasan integral Darboux.

Teorema 24. *Jika* $f \in D[a,b]$ *maka* f *terbatas pada* $[a,b]$

Bukti

Definisi integral Darboux yaitu

$$\omega(Q;f) = U(Q;f) - L(Q;f)$$

Sedangkan sifat keterbatasan adalah

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Berdasarkan jumlahan Darboux yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Sehingga $L(Q;f) \leq S(Q;f) \leq U(Q;f)$, dan karena $S(Q;f) = A$ dan A sendiri adalah $\int_a^b f(x)\,dx$ sesuai dengan teorema sebelumnya dan berdasar pada teorema dasar kalkulus yaitu $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ maka untuk sifat keterbatasan berlaku

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Dan fungsi f terbatas pada $[a,b]$ (Alhidayah, 2009).

2.3.2 Integral Perron

Di bawah ini dijelaskan tentang definisi dan teorema yang berkaitan dengan integral Perron.

a. Fungsi Minor dan Fungsi Mayor

Pada integral Perron, digunakan fungsi mayor dan fungsi minor untuk mendefinisikan integralnya. Berikut definisi yang berkaitan dengan integral Perron.

Definisi 25. *Diketahui* $F: [a, b] \to \mathbb{R}$. *Turunan kanan atas dan turunan kanan bawah dari* F *pada* $x \in [a, b)$ *didefinisikan oleh:*

$$D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

$$D_+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

Dan turunan kiri atas serta turunan kiri bawah dari F *pada* $x \in (a, b]$ *didefinisikan oleh:*

$$D^-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

$$D_-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

Fungsi F dapat diturunkan pada $x \in (a, b)$ jika keempat turunannya hingga dan bernilai sama. Turunan atas dan turunan bawah dari F pada $x \in [a, b]$ didefinisikan oleh:

$$\overline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}$$

$$= \max\{D^+F(x), D^-F(x)\}$$

$$\underline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}$$

$$= \min\{D_+F(x), D_-F(x)\}$$

(Gordon, 1994)

Definisi 26. *Diketahui* $E \subseteq \mathbb{R}$. *Himpunan* E *adalah perfect jika* E *tutup dan setiap titik dari* E *adalah titik limit dari* E.

Suatu *perfect portion* dari Q adalah himpunan $Q \cap [c, d]$ di mana $Q \cap (c, d) \neq \emptyset, c, d \in Q$, dan $Q \cap [c, d]$ adalah *perfect set*. (Gordon, 1994)

Definisi 27. *Diketahui* $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *dan* $E \subseteq [a, b]$.

$$\omega(F, [c, d]) = sup\{|F(y) - F(x)|: c \leq x < y \leq d\}$$

1. Variasi lemah dari F pada E dan variasi kuat dari F pada E didefinisikan sebagai:

$$V(F, E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)|\right\}$$

$$V_*(F, E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \omega(F, [c_i, d_i])\right\}$$

Dengan supremum keduanya diambil atas semua koleksi hingga $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ dari interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E.

2. Fungsi F merupakan variasi terbatas dari E jika $V(F, E)$ berhingga.

Fungsi F adalah variasi terbatas dalam arti sempit pada E jika $V_*(F, E)$ berhingga.

3. Fungsi F merupakan variasi terbatas secara umum pada E.

Jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan di mana F adalah BV pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah variasi terbatas yang digeneralisasi dalam arti sempit pada E jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan di mana F dalah variasi terbatas pada setiap himpunan tersebut.

4. Fungsi F merupakan kontinu mutlak pada E

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n}|F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon$ ketika $\{[c_i, d_i], 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$. Fungsi F adalah kontinu mutlak dalam arti sempit pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n} \omega(F, [c_i, d_i]) < \varepsilon$ ketika $\{[c_i, d_i], 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$.

5. Fungsi F merupakan kontinu mutlak secara umum pada E

Jika $F|_E$ (F dibatasi pada E) kontinu pada E, dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan di mana F adalah kontinu mutlak pada setiap himpunan tersebut fungsi F adalah kontinu mutlak yang digeneralisasi dalam arti sempit pada E jika $F|_E$ kontinu pada E dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan di mana F adalah AC_* pada setiap himpunan tersebut. (Gordon, 1994)

Definisi 28. *Misalkan fungsi* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Suatu fungsi $U: [a, b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi mayor dari f pada interval $[a, b]$ jika $\underline{D}U(x) > -\infty$ dan $\underline{D}U(x) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

2. Suatu fungsi $V: [a,b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi minor dari f pada interval $[a,b]$ jika $\overline{D}V(x) < +\infty$ dan $\overline{D}V(x) \le f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

(Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Definisi 29. *Suatu fungsi* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Perron pada* $[a,b]$ *jika* f *mempunyai setidaknya satu fungsi mayor* U *dan fungsi minor* V *pada* $[a,b]$ *dan berlaku*

$$\inf\{U_a^b : U\ fungsi\ mayor\ dari\ f\ pada\ [a,b]\}$$
$$= \sup\{V_a^b : V\ fungsi\ minor\ dari\ f\ pada\ [a,b]\}$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $f \in P[a,b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P)\int_a^b f$ dan didefinisikan $(P)\int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$ (Gordon, 1994)

Teorema 30. *Suatu fungsi* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Perron pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu fungsi mayor* U *dan suatu fungsi minor* V *dari* f *pada* $[a,b]$ *sehingga* $U_a^b - V_a^b < \varepsilon$.

Bukti:

Misalkan f terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dan $\varepsilon > 0$. Sesuai dengan $\frac{\varepsilon}{2}$, piih u dan v pada teorema di ruang fungsi baire kelas satu. Fungsi $U(x) = \int_a^x u$ dan

$V(x) = \int_a^x v$ terbukti kontinu di $[a,b]$. Pada teorema di fungsi ruang baire kelas satu, persamaan $\underline{D}U(x) \ge u(x)$ dan $\overline{D}V(x) \le v(x)$ terbukti untuk setiap $x \in [a,b]$ dan seperti berikut

$$\underline{D}U(x) > -\infty, \underline{D}U(x) \ge f(x) \text{ dan } \overline{D}V(x) \le +\infty, \overline{D}V(x) \le f(x)$$

Untuk setiap $x \in [a, b]$. Karenanya, U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor dari f di $[a, b]$. Akhirnya,

$$U_a^b - V_a^b = \int_a^b u - \int_a^b f + \int_a^b f - \int_a^b v < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(Gordon, 1994)

b. Sifat Kelinieran Integral Perron

Berikut adalah teorema sifat kelinieran integral Perron yang dikutip dari Jurnal Eurekamatika.

Teorema 31. *Misalkan* f *terintegralkan Perron pada* $[a, b]$, *maka:*

1. $f + g$ *terintegralkan Perron pada* $[a, b]$ *dan* $(P)\int_a^b (f + g) = (P)\int_a^b f + (P)\int_a^b g$.
2. kf *terintegralkan Perron pada* $[a, b]$ *dan* $(P)\int_a^b kf = k(P)\int_a^b f$ *untuk setiap* $k \in \mathbb{R}$.

c. Sifat Keterbatasan Integral Perron

Berikut adalah teorema sifat keterbatasan integral Perron yang dikutip dari Jurnal Eurekamatika.

Teorema 32. *Jika* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Peron pada* $[a, b]$, *maka* f *bernilai hingga almost everywhere pada* $[a, b]$.

2.3.3 Ekuivalensi Integral Darboux dengan Integral Perron

Akan dibuktikan ekuivalensi dari integral Darboux dengan integral Perron.

Teorema 33. *Diberikan fungsi* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *adalah terintegral Darboux jika dan hanya jika* f *terintegral Perron pada* $[a, b]$ *sehingga* $D\int_a^b f \Leftrightarrow P\int_a^b f$.

Bukti

$D\int_a^b f \Rightarrow P\int_a^b f$

Diketahui fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Darboux pada $[a, b]$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $Q = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$ sebarang partisi di $[a, b]$ dengan sifat $\|Q\| < \delta$ berlaku

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil sebarang $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1,2,3, \dots, n$.

Berdasarkan definisi m_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$m_i \le f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Sehingga

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n}\left(m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$L(Q; f) \le S(Q; f) < L(Q; f) + \frac{\varepsilon}{2} \dots (6)$

Demikian pula untuk sebarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,3, \dots, n$

Berdasarkan definisi M_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(\xi_i) \le M_i$$

Sehingga

$$\left(M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1}) < f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1}) < f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right) < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$U(Q; f) - \frac{\varepsilon}{2} < S(Q; f) \le U(Q; f) \dots (7)$

Dari (6) dan (7) diperoleh

$$U(Q; f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(Q; f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(Q; f) - L(Q; f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(Q; f) - L(Q; f) < \varepsilon$$

Karena $L(Q; f)$ adalah batas bawah dan $U(Q; f)$ adalah batas atas, maka fungsi f juga terintegral Perron, karena syarat perlu dan syarat cukup jika f mempunyai setidaknya satu batas bawah dan satu batas atas $\{V_a^b, U_a^b\}$

Sehingga mempunyai bentuk

$$U_a^b - V_a^b < \varepsilon$$

Sehingga hal tersebut membuktikan $D\int_a^b f \Rightarrow P\int_a^b f$.

Selanjutnya dibuktikan

$$P\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$$

Diketahui definisi integral Perron

$$U_a^b = V_a^b$$

Atau

$$\omega(F,[c_i,d_i]) = U_a^b - V_a^b < \varepsilon$$

Berdasarkan definisi jumlah Perron atas dan Perron bawah

$$U_a^b - V_a^b < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

Misalkan $d_i = f(x_i)$ dan $c_i = f(x_{i-1})$

Diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

Karena $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)<\varepsilon$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(a)-f(b)\big)<\varepsilon$$

Berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\frac{b-a}{n}<\delta$

Menurut teorema 5, bahwa untuk setiap bilangan $\delta>0$ terdapat partisi Q pada $[a,b]$ sehingga $\|Q\|<\delta$. Sehingga berlaku

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon$$

Hasil di atas merupakan definisi dari integral Darboux

Jadi

$$P\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$$

(Pratama, 2020)

2.4 Triangle Innequality

Ketaksamaan segitiga sangat penting dalam mengerjakan ketaksamaan matematika. Salah satunya dalam menyelesaikan rumusan masalah di atas.

Teorema 34. *Jika* $a,b\in\mathbb{R}$ *maka* $|a+b|\le|a|+|b|$.

Bukti:

Misalkan $a,b\in\mathbb{R}$.

Berdasarkan sifat dari nilai mutlak diketahui $-|a|\le a\le|a|$ dan $-|b|\le b\le|b|$

Dengan menjumlah kedua ketaksamaan diperoleh $-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|$.

Menggunakan sifat nilai mutlak yang lain, yaitu $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$ untuk $c \geq 0$, sehingga dapat disimpulkan $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Bartle&Sherbert, 1964).

2.5 Integrasi Al-Qur’an

Dalam karya tulis ini, penulis menggunakan metode studi literatur. Penulis meneliti objek dengan mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan untuk menunjang penelitian (Hasan, 2002).

الَّذِينَ آتَيْنَاهُمُ الْكِتَابَ يَتْلُونَهُ حَقَّ تِلاَوَتِهِ أُولَئِكَ يُؤْمِنُونَ بِهِ. وَمَنْ يَكْفُرْ بِهِ فَأُولَئِكَ هُمُ الْخَسِرُونَ.

“Orang-orang yang telah Kami beri kitab suci, mereka membacanya sebagaimana mestinya, itulah orang-orang yang beriman padanya. Siapa yang ingkar padanya, merekalah orang-orang yang rugi.”

Menurut Tafsir Ibnu Katsir dijelaskan,

Ibnu Abu Hatim mengatakan bahwa telah diriwayatkan dari Ikrimah, ‘Atha’, Mujahid, Abu Razin, dan Ibrahim An-Nakha’i. Sufyan At-Tsauri mengatakan, telah menceritakan kepada kami Zubaid, dari Murrah, dari Abdullah ibnu Mas’ud sehubungan dengan makna firman-Nya, “Mereka membacanya dengan bacaan yang sebenarnya”, bahwa mereka mengikutinya dengan ikut yang sebenarnya. Al-Qurthubi mengatakan bahwa Nasr ibnu Isa meriwayatkan dari Malik, dari Nafi’, dari Ibnu Umar, dari Nabi shallallahu ‘alaihi wa sallam sehubungan dengan makna firman-Nya, “Mereka membacanya dengan bacaan yang sebenarnya”, bahwa makna yang dimaksud ialah mereka mengikuti dengan sebenar-benarnya.

Dari ayat tersebut dapat kita pahami bahwa, hendaknya manusia membaca suatu bacaan dengan sebenar-benarnya sesuai dengan apa yang diterangkan. Sehingga tidak ada simpang siur antar informasi. Kata membaca di sini sangat ditekankan agar tidak menjadi orang yang merugi.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam karya tulis ini adalah metode studi literatur yang dilakukan dengan mengkaji definisi dan sifat-sifat integral Darboux, definisi dan sifat-sifat integral Perron, dan ekuivalensi antara integral Darboux dan integral Perron. Setelah mempelajari tentang integral Darboux dan integral Perron, ditemukan bahwa kedua integral tersebut didefinisikan dengan cara yang berbeda, namun terbukti ekuivalen.

Kajian mengenai integral ini menggunakan karya tulis Dimas Adi Pratama yang berjudul "Ekuivalensi Integral Darboux dan Integral Denjoy-Perron" sebagai referensi utama. Pada tahun 2021, penulis menyusun proposal penelitian dan mempresentasikannya. Kemudian semua teori dan hasil kajian didiskusikan dengan dosen pembimbing. Setelah semua teori dan pembahasan selesai, penulis mempublikasikan dalam bentuk tulisan berupa skripsi dan dalam bentuk lisan saat sidang skripsi.

Adapun langkah-langkah dalam penyelesaian rumusan masalah dalam penulisan ini akan dijelaskan sebagai berikut

3.1. Sifat Ketunggalan Integral Perron

Dibawah ini akan dijelaskan langkah-langkah penyelesaian untuk membuktikan sifat ketunggalan integral Perron.

1. Menggunakan pengandaian, dimisalkan bahwa nilai integral Perron tidak tunggal.

2. Menggunakan hubungan ekuivalensi integral Perron dan integral Darboux, untuk mendefinisikan integral Perron menggunakan partisi integral Darboux.
3. Membuktikan $|A_1 - A_2| < \varepsilon$
4. Diperoleh hasil yang kontradiksi dengan kalimat pengandaian.

3.2. Sifat Kelinieran Integral Perron

Dibawah ini akan dijelaskan langkah-langkah penyelesaian untuk membuktikan sifat kelinieran integral Perron.

1. Menggunakan hubungan ekuivalensi integral Perron dan integral Darboux, untuk mendefinisikan integral Perron menggunakan partisi integral Darboux untuk masing-masing fungsi.
2. Membuktikan $\int_a^b (f+g)(x)dx$ dan $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ keduanya kurang dari ε.
3. Diperoleh hasil dari teorema sifat kelinieran integral Perron bagian (a).
4. Menyelesaikan untuk nilai $\alpha = 0$.
5. Untuk nilai $\alpha \neq 0$, melakukan langkah pertama dari penyelesaian untuk membuktikan sifat kelinieran.
6. Membuktikan $\int_a^b \alpha f(x)dx$ dan $\alpha \int_a^b f(x)dx$ keduanya kurang dari ε
7. Diperoleh hasil dari teorema sifat kelinieran integral Perron bagian (b).

3.3. Sifat Keterbatasan Integral Perron

Dibawah ini akan dijelaskan langkah-langkah penyelesaian untuk membuktikan sifat keterbatasan integral Perron.

1. Menunjukkan batas bawah dan batas atas integral Perron.

2. Menunjukkan jumlahan Darboux yang berkesinambungan dengan batas atas dan batas bawah integral Perron.
3. Menggunakan teorema dasar kalkulus, dibuktikan bahwa fungsi f terbatas pada $[a, b]$.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1. Sifat-sifat Integral Perron Ditinjau dari Integral Darboux

Setelah dibuktikan ekuivalensi integral Perron dan integral Darboux, maka penulis akan membuktikan sifat-sifat integral Perron menggunakan partisi integral Darboux yang berlaku di integral Perron.

4.1.1. Sifat Ketunggalan Integral Perron

Teorema 35. *Jika* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegral Perron maka nilai integralnya tunggal*

Bukti:

Andaikan nilai f tidak tunggal, missal A_1 dan A_2 dengan $A_1 \neq A_2$.

Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Perron

Diketahui definisi integral Perron

$$U_a^b = V_a^b$$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$

$$\omega(F, [c_i, d_i]) = U_a^b - V_a^b < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan definisi jumlah Perron atas dan jumlah Perron bawah

$$U_a^b - V_a^b < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan $d_i = f(x_i)$ dan $c_i = f(x_{i-1})$

Sehingga

$$U_a^b - V_a^b < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(a) - f(b)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\frac{b-a}{n} < \delta$

Berdasarkan teorema 5, bahwa untuk setiap bilangan $\delta_1 > 0$ terdapat partisi Q_1 pada $[a, b]$ sehingga $\|Q_1\| < \delta_1$. Sehingga berlaku

$$\left|(Q_1) \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan A_1 adalah nilai integral Darboux

Berlaku juga untuk setiap bilangan $\delta_2 > 0$ terdapat partisi Q_2 pada $[a, b]$ sehingga $\|Q_2\| < \delta_2$ dan berlaku

$$\left|(Q_2) \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan A_2 adalah nilai integral Darboux

Didefinisikan fungsi positif $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan $f = \min\{f_1, f_2\}$

Menurut teorema 6, akibatnya jika Q sebarang partisi pada $[a, b]$ dengan sifat $\|Q\| < \delta$ berlaku $\|Q\| < \delta_1$ dan $\|Q\| < \delta_2$. Akibatnya

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dan

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sehingga diperoleh

$$|A_1 - A_2| = \left|A_1 - (Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + (Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$\leq \left|A_1 - (Q_1)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$+ \left|(Q_2)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$= \left|(Q_1)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right|$$

$$+ \left|(Q_2)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Diperoleh $|A_1 - A_2| < \varepsilon$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka $A_1 - A_2 = 0$ dan haruslah $A_1 = A_2$

Kontradiksi dengan pengandaian, jadi nilai integralnya tunggal.

4.1.2. Sifat Kelinieran Integral Perron

Teorema 36. *Jika* $f, g \in P[a,b]$ *dan* α *adalah sembarang bilangan real, maka*

a. $P\int_a^b (f+g)(x)\,dx = P\int_a^b f(x)\,dx + P\int_a^b g(x)\,dx$

b. $P\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\, P\int_a^b f(x)\,dx$

Bukti:

Diketahui $f, g \in P[a,b]$

a. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$

Diketahui $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral Perron

Menurut definisi integral Perron, maka

$$U_{1a}^{\ b} = V_{1a}^{\ b}$$

$$\omega\left(F, \left[c_{1_i}, d_{1_i}\right]\right) = U_{1a}^{\ b} - V_{1a}^{\ b} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan definisi jumlah Perron atas dan jumlah Perron bawah

$$U_{1a}^{\ b} - V_{1a}^{\ b} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{1_i}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_{1_i}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan $d_{1_i} = f(x_i)$ dan $c_{1_i} = f(x_{i-1})$

Sehingga

$$U_{1a}^{\ b} - V_{1a}^{\ b} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{1_i}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_{1_i}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(d_{1_i} - c_{1_i}\right)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(a) - f(b)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\frac{b-a}{n} < \delta_1$

Berdasarkan teorema 5, bahwa untuk setiap bilangan $\delta_1 > 0$ terdapat partisi Q_1 pada $[a, b]$ sehingga $\|Q_1\| < \delta_1$. Sehingga berlaku

$$\left|(Q_1)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan A_1 adalah nilai integral Darboux untk fungsi f

Berlaku juga pada $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral Perron

Menurut definisi integral Perron, maka

$$U_{2}{}_{a}^{b} = V_{2}{}_{a}^{b}$$

$$\omega\big(G, [c_{2_i}, d_{2_i}]\big) = U_{2}{}_{a}^{b} - V_{2}{}_{a}^{b} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan definisi jumlah Perron atas dan jumlah Perron bawah

$$U_{2}{}_{a}^{b} - V_{2}{}_{a}^{b} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{2_i}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_{2_i}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan $d_{2_i} = g(x_i)$ dan $c_{2_i} = g(x_{i-1})$

Sehingga

$$U_{2_a}^{\ b} - V_{2_a}^{\ b} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{2_i}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_{2_i}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(d_{2_i} - c_{2_i}\right)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right) \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(g(a) - g(b)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\frac{b-a}{n} < \delta_2$

Berdasarkan teorema 5, bahwa untuk setiap bilangan $\delta_2 > 0$ terdapat partisi Q_2 pada $[a, b]$ sehingga $\|Q_2\| < \delta_2$. Sehingga berlaku

$$\left| (Q_2) \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan A_2 adalah nilai integral Darboux untk fungsi g

Didefinisikan fungsi positif $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan $f = \min\{f_1, f_2\}$

Menurut teorema 6, akibatnya jika Q sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q\| < \delta$ berlaku $\|Q\| < \delta_1$ dan $\|Q\| < \delta_2$. Akibatnya

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\}\right.$$

$$\left. - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + (Q)\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right.$$

$$\left. - A_1 - A_2\right|$$

$$= \left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right.$$

$$\left. + (Q)\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$\le \left|(Q)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right|$$

$$+ \left|(Q)\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan demikian terbukti

$$P\int_a^b (f+g)(x)\,dx = P\int_a^b f(x)\,dx + P\int_a^b g(x)\,dx$$

b. Diketahui α adalah sembarang bilangan real

Jika $\alpha = 0$ maka jelas αf terintegralkan Perron ke 0

Untuk $\alpha \neq 0$

Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron

Menurut definisi integral Perron, maka

$$U_a^b = V_a^b$$

$$\omega(F, [c_i, d_i]) = U_a^b - V_a^b < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Berdasarkan definisi jumlah Perron atas dan Perron bawah

$$U_a^b - V_a^b < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Misalkan $d_i = f(x_i)$ dan $c_i = f(x_{i-1})$

Diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Karena $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(a)-f(b)\big)<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\frac{b-a}{n}<\delta_3$

Berdasarkan teorema 5, bahwa untuk setiap bilangan $\delta_3>0$ terdapat partisi Q_3 pada $[a,b]$ sehingga $\|Q_3\|<\delta_3$. Sehingga berlaku

$$\left|(Q_3)\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Didefinisikan fungsi positif $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ dengan $f=\min\{f_1,f_3\}$

Menurut teorema 6, jika Q sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|Q\|<\delta$ berlaku $\|Q\|<\delta_3$. Akibatnya

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Sehingga diperoleh

$$\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\alpha A\right|=\left|\alpha\left((Q)\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right)-\alpha A\right|$$

$$=\left|\alpha\left((Q)\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right)\right|$$

$$=|\alpha|\left|(Q)\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<|\alpha|.\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon$$

Dengan demikian terbukti

$$P\int_a^b\alpha f(x)\,dx=\alpha\,P\int_a^b f(x)\,dx$$

4.1.3. Sifat Keterbatasan Integral Perron

Teorema 37. *Jika* $f \in P[a,b]$ *maka* f *terbatas pada* $[a,b]$

Bukti:

Diketahui $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral Perron

Menurut definisi integral Perron, maka f mempunyai setidaknya satu batas bawah (m) dan satu batas atas (M)

Dengan

$$m = \inf\{f(\xi_i): \xi \in [a,b]\}$$

$$M = \sup\{f(\xi_i): \xi \in [a,b]\}$$

untuk $i = 1,2,\dots,n$

Dapat dipahami bahwa

$$m \leq f(\xi_i) \leq M$$

Menggunakan jumlahan Darboux, yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Sehingga $L(Q;f) \leq S(Q;f) \leq U(Q;f)$, dan karena $S(Q;f) = A$ dan A sendiri adalah $\int_a^b f(x)\,dx$ sesuai dengan teorema sebelumnya dan berdasar pada teorema dasar kalkulus yaitu $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ maka untuk sifat keterbatasan berlaku

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$$

Dan fungsi f terbatas pada $[a,b]$

4.2 Integrasi Al Qur'an

Dalam penulisan ini, penulis bermaksud untuk meninjau integral Perron menggunakan definisi integral Darboux. Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) dijelaskan, arti kata meninjau adalah melihat, memeriksa, mempelajari dengan cermat. Sehingga penulis bermaksud melihat, memeriksa kembali sifat-sifat integral Perron dari sisi integral Darboux.

Dalam Al-Qur'an banyak dijelaskan tentang adanya hikmah di setiap musibah. Bahwa kita tidak boleh melihat sesuatu hanya dari satu sisi, karena sesuatu yang kita lihat baik belum tentu baik untuk kita, dan sesuatu yang kita lihat buruk belum tentu buruk untuk kita.

Berdasarkan firman Allah SWT, dalam surat Al-Baqarah ayat 216 yang berbunyi

كُتِبَ عَلَيْكُمُ الْقِتَالُ وَهُوَ كُرْهٌ لَّكُمْ ۚ وَعَسٰٓى اَنْ تَكْرَهُوْا شَيْـًٔا وَّهُوَ خَيْرٌ لَّكُمْ ۚ وَعَسٰٓى اَنْ تُحِبُّوْا شَيْـًٔا وَّهُوَ شَرٌّ
لَّكُمْ ۗ وَاللّٰهُ يَعْلَمُ وَاَنْتُمْ لَا تَعْلَمُوْنَ

"Diwajibkan atas kamu berperang, padahal itu tidak menyenangkan bagimu. Tetapi boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi kamu menyukai sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui."

Menurut tafsir Ibnu Katsir dijelaskan:

"Diwajibkan atas kalian berperang, padahal berperang itu adalah sesuatu yang kalian benci. Boleh jadi kalian membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagi kalian; dan boleh jadi (pula) kalian menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagi kalian. Allah mengetahui, sedangkan kalian tidak mengetahui.

Firman Allah subhanahu wa ta'ala: padahal berperang itu adalah sesuatu yang kalian benci. (Al-Baqarah: 216) Yakni terasa keras dan berat bagi kalian, dan memang kenyataan perang itu demikian, adakalanya terbunuh atau terluka selain dari masyaqat perjalanan dan menghadapi musuh. Kemudian Allah subhanahu wa ta’ala berfirman: Boleh jadi kalian membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagi kalian. (Al-Baqarah: 216) Dikatakan demikian karena berperang itu biasanya diiringi dengan datangnya pertolongan dan kemenangan atas musuh-musuh, menguasai negeri mereka, harta benda mereka, istri-istri, dan anak-anak mereka.

Dan boleh jadi (pula) kalian menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagi kalian. (Al-Baqarah: 216) Hal ini bersifat umum mencakup semua perkara.

Adakalanya seseorang mencintai sesuatu, sedangkan padanya tidak ada kebaikan atau suatu maslahat pun baginya. Antara lain ialah diam tidak mau berperang, yang akibatnya musuh akan menguasai negeri dan pemerintahan.

Kemudian Allah subhanahu wa ta’ala berfirman: Allah mengetahui, sedangkan kalian tidak mengetahui. (Al-Baqarah: 216) Artinya, Allah lebih mengetahui tentang akibat dari semua perkara daripada kalian, dan lebih melihat tentang hal-hal yang di dalamnya terkandung kemaslahatan dunia dan akhirat bagi kalian. Maka perkenankanlah seruan-Nya dan taatilah perintah-Nya, mudah-mudahan kalian mendapat petunjuk.”

Dari ayat tersebut dapat kita pahami bahwa, kita tidak boleh melihat sesuatu hanya dari satu sisi, ada baiknya kita melihat sesuatu dari sisi yang lain. Karena sesuatu yang kita lihat baik, belum tentu baik untuk kita, pun sebaliknya. Bisa jadi sesuatu yang kita lihat baik, adalah sesuatu yang buruk bagi kita, juga sebaliknya. Sehingga tujuan penulisan ini bersesuaian dengan ayat di atas.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang penulis sampaikan pada bab I sampai bab IV, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa, dengan menggunakan partisi, definisi, dan teorema-teorma yang berlaku di integral Darboux, serta ekuivalensi integral Darboux dan integral Perron, dapat membuktikan sifat-sifat yang berlaku di integral Perron, yaitu sifat ketunggalan, sifat kelinieran, dan sifat keterbatasan.

5.2 Saran

Bagi pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini maka penulis menyarankan tidak hanya menggunakan integral Darboux dan Perron saja. Karena banyak integral lain yang masih belum terbukti memiliki sifat sifat seperti yang berlaku pada integral Darboux.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah bin Muhammad. 2006. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 1*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Safi'i Abidin.

Alhidayah, Dzawin Nuha. 2009. *Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Darboux*. Malang: UIN Press.

Al-Qur'an Terjemah. 2015. *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.

Bartle, R., & Sherbert, D. 1964. *Introduction to Real Analysis (firts Ed)*. New York: John Wiley & Sons.

Bartle, R., & Sherbert, D. 2000. *Introduction to Real Analysis (third Ed).* New York: John Wiley & Sons.

Gordon, R. 1994. *Theory of The Lebesgue,Denjoy, Perron, and Henstock Integral*. Rhode Island: AMS Publishing Company.

Gunawan, Hendra. 208. *Pengantar Analisis Real*. Personal. FMIPA.ITB.ac.id. Diakses tanggal 9 Juni 2021.

Hasan, Iqbal. 2002. *Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

J. Purcel, Edwin. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: PT. Airlangga.

Kurtz, D. S., & Swartz, C. W. 2004. *Theories of Integration*. New Jersey: World Scientific Publishing.

Nurandini, R. Y., Sumiaty, E., & Kustiawan, C. 2018. *Integral Perron dan Ekuivalensinya dengan integral Denjoy*. EurekaMatika, 13.

Parzynski, William R., & Zipse, Philip W. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Singapore: McGraw-Hill.

Pratama, Dimas Adi. 2020. *Ekuivalensi Integral Darboux dan Integral Denjoy-Perron*. Malang: UIN Malang Press.

Rahman, M.Si, Hairur. 2008. *Pengantar Analisi Real*. Malang: UIN Malang Press.

Sinay, L. J., & Talakua, M. W. 2012. *Sifat-sifat Dasar Integral Henstock*. Vol. 6. Jurnal Barekeng.

Thobirin, H. 2015. *Analisis Real II*. Yogyakarta: Mata Padi Pressindo.

RIWAYAT HIDUP

Zahrotul Fajriyah, biasa dipanggil Zahro lahir di Sidoarjo tanggal 12 April 1998. Penulis tinggal di Krian Kabupaten Sidoarjo. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Moh. Yudi dan Ibu Eny Suliati.

Pendidikan dasar penulis ditempuh di kampung halamannya yaitu MI. Al-Amin Keboharan dan lulus tahun 2009. Setelah itu melanjutkan ke sekolah menengah pertama di SMPN 3 Krian dan lulus tahun 2012. Sekolah menengah atas ditempuh di SMA Al-Islam Krian dan lulus tahun 2015. Pada tahun 2015, penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada program studi Matematika. Bagi pembaca dapat menghubungi penulis melalui instagram @fazahrotul untuk memberikan saran, kritik, maupun pertanyaan yang berhubungan dengan penelitian ini.

KEMENTERIANAGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG FAKULTAS
SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Zahrotul Fajriyah
NIM : 15610083
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Integral Perron Ditinjau dari Integral Darboux pada Fungsi Kontinu $[a, b]$
Pembimbing I : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	21 September 2021	Konsultasi Bab I dan II	1
2	29 September 2021	Revisi Bab I dan II	2
3	15 Oktober 2021	Konsultasi Bab III	3
4	18 Oktober 2021	Revisi Bab III	4
5	22 Oktober 2021	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV	5
6	15 November 2021	Revisi Bab IV	6
7	18 November 2021	Revisi Agama Bab I	7
8	22 November 2021	Revisi Bab IV	8
9	24 November 2021	Revisi Agama Bab II	9
10	30 November 2021	Revisi Bab IV	10
11	17 Desember 2021	Revisi Agama Bab I dan II	11
12	20 Desember 2021	Revisi Agama Bab I dan II	12
13	21 Desember 2021	ACC Keseluruhan	13

Malang, 21 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005