GRUP BEBAS DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

OLEH
IRMA DWI PRATIWI
NIM. 16610049

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

GRUP BEBAS DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Irma Dwi Pratiwi
NIM. 16610049

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

GRUP BEBAS DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh
Irma Dwi Pratiwi
NIM. 16610049

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 November 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dewi Ismiarti, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 058	NIP. 19900511 201608 1 011

Mengetahui
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP 19741129 200012 2 005

GRUP BEBAS DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh
Irma Dwi Pratiwi
NIM. 16610049

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 8 Desember 2021

Penguji Utama	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Sekertaris Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Irma Dwi Pratiwi

NIM : 16610049

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Grup Bebas dan Sifat-Sifatnya

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut

Malang, 29 November 2021

Yang membuat pernyataan,

Irma Dwi Pratiwi

NIM. 16610049

MOTO

"Bersabarlah atas apa yang ditulis untukmu, yang ditulis oleh penulis terhebat yaitu Allah SWT."

"Ridha Allah tergantung pada ridha orang tua dan murka Allah tergantung pada murka orang tua."

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Jumadi dan Ibu Aidah tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas mendo’akan, memberi nasihat, semangat, materi dan kasih saying yang tak ternilai. Adik Astri Auliya Ardini, Kakak Yunita Silvia Ningtyas yang selalu menjadi alasan penulis berjuang dan bertahan sampai saat ini. Serta keluarga besar yang selalu mendukung dan mendo’akan.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat, taufik serta hidayahnya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematikan di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini penulis banyak mendapat bimbingan serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc selaku Ketua Program Studi Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dewi Ismiarti, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak arahan, nasihat, motivasi dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak Jumadi dan Ibu Aidah, Adik Dini dan Kakak Nita, serta keluarga yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.

8. Seluruh teman-teman Program Studi Matematika angkatan 2016, terutama Rifatul, Soimatul, Intan, Emalia, Yati, Devi, Fadli yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih atas kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi baik moril maupun materiil. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 29 November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xii

ABSTRAK xiii

ABSTRACT xiv

الملخّص xv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Metode Penelitian 4
1.6 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan 7
2.2 Relasi dan Pemetaan 8
2.3 Pemetaan Surjektif 9
2.4 Pemetaan Injektif 10
2.5 Pemetaan Bijektif 10
2.6 Grup 11
2.7 Subgrup 18
2.8 Homomorfisme Grup 20
2.9 Kajian Keagamaan 21

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Grup Bebas 26
3.2 Sifat-Sifat Grup Bebas 38
3.3 Makna Grup Bebas dalam Perspektif Islam 40

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 43
4.2 Saran 44

DAFTAR PUSTAKA 45

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Pemetaan Surjektif 10

Gambar 2.2 Pemetaan Injektif.. 10

Gambar 2.3 Pemetaan Bijektif 11

Gambar 2.4 Pelabelan Sudut... 13

ABSTRAK

Pratiwi, Irma Dwi. 2021. **Grup Bebas dan Sifat-Sifatnya.** Skripsi. Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dewi Ismiarti, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: Grup, Grup bebas, Konstruksi grup bebas.

Suatu grup G dapat dikatakan grup bebas apabila G dibangun oleh X dengan beberapa relasi yang mungkin antara unsur-unsur di X, dimana X adalah suatu himpunan. Sehingga dapat dikatakan bahwa, grup bebas adalah grup yang dibangun oleh suatu himpunan bagian dari G. Hasil kali unsur-unsur di X dengan invers unsur-unsur di X dapat direduksi dengan menghapus semua sub hasil kali xx^{-1} dan $x^{-1}x$ sampai tidak ada yang tersisa. Jadi grup bebas pada X memuat hasil kali unsur-unsur di X yang telah direduksi. Selanjutnya, tujuan dari penelitian ini adalah menunjukkan langkah-langkah konstruksi grup bebas dari suatu himpunan dan sifat-sifat grup bebas.

Penelitian ini membahas mengenai konsep dasar pada grup bebas yang dilanjutkan dengan pembahasan tentang sifat-sifat grup bebas. Misalkan G grup dan $X \subseteq G$, alfabet $Y = X \cup X'$ dan W adalah himpunan semua kata dari Y. Diperoleh F_X yang merupakan himpunan semua kata tereduksi di W. Grup F_X merupakan grup bebas dari X. Terdapat sifat-sifat homomorfisme grup bebas diantaranya, misalkan diberikan $\eta: X \longrightarrow F_X$. Untuk setiap pemetaan $: X \longrightarrow G$, terdapat suatu homomorfisme $\varphi: F_X \longrightarrow G$. Sedemikian sehingga $f = \varphi \circ \eta$. Berlaku pula homomorfisme surjektif dimana Jika suatu grup G dibangun oleh suatu subhimpunan X, maka terdapat homomorfisme surjektif dari F_X ke G.

ABSTRACT

Pratiwi, Irma Dwi. 2020. **Free groups and its properties.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors (I) Dewi Ismiarti, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Group, Free groups, Free groups constructions

The free group on a set X is generated by X with as few relations as possible between the elements of X, with X is a set. Let say that free group is a group that generated by a set. Products of elements of X and inverses of elements of X can be reduced by deleting all xx^{-1} and $x^{-1}x$ subproducts until none is left. The free group on X consist of formal reduced products, multiplied by concatenation and reduction. This research discussed about the steps of free group construction and the properties of free group.

This research discussed about the basic concept of free groups. Let G be a group and $X \subseteq G$, alphabet $Y = X \cup X'$ and W is the set of all words in Y. There is F_X the set of all reduced word in W. Group F_X is a free group of X. Furthermore, some properties of Free groups. There homomorphism properties of Free groups, first Let $\eta: X \longrightarrow F_X$ be the canonical injection. For every mapping: $X \longrightarrow G$, there is a homomorphism $\varphi: F_X \longrightarrow G$. Such that $f = \varphi \circ \eta$. Also hold a surjective homomorphism, if the group G generated by a subset X, then there is a surjective homomorphism of F_X onto G.

الملخّص

فراتيوي, إرما, دوي. ٢٠٢٠. *الفرقة الحرّيّة و أوصافه*. البحث العلمي. قسم الرياضية. كلية العلوم و التكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرفة : ديوي إسمارتي الماجيستير و محمّد حذيفة الماجستير.

الكلنات المرشدة : الفرقة, الفرقة الحرّيّة , بناء الفرقة الحرّيّة , المبني , أوصاف الفرقة الحرّيّة

الفرقة G تقال فرقة حرّيّة إذا كان G مبنيّة من X بالعلاقات و الاتصالات الممكنة بين العناصر في X , إذ كان X هو الجمع. حتّى تقال أنّ الفرقة الحرّيّة هي تبنى على المجموعات المقسومة من G . هناك الفرقة الحرّيّة التي لها عناصر على شكل كلمة التغيير أو التنقيص. الكلمة في Y تعدد الصفّ, حتّى الصفّ الفارغ من العناصر في Y المقدّمة لتنيجة تضغيف العناصر في X و عكسية العناصر في X . كلمة $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Y$ منقوصة إذا كان $a_{i+1} \neq a_i'$ لجميع ١≦i<n

و هذا البحث عن فكرة أساسية في الفرقة الحرّيّة التي تبدأ بالبناء من الفرقة الحرّيّة بعده عن أوصاف الفرقة الحرّيّة. هناك أوصاف الفرقة الحرّيّة منها إذا $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ هي الكلمة المنقوصة في X , فإذان $a = \eta(a_1) \cdot \eta(a_1) \cdot \dots \cdot \eta(a_n)$. و الصفة الأخرى منها تعني على المثال المقدّم $\eta: X \longrightarrow F_X$. لكلّ التبويب : $X \longrightarrow G$, هناك ما سمّي باسم " هومومورفيسمي " $\varphi: F_X \longrightarrow G$. لذلك فإذان كان $f = \varphi \circ \eta$. يدور فيه هومومورفيسمي المتساوية حيث إن بنيت فرقة G من جزء الجمع x فهناك هومومورفيسمي المتساوية من F_Xإلى G .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari struktur, hubungan dan kuantitas. Pengkajiannya sangat bermanfaat dalam pengembangan dan pemahaman konsep matematika sebagai dasar ilmu sains. Aljabar dibagi menjadi aljabar abstrak, aljabar elementer, aljabar linier dan sebagainya. Aljabar abstrak merupakan salah satu bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, gelanggang, ruang vektor dan modul. Pada awal abad ke-20, istilah aljabar abstrak diciptakan dengan tujuan membedakannya dengan istilah aljabar, yaitu studi manipulasi rumus dan ekspresi aljabar yang melibatkan bilangan riil atau kompleks yang lebih sering disebut dengan aljabar elementer.

Ilmu aljabar abstrak yang berkembang dengan pesat karena penerapan karakteristik dari bentuk-bentuk struktur aljabar tersebut banyak bermanfaat dalam pengembangan metode penyelesaian masalah yang bersifat abstrak dan sulit direpresentasikan melalui operasi biasa (Patma, 2013:1). Salah satu kajian ilmu aljabar abstrak adalah membahas mengenai grup. Grup adalah suatu himpunan yang disertai dengan suatu operasi yang berlaku di dalamnya. Grup memenuhi sifat-sifat yakni misalkan G grup, G tertutup terhadap operasai pada G, operasi pada G asosiatif, terdapat unsur identitas untuk setiap unsur yang ada di G, serta untuk setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasinya.

Grup dibagi menjadi berbagai macam, diantaranya grup hingga, grup siklik, grup abelian, dan lain sebagainya. Masing-masing istilah grup tersebut memiliki definisi dan sifat-sifat yang berbeda. Salah satunya adalah grup siklik. suatu grup G dikatakan grup siklik apabila terdapat unsur $a \in G$ sedemikian sehingga setiap unsur di G dapat dinyatakan sebagai perpangkatan dari a. Atau dapat dikatakan bahwa grup siklik adalah grup yang memiliki pembangun berupa suatu unsur yang termuat di dalam grup tersebut.

Suatu grup G dapat dikatakan grup bebas apabila G dibangun oleh X dengan beberapa relasi yang mungkin antara unsur-unsur di X, dimana X adalah suatu himpunan. Sehingga dapat dikatakan bahwa grup bebas adalah grup yang dibangun oleh suatu himpunan bagian dari G. Pembahasan lebih jauh mengenai grup bebas ditulis oleh Pierre Antonie Grillet pada bukunya yang berjudul Abstract Algebra Second edition. Setelah membaca dan mencoba untuk memahami materi dari grup bebas membuat penulis tertarik untuk mengkaji ulang pembahasan tentang grup bebas tersebut dengan melengkapi beberapa pembuktian teorema yang berkaitan dengan grup bebas serta mengkaji sifat-sifatnya.

Konsep grup bebas dapat ditemukan dalam QS. Al-Ahzab ayat 59:

يَا أَيُّهَا النَّبِيُّ قُلْ لِأَزْوَاجِكَ وَبَنَاتِكَ وَنِسَاءِ الْمُؤْمِنِينَ يُدْنِينَ عَلَيْهِنَّ مِنْ جَلَابِيبِهِنَّ ۚ ذَٰلِكَ أَدْنَىٰ أَنْ

يُعْرَفْنَ فَلَا يُؤْذَيْنَ ۗ وَكَانَ اللَّهُ غَفُورًا رَحِيمًا

Artinya: *Wahai Nabi! Katakanlah kepada istri-istrimu, anak-anak perempuanmu dan istri-istri orang mukmin, "Hendaklah mereka menutup jilbabnya keseluruh tubuh mereka. "yang demikian itu agar mereka lebih mudah untuk dikenali, sehingga mereka tidak diganggu. Dan Allah Maha Pengampun, Maha Penyayang."*

Misalkan suatu grup yang memuat seluruh umat islam di muka bumi. Selanjutnya terdapat seluruh kaum perempuan beragama islam yang merupakan sub himpunan dari grup. Seluruh kaum perempuan tersebut diwajibkan untuk menutup aurat. Dalam himpunan seluruh kaum perempuan tersebut, terdapat umat yang tidak mengikuti perintah yaitu menutup aurat, dan sebaliknya terdapat umat perempuan yang menutup auratnya. Hal ini dapat dikorelasikan dengan konsep grup bebas, dimana grup bebas adalah grup yang dibangun oleh suatu himpunan. Dalam hal ini umat perempuan dikenakan operasi yaitu suatu perintah untuk menutup auratnya. Dapat dikatakan grup kaum perempuan yang menutup aurat dibangun oleh himpunan seluruh kaum perempuan yang beragama islam.

Allah Ta'ala berfirman memerintahkan Rasul-Nya untuk memerintahkan wanita khususnya istri-istri dan anak-anak perempuan beliau karena kemuliaan mereka untuk mengulurkan jilbab mereka, agar mereka berbeda dengan ciri-ciri wanita jahiliyah dan ciri-ciri wanita budak. Jilbab adalah *ar-rida'* (kain penutup) di atas kerudung. Itulah yang dikatakan oleh Ibnu Mas'ud, 'Ubaidah, Qatadah, al-Hasan al-Bashri, Sa'id bin Jubair, Ibrahim an-Nakha'I, Atha' al-Khurasani dan selain mereka. "Jilbab adalah pakaian yang menutupi seluruh tubuh" (Abdullah, 2004:535).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, masalah yang akan dikaji dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi grup bebas dari suatu himpunan?
2. Bagaimana sifat-sifat homomorfisme dari grup bebas?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah sebelumnya, diperoleh tujuan sebagai berikut.

1. Menjelaskan konstruksi grup bebas dari suatu himpunan
2. Menjelaskan sifat-sifat homomorfisme dari grup bebas.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui konstruksi grup bebas pada suatu himpunan serta sifat-sifat dari grup bebas. Secara praktik penelitian ini diharapkan mampu memberikan manfaat diantaranya:

1. Bagi lembaga, hasil penelitian berupa proposal ini akan menambah kepustakaan dan wawasan untuk bidang matematika khususnya aljabar abstrak.
2. Bagi pihak lain, hasil penelitian ini dapat dijadikan sumber informasi untuk menambah pengetahuan di bidang matematika khususnya mengenai grup bebas dalam aljabar.
3. Bagi peneliti, sebagai tambahan materi dalam melakukan penelitian penyusunan karya ilmiah dalam bentuk penelitian, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematikan yang telah diterimanya.
4. Bagi pembaca, sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai grup bebas sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan atau lebih dikembangkan.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif dan jenis penelitian yang digunakan adalah kepustakaan (*library research*). Literatur-literatur yang digunakan untuk bahan rujukan berupa buku referensi, jurnal ilmiah yang dipublikasikan dan artikel yang berkaitan dengan pembahasan. Kajian buku grup dan jurnal terkait penelitian difokuskan pada *Grup Bebas.*

Penelitian ini mengkonstruksi dan membuktikan beberapa teorema yang berlaku pada Grup bebas serta sifat-sifat grup bebas dalam buku Abstract Algebra

Second Edition oleh Pierre Antonie Grillet. Berikut langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini:

1. Diberikan suatu grup G dengan operasi yang disebut perkalian dan $X \subseteq G$.
2. Membentuk suatu subgrup dari G yang terdiri dari semua hasil kali unsur-unsur di X atau invers unsur-unsur di X. Subgrup tersebut disebut subgrup yang dibangun oleh X dan dilambangkan dengan $\langle X \rangle$.
3. Membentuk alfabet $Y = X \cup X'$, dengan X' yang saling lepas dengan X dan beranggotakan invers unsur-unsur di X.
4. Membentuk himpunan W yang beranggotakan semua kata pada alfabet Y.
5. Menjelaskan istilah-istilah yang akan digunakan yaitu:
   a. *Kata* pada alfabet Y adalah suatu barisan hingga $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dengan $a_i \in X\ atau\ a_i^{-1} \in X$.
   b. Misalkan $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ adalah suatu kata di Y. Suatu kata dikatakan tereduksi jika $a_{i+1} \neq a_i'$, untuk semua $1 \leq i < n$.
   c. Reduksi adalah menghapus himpunan barisan yang berbentuk (a_i, a_i') sampai menghasilkan kata tereduksi.
6. Menjelaskan serta membuktikan beberapa Lemma yang berkaitan dengan reduksi yang berguna untuk langkah selanjutnya.
7. Membuktikan F_X yang berisi himpunan semua kata tereduksi di X adalah grup.
8. Membentuk grup bebas dari X, yaitu F_X yang merupakan grup terhadap operasi

$$a \cdot b = red(ab).$$

9. Menunjukkan dan membuktikan sifat-sifat homomorfisme dari grup bebas.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

Bab I PENDAHULUAN

Pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka menjelaskan teori yang dikasi memuat himpunan, relasi, grup, subgrup, pemetaan injektif, pemetaan surjektif, pemetaan bijektif dan homomorfisma grup.

Bab III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi penjelasan definisi grup bebas dan konstruksi grup bebas serta beberapa lemma yang berkaitan dengan grup bebas pada himpunan.

Bab IV PENUTUP

Penutup ini berisi kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada seluruh kajian beberapa saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan mengenai struktur aljabar. Berikut adalah definisi himpunan.

Definisi 2.1.1 *Himpunan atau set adalah kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek yang menyusun himpunan disebut sebagai anggota atau elemen atau unsur dari himpunan.*

Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti $A, B, C, \ldots$ sedangkan anggota himpunan dinotasikan dengan huruf kecil $a, b, c, \ldots$ pernyataan "a adalah anggota dari himpunan A" ditulis $a \in A$, sedangkan pernyataan "b bukan anggota himpunan A" ditulis $b \notin A$ (Silaban, 1995:1).

Misalkan A dan B himpunan. Maka A merupakan himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap unsur dari A adalah unsur dari B. Keduanya dinotasikan $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$ yang artinya A himpunan bagian dari B. Notasi $A \subseteq B$ dibaca "A himpunan bagian dari B" atau "A termuat di B". Selain itu, $B \supseteq A$ dibaca "B memuat A". Simbol $\in$ digunakan untuk unsur, sedangkan simbol $\subseteq$ digunalan untuk himpunan bagian.

Contoh 2.1.1 Penulisan $a \in \{a, b, c, d\}$ atau $\{a\} \subseteq \{a, b, c, d\}$ keduanya benar, sedangkan $a \subseteq \{a, b, c, d\}$ dan $\{a\} \in \{a, b, c, d\}$ keduanya adalah cara yang salah dalam menuliskan notasi.

Definisi 2.1.1 *Misalkan A dan B adalah himpunan, jika setiap unsur-unsur di A juga merupakan unsur-unsur di B dan setiap unsur-unsur B juga merupakan unsur-unsur di A maka A sama dengan B dan dilambangkan dengan $A = B$. Misalkan A dan B himpunan, A sub himpunan improper dari B jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $A = B$* (Gilbert, 2009:2) .

Contoh 2.1.2 Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{1,2,3,4\}$, diperoleh $A \subseteq B$ dan $A = B$, dan A disebut sub himpunan improper dari B atau B sub himpunan improper dari A.

Definisi 2.1.2 *Jika A dan B adalah himpunan, maka A sub himpunan proper dari B jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$* (Gilbert, 2009:3).

Contoh 2.1.3 Misalkan $A = \{1,2,4\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$, diperoleh $A \subseteq B$ dan A sub himpunan proper dari B karena $A \subseteq B$ dan $A \neq B$.

Definisi 2.1.3 *Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki unsur, dan dilambangkan dengan $\{\quad\}$. Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas atau disjoin jika dan hanya jika $A \cap B = \{\quad\}$* (Gilbert, 2009:4}.

Contoh 2.1.4 Himpunan $\{1, -1\}$ dan $\{0,2,3\}$ disjoin karena $\{1, -1\} \cap \{0,2,3\} = \{\quad\}$.

2.2 Relasi dan Pemetaan

2.2.1 Relasi

Definisi 2.2.1.1 *Relasi di himpunan tak kosong A adalah himpunan tak kosong R dari pasangan terurut (x,y) dari unsur x dan y dari A.*

Relasi R adalah sub himpunan dari $A \times A$. Jika pasangan (a, b) di R, ditulis aRb dan dikatakan bahwa a memiliki relasi R ke b. Jika $(a, b) \notin R$, ditulis $a\not{R}b$.

Relasi R dikatakan relasi ekuivalen jika beberapa kondisi di bawah ini terpenuhi untuk sebarang x, y, z di A:

1. xRx Reflektif
2. Jika xRy, maka yRx. Simetris
3. Jika xRy dan yRz, maka xRz Transitif

(Gilbert, 2009:57).

2.2.2 Pemetaan

Definisi 2.2.2.1 *Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu sub himpunan dari $A \times B$ adalah pemetaan f dari A ke B jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ ada unsur yang tunggal (satu dan hanya satu) $b \in B$ sedemikian sehingga $(a, b) \in f$. Jika f adalah pemetaan dari A ke B dan pasangan (a, b) ada di dalam f, ditulis $b = f(a)$ dan disebut sebagai peta dari a oleh f* (Irawan, 2014:21).

Contoh 2.2.2.1 Misalkan $A = \{1, -1,2,3\}$ dan $B = \{1,4,9,16\}$

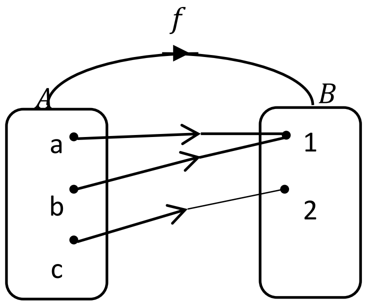
Himpunan $f = \{(1,1), (-1,1), (2,4), (3,9)\}$ adalah pemetaan dari A ke B, karena untuk setiap $a \in A$ ada unsur tunggal $b \in B$ sedemikian sehingga $(a, b) \in f$. Secara efisien, pemetaan ini dapat dijelaskan melalui aturan yang diberikan bagi peta atas f, yaitu $f(a) = a^2$, untuk setiap $a \in A$.

2.3 Pemetaan Surjektif

Definisi 2.3.1 *Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah pemetaan dari A ke B. Pemetaan f disebut pemetaan surjektif jika $f(A) = B$. Jadi, $f: A \to B$ disebut pemetaan surjektif, jika untuk masing-masing $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.*

Pemetaan surjektif sering disebut juga dengan pemetaan pada atau pemetaan onto. Jika f pemetaan surjektif, maka f disebut surjeksi (Bartle, 2008:18)

Contoh 2.3.1

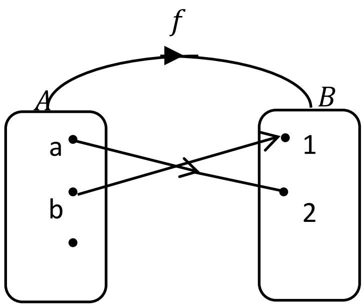


Gambar 2.1 Pemetaan Surjektif

2.4 Pemetaan Injektif

Definisi 2.4.1 *Misalkan f adalah pemetaan dari A ke B. f disebut pemetaan Injektif jika $x, y \in A$, dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Selain itu, dapat juga dinyatakan f pemetaan injektif jika $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Pemetaan injektif sering juga disebut sebagai pemetaan satu-satu. Jika f pemetaan injektif, maka f disebut injeksi* (Bartle, 2000:20).

Contoh 2.4.1

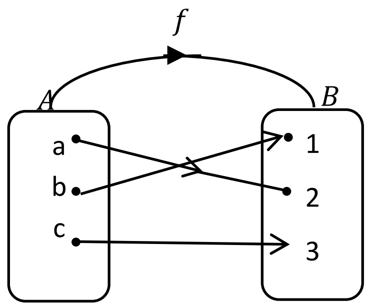


Gambar 2.2 Pemetaan Injektif

2.5 Pemetaan Bijektif

Definisi 2.5.1 *Suatu pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif. Jika f pemetaan bijektif, maka f disebut bijeksi* (Bartle , 2000:22).

Contoh 2.5.1



Gambar 2.3 Pemetaan Bijektif

2.6 Grup

Sebelum dijelaskan mengenai definisi grup terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai operasi biner.

Definisi 2.6.1.1 *Operasi biner pada himpunan G adalah suatu operasi $*$ yang merupakan pemetaan dari $G \times G$ ke G.*

Dengan kata lain operasi $*$ pada anggota himpunan G adalah operasi biner, jika untuk setiap dua anggota a, b di G maka $(a * b)$ juga di G (Grillet, 2000:1).

Operasi biner penjumlahan modulo n dan perkalian modulo n pada himpunanan $\{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$, dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$. Dalam beberapa kondisi, unsur-unsur dari $\mathbb{Z}_n$ akan dikombinasikan dengan penjumlahan modulo n dan perkalian modulo n. Penggunaan penjumlahan saja atau perkalian dan penjumlahan akan terlihat jelas berdasarkan konteksnya. Sebagai contoh, ketika mengalikan matriks dengan entri-entri dari $\mathbb{Z}_n$, akan diperlukan penjumlahan modulo n dan perkalian modulo n (Gilbert, 2009:42).

Contoh 2.6.1.1 Operasi $+$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ dapat dinyatakan sebagai suatu pemetaan dari $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap (a, b) di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ maka $(a + b)$ juga di $\mathbb{Z}$. Jumlah dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula (Sukiman, 2014:60).

Definisi 2.6.2 *Himpunan tak kosong G dikatakan grup bersama operasi * yang dinotasikan dengan* $(G,*)$ *jika memenuhi aksioma berikut:*

1. *Untuk setiap* $a, b \in G$ *berlaku* $a * b \in G$ *(tertutup).*
2. *Untuk setiap* $a, b \in G$ *berlaku* $a * (b * c) = (a * b) * c$ *(hukum asosiatif).*
3. *Terdapat unsur* $e \in G$ *sedemikan sehingga* $a * e = e * a = a$ *untuk semua* $a \in G$ *(terdapat elemen identitas di G).*
4. *Untuk semua* $a \in G$ *terdapat unsur* $a^{-1} \in G$ *sedemikan sehingga* $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ *(terdapat invers di G).*

(Dummit, 2004).

Definisi 2.6.3 *Jika G adalah grup dan* $a \in G$*, dapat dituliskan* $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$*,* $\langle a \rangle$ *disebut subgrup siklik dari G yang dibangun oleh* a*. Suatu grup* G *disebut grup siklik jika terdapat* $a \in G$ *sedemikian sehingga* $G = \langle a \rangle$*. Dalam hal ini* a *disebut sebagai generator atau pembangun dari* G (Dummit, 2004).

Contoh 2.6.2 Himpunan bilangan bulat Z adalah grup terhadap operasi penjumlahan tetapi bukan grup terhadap operasi perkalian (himpunan Z tidak memiliki invers untuk unsur selain ± 1). Demikian pula, himpunan $G = \{1, -1\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian tetapi bukan grup terhadap operasi penjumlahan (Gilbert, 2009:138).

Definisi 2.6.3 *Grup* $(G,*)$ *disebut abelian (grup komutatif) jika* $a * b = b * a$ *untuk semua* $a, b \in G$ (Dummit, 2004:13-14).

Contoh 2.6.3 Berikut beberapa contoh grup abelian:

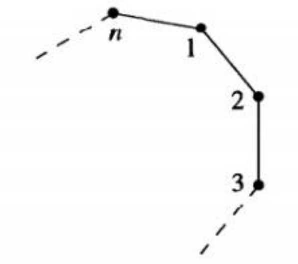
a. Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan.

b. Himpunan semua bilangan rasional tak nol $\mathbb{Q} - \{0\}$ adalah grup abelian terhadap operasi perkalian.

c. Himpunan bilangan Riil positif $\mathbb{R}^+$ adalah grup abelian terhadap operasi perkalian, tetapi bukan grup abelian terhadap operasi penjumlahan (karena tidak memiliki unsur identitas pada penjumlahan dan invers pada penjumlahan).

2.6.1 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Suatu simetri adalah sebarang gerakan segi-n yang didapatkan dari pengambilan salinan segi-n, kemudian dipindahkan dalam sebarang model dalam ruang 3 sampai kembali ke posisi semula. Dideskripsikan simetri, yang pertama yaitu memberi label pada masing-masing n sudut. Contohnya pada gambar berikut.



Gambar 2.4 Pelabelan Sudut

Kemudian simetri s dapat dikorespondensikan dengan permutasi σ pada $\{1,2,3, \ldots, n\}$. Misalkan simetri s adalah rotasi $\frac{2\pi}{n}$ radian searah jarum jam, maka σ permutasi yang mengantarkan titik i ke $i + 1, 1 \leq i \leq n - 1$, dan $\sigma(n) = 1$ (Dummit, 2004:23-24).

Andaikan D_{2n} adalah grup dengan perkalian st sebagai simetri yang diperoleh dari t kemudian s melalui n-poligon. Jika s, t merupakan salinan masing-masing sudut dari permutasi σ, τ, maka st salinan dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah asosiatif karena komposisi fungsi adalah asosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas simetri (fungsi yang menyebabkan semua sisinya tetap), dinotasikan dengan 1. Invers dari $s \in D_{2n}$ adalah simetri yang membalikkan semua gerakan dari s (jadi jika s merupakan salinan dari permutasi σ pada suatu titik, s^{-1} salinan dari σ^{-1}) (Dummit, 2004:24).

Grup dihedral-2n adalah grup yang unsur-unsurnya adalah simetri-simetri dari segi-n beraturan (n-poligon). Simetri suatu poligon adalah rotasi dan refleksi. Jika pada grup simetri anggotanya mewakili rotasi dan refleksi, sedangkan anggota grup permutasi mewakili permutasi dari rotasi dan refleksi. Komposisi dari rotasi dan refleksi ini menghasilkan suatu refleksi. Penulisan grup dihedral adalah $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dimana r menyatakan rotasi dan s menyatakan refleksi.

Contoh 2.6.2.2 Jika $n = 4$, digambarkan suatu persegi pada bidang x, y. Garis-garis simetrinya adalah garis $x = 0$ (sumbu $-y$), $y = 0$ (sumbu $-x$), $y = x$, dan $y = -x$. Sehingga D_{2n} dengan $n = 4$ dapat dinyatakan dalam bentuk $D_{2n} = \{r, r^2, r^3, r^4 = 1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 = s\}$.

2.6.2 Sifat-Sifat Grup

Teorema 2.6.3.1 *Unsur identitas dalam suatu grup adalah tunggal.* (Raisinghania, 1980:76)

Bukti. Misalkan $(G, \cdot)$ adalah grup, dan misalkan e dan h adalah unsur identitas di G. Maka berlaku :

i. $e \cdot h = h \cdot e = h$ (e sebagai identitas)

ii. $e \cdot h = h \cdot e = e$ (h sebagai identitas)

Karena $e \cdot h$ adalah unsur tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat $e = h$. Ini berarti bahwa unsur identitas adalah tunggal.

Teorema 2.6.3.2 *Setiap unsur dari suatu grup memiliki invers yang tunggal.* (Raisinghania, 1980:75).

Bukti. Misalkan $(G,\cdot)$ adalah grup, dan misalkan invers dari $a \in G$ yaitu a_1 dan a_2. Misalkan e adalah unsur identitas di G, maka berlaku:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot \mathrm{e} \\ &= a_1 \cdot (a \cdot a_2) \\ &= (a_1 \cdot a) \cdot a_2 \\ &= e \cdot a_2 \\ &= a_2 \end{aligned}$$

Jadi, $a_1 = a_2$

Ini berarti bahwa setiap unsur di G memiliki invers yang tunggal di G.

Teorema 2.6.3.3 *Invers dari invers dari suatu unsur grup adalah unsur itu sendiri. Misalkan $(G,\cdot)$ grup dan $a \in G$, maka $(a^{-1})^{-1} = a$.* (Raisinghania, 1980:75)

Bukti. Ambil $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ dan berlaku $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

$$\begin{aligned} a \cdot a^{-1} &= e \\ (a \cdot a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} &= e \cdot (a^{-1})^{-1} \\ a \cdot (a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}) &= (a^{-1})^{-1} \\ a \cdot e &= (a^{-1})^{-1} \\ a &= (a^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Teorema 2.6.3.4 *Dalil kanselasi berlaku pada suatu grup.* (Raisinghania, 1980: 76)

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa pada grup berlaku dalil kanselasi kiri maupun kanselasi kanan.

Misalkan $(G,\cdot)$ adalah grup dan untuk setiap $a, b \in G$ akan ditunjukkan berlaku:

i. Jika $b \cdot a = c \cdot a$ maka $b = c$ (kanselasi kanan)

ii. Jika $a \cdot b = a \cdot c$ maka $b = c$ (kanselasi kiri)

Misalkan $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ (a punya invers yaitu a^{-1} di G)

i.

$$b \cdot a = c \cdot a$$

$$(b \cdot a) \cdot a^{-1} = (c \cdot a) \cdot a^{-1}$$

$$b \cdot (a \cdot a^{-1}) = c \cdot (a \cdot a^{-1})$$

$$b = c$$

ii.

$$a \cdot b = a \cdot c$$

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$$

$$b = c$$

Jadi, dalil kanselasi berlaku pada sebarang grup.

Teorema 2.6.3.5 *Jika a, b dua unsur dari suatu grup $(G,\cdot)$, maka persamaan $a \cdot x = b$ dan $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian tunggal di G.* (Raisinghania, 1980:77)

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $a \cdot x = b$ mempunyai selesaian di G. $a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \cdot b \in G$

Selanjutnya,

$$a \cdot x = b$$

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b$$

$$e \cdot x = a^{-1} \cdot b$$

$$x = a^{-1} \cdot b$$

Persamaan tersebut disubtitusikan ke persamaan $a \cdot x = b$

$$a \cdot x = b$$

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = b$$

$$(a \cdot a^{-1}) \cdot b = b$$

$$e \cdot b = b$$

$$b = b$$

Jadi, $a \cdot x = b$ punya selesaian di G, yaitu $x = a^{-1} \cdot b$. Perhatikan bahwa $a^{-1} \cdot b$ adalah hasil pemetaan dari operasi biner $\cdot$, oleh karena itu $a^{-1} \cdot b$ tunggal.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian di G. $a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G, b^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \cdot b \in G$.

$$y \cdot a = b$$

$$y \cdot a \cdot (a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$$

$$y \cdot (a \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$$

$$y \cdot c = b \cdot a^{-1}$$

$$y = b \cdot a^{-1}$$

Persamaan tersebut disubtitusikan ke persamaan $y \cdot a = b$.

$$y \cdot a = b$$

$(b \cdot a^{-1}) \cdot a = b$

$b \cdot (a^{-1} \cdot a) = b$

$b \cdot e = b$

$b = b$

Jadi, $y \cdot a = b$ punya selesaian di G, yaitu $y = b \cdot a^{-1}$. Jadi, $y \cdot a = b$ punya selesaian di G, yaitu $y = b \cdot a^{-1}$. Perhatikan bahwa $b \cdot a^{-1}$ adalah hasil pemetaan dari operasi biner $\cdot$, oleh karena itu $b \cdot a^{-1}$ tunggal.

2.7 Subgrup

Subgrup dari grup G adalah sub himpunan dari G yang mewarisi sifat dari struktur grup G. Berikut adalah definisi dari subgrup.

Definisi 2.7.1 *Misalkan G adalah grup, dan H subhimpunan dari G. Suatu subhimpunan H dikatakan subgroup dari G jika H adalah grup terhadap operasi yang sama dengan G. Dinotasikan $H \leq G$ atau $G \geq H$ apabila H subgrup dari G, dan $H < G$ atau $G > H$ yang artinya $H \leq G$ tetapi $H \neq G$* (Fraleigh, 1999:49).

Teorema 2.7.1 *Suatu sub himpunan H dari grup G dengan operasi biner "$*$", adalah subgrup dari G jika dan hanya jika,*

1. *Unsur identitas e di G ada di H,*
2. *H tertutup terhadap operasi di G,*
3. *Untuk setiap $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.*

Bukti.

$(\rightarrow)$

1. Karena H subgrup dari G, maka H adalah grup, sehingga memuat unsur identitas e', akan ditunjukkan $e' = e$.

$$e' * e' = e'$$

$$e * e' = e'$$

Sehingga,

$$e' * e' = e * e'$$

Dengan kanselasi kanan diperoleh,

$$e' = e$$

Jadi terdapat $e \in H$

2. Karena H subgrup dari G, maka H adalah grup, sehingga H tertutup terhadap operasi $*$ di G
3. Ambil $a \in H,$ karena H grup maka a memiliki invers a^{-1} di $H.$

($\leftarrow$)

Syarat 1 sampai 3 merupakan syarat agar suatu himpunan adalah grup. Satu syarat lainnya yang harus dipenuhi adalah operasi $*$ bersifat asosiatif. Untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Karena $H \subseteq G,$ maka $p, q, r \in H$ juga berlaku

$$(p * q) * r = p * (q * r)$$

Sehingga operasi * di H bersifat asosiatif. Jadi H adalah grup. Karena $H \subseteq G$ maka H subgrup dari G (Fraleigh, 1999:49-50).

Contoh 2.4 Berikut adalah contoh subgrup:

a. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan

b. Setiap grup G memiliki dua subgrup: $H = G$ dan $H = \{e\}$; disebut subgrup trivial dan dinotasikan dengan e.

c. Himpunan bilangan bulat genap adalah subgrup dari grup semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan.

2.8 Homomorfisme Grup

Definisi 2.8 *Suatu homomorfisme ϕ dari suatu grup G ke grup $\bar{G}$ adalah pemetaan dari G ke $\bar{G}$ yang mengawetkan operasi grup. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, untuk setiap $a, b \in G$* (Galian, 2010: 208).

Misalkan $(G,*)$ dan $(G_1,*_1)$ merupakan grup dan f merupakan pemetaan yang memetakan G ke G_1. Maka f disebut sebagai sebuah homomorfisme dari G ke G_1 jika untuk setiap $a, b \in G$, artinya

$$f(a * b) = (f(a)) * (f(b))$$

(Galian, 2010: 200).

Teorema 2.8 *Misalkan $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisme grup, maka:*

1. $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan unsur identitas dari grup G dan G'.

2. $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$, untuk setiap $a \in G$.

Bukti.

1. Ambil e sebagai identitas dari G dan e' identitas dari G', dan ambil $g \in G$.

$$g \times e = g$$

$$\phi(g \times e) = \phi(g)$$

$$\phi(g) \times \phi(e) = \phi(g)$$

$$\phi(e) = e'$$

Jadi $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan unsur identitas dari grup G dan G'.

2. Untuk setiap $g \in G$ berlaku $g \times g^{-1} = g^{-1} \times g = e$, diperoleh

$$g \times g^{-1} = e$$

$$\phi(g \times g^{-1}) = \phi(e)$$

$$\phi(g) \times \phi(g^{-1}) = e'$$

$$\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$$

Jadi $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$, untuk setiap $g \in G$.

2.9 Kajian Keagamaan

Wanita adalah seorang makhluk yang diistimewakan oleh Allah SWT. Terbukti dari perhatian lebih yang dikhususkan Allah kepada kaum hawa tersebut yakni diberikanlah aturan tentang bagaimana caranya seorang wanita menjadi pribadi terhormat baik di hadapan Allah maupun di hadapan manusia, salah satunya dengan cara menutup aurat. Allah telah menjelaskan secara ekspilisit di dalam Al-Qur’an bagaimana tatacara dan batasan-batasan aurat seorang wanita (Toyyib, 2018:72)

Pada suatu riwayat dikemukakan bahwa Siti Saudah (istri Rasulullah) keluar rumah untuk sesuatu keperluan setelah diturunkan ayat hijab. Ia adalah seorang yang badannya tinggi besar sehingga mudah dikenali orang. Pada waktu Umar melihatnya, dan ia berkata: “Hai Saudah. Demi Allah, bagaimana pun kami akan dapat mengenalmu karenanya cobalah piker mengapa engkau keluar?” Dengan tergesa-gesa ia pulang dan saat itu Rasulullah berada di rumah Aisyah sedang memegang tulang sewaktu makan. Ketika masuk ia berkata:”Ya Rasulullah, aku keluar untuk sesuatu keperluan, dan Umar menegurku (karena ia masih me”genalku)”. Karena peristiwa itu turun ayat ini (Surat al Ahzab: 59) kepada Rasulullah SAW. Disaat tulang itu masih ditangannya. Maka bersabdalah Rasulullah: Sesungguhnya Allah telah mengizinkan kau keluar rumah untuk suatu keperluan” (Shaleh, 2007:443).

Dalam peristiwa itu tampak dengan jelas bahwa ayat ini turun bukan khusus berkenaan dengan konteks menutup aurat perempuan, tetapi lebih dari itu, yakni agar mereka tidak diganggu oleh pria-pria usil. Dengan demikian kita dapat berkata dimanapun di dunia ini, baik dulu maupun sekarang bila dijumpai kasus yang sama kriterianya dengan peristiwa melatarbelakangi turunnya ayat itu, maka hukumnya syara’ didasarkan pada ‘*Illat* (penyababnya) “ada” atau “tidak ada” “illat tersebut. Jika ada, maka ada pula hukumnya. Sebaiknya jika tidak ada ‘illat maka tidak ada hukumnya. Berdasarkan kaidah itu maka dapat ditarik kesimpulan bahwa berjilbab itu hukumnya wajib (Baidan, 1999:20).

BAB III
PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai definisi dan konstruksi grup bebas dari suatu himpunan. Pembahasan dimulai dengan membahas grup yang dibangun oleh himpunan.

Grup bebas merupakan grup yang memliki pembangun berupa suatu himpunan. Dari unsur-unsur di grup dapat dibentuk hasil kali. Satu unsur dapat disebut sebagai hasil kali tunggal dan hasil kali kosong, didefinisikan sebagai identitas 1 karena perkalian sebarang unsur dengan hasil kali kosong, tidak mengubah hasil kali.

Definisi 3.1 *Misalkan G adalah grup dengan operasi perkalian. Misalkan $c \in G$ disebut hasil kali kosong jika $c \cdot x = x, x \in G$.*

Berikut contoh hasil kali kosong pada grup terhadap operasi penjumlahan.

Contoh 3.1 Diberikan grup $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ dengan operasi penjumlahan. Hasil kali kosong dari grup tersebut ialah $[0]$ karena

$$[0] + [0] = [0]$$

$$[0] + [1] = [1]$$

$$[0] + [2] = [2]$$

$$[0] + [3] = [3]$$

$$[0] + [4] = [4]$$

$$[0] + [5] = [5]$$

Tidak ada hasil kali kosong selain $[0]$, karena tidak ada $c \in \mathbb{Z}_6$ yang memenuhi $c + x = x, x \in \mathbb{Z}_6$ selain $c = [0]$.

Selanjutnya, berikut contoh hasil kali kosong pada grup terhadap operasi perkalian.

Contoh 3.2 Misalkan $G = \{[1], [2], [3], [4], [5], [6]\} \subseteq \mathbb{Z}_7$ adalah grup dengan operasi perkalian. Hasil kali kosong pada G adalah [1] karena

$$[1] \times [1] = [1]$$

$$[1] \times [2] = [2]$$

$$[1] \times [3] = [3]$$

$$[1] \times [4] = [4]$$

$$[1] \times [5] = [5]$$

$$[1] \times [6] = [6]$$

Tidak ada hasil kali kosong selain [1] di G karena tidak ada $c \in G$ yang memenuhi

$c \times x = x, x \in G$ selain $c = [1]$.

Berikut contoh hasil kali kosong pada grup terhadap operasi komposisi.

Contoh 3.3 Misalkan $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ adalah grup dengan operasi komposisi. Hasil kali kosong pada D_4 adalah 1 karena

$$1 \circ 1 = 1$$

$$1 \circ r = r$$

$$1 \circ r^2 = r^2$$

$$1 \circ r^3 = r^3$$

$$1 \circ s = s$$

$$1 \circ sr = sr$$

$$1 \circ sr^2 = sr^2$$

$$1 \circ sr^3 = sr^3$$

Tidak ada hasil kali kosong selain 1 di D_4 karena tidak ada $c \in D_4$ yang memenuhi

$c \circ x = x, x \in D_4$ selain $c = 1$.

Proposisi 3.1 *Misalkan G adalah grup, dan misalkan X sub himpunan dari G. Himpunan dari semua hasil kali (memuat hasil kali kosong dan hasil kali tunggal) unsur-unsur di X atau invers unsur-unsur di X adalah subgrup dari G; khususnya, himpunan tersebut merupakan subgrup terkecil dari G yang memuat X.*

Bukti. Misalkan $H = \{x_1 x_2 \dots x_n | x_i \in X \text{ atau } x_i^{-1} \in X, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Akan ditunjukkan H memuat unsur identitas di X. Karena untuk $n = 0$, $x_1 x_2 \dots x_n$ adalah hasil kali kosong yakni 1, maka H memuat memuat unsur identitas di X. Akan ditunjukkan H tertutup terhadap operasi di G. Ambil $h, k \in H$ diperoleh

$h = h_1 h_2 \dots h_n$ dan $k = k_1 k_2 \dots k_t$, dengan $h_i, k_i \in X$ atau $h_i^{-1}, k_i^{-1} \in X$ dan $n, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Selanjutnya,

$$h \cdot k = hk = (h_1 h_2 \dots h_n)(k_1 k_2 \dots k_t) = (h_1 h_2 \dots h_n k_1 k_2 \dots k_t) \in H.$$

Maka $hk \in H$ karena hasil kali dari dua hasil kali unsur-unsur di X atau invers unsur-unsur di X adalah hasil kali unsur di X atau inversnya. Akan ditunjukkan untuk setiap $h \in H$ maka $h^{-1} \in H$. Ambil $h \in H$, diperoleh

$h = h_1 h_2 \dots h_n$ dan dengan $h_i \in X$ atau $h_i^{-1} \in X$ dan $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, maka

$$h^{-1} = (h_1 h_2 \dots h_n)^{-1} = h_n^{-1} \dots h_2^{-1} h_1^{-1} \in H.$$

maka terdapat $h^{-1} \in H$. Jadi terbukti bahwa H subgrup dari X.

Akan ditunjukkan H merupakan subgrup terkecil dari G yang memuat X.

Berdasarkan definisi H, jelas bahwa $X \subseteq H$. Misalkan S subgrup G dan $X \subseteq S$. Maka $H \subseteq S$. Ambil $a \in H$, maka $a = a_1 a_2 \ldots, a_n$, $a_i \in X$ atau $a_i^{-1} \in X$, dengan $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Jika $a_i \in X$ maka $a_i \in S$. Jika $a_i^{-1} \in X$, jika $a_i^{-1} \in S$ dan S subgroup, maka $a_i = (a_i^{-1})^{-1} \in S$. Oleh karena itu $a \in S$. Jadi $H \subseteq S$.

Contoh 3.4 Diberikan grup $G = \mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Selanjutnya diberikan $X \subseteq G$ dengan $X = \{2,3\}$, maka H himpunan dari semua hasil kali (memuat hasil kali kosong dan hasil kali tunggal) unsur-unsur di X atau invers unsur-unsur di X, yaitu $H = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ merupakan subgrup dari G.

Selanjutnya, proposisi 3.1.1 tersebut akan berguna untuk memahami definisi pembangun dari sebuah grup berikut ini.

Definisi 3.2 *Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Subgrup dari G yang beranggotakan semua hasil kali unsur-unsur di X atau inversnya (termasuk hasil kali kosong dan hasil kali tunggal) disebut subgrup yang dibangun oleh X dan dilambangkan dengan $\langle X \rangle$. Grup G dikatakan dibangun oleh X jika $\langle X \rangle = G$.*

Contoh 3.5 Diberikan grup $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Diberikan $X \subseteq \mathbb{Z}$, dengan $X = \{1\}$. Subgrup dari $\mathbb{Z}$ yang beranggotakan semua hasil kali unsur-unsur di X atau inversnya disebut subgrup yang dibangun oleh X atau $\langle X \rangle = \mathbb{Z}$.

Berikutnya yaitu pembahasan mengenai kosntruksi grup bebas dari suatu himpunan. Telah dijelaskan mengenai grup yang dibangun oleh himpunan melalui Definisi 3.2. Sehingga dapat dilakukan pembahasan mengenai konstruksi grup bebas berikut ini.

3.1 Konstruksi Grup Bebas

Diberikan grup G dan $X \subseteq G$. Suatu grup G dengan X adalah sub himpunan dari G. Setiap unsur di G adalah hasil kali unsur-unsur di X atau inversnya. Tetapi penulisan unsur-unsur di G tidak secara tunggal ditulis dalam bentuk tersebut, misalnya $1 = xx^{-1} = x^{-1}x$ untuk sebarang $x \in X$: beberapa relasi unsur-unsur di X adalah persamaan unsur-unsur di X dengan hasil kali unsur-unsur di X atau inversnya selalu berlaku di G.

Dapat dikatakan pula bahwa X merupakan pembangun dari G, dimana X merupakan suatu himpunan. Sehingga diperoleh hasil dari pemahaman sebelumnya mengenai grup bebas dimana grup bebas adalah suatu grup yang dibangun oleh suatu himpunan. Berikut adalah definisi umum dari grup bebas.

Definisi 3.1.1.1 *Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Grup bebas pada X adalah grup yang dibangun oleh X dengan sesedikit relasi yang mungkin antara unsur-unsur di X.*

Hasil kali unsur-unsur di X dengan invers unsur-unsur di X dapat direduksi dengan menghapus semua sub hasil kali xx^{-1} dan $x^{-1}x$ sampai tidak ada yang tersisa. Jadi grup bebas pada X memuat hasil kali unsur-unsur di X yang telah direduksi.

Berikut adalah langkah-langkah mengkonstruksi grup bebas.

3.1.1 Membentuk X' dan Alfabet Y

Langkah pertama yaitu membentuk X' dan alfabet Y. Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Misalkan X sebarang himpunan dan X' suatu himpunan yang saling lepas dengan X. Terdapat bijeksi

$$f: X \to X'$$

$$x \to y = x'.$$

Lebih lanjut invers dari bijeksi tersebut adalah

$$f^{-1}: X' \to X$$

$$y \to x = y'$$

Sehingga diperoleh

$$(x')' = y' = x \text{ dan } (y')' = x' = y$$

Untuk semua $x \in X$ dan $y \in Y = X \cup X'$.

Misalkan G grup dan X sub himpunan proper dari G. Selanjutnya, $X' \cap X = \{\ \}$ dan $X' = \{x_1{}^{-1}, x_2{}^{-1} \dots x_n{}^{-1} | x_i \in X,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Dapat dibentuk alfabet

$$\begin{aligned} Y &= X \cup X' \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_n | x_i \in X, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{x_1{}^{-1}, x_2{}^{-1} \dots x_n{}^{-1} | x_i \in X, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_1{}^{-1}, x_2{}^{-1} \dots x_n{}^{-1} | x_i \in X, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \end{aligned}$$

Berikut contoh alfabet Y pada grup himpunan bilangan bulat modulo 5 dengan operasi penjumlahan, dengan $X \subseteq Z_5$ dan X sub himpunan proper dari Z_5.

Contoh 3.1.2.1 Diberikan grup $Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ dengan operasi penjumlahan, dan diberikan $X \subseteq \mathbb{Z}_5$, dengan $X = \{[1], [2]\}$. Bentuk alfabet

$$Y = X \cup X' = \{[1], [2]\} \cup \{[4], [3]\} = \{[1], [2], [3], [4]\}$$

Selanjutnya misalkan X sub himpunan improper dari G, diperoleh

$$X = G = \{x_1, x_2, \dots, x_n | x_i \in X = G, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

dan $X' = \{\ \}$ karena $X \cap X' = \{\ \}$. Namun, tidak dapat dibentuk X' karena X' haruslah berisi invers unsur-unsur di X, karena X' himpunan kosong maka tidak terdapat unsur di X'.

Misalkan $X = \{\ \}$ himpunan kosong, maka tidak dapat dibentuk X' karena X' haruslah berisi invers unsur-unsur di X, sedangkan X himpunan kosong atau tidak memiliki unsur, sehingga tidak dapat dibentuk X' dan alfabet

Y. Maka dapat disimpulkan bahwa syarat X agar dapat terbentuk alfabet Y yaitu X sub himpunan proper dari G.

3.1.2 Membentuk Himpunan Semua Kata di W

Langkah berikutnya yaitu membentuk W yang merupakan himpunan semua kata dari alfabet Y. Grup bebas mempunyai unsur-unsur berupa kata tereduksi. Sebelum itu akan dijelaskan mengenai definisi kata dalam grup bebas.

Definisi 3.1.3.1 *Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Kata pada alfabet Y adalah suatu barisan hingga, mungkin kosong, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dengan $a_i \in X\, atau\, a_i^{-1} \in X$. Khususnya suatu kata merepresentasikan hasil kali unsur-unsur di X atau invers unsur-unsur di X. Himpunan semua kata pada Y merupakan monoid bebas. Selanjutnya himpunan semua kata dari alfabet Y dilambangkan dengan W.*

Penulis memberikan contoh kata berikut ini.

Contoh 3.1.3.1 Diberikan grup $\mathbb{Z}$ dengan $X \subseteq G$, dengan $X = \{1\}$. Bentuk alfabet

$$Y = X \cup X' = \{1\} \cup \{-1\} = \{1, -1\}$$

selanjutnya dibentuk

$$W = \{(\quad), (-1), (1), (-1, \ldots, -1), \ldots (1, \ldots 1), \ldots,$$
$$(-1, 1, \ldots, 1), \ldots, (a_1, a_2, \ldots a_n)\}$$

3.1.3 Membentuk Himpunan Semua Kata Tereduksi di W

Definisi 3.1.3.2 *Misalkan $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ adalah suatu kata di Y. Suatu kata dikatakan tereduksi jika $a_{i+1} \neq a_i'$, untuk semua $1 \leq i < n$. Reduksi* *adalah menghapus sub barisan yang berbentuk* (a_i, a_i') *sampai menghasilkan kata tereduksi.*

Contoh 3.1.3.2 Diberikan grup $G = \mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ dengan operasi penjumlahan. Misalkan $X = \{[1], [3]\}$ dan $X \subseteq G$. Dibentuk alfabet

$$Y = X \cup X' = \{[1], [3]\} \cup \{[4], [2]\} = \{[1], [2], [3], [4]\}.$$

Contoh kata tereduksi di X yaitu ([1],[1],[1]) dan ([2],[2],[4]) sedangkan kata ([1],[2],[2],[3],[4]) tidak tereduksi karena terdapat sub barisan yang berbentuk (a_i, a_i') yaitu $([2], [3])$.

Sebelum menuju ke langkah berikutnya dalam mengkonstruksi grup bebas, berikut adalah notasi-notasi yang berlaku dalam pembahasan mengenai grup bebas.

Definisi 3.2 *Misalkan* a *dan* b *adalah suatu kata di* Y, *notasi* $a \xrightarrow{1} b$ *melambangkan*

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ a_{i+1} = a_i' \ dan \ b = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+2}, \dots, a_n),$$

untuk suatu $1 \leq i < n$.

Selanjutnyan, notasi $a \xrightarrow{k} b$ digunakan jika $k \geq 0$ dan $a \xrightarrow{1} a' \xrightarrow{1} a'' \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} a^{(k)} = b$ untuk suatu $a', a'', \dots, a^{(k)}$ di Y. Jika $k = 0$ maka $a = b$. Dapat pula ditulis $a \longrightarrow b$ jika $a \xrightarrow{k} b$ untuk suatu $k \geq 0$.

Sedangkan jika a tereduksi, maka $a \xrightarrow{k} b$ yang artinya $k = 0$, selama tidak ada $a \xrightarrow{1} c$, berakibat $a \to b$ artinya $a = b$.

Selanjutnya, berikut beberapa lemma mengenai reduksi dalam pembahasan grup bebas.

Lemma 3.1 *Misalkan* a *suatu kata di* W*. Untuk setiap kata* $a \in W$ *terdapat reduksi* $a \longrightarrow b$

Bukti. Misalkan, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ di W. Akan ditunjukkan a tereduksi menggunakan induksi pada n.

Akan ditunjukkan $a \longrightarrow b$ benar untuk $n = 1$. Karena $a_n = a_1$ dengan a_1 adalah kata tunggal, sedangkan kata tunggal tereduksi, maka $a \longrightarrow b$ benar untuk $n = 1$.

Selanjutnya, misalkan $a \longrightarrow b$ benar untuk $n = k$ dengan $k \geq 1$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ tereduksi.

Selanjutnya akan ditunjukkan $a \longrightarrow b$ benar untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan asumsi induksi, terdapat $1 \leq i \leq k$ sehingga $a_{i+1} = a_i'$. Oleh karena itu $a = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ juga tereduksi ke $b = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+2}, \dots, a_k)$.

Lemma 3.2 *Misalkan kata* $a, b, c, d \in W$*. Jika* $a \xrightarrow{1} b$ *dan* $a \xrightarrow{1} c \neq b$*, maka* $b \xrightarrow{1} d$*, dan* $c \xrightarrow{1} d$*.*

Bukti. Misalkan $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a \xrightarrow{1} b$ artinya terdapat $1 \leq i < n$ sehingga $a_{i+1} = a_i'$, dan

$$b = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+2}, \dots, a_n),$$

Selanjutnya $a \xrightarrow{1} c$ artinya terdapat $1 \leq j < n$ sehingga $a_{j+1} = a_j'$, dan

$$c = \left(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+2}, \dots, a_n\right),$$

Karena $b \neq c$ maka $i \neq j$ dan dapat diasumsikan $i < j$.

Jika $j = i + 1$, maka

$$a_i = (a_i')' = a_{i+1}' = a_j' = a_{j-1+1}' = a_{j+1} = a_{i+1+1} = a_{i+2}$$

Perhatikan bahwa

$$a_{i-1} = a_{j-1-1} = a_{j-2}$$

$$a_{i+2} = a_i = a_{j-1}$$

$$a_{i+3} = a_{j-1+3} = a_{j+2}$$

Sehingga diperoleh $(a_{i-1}, a_{i+2}, a_{i+3}) = (a_{j-2}, a_{j-1}, a_{j+2})$, dan akibatnya $b = c$. Oleh karena itu $j \geqq i + 2$. Jadi a_i dan a_{i+1} adalah huruf yang berurutuan dari c, dan a_j dan a_{j+1} adalah huruf yang berurutan dari b, dan diperoleh

$$d = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+2}, \dots, a_n).$$

Lemma 3.3 *Misalkan $a, b, c,$ suatu kata di W, jika $a \longrightarrow b$ dan $a \longrightarrow c$, maka $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ untuk suatu $d \in W$.*

Bukti. Misalkan $a \xrightarrow{k} b$ dan $a \xrightarrow{l} c$. Jika $k = 0$ dan $l = 0$ maka $a = b$ dan $a = c$ diperoleh $b = c$. Sehingga jelaslah bahwa $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$.

Selanjutnya misalkan $l = 1$ akan ditunjukkan $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ untuk suatu $d \in W$ menggunakan induksi pada k.

Akan ditunjukkan $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ untuk suatu $d \in W$ benar untuk $k = 1$.

perhatikan $a \xrightarrow{1} b$ dan $a \xrightarrow{1} c$ maka $b = c$. Karena $b = c$, maka $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ untuk suatu d.

Asumsikan benar untuk $k = p$

Yaitu jika $a \xrightarrow{p} b$ dan $a \xrightarrow{1} c$ maka $b \longrightarrow d_0$ dan $c \longrightarrow d_0$ benar untuk suatu $d_0 \in W$.

Akan ditunjukkan jika $a \xrightarrow{p+1} b$ dan $a \xrightarrow{1} c$ maka $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ benar.

Jika $k = 1$, menggunakan Lemma 3.1.2 diperoleh $b \xrightarrow{1} d$ dan $c \xrightarrow{1} d$ untuk suatu $d \in W$. Sedangkan untuk $k > 1$ misalkan $a \xrightarrow{1} u \xrightarrow{p-1} b$ untuk suatu u.

Jika $u = c$ diperoleh $a \xrightarrow{1} c \xrightarrow{p-1} b$, sehingga $d = b$. Sedangkan jika $u \neq c$ berdasarkan Lemma 3.1.2 berakibat $u \xrightarrow{1} v$ dan $c \xrightarrow{1} v$ untuk suatu v, atau dapat ditulis

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{1} & u & \rightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c & \xrightarrow{1} & v & \rightarrow & d \end{array}$$

perhatikan $u \xrightarrow{p-1} b$ dan $u \xrightarrow{1} v$ maka berdasarkan asumsi induksi, $b \longrightarrow d$ dan $c \xrightarrow{1} v \rightarrow d$ untuk suatu $d \in W$. Dengan demikian, pernyataan benar untuk $l = 1$. Selanjutnya akan dilakukan induksi pada l.

Akan ditunjukkan jika $a \xrightarrow{1} b$ dan $a \xrightarrow{q+1} c$ maka $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ benar.

Jika $l = 1$, menggunakan Lemma 3.1.2 diperoleh $b \xrightarrow{1} d$ dan $c \xrightarrow{1} d$ untuk suatu $d \in W$. Sedangkan untuk $l > 1$ misalkan $a \xrightarrow{1} u \xrightarrow{q-1} c$ untuk suatu u.

Jika $u = b$ diperoleh $a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{q-1} c$, sehingga $d = b$. Sedangkan jika $u \neq c$ berdasarkan Lemma 3.1.2 berakibat $u \xrightarrow{1} v$ dan $c \xrightarrow{1} v$ untuk suatu v, atau dapat ditulis

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{1} & u & \rightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ b & \rightarrow & v & \rightarrow & d \end{array}$$

Selanjutnya jika $u \longrightarrow v$ dan $u \xrightarrow{q-1} c$, maka $b \longrightarrow v \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ untuk suatu d.

Lemma 3.4 *Misalkan a suatu kata di W. Untuk setiap kata $a \in W$ terdapat b kata tunggal tereduksi sedemikian sehingga $a \longrightarrow b$.*

Bukti. Jika $a \longrightarrow b$ dan $a \longrightarrow c$, dengan b dan c tereduksi, maka berdasarkan lemma 6.3. diperoleh $b \longrightarrow d$ dan $c \longrightarrow d$ dan $b = d = c$.

Dari beberapa lemma tersebut dapat diperoleh definisi dari reduksi sebagai berikut.

Definisi 3.5 *Misalkan a suatu kata di W. Reduksi $red\ a$ dari $a \in W$ adalah kata tunggal tereduksi b sedemikian sehingga $a \longrightarrow b$.*

Misalkan G suatu grup dan $X \subseteq G$, akan diperoleh bahwa himpunan F_X yang merupakan himpunan semua kata tereduksi di X adalah grup melaui Proposisi 3.1.2 berikut.

3.1.4 Membentuk Grup F_X

Langkah selanjutnya yaitu membentuk grup F_X yang merupakan himpunan semua kata tereduksi di X.

Proposisi 3.1.4.1 *Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Jika F_X adalah himpunan semua kata tereduksi di X, maka F_X adalah grup terhadap operasi $a \cdot b = red(ab)$.*

Bukti. Akan ditunjukkan untuk setiap $a, b \in F_X$ berlaku $a \cdot b \in F_X$. Jika a tereduksi dan b tereduksi maka $a \cdot b = red(ab) \in F_X$. Jadi F_X tertutup terhadap operasi $(\cdot)$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $a, b \in F_X$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Ambil $a, b, c \in F_X$, Jika $a \xrightarrow{1} b$, maka $ac \xrightarrow{1} bc$ dan $ca \xrightarrow{1} cb$ untuk suatu $c \in W$.

Jika $a, b, c \in W$ tereduksi, maka $ab \xrightarrow{1} a \cdot b$ dan $bc \xrightarrow{1} b \cdot c$. Perhatikan

$$abc \longrightarrow (a \cdot b)c \longrightarrow (a \cdot b) \cdot c \text{ dan } abc \longrightarrow a(b \cdot c) \longrightarrow a \cdot (b \cdot c),$$

Maka $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Jadi terbukti bahwa untuk setiap $a, b \in F_X$ berlaku hukum asosiatif.

Akan ditunjukkan terdapat unsur identitas di F_X. Kata kosong $1 = (\quad)$ merupakan kata tereduksi.

Diperoleh

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= red\ (1a) \\ &= red\ a \\ &= a \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= red\ (a1) \\ &= red\ a \\ &= a \end{aligned}$$

Maka $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, dengan a tereduksi. Jadi terdapat $1 = (\quad)$ kata kosong yang merupakan unsur identitas dari F_X.

Selanjutnya, akan ditunjukkan untuk setiap $a \in F_X$ terdapat $a^{-1} \in F_X$.

Ambil $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, misalkan $a^{-1} = (a'_n, a'_{n-1}, \dots, a'_1)$. Karena $a'_i \neq (a'_{i-1})'$ untuk setiap $i > 1$ dan $aa^{-1} \longrightarrow 1, a^{-1}a \longrightarrow 1$ maka a^{-1} tereduksi. Jadi terdapat invers di F_X. Maka terbukti bahwa F_X adalah grup.

Definisi 3.1.4.1 *Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Misalkan X suatu himpunan dan F_X adalah grup pada Proposisi 3.1.3. Grup bebas pada X adalah grup F_X yang memuat semua kata tereduksi di X.*

Berdasarkan hasil penjelasan sebelumnya mengenai konstruksi grup bebas, berikut dapat disimpulkan langkah-langkah mengkonstruksi grup bebas. Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Grup bebas F_X yang dibangun oleh X dapat dikonstruksi dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Bentuk himpunan X' yang merupakan himpunan saling lepas dengan X dan anggotanya adalah invers unsur-unsur di X. Bentuk himpunan alfabet Y, dengan $Y = X \cup X'$.
2. Bentuk himpunan W yang beranggotakan semua kata pada alfabet Y.
3. Bentuk himpunan F_X yang anggotanya adalah semua kata tereduksi dari W.
4. Definisikan operasi pada F_X dengan
$$a \cdot b = red(ab)$$
untuk setiap $a, b \in F_X$.

Penulis memberikan contoh grup bebas sebagai berikut:

Contoh 3.1.4.1 Diberikan grup $G = \mathrm{Z}_6 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$ himpunan bilangan bulat modulo 6 dengan operasi penjumlahan. Selanjutnya diberikan $X = \{[4],[5]\}$ dengan $X \subseteq G$. Grup bebas F_X yang dibangun oleh X dapat dikonstruksi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Buat himpunan alfabet Y, dengan
$$Y = X \cup X' = \{[4],[5]\} \cup \{[2],[1]\} = \{[1],[2],[4],[5]\}.$$
2. Himpun semua kata pada alfabet Y, yaitu
$$W = \{(\quad),([1]),([2]),([4]),([5]),([1],[1]),([1],[2]),([1],[4]),$$
$$([1],[5]),\dots,(a_1,a_2,\dots,a_n)\}$$
3. Hapus semua sub barisan yang memuat bentuk (a, a') dari setiap kata di W. Kemudian himpun menjadi
$$F_X = \{(\quad),([1]),([1],\dots,[1]),([2],[2]),([2],\dots,[2]),([1],[4]),$$
$$([1],\dots,[1],[4]),\dots,(a_1,a_2,\dots,a_n)\}$$

Dimana F_X adalah himpunan semua kata tereduksi di W dengan menghapus semua sub barisan yang memuat bentuk $([1],[5])$ atau $([5],[1])$ atau $([2],[4])$ atau $([4],[2])$.

4. Diperoleh grup bebas dari himpunan X adalah grup F_X dengan operasi

$$a \cdot b = red(ab)$$

Sebagai contoh, misalkan $a = ([2],[2],[2])$, $b = ([4],[3])$ diperoleh

$$\begin{aligned} a \cdot b &= red\big(([2],[2],[2])([4],[3])\big) \\ &= red([2],[2],[2],[4],[3]) \\ &= ([2],[2],[3]) \end{aligned}$$

Contoh selanjutnya yaitu grup dihedral dengan operasi komposisi.

Contoh 3.1.4.2 Diberikan grup $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dengan operasi komposisi dan $X \subseteq D_4$, dengan $X = \{r\}$. Grup bebas F_X yang dibangun oleh X dapat dikonstruksi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Buat himpunan alfabet Y, dengan

$$\begin{aligned} Y &= X \cup X' \\ &= \{r\} \cup \{r^3\} \\ &= \{r, r^3\} \end{aligned}$$

2. Himpun semua kata pada alfabet Y, yaitu

$$W = \{(\quad), (r), (\,r^3), (rr), (r^3r^3), \dots, (r, \dots, r), \dots, (r^3, \dots, r^3), \dots, (r, r^3, \dots, r^3), \dots, (a_1, a_2, \dots, a_n)\}$$

3. Hapus semua sub barisan yang memuat bentuk (a, a') dari setiap kata di W. Kemudian himpun menjadi

$$F_X = \{(\quad), (r), (\,r^3), (rr), (r^3r^3), \dots, (r, \dots, r), \dots, (r^3, \dots, r^3)\}$$

Dimana F_X adalah himpunan semua kata tereduksi di W dengan menghapus semua sub barisan yang memuat bentuk (r, r^3) atau (r^3, r).

4. Diperoleh grup bebas dari himpunan X adalah grup F_X dengan operasi

$$a \cdot b = red(ab)$$

Sebagai contoh, misalkan $a = (r, r^3, r, r)$, $b = (r^3, r, r, r, r^3)$ diperoleh

$$\begin{aligned} a \cdot b &= red((r, r^3, r, r)(r^3, r, r, r, r^3)) \\ &= red(r, r^3, r, r, r^3, r, r, r, r^3) \\ &= (r, r, r) \end{aligned}$$

3.2 Sifat-Sifat Homomorfisme Grup Bebas

Setelah mengetahui konstruksi dari grup bebas, selanjutnya akan dijelaskan mengenai sifat-sifat dari grup bebas. Suatu grup bebas di X dibangun oleh X. Sedangkan X bukan subhimpunan dari F_X. Namun, terdapat Injeksi Canonic $\eta: X \longrightarrow F_X,\ x \longrightarrow (x)$, yang juga berlaku pada $Y = X \cup X'$ sehingga $\eta: x' \longmapsto (x')$; maka F_X dibangun oleh $\eta(X)$.

Proposisi 3.2.1 *Misalkan G grup dan $X \subseteq G$, dan a suatu kata tereduksi di X. Jika $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ maka*

$$a = \eta(a_1) \cdot \eta(a_2) \cdot \dots \cdot \eta(a_n)$$

Khususnya, F_X dibangun oleh $\eta(X)$.

Bukti. Jika $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tereduksi, kemudian dengan merangkai kata satu huruf $(a_1), (a_2), \dots, (a_n)$ menghasilkan kata tereduksi yaitu

$$a = (a_1) \cdot (a_2) \cdot \dots \cdot (a_n) = \eta(a_1) \cdot \eta(a_2) \cdot \dots \cdot \eta(a_n).$$

Perhatikan bahwa $\eta(x') = \eta(x)^{-1}$ untuk semua $x \in X$; sehingga setiap $a \in F_X$ adalah hasil kali dari unsur-unsur di $\eta(X)$ dan invers unsur-unsur di $\eta(X)$. ■

Selanjutnya yaitu teorema jika F sebarang grup yang dibangun oleh himpunan S dan jika terdapat korespondensi satu-satu antara X dan S yang dinotasikan dengan $X \leftrightarrow S$, maka terdapat suatu homomorfisma $\phi: F \to G$, yakni homomorfisma yang surjektif (onto). Pembahasan lebih lanjut di jelaskan dalam teorema berikut.

Teorema selanjutnya dijelaskan mengenai homomorfisme dari grup bebas berikut ini.

Teorema 3.2.1 *Misalkan* $\eta: X \longrightarrow F_X$ *adalah injeksi canonic. Untuk setiap pemetaan* $: X \longrightarrow G$ *, terdapat secara tunggal homomorfisme* $\varphi: F_X \longrightarrow G$ *sehingga* $f = \varphi \circ \eta$, *atau dapat ditulis*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & F_X \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_1)f(a_2) \dots f(a_n).$$

Bukti. Pertama akan ditunjukkan ketunggalannya. Misalkan $\varphi: F_X \longrightarrow G$ homomorfisme sedemikian sehingga $f = \varphi \circ \eta$. Perhatikan $f\ ke\ X'$ sedemikan sehingga $f(x') = f(x)^{-1}$ untuk setiap $x \in X$. Untuk setiap $x \in X$, diperoleh $\varphi\big(\eta(x)\big) = f(x)$ dan $\varphi(\eta(x') = \varphi(\eta(x)^{-1}) = f(x')$. Jika $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tereduksi, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi\big(\eta(a_1) \cdot \eta(a_2) \cdot \dots \cdot \eta(a_n)\big) \\ &= f(a_1)f(a_2) \dots f(a_n), \end{aligned}$$

Karena homomorfisme, Jadi φ tunggal.

Hal ini menunjukkan pula bahwa pemetaan $\varphi: F_X \longrightarrow G$ menyatakan bahwa untuk setiap kata tereduksi $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dengan

$$\varphi(a) = f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n)$$

adalah homomorfisme. Pertama, untuk setiap kata di W, baik yang tereduksi ataupun tidak tereduksi, φ dapat diperluas ke semua W menggunakan rumusan di atas. Maka $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, untuk setiap $a, b \in W$. Kemudian, jika $a \xrightarrow{1} b$ maka $\varphi(a) = \varphi(b)$: dan jika $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_{i+1} = a_i'$, dan $b = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{j+2}, \dots, a_n)$, untuk suatu $1 \leqq i < n$, diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a_1)\dots f(a_{i-1})f(a_{i+1})\dots f(a_n)\\ &= f(a_1)\dots f(a_{i-1})f(a_{i+2})\dots f(a_n)\\ &= \varphi(b),\end{aligned}$$

Sehingga $(a_{i+1}) = f(a_i)^{-1}$. Selanjutnya, jika $a \longrightarrow b$ maka $\varphi(a) = \varphi(b)$ dan Jika a dan b tereduksi, maka $\varphi(a \cdot b) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Selain terdapat homomorfisma pada grup bebas, lebih khusus lagi terdapat pula homomorfisma surjektif pada grup bebas yang dijelaskan melalui akibat berikut ini.

Akibat 3.2.1 *Misalkan G grup dengan $X \subseteq G$ dan G dibangun oleh X, maka terdapat homomorfisme surjektif dari F_X ke G.*

Bukti. Menggunakan Teorema 3.2.1 terdapat homomorfisme $\varphi: F_X \longrightarrow G$ sedemikian sehingga $\varphi \circ \eta$ adalah pemetaan $X \longrightarrow G$; maka $Im\, \varphi = G$, karena $Im\, \varphi$ memuat setiap pembangun $x = \varphi(\eta(x))$ di G.

3.3 Makna Grup Bebas dalam Perspektif Islam

Al-Qur'an surat Al-Ahzab ayat 59 menjelaskan tentang perintah menutup aurat bagi kaum perempuan. Isi kandungan dari ayat ini menurut tafsir

Kementrian Agama (Kemenag) adalah Allah SWT memerintahkan seluruh kaum wanita, termasuk mulai para istri Nabi hingga anak perempuan Nabi untuk mengenakan pakaian yang sopan dengan jilbab yang menutupi tubuh. Terutama saat keluar rumah. Jilbab yang dimaksud dalam Surat Al-Ahzab ayat 59 menurut tafsir dari Ibnu Katsir yang diamini pula oleh para ahli tafsir Ibnu Mas'ud, Ubaidah, Qatadah, Al-Hasan, Al-Basri, Ibrahim An-Nakha'i, dan Ata' Al-Khurasani berupa kain penutup yang dipakai di atas kepala.

Pada kenyataannya tidak semua umat islam perempuan yang menutup aurat atau memakai jilbab, meskipun telah jelas perintah Allah atas kewajiban menutup aurat dalam hal ini yaitu menggunakan penutup kepala atau jilbab. Kewajiban menutup aurat juga telah tertuang dalam Al-Qur'an yaitu Q.S. An-nur ayat 32. Selain dari itu wajib ditutup, berdasarkan pula riwayat dari Asma binti Abu Bakar bahwa ia pernah ditegur oleh Rasulullah SAW: "Hai Asma', sesungguhnya wanita yang sudah baligh tidak boleh tampak dari badannya kecuali ini, lalu Rasul menunjuk wajah dan dua telapak tangannya (Sesse, 2016:322).

Makna grup bebas dalam perspektif Al-Qur'an dapat diperoleh , misalkan G suatu grup yang berisi seluruh umat muslim di muka bumi. Selanjutnya terdapat X subhimpunan dari G dengan X himpunan semua umat muslim perempuan. Selanjutnya seluruh umat muslim perempuan tersebut dapat direduksi dengan menyeleksi umat muslim perempuan yang tidak menutup aurat. Sehingga tersisa umat muslim yang menutup aurat. Sehingga grup bebas dari himpunan umat muslim perempuan tersebut adalah himpunan umat muslim perempuan yang telah menutup auratnya dan mematuhi kewajiban dalam Al-Qur'an. Kewajiban menutup aurat juga dimaksudkan untuk membedakan antara wanita terhormat dan wanita jalanan. Hal ini berdasarkan sebab turunnya ayat tersebut. Menurut Al Qurthuby, ayat 59 dari surat Al-Ahzab turun sebagai teguran atas kebiasaan wanita-wanita Arab yang keluar rumah tanpa mengenakan jilbab. Karena tidak lah memakai jilbab, kaum laki-laki sering mengganggu mereka dan diperlakukan seperti budak. Untuk mencegah hal itu turunlah ayat tersebut.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Misalkan G grup dan $X \subseteq G$. Grup bebas F_X yang dibangun oleh X dapat dikonstruksi dengan langkah-langkah sebagai berikut.
   a. Bentuk himpunan X' yang merupakan himpunan saling lepas dengan X dan anggotanya adalah invers dari unsur-unsur di X.
   b. Bentuk himpunan alfabet Y, dengan $Y = X \cup X'$.
   c. Bentuk himpunan W yang beranggotakan semua kata pada alfabet Y.
   d. Bentuk himpunan F_X yang anggotanya adalah semua kata tereduksi dari W.
   e. Definisikan operasi pada F_X dengan
   $$a \cdot b = red(ab)$$
   untuk setiap $a, b \in F_X$.
2. Sifat – sifat grup bebas pada penelitian ini ada 2 yaitu:
   a. Misalkan $\eta: X \longrightarrow F_X$ adalah *canonical injection*. Untuk setiap pemetaan $: X \longrightarrow G$, terdapat suatu homomorfisme $\varphi: F_X \longrightarrow G$. Sedemikian sehingga $f = \varphi \circ \eta$.
   b. Jika suatu grup G dibangun oleh suatu subhimpunan X, maka terdapat homomorfisme surjektif dari F_X ke G.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat diambil beberapa saran agar dapat memperbaiki skripsi ini dan melakukan pengembangan lebih lanjut yaitu, dapat mengkaji sifat-sifat grup bebas lainnya seperti isomorfisme pada grup bebas, dan dapat dilakukan juga penelitian mengenai grup bebas yang berhubungan dengan graf dan aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, M. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6.* Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i

Ali, Mukti. (1970). *Dialog Antar Agama*. Jogjakarta: Yayasan Nida.

Baidan, Nashrudin. (1999). *Tafsir bi al-Ra'yi*. Pustaka Pelajar: Yogyakarta.

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. .(2008). *Introduction to Real Analysis.* Third Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dummit, David S. & Foote Richard M. (2004). *Abstract Algebra. Third Edition*. John Wiley & Sons.

Departemen Agama RI. (1974). Al-Qur'an. Kudus: Menara Kudus.

Fraleigh, John B. (1999). *A First Course in Abstrack Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company. United States of America.

Galian, Joseph A. (2010*). Contemporary Abstract Algebra. Eighth Edition*. United States of America: Brooks/Cole Cengange Learning.

Gilbert, L dan Gilbert, J. (2009). *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. Stamford:Nelson Education, Ltd.

Grillet, Pierre Antonie. (2000). *Graduate Texts in Mathematics Abstract Algebra. Second Edition*. New York:Springer Science+Business Media.

Irawan, Wahyu H. (2014). *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-Maliki Press.

Patma, Hery Susanto. (2013). Grup Hingga Nilpotent. *Jurnal Universitas Negeri Malang*. Hlm. 2.

Raisanghania, M.D dan Agrawal, R.S. (1980). *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chad & Company, Ltd.

Sesse, M.S. (2016). Aurat Wanita dan Hukum Menutup-nya Menurut Hukum Islam. *Jurnal Al-Maiyyah*. Vol.9, No.2.

Shaleh, K.H.Q. (2007). *Asbabun Nuzul*. Diponegoro:Bandung.

Silaban, P.. (1995). Teori Himpunan. Jakarta:Erlangga.

Sukiman, (2014). Pengantar Aljabar Abstrak. F. MIPA UNY: Yogyakarta.

Toyyib, Moh. (2018). Kajian Tafsir Al-Qur'an Surah Al-Ahzab Ayat 59. *Studi Komparatif Tafsir Al Misbah dan Tafsir-Tafsir Terdahulu.* Vol. 3, No. 1

Utami, Kartika Nur. (2018). *Jurnal Studi Agama-Agama dan Pemikiran Islam*. Vol. 16, No. 1.

RIWAYAT HIDUP

Irma Dwi Pratiwi, lahir di Malang pada tanggal 15 Agustus 1997. Anak kedua dari 3 bersaudara yakni dari pasangan Bapak Jumadi dan Ibu Aidah.

Perempuan yang akrab disapa Irma ini telah menempuh pendidikan formal dari TK Dharmawanita Slamparejo, lalu pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Kemiri 1 dan lulus pada tahun 2010, dan melanjutkan ke SMPN 2 Jabung. Selanjutnya melanjutkan ke SMAN 1 Tumpang dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya di tahun 2016 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa rutinitas mahasiswa dilakukan dengan tekun, dan melaksanakan kegiatan menjadi mahasiswa dengan tugas pada umumnya. Selain aktif di bidang akademik, juga mengikuti Unit Kegiatan Mahasiswa Radio SImfoni FM Malang. Kegiatan yang dilakukan di UKM tersebut ialah, menjadi penyiar radio, mengemban tugas sebagai Music Director, serta menjadi panitia di berbagai acara yang diadakan oleh Simfoni FM. Beberapa acara yang pernah diadakan diantaranya STATION (Simfoni Training and Action) National Seminar 2017, 2018, dan 2019, Diklat Keradioan Dasar XIX 2018 and 2019, Presenter School of Music Director 2018 and 2019, dan beberapa acara lainnya.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Irma Dwi Pratiwi
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Grup Bebas dan Sifat-Sifatnya
Pembimbing I : Dewi Ismiarti, M. Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M. Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Agustus 2019	Konsultasi Bab I	1.
2.	16 Agustus 2019	Konsultasi Bab I, II dan II	2.
3.	2 September 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	16 September 2020	Pembenahan Bab I	4.
5.	4 Desember 2020	Pembenahan Bab II	5.
6.	10 Agustus 2021	Pembenahan Bab III	6.
7.	5 September 2021	Konsultasi Bab IV	7.
8.	18 Oktober 2021	Pembenahan Bab III	8.
9.	4 November 2021	Pembenahan Bab III	9.
10.	12 November 2021	Konsultasi Abstrak	10.
11	29 November 2021	ACC Kajian Keagamaan	11.
12	30 November 2021	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 20 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M. Sc
NIP. 19741129 200012 2 005