

DEKOMPOSISI GRAF POHON PISANG $B_{m,n}$

SKRIPSI

**OLEH
ALFI ISTIJAP AJI SAILENDRA
NIM. 17610105**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

DEKOMPOSISI GRAF POHON PISANG $B_{m,n}$

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
ALFI ISTIJAP AJI SAILENDRA
NIM. 17610105**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

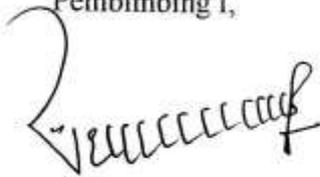
DEKOMPOSISI GRAF POHON PISANG $B_{m,n}$

SKRIPSI

Oleh
ALFI ISTIJAP AJI SAILENDRA
NIM. 17610105

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 19 November 2021

Pembimbing I,



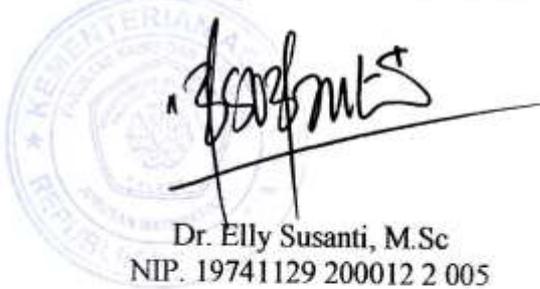
Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Pembimbing II,



Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

DEKOMPOSISI GRAF POHON PISANG $B_{m,n}$

SKRIPSI

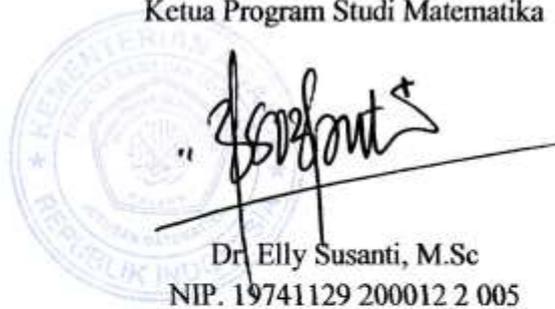
Oleh
ALFI ISTIJAP AJI SAILENDRA
NIM. 17610105

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Desember 2021

Penguji Utama : Dewi Ismiarti, M.Si
Ketua Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd
Sekretaris Penguji : Evawati Alisah, M.Pd
Anggota Penguji : Ach. Nasichuddin, M.A



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Alfi Istijap Aji Sailendra

NIM : 17610105

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan mengambil data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Desember 2021
Yang membuat pernyataan



Alfi Istijap Aji Sailendra
NIM. 17610105

MOTO

”Sekeras apa pun mengejar dunia, jangan lupa masih ada kehidupan akhirat”

KH. Achmad Fakhurrozi Karim

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

1. Kedua orang tua, bapak Teguh Wahyudi dan ibu Sri Hayunik yang selalu memberi pengorbanan, nasihat dan doanya.
2. Adik Nimas Dwijayati yang selalu memberi doa dan dukungannya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puja dan puji ditujukan kepada Allah SWT. atas nikmat, rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menuntaskan penelitian skripsi ini dengan judul “Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$ ”. Shalawat serta salam yang indah dan tulus selalu terlimpahcurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW. yang dengan penuh perjuangan telah memperjuangkan Islam sebagai agama pencerahan.

Selama proses penyelesaian penelitian skripsi ini, pastinya penulis mendapatkan berbagai masalah dan hambatan tetapi banyak juga bimbingan dan arahan dari berbagai pihak yang telah membantu menyelesaikan penelitian skripsi ini. Maka dari itu penulis memberikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan doa yang ditujukan kepada:

1. Prof. Dr. H. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku wali dosen yang selalu memberi pendampingan mengenai akademik selama kuliah.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah memberi berbagai arahan, nasihat, motivasi dan membagi pengalamannya kepada

penulis.

6. Ach. Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II yang telah memberi berbagai arahan dan telah banyak berbagi ilmu.
7. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen penguji I yang telah memberikan masukan dan saran untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen penguji II yang telah memberikan masukan dan saran untuk menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Lebih khususnya semua dosen yang selalu sedikit banyaknya memberikan pengalaman dan ilmu.
10. Bapak, ibu dan adik semata wayang yang dengan istiqomah memberi doa, semangat, nasihat, dukungan dan kasih sayang yang sangat tidak terbatas.
11. Seluruh ustadz, ustadzah dan guru yang secara istiqomah memberi doa, memberi motivasi, nasihat dan ilmunya.
12. Seluruh keluarga sanak famili yang telah membantu penulis dalam *tholabul ilmi*.
13. Sahabat-sahabat yang selalu memahami, membantu, memberi dukungan, berbagi pengalaman dan berbagi cerita suka maupun duka.
14. Teman-teman Program Studi Matematika angkatan MAGENTA 2017 yang telah lama bersama meraih keinginan yang mulia.
15. Sahabat Santri Al-Hikam Malang khususnya angkatan Armada Juang Nusa dan Bangsa (Arjuna) 2018 yang telah sedikit banyak memberi masukan, motivasi, dukungan serta doanya.

16. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menuntaskan skripsi ini.

Semoga Allah SWT. tetap melimpahkan barokah, nikmat, rahmat, taufik dan hidayah-Nya kepada kita. Penulis berharap, semoga penelitian skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri dan bagi para pembaca, serta hasil dari penelitian skripsi ini dapat memberikan kontribusi yang positif dalam dunia ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Malang, 27 Desember 2021

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|-------|
| HALAMAN JUDUL | |
| HALAMAN PENGAJUAN | |
| HALAMAN PERSETUJUAN | |
| HALAMAN PENGESAHAN | |
| HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN | |
| HALAMAN MOTO | |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | |
| KATA PENGANTAR | viii |
| DAFTAR ISI | xi |
| DAFTAR TABEL | xiii |
| DAFTAR GAMBAR | xiv |
| ABSTRAK | xvii |
| ABSTRACT | xviii |
| ملخص | xix |

BAB I PENDAHULUAN

| | |
|---------------------------------|---|
| 1.1 Latar Belakang | 2 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 3 |
| 1.3 Tujuan | 3 |
| 1.4 Manfaat Penelitian | 3 |
| 1.5 Metode Penelitian | 3 |
| 1.6 Sistematika Penulisan | 4 |

BAB II KAJIAN PUSTAKA

| | |
|----------------------------|----|
| 2.1 Graf | 6 |
| 2.2 Derajat Titik | 8 |
| 2.3 Graf Terhubung | 8 |
| 2.4 Subgraf | 11 |
| 2.5 Komponen Graf | 13 |
| 2.6 Graf Komplit | 13 |
| 2.7 Partisi Himpunan | 15 |
| 2.8 Graf Bipartisi | 16 |
| 2.9 Graf Pohon | 17 |
| 2.10 Graf Isomorfik | 18 |

| | | |
|--------|---|----|
| 2.11 | Graf Pohon Pisang | 19 |
| 2.12 | Dekomposisi Graf | 20 |
| 2.13 | Pembagian Golongan Manusia Berdasarkan Surat al-Waqi'ah | 21 |
| 2.13.1 | Golongan Yang Paling Mulia | 23 |
| 2.13.2 | Golongan Kanan atau Penghuni Surga | 23 |
| 2.13.3 | Golongan Kiri atau Penghuni Neraka | 24 |

BAB III PEMBAHASAN

| | | |
|--------|--|----|
| 3.1 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$ | 26 |
| 3.1.1 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,2}$ | 26 |
| 3.1.2 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,3}$ | 28 |
| 3.1.3 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,4}$ | 30 |
| 3.1.4 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,5}$ | 32 |
| 3.1.5 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,2}$ | 34 |
| 3.1.6 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$ | 36 |
| 3.1.7 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,4}$ | 38 |
| 3.1.8 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,5}$ | 40 |
| 3.1.9 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,2}$ | 43 |
| 3.1.10 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,3}$ | 45 |
| 3.1.11 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,4}$ | 48 |
| 3.1.12 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$ | 51 |
| 3.1.13 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,2}$ | 54 |
| 3.1.14 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,3}$ | 57 |
| 3.1.15 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,4}$ | 59 |
| 3.1.16 | Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$ | 62 |
| 3.2 | Tabulasi Dekomposisi Graf Pohon Pisang | 66 |
| 3.3 | Pengelompokan Manusia Berdasarkan Teori Graf | 76 |

BAB IV PENUTUP

| | | |
|-----|------------------|----|
| 4.1 | Kesimpulan | 79 |
| 4.2 | Saran | 79 |

DAFTAR RUJUKAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

| | | |
|------------|--|----|
| Tabel 3.1 | Pola Sisi dan Titik Pada Graf Pohon Pisang $B_{1,n}$ | 66 |
| Tabel 3.2 | Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,n}$ | 66 |
| Tabel 3.3 | Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{2,n}$ | 67 |
| Tabel 3.4 | Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,n}$ | 68 |
| Tabel 3.5 | Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{3,n}$ | 68 |
| Tabel 3.6 | Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,n}$ | 69 |
| Tabel 3.7 | Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{4,n}$ | 70 |
| Tabel 3.8 | Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,n}$ | 70 |
| Tabel 3.9 | Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$ | 71 |
| Tabel 3.10 | Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$ | 72 |
| Tabel 3.11 | Penjelasan Sisi | 73 |

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-------------|--|----|
| Gambar 2.1 | Graf G Berorder 5 dan Berukuran 6 | 6 |
| Gambar 2.2 | Titik yang Bertetangga pada Graf G | 7 |
| Gambar 2.3 | Titik yang Bersisian dengan Sisi pada Graf G | 7 |
| Gambar 2.4 | Derajat Titik pada Graf G | 8 |
| Gambar 2.5 | Jalan pada Graf G | 9 |
| Gambar 2.6 | Sirkuit pada Graf G | 9 |
| Gambar 2.7 | Sirkuit pada Graf G | 10 |
| Gambar 2.8 | Jejak pada Graf G | 10 |
| Gambar 2.9 | Siklus pada Graf G | 11 |
| Gambar 2.10 | Graf Terhubung | 11 |
| Gambar 2.11 | Jembatan pada Graf G | 13 |
| Gambar 2.12 | Subgraf dan Bukan Subgraf | 12 |
| Gambar 2.13 | Subgraf Terinduksi Titik dan Subgraf Terinduksi Sisi | 13 |
| Gambar 2.14 | Graf Komplit K_1, K_2, K_3, K_4 | 14 |
| Gambar 2.15 | $K_2, 2K_2, 3K_2, 4K_2$ | 14 |
| Gambar 2.16 | Graf Bipartisi | 16 |
| Gambar 2.17 | Graf Bipartisi Komplit $K_{2,3}$ | 17 |
| Gambar 2.18 | Graf Bintang S_5 | 17 |
| Gambar 2.19 | Graf Pohon | 18 |
| Gambar 2.20 | Graf G Isomorfik Dengan Graf H | 18 |
| Gambar 2.21 | Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$ | 20 |
| Gambar 2.22 | Graf G | 20 |
| Gambar 2.23 | Partisi Sisi dari Graf G | 21 |
| Gambar 3.1 | $K_2, 2K_2, 3K_2, 4K_2$ | 26 |

| | | |
|-------------|---|----|
| Gambar 3.2 | Graf Pohon Pisang $B_{1,2}$ | 26 |
| Gambar 3.3 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{1,2}$ | 27 |
| Gambar 3.4 | Graf Pohon Pisang $B_{1,3}$ | 28 |
| Gambar 3.5 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{1,3}$ | 28 |
| Gambar 3.6 | Graf Pohon Pisang $B_{1,4}$ | 30 |
| Gambar 3.7 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{1,4}$ | 30 |
| Gambar 3.8 | Graf Pohon Pisang $B_{1,5}$ | 32 |
| Gambar 3.9 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{1,5}$ | 33 |
| Gambar 3.10 | Graf Pohon Pisang $B_{2,2}$ | 34 |
| Gambar 3.11 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{2,2}$ | 35 |
| Gambar 3.12 | Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$ | 36 |
| Gambar 3.13 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$ | 37 |
| Gambar 3.14 | Graf Pohon Pisang $B_{2,4}$ | 38 |
| Gambar 3.15 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{2,4}$ | 39 |
| Gambar 3.16 | Graf Pohon Pisang $B_{2,5}$ | 41 |
| Gambar 3.17 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{2,5}$ | 42 |
| Gambar 3.18 | Graf Pohon Pisang $B_{3,2}$ | 44 |
| Gambar 3.19 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{3,2}$ | 44 |
| Gambar 3.20 | Graf Pohon Pisang $B_{3,3}$ | 46 |
| Gambar 3.21 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{3,3}$ | 47 |
| Gambar 3.22 | Graf Pohon Pisang $B_{3,4}$ | 49 |
| Gambar 3.23 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{3,4}$ | 50 |
| Gambar 3.24 | Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$ | 52 |
| Gambar 3.25 | Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$ | 53 |
| Gambar 3.26 | Graf Pohon Pisang $B_{4,2}$ | 55 |

| | |
|---|----|
| Gambar 3.27 Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{4,2}$ | 55 |
| Gambar 3.28 Graf Pohon Pisang $B_{4,3}$ | 57 |
| Gambar 3.29 Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{4,3}$ | 58 |
| Gambar 3.30 Graf Pohon Pisang $B_{4,4}$ | 60 |
| Gambar 3.31 Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{4,4}$ | 61 |
| Gambar 3.32 Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$ | 63 |
| Gambar 3.33 Partisi Sisi dari Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$ | 64 |
| Gambar 3.34 Representasi Graf Pada Surat al-Waqi'ah | 77 |

ABSTRAK

Sailendra, Alfi Istijap Aji. 2021. **Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$** . Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci : *dekomposisi, graf pohon pisang, graf komplit*

Dekomposisi graf adalah himpunan subgraf $\{H_i\}_{i=1}^n$ dari graf G sehingga $H_i[E_i]$ untuk suatu E_i subset $E(G)$ dan $\{E_i\}_{i=1}^n$ merupakan partisi dari $E(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$, untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah penelitian kepustakaan. Beberapa langkah yang dilakukan untuk menentukan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

- a. Menggambar graf pohon pisang $B_{m,n}$ dan memberi nama pada setiap sisi dan titiknya.
- b. Menentukan partisi-partisi pada graf pohon pisang $B_{m,n}$.
- c. Membuat subgraf dari partisi-partisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
- d. Menentukan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
- e. Mentabulasi dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
- f. Membuat teorema baru dan membuktikannya.

Hasil penelitian ini adalah untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ maka graf pohon pisang $B_{m,n}$ merupakan dekomposisi mK_2 . Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk melanjutkan penelitian dekomposisi menggunakan graf yang lain.

ABSTRACT

Sailendra, Alfi Istijap Aji. **On the Decomposition of the Banana Tree $B_{m,n}$.**
Thesis. Mathematics Departmen, Science and Technology Faculty,
Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (I)
Evawati Alisah, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keyword: *decomposition, banana tree graph, complete graph*

A decomposition of graph G is collection of subgraphs $\{H_i\}_{i=1}^n$ from G such that $H_i[E_i]$ for E_i is a subset of $E(G)$ and $\{E_i\}_{i=1}^n$ is a partition of $E(G)$. The purpose of the research was to determine the decomposition of the banana tree graph $B_{m,n}$, for $m \geq 1$ and $n \geq 2$.

The research method used in this research is library research. The steps used to determine the decomposition of the banana tree graph $B_{m,n}$ are as follow:

- a. Draw a banana tree graph $B_{m,n}$ and give name to each edge and vertex,
- b. Determine the partition on the edges of the banana tree graph $B_{m,n}$.
- c. Induced subgraph of from partitions of the banana tree graph $B_{m,n}$.
- d. Determine the decomposition of the banana tree graph $B_{m,n}$.
- e. Tabulate a conjecture on the decomposition of the banana tree graph $B_{m,n}$.
- f. Construct theorem of the decomposition theorem of of the banana tree graph $B_{m,n}$ and its proof.

The result of the reasearch is to $m \geq 1$ and $n \geq 2$ then banana tree graph $B_{m,n}$ is decomposed by mK_2 –decomposition. For next research, it is recommended to continue using the different of graph.

ملخص

سايلندرا، الف استيجاف اجي. 2021. تحليل الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$. البحث الجامعي. عيب الرياضيات. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جمعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة : (1) ايفاوتي ألسة، الماجستير (2) احمد ناصح الدين، الماجستير.

الكلمات الرئيسية : تقسيم، الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ ، الرسم البياني الكامل

تحليل الرسم البياني G هو مجموعة من الرسومات الفرعية $\{H_i\}_{i=1}^n$ من الرسم البياني G بحيث $H_i[E_i]$ لجموعه E_i فرعية من $E(G)$ ، و $\{E_i\}_{i=1}^n$ هو قسم $E(G)$. الغرض من هذه الدراسة هو تحديد تحليل الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ ، إلى $m \geq 1$ و $n \geq 2$. طريقة البحث المستخدمة في هذا البحث هي بحث المكتبة. الخطوات المستخدمة في

تحديد تحليل الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ هي كما يلي :

أ. ارسم رسمًا بيانيًا لشجرة الموز $B_{m,n}$ وقم بتسمية كل نقطة و جانب،

ب. تحديد تقسيم جوانب لشجرة الموز $B_{m,n}$ ،

ج. إنشاء رسم فرعي من القسم على جانبي الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ ،

د. حدد تحليل لشجرة الموز $B_{m,n}$ ،

هـ. تمت جدولة تحليل الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ ،

و. تجميع نظرية التحلل للرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ و إثباته.

نتائج هذه الدراسة وهي لنفترض أن $m \geq 1$ و $n \geq 2$ ، لأن الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ يتحلل بواسطة الرسم البياني الكامل mK_2 فإن الرسم البياني لشجرة الموز $B_{m,n}$ هو mK_2 -التحلل. لمزيد من البحث ، يوصى بتحليل الرسوم البيانية الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam ilmu pengetahuan, matematika disebut "*Queen of Science*" yang artinya "Ratu Ilmu Pengetahuan". Dalam perkembangannya, matematika disebut "*Servant of Science*" yang artinya "Pelayan Ilmu Pengetahuan". Julukan inilah yang menandakan bahwa matematika adalah ilmu yang sangat luas yang sehingga dalam kehidupan banyak yang membutuhkan ilmu matematika dan ilmu pengetahuan yang lain juga membutuhkan ilmu matematika untuk mengembangkan ilmunya (Bell, 1951).

Teori graf merupakan salah satu topik yang dibahas dalam ilmu matematika. Teori graf merupakan salah satu cabang dari beberapa ilmu matematika yang diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan yang berasal dari Swiss yaitu Leonard Euler. Graf merupakan himpunan titik dan sisi yang mana sisi-sisi tersebut yang menghubungkan salah satu titik ke titik yang lain. Ada beberapa jenis graf, di antaranya adalah graf yang semua titiknya saling terhubung oleh sisi yang disebut dengan graf komplit yang dituliskan dengan K_n , ada juga graf yang memiliki titik sebanyak $n + 1$ dengan n titik sebagai tepi dan 1 titik sebagai pusat yang mana semua titik tepi terdapat sisi yang menghubungkan pada titik pusat, graf ini disebut dengan graf bintang yang dituliskan dengan S_n , ada juga graf pohon pisang $B_{m,n}$, yang definisinya adalah terdapat sisi yang menghubungkan salah satu titik ujung dari graf bintang S_n yang sebanyak m pada graf komplit K_1 .

Dekomposisi graf dapat diimplementasikan ke ajarn Agama Islam. Seperti contoh pembagian alat hewan jalan yang dimiliki oleh hewan.

Allah berfirman dalam QS. an-Nur ayat 45:

وَاللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَابَّةٍ مِّن مَّاءٍ فَمِنْهُمْ مَّن يَمْشِي عَلَىٰ بَطْنِهِ ۗ وَمِنْهُمْ مَّن يَمْشِي عَلَىٰ رِجْلَيْنِ
وَمِنْهُمْ مَّن يَمْشِي عَلَىٰ أَرْبَعٍ يَخْلُقُ اللَّهُ مَا يَشَاءُ ۗ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ (٤٥)

Artinya: *Dan Allah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki, sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang Dia kehendaki. Sungguh, Allah Mahakuasa atas segala sesuatu (QS. an-Nur: 45).*

Ibnu Katsir menafsirkan surat an-Nur ayat 45 bahwa Allah menciptakan sebagian hewan yang berjalan menggunakan perutnya seperti ular dan sebagainya. Allah juga menciptakan sebagian hewan yang berjalan menggunakan dua kaki seperti ayam dan sebagainya. Allah juga menciptakan sebagian hewan yang berjalan menggunakan empat kaki seperti sapi dan sebagainya. Seperti itulah kuasa Allah yang maha menciptakan dengan kehendaknya. Ketika Allah sudah berkehendak pasti terjadi dan ketika Allah tidak berkehendak pasti tidak akan terjadi (Abdullah, 2003).

Keterkaitan surat an-Nur ayat 45 dengan dekomposisi graf adalah surat an-Nur ayat 45 diibaratkan suatu graf. Kemudian graf tersebut dipartisi menjadi tiga yang diibaratkan dengan tiga kelompok hewan yaitu hewan yang berjalan dengan perut seperti ular, cacing, siput dan sebagainya, hewan yang berjalan dengan dua kaki seperti bebek, ayam, penguin dan sebagainya dan hewan yang berjalan dengan empat kaki seperti kambing, sapi, singa dan sebagainya. Berbagai jenis hewan tersebut diibaratkan sisi-sisi yang ada pada graf.

Dekomposisi graf telah sering diteliti seperti contoh penelitian pada tahun 2020 karya This'atun Na'imah yang telah menjelaskan bagaimana dekomposisi

graf kincir sampai W_2^6 dan memunculkan kesimpulan bahwa graf kincir W_2^m merupakan dekomposisi- C_3 . Pada tahun 2014, Nur Rahmawati telah menyelesaikan artikelnya yang membahas tentang dekomposisi dari empat jenis graf sekaligus. Empat graf itu adalah graf sikel, graf roda, graf gir dan graf persahabatan yang memunculkan kesimpulan bahwa graf sikel C_n merupakan dekomposisi- K_2 , graf roda W_n dengan $n \geq 3$ merupakan dekomposisi- $2K_2$, graf gir G_n dengan $n \geq 3$ merupakan dekomposisi- $3K_2$ dan graf persahabatan F_n dengan $n \geq 2$ merupakan dekomposisi- C_3 .

Karena pada dekomposisi graf pohon pisang belum pernah diteliti maka penulis merumuskan judul penelitian ini dengan judul “Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$ ”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$?

1.3 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dan mendeskripsikan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah bertambahnya pengetahuan tentang graf dan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.

1.5 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kajian pustaka atau kepustakaan,

yaitu dengan melakukan penelitian agar memperoleh beberapa informasi dan objek yang digunakan pada pembahasan masalah.

Berikut merupakan langkah-langkah untuk menyelesaikan penelitian berikut:

1. Menggambar graf pohon pisang $B_{m,n}$ dan memberi label pada setiap sisi dan titiknya.
2. Menentukan partisi sisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
3. Menginduksi subgraf dari partisi sisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
4. Menentukan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
5. Mentabulasi dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$.
6. Membuat teorema baru dan membuktikannya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini terdiri dari empat bab. Pada masing-masing bab terdiri dari beberapa subbab dengan sistematika penulisan yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Pada bab pendahuluan dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab kajian pustaka akan dijelaskan beberapa teori yang mendasari pembahasan dan integrasi graf dengan kajian agama.

BAB III Pembahasan

Pada bab pembahasan merupakan pokok dari skripsi yang membahas jawaban rumusan masalah sebagai pertanyaan dan integrasi graf dengan kajian agama.

BAB IV Penutup

Pada bab penutup disampaikan kesimpulan dan saran.

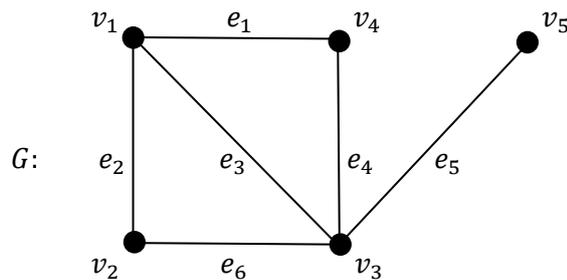
BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 2.1.1 (Chartrand dan Zang, 2012) Suatu graf G merupakan pasangan himpunan yang terdiri dari himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ yang tidak kosong serta berhingga dari beberapa objek yang disebut titik (vertex) dan $E(G)$ yang menghubungkan beberapa titik yang disebut sisi (edge). Banyaknya titik pada G disebut order dan banyaknya sisi pada G disebut ukuran.

Graf dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf G Berorder 5 dan Berukuran 6

Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa bahwa graf G berorder 5 dan berukuran 6 serta dapat dituliskan dengan

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

dengan

$$e_1 = (v_1, v_4) \text{ atau } v_1v_4$$

$$e_4 = (v_4, v_3) \text{ atau } v_4v_3$$

$$e_2 = (v_1, v_2) \text{ atau } v_1v_2$$

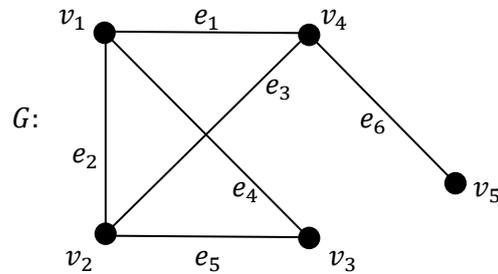
$$e_5 = (v_3, v_5) \text{ atau } v_3v_5$$

$$e_3 = (v_1, v_3) \text{ atau } v_1v_3$$

$$e_6 = (v_2, v_3) \text{ atau } v_2v_3$$

Definisi 2.1.2 (Chartrand dan Zang, 2012) *Jika u dan v adalah titik dan uv adalah sisi di graf G , maka titik u disebut bertetangga (neighbor) dengan titik v .*

Bertetangga dicontohkan sebagai berikut.

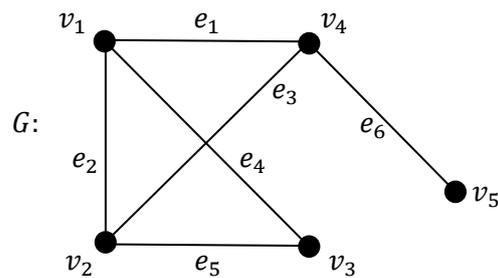


Gambar 2.2 Titik yang Bertetangga pada Graf G

Pada Gambar 2.2 terlihat bahwa v_1 bertetangga dengan v_4, v_3 dan v_2 , sedangkan v_2 bertetangga dengan v_1, v_4 dan v_3 , sedangkan v_3 bertetangga dengan v_2 dan v_1 , sedangkan v_4 bertetangga dengan v_1, v_2 dan v_5 dan sedangkan v_5 hanya bertetangga dengan v_4 .

Definisi 2.1.3 (Chartrand dan Zang, 2012) *Jika u dan v adalah titik dan uv adalah sisi di graf G , maka titik u disebut bersisian dengan sisi uv .*

Bersisian dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.3 Titik yang Bersisian dengan Sisi pada Graf G

Pada Gambar 2.3 terlihat bahwa v_1 bersisian dengan e_1, e_4 dan e_2 , sedangkan v_2 bersisian dengan e_2, e_3 dan e_5 , sedangkan v_3 bersisian dengan e_4 dan e_5 , sedangkan v_4 bersisian dengan e_1, e_3 dan e_6 dan sedangkan v_5 hanya bersisian dengan e_6 .

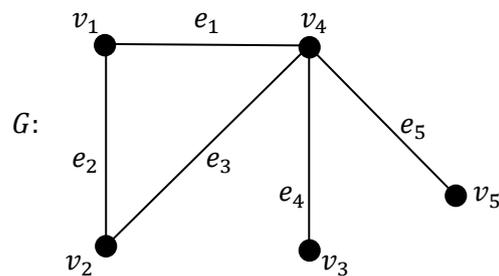
2.2 Derajat Titik

Definisi 2.2.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan titik v dan dituliskan dengan $\deg_G(v)$ atau $\deg v$. Cara lain untuk mengetahui derajat titik v adalah dengan cara menghitung banyaknya titik yang bertetangga dengan titik v . Titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil dan titik yang berderajat genap disebut titik genap.*

Definisi 2.2.2 (Chartrand dan Zang, 2012) *Titik yang berderajat 0 disebut dengan titik terisolasi.*

Definisi 2.2.3 (Chartrand dan Zang, 2012) *Titik yang berderajat 1 disebut dengan titik ujung atau daun.*

Derajat titik dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.4 Derajat Titik pada Graf G

Pada Gambar 2.4 terlihat bahwa

$$\deg v_1 = 2 \quad \deg v_2 = 2 \quad \deg v_3 = 1 \quad \deg v_4 = 4 \quad \deg v_5 = 1$$

Titik v_1, v_2 dan v_4 adalah titik genap sedangkan v_3 dan v_5 adalah titik ganjil.

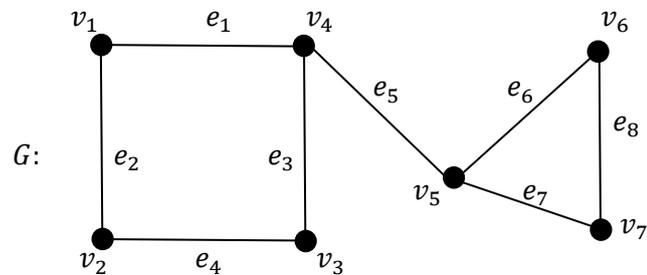
Titik v_3 dan v_5 disebut titik ujung atau titik daun karena hanya berderajat 1.

2.3 Graf Terhubung

Definisi 2.3.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Jalan (walk) adalah barisan yang diawali dan diakhiri oleh titik yang unsur-unsurnya bergantian antara titik dan sisi.*

Jalan dituliskan dengan W . Jika titik awal sama dengan titik akhir maka disebut jalan tertutup dan jika titik awal berbeda dengan titik akhir disebut jalan terbuka.

Jalan dicontohkan sebagai berikut.

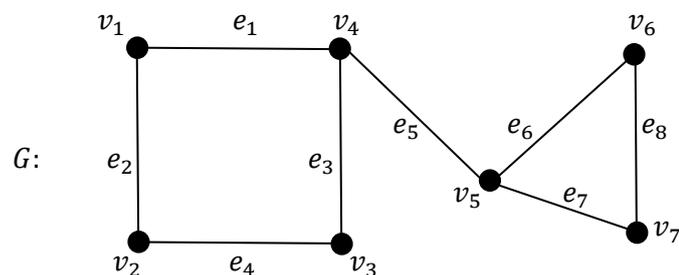


Gambar 2.5 Jalan Pada Graf G

Pada Gambar 2.5 terlihat bahwa $W = v_5, e_5, v_4, e_3, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1, e_1, v_4, e_5, v_5, e_7, v_7, e_8, v_6, e_6, v_5, e_7, v_7$ adalah jalan pada graf G . Contoh W ini merupakan jalan terbuka karena titik awal dan titik akhirnya berbeda, sedangkan jalan tertutup akan dijelaskan pada definisi selanjutnya.

Definisi 2.3.2 (Chartrand dan Zang, 2012) *Sirkuit (circuit) adalah jalan tertutup yang panjangnya 3 atau lebih. Panjang yang dimaksud adalah banyaknya sisi yang dilewati.*

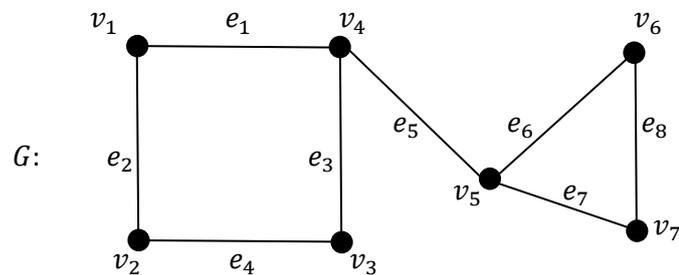
Sirkuit dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.6 Sirkuit Pada Graf G

Pada Gambar 2.6 terlihat bahwa $W = v_1, e_1, v_4, e_3, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1$ adalah sirkuit pada graf G .

Definisi 2.3.3 (Chartrand dan Zang, 2012) *Lintasan (path)* adalah jalan pada graf dengan tidak mengulang titik.

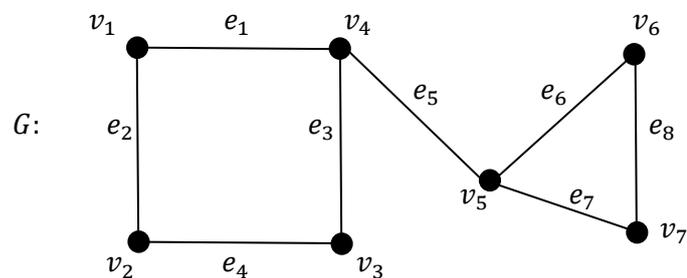


Gambar 2.7 Sirkuit Pada Graf G

Pada Gambar 2.7 terlihat bahwa $W = v_1, e_1, v_4, e_5, v_5, e_7, v_7, e_8, v_6$ adalah lintasan pada graf G .

Definisi 2.3.4 (Chartrand dan Zang, 2012) *Jejak (trail)* adalah jalan yang tidak mengulang sisi.

Jejak dicontohkan sebagai berikut.

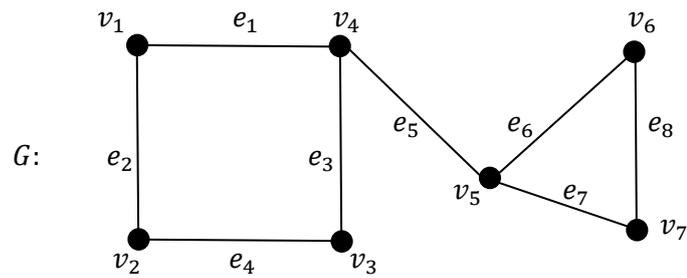


Gambar 2.8 Jejak Pada Graf G

Pada Gambar 2.8 terlihat bahwa $W = v_4, e_1, v_1, e_2, v_2, e_4, v_3, e_3, v_4, e_5, v_5, e_7, v_7, e_8, v_6, e_6, v_5$ adalah jejak pada graf G .

Definisi 2.3.5 (Chartrand dan Zang, 2012) *Siklus* adalah sirkuit yang tidak mengulang titik, kecuali titik awal dan titik akhir.

Siklus dicontohkan sebagai berikut.

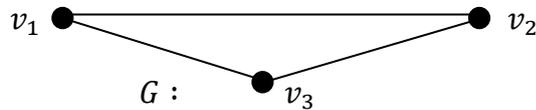
Gambar 2.9 Siklus Pada Graf G

Pada Gambar 2.9 terlihat bahwa $W = v_5, e_7, v_7, e_8, v_6, e_6, v_5$ adalah siklus pada graf G .

Definisi 2.3.6 (Chartrand dan Zang, 2012) Misal G graf dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut terhubung jika ada lintasan dari u ke v di G .

Definisi 2.3.7 (Chartrand dan Zang, 2012) Graf G disebut terhubung (*connected*) jika setiap dua titik di graf G saling terhubung.

Graf terhubung dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.10 Graf Terhubung

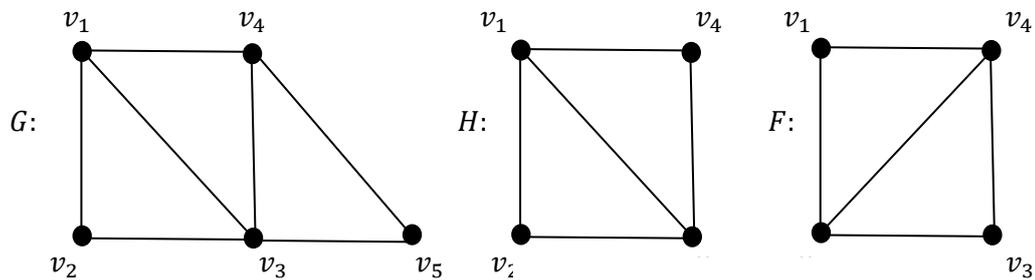
Pada Gambar 2.10 terlihat bahwa v_1 terhubung dengan v_2 , v_2 terhubung dengan v_3 dan v_3 terhubung dengan v_1 .

2.4 Subgraf

Definisi 2.4.1 (Chartrand dan Zang, 2012) Subgraf terhubung maksimal pada graf G adalah subgraph terhubung yang maksimal terhadap keterhubungan di G .

Definisi 2.4.2 (Chartrand dan Zang, 2012) Graf H disebut subgraf dari graf G jika pada graf H memiliki himpunan titik dan juga sisi yang merupakan subset pada graf G . Hal ini dapat dituliskan dengan $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Subgraf dicontohkan sebagai berikut.

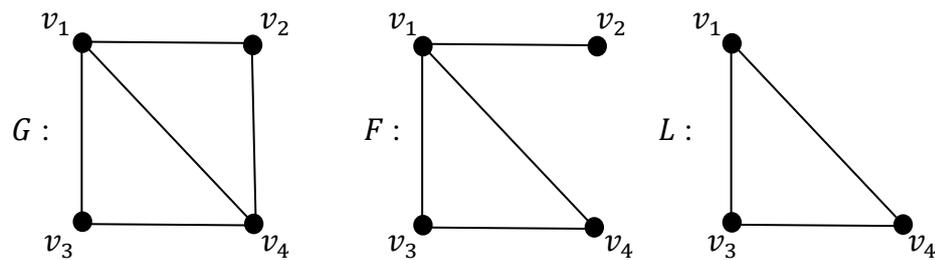


Gambar 2.11 Subgraf dan Bukan Subgraf

Pada Gambar 2.12 terlihat bahwa graf H merupakan subgraf dari graf G sedangkan graf F bukan subgraf dari G karena sisi v_2v_4 graf F bukan sisi pada graf G .

Definisi 2.4.3 (Chartrand, dkk, 2011) *Jika S adalah subgraf dari G , maka G supergraf dari S . Subgraf S dari graf G yang memiliki himpunan titik yang sama dengan G atau $V(S) = V(G)$, disebut subgraf merentang (spanning subgraph). Jika $H \subseteq V(G)$, maka G diinduksi titik oleh H jika terdapat titik u dan v di $V(H)$ dan saling terhubung langsung pada subgraf terinduksi titik H dari G yang dinotasikan $G[H]$ jika dan hanya jika titik u dan v saling terhubung langsung di G . Subgraf S dari graf G disebut subgraf terinduksi titik jika terdapat $H \subseteq V(G)$ sedemikian hingga $S = G[H]$, jadi $G[V(G)] = G$. Jika $D \subseteq E(G)$, maka G diinduksi oleh D jika (u, v) terdapat pada $G[D]$ jika dan hanya jika (u, v) di G . Subgraf S dari graf G disebut subgraf terinduksi sisi jika terdapat $D \subseteq E(G)$ sedemikian hingga $S = G[D]$, jadi $G[E(G)] = G$ jika dan hanya jika G tidak memiliki titik yang terisolasi.*

Subgraf terinduksi dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.12 Subgraf Terinduksi Titik dan Subgraf Terinduksi Sisi

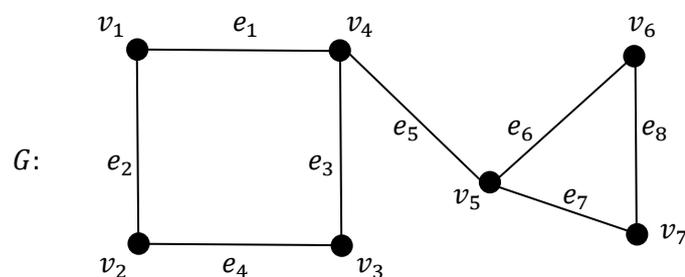
2.5 Komponen Graf

Definisi 2.5.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Subgraf terhubung maksimal pada graf G adalah subgraph terhubung yang maksimal terhadap keterhubungan di G .*

Definisi 2.5.2 (Chartrand dan Zang, 2012) *Komponen dari graf G adalah banyak subgraf maksimal yang terhubung dari graf G .*

Definisi 2.5.3 (Chartrand dan Zang, 2012) *Jembatan adalah suatu sisi e di graf G yang jika e dihapus maka menyebabkan komponen pada G akan bertambah.*

Jembatan dicontohkan sebagai berikut.

Gambar 2.13 Jembatan Pada Graf G

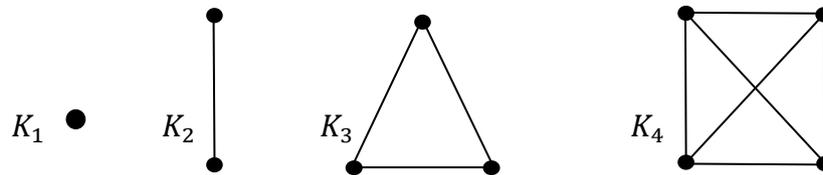
Pada Gambar 2.11 dijelaskan bahwa sisi e_5 adalah jembatan karena jika sisi e_5 dihapus maka graf G akan terpisah menjadi dua komponen.

2.6 Graf Komplit

Definisi 2.6.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Graf G disebut graf komplit jika semua titiknya saling adjacent atau bertetangga. Graf komplit yang berorder n dituliskan*

dengan K_n . Untuk mengetahui banyak ukuran pada K_n dapat diketahui dengan menggunakan rumus $(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Graf komplit dicontohkan sebagai berikut.



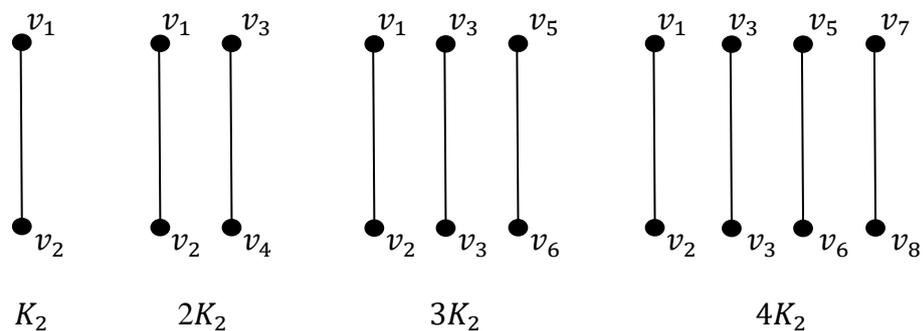
Gambar 2.14 Graf Komplit K_1, K_2, K_3, K_4

Pada Gambar 2.14 dijelaskan bahwa K_1 merupakan graf komplit berorder 1 dan berukuran 0, sedangkan K_2 merupakan graf komplit berorder 2 dan berukuran 1, sedangkan K_3 merupakan graf komplit berorder 3 dan berukuran 3, sedangkan K_4 merupakan graf komplit berorder 4 dan berukuran 6.

Definisi 2.6.2 (Chartrand dan Zang, 2012) Misal G dan H adalah graf. Maka $G \cup H$ adalah graf dengan $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Jika $G = H \cup H \cup \dots \cup H$ sebanyak n , maka ditulis $G = nH$.

Gabungan pada graf dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.15 $K_2, 2K_2, 3K_2, 4K_2$

Pada Gambar 2.15 terlihat bahwa K_2 merupakan K_2 sebanyak 1, $2K_2$ merupakan K_2 sebanyak 2, $3K_2$ merupakan K_2 sebanyak 3 dan $4K_2$ merupakan K_2 sebanyak 4.

2.7 Partisi Himpunan

Definisi 2.7.1 (Darwanto, 2020) *Partisi dari suatu himpunan A adalah koleksi himpunan A_1, A_2, \dots, A_n serta memenuhi syarat berikut:*

- a. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$
- b. $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

Partisi himpunan dicontohkan sebagai berikut.

Misalkan himpunan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$. Himpunan K memiliki 6 anggota maka akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari 2 anggota dari A maka partisinya sebanyak 3.

Partisinya sebagai berikut.

$$A_1 = \{a, b\}$$

$$A_2 = \{c, d\}$$

$$A_3 = \{e, f\}$$

Kemudian partisi akan dibuktikan bahwa $\{A_i\}_{i=1}^3$ memenuhi syarat.

- a. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$.

Jika $A_1 = \{a, b\}$; $A_2 = \{c, d\}$; $A_3 = \{e, f\}$, maka $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e, f\}$. Maka benar jika $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$.

- b. $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$.

Jika i dan j adalah banyaknya himpunan sisi ke 1, 2, 3. Perhatikan bahwa

$A_1 = \{a, b\}$ dan $A_2 = \{c, d\}$, sedangkan $1 \neq 2$ maka $a \neq c$ dan $b \neq d$.

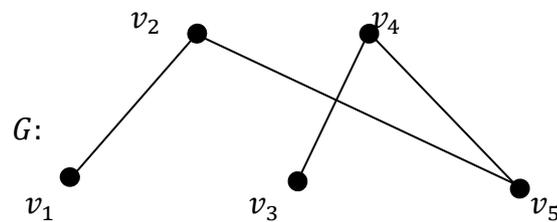
Kemudian $A_1 = \{a, b\}$ dan $A_3 = \{e, f\}$, sedangkan $1 \neq 3$ maka $a \neq e$ dan $b \neq f$. Kemudian $A_2 = \{c, d\}$ dan $A_3 = \{e, f\}$, sedangkan $2 \neq 3$ maka $c \neq e$ dan $d \neq f$. Maka benar jika $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$.

Karena terbukti benar bahwa $\{A\}_{i=1}^3$ memenuhi syarat, maka $\{A_i\}_{i=1}^3$ adalah partisi dari A .

2.8 Graf Bipartisi

Definisi 2.8.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Graf G dikatakan bipartisi jika titik-titik di G dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan titik yaitu U dan W . Setiap sisi di G memasangkan titik di U dengan titik di W . Jadi, himpunan titik dalam satu partisi tidak boleh saling bertetangga.*

Graf bipartisi dicontohkan sebagai berikut.

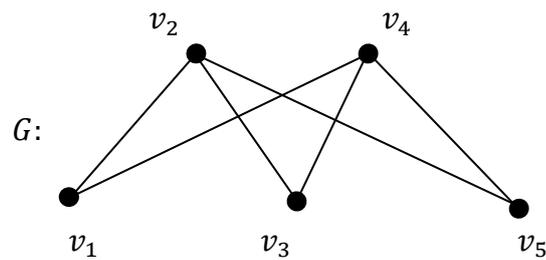


Gambar 2.16 Graf Bipartisi

Pada Gambar 2.16 terlihat bahwa graf G dibagi menjadi dua partisi titik yaitu subhimpunan titik yaitu $U = \{v_2, v_4\}$ dan $W = \{v_1, v_3, v_5\}$. Setiap sisi di G memasangkan titik di U dengan titik di W .

Definisi 2.8.2 (Chartrand dan Zang, 2012) *Graf G yang titik-titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan titik yaitu U dan W dikatakan bipartisi komplit jika G merupakan graf bipartisi dan semua titik pada U saling bertetangga dengan semua titik pada W . Jika pada U memuat titik sebanyak m sedangkan W memuat titik sebanyak n maka graf bipartisi komplit dituliskan $K_{m,n}$.*

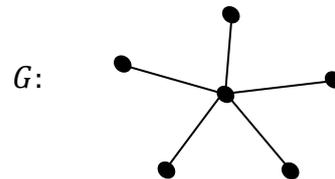
Graf bipartisi komplit dicontohkan sebagai berikut.

Gambar 2.17 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,3}$

Pada Gambar 2.17 terlihat bahwa graf G dibagi menjadi dua partisi titik yaitu subhimpunan titik $U = \{v_2, v_4\}$ dan $W = \{v_1, v_3, v_5\}$. Untuk U terdiri dari dua titik dan W terdiri dari tiga titik maka graf G merupakan graf bipartisi komplit $K_{2,3}$.

Definisi 2.8.3 (Chartrand dan Zang, 2012) *Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut dengan graf bintang yang dituliskan dengan S_n .*

Graf bintang dicontohkan sebagai berikut.

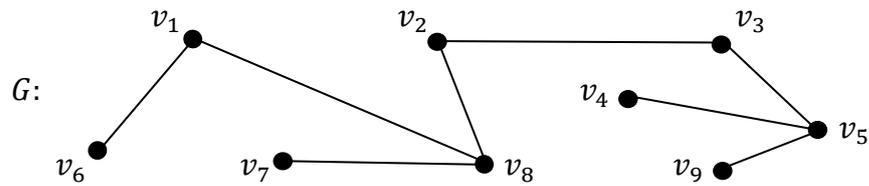
Gambar 2.18 Graf Bintang S_5

Pada Gambar 2.18 terlihat bahwa graf G adalah graf bintang S_5 atau graf komplit $K_{1,5}$.

2.9 Graf Pohon

Definisi 2.9.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Graf pohon adalah graf terhubung dan tidak memuat siklus. Graf pohon juga dapat disebut dengan graf yang semua sisinya berupa jembatan.*

Pohon dicontohkan sebagai berikut.



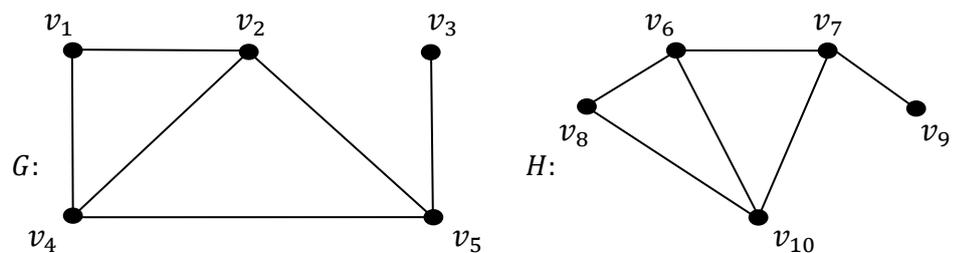
Gambar 2.19 Graf Pohon

Pada Gambar 2.19 dijelaskan bahwa graf G adalah graf pohon karena tidak memuat siklus dan semua sisinya berupa jembatan. Pada graf G terdapat lima titik cabang yaitu v_1, v_8, v_2, v_3 dan v_5 dan empat titik daun yaitu v_6, v_7, v_4 dan v_9 .

2.10 Graf Isomorfik

Definisi 2.10.1 (Chartrand dan Zang, 2012) *Graf G dan graf H disebut isomorfik jika G dan H memiliki banyaknya order dan ukuran yang sama, serta titik di G berkorespondensi satu-satu dengan titik di H yang dituliskan dengan $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$. Jika G isomorfik H maka dituliskan dengan $G \cong H$.*

Graf isomorfik dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.20 Graf G Isomorfik Dengan Graf H

Pada Gambar 2.20 terlihat bahwa G isomorfik dengan H karena keduanya memiliki banyak order dan ukuran yang sama dengan 5 titik dan 6 sisi, serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

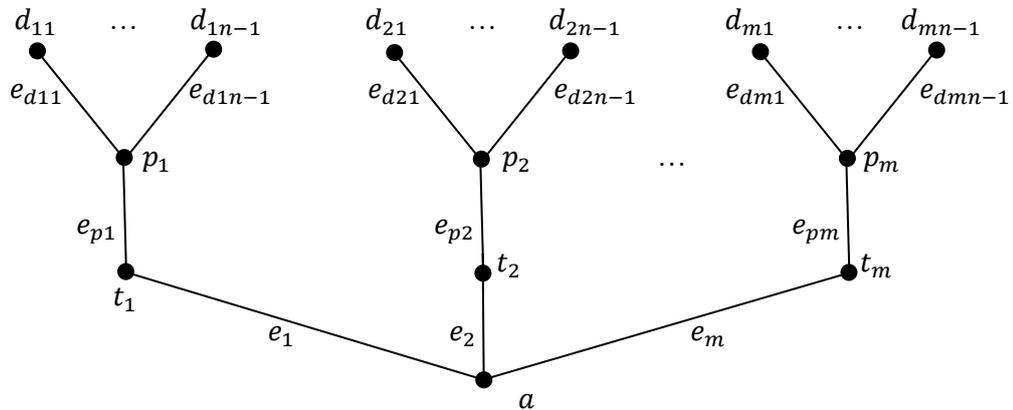
$$\begin{array}{ll}
\phi: V(G) \rightarrow V(H) & \phi: V(G) \rightarrow V(H) \\
v_1 \rightarrow v_8 & v_4 \rightarrow v_6 \\
v_2 \rightarrow v_{10} & v_5 \rightarrow v_7 \\
v_3 \rightarrow v_9 &
\end{array}$$

2.11 Graf Pohon Pisang

Definisi 2.11.1 (Nur, 2020) *Graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah graf yang dibentuk oleh graf bintang S_n sebanyak m dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ yang salah satu daun pada masing-masing S_n dihubungkan oleh sisi dengan satu titik akar. Titik yang bertetangga dengan titik akar disebut titik tengah. Titik tengah disetiap S_n disebut titik tengah.*

Definisi 2.11.2 (Yesi, 2016) *Penamaan titik pada graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah titik akar dituliskan dengan a . Titik pusat pada setiap S_n dituliskan dengan p_i untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Titik yang berada diantara titik pusat dan titik akar disebut titik tengah yang dituliskan dengan t_i untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Titik daun yang bertetangga dengan titik pusat p_i (kecuali titik yang sudah menjadi titik tengah) dituliskan dengan d_{ij} , untuk $i = 1, 2, \dots, m$ disetiap S_n dan untuk $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Sedangkan pelabelan sisi pada graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah sisi yang menghubungkan titik akar a dengan titik tengah t_i dituliskan dengan e_i untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Sisi yang menghubungkan titik tengah t_i dengan titik pusat p_i dituliskan dengan e_{pi} untuk p tetap, sedangkan untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Sisi yang menghubungkan titik pusat p_i dengan setiap titik daun pada graf bintang S_n (kecuali titik tengah) dituliskan dengan e_{dij} untuk d tetap, sedangkan untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n - 1$.*

Graf pohon pisang $B_{m,n}$ dicontohkan sebagai berikut.



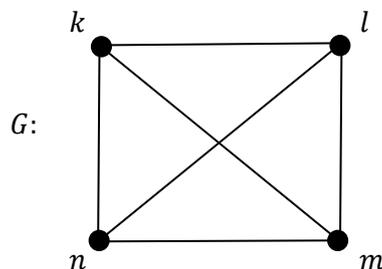
Gambar 2.21 Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

Pada Gambar 2.21 terlihat bahwa jika m dan n di ubah menjadi bilangan asli maka gambar tersebut bernama graf pohon pisang $B_{3,3}$ karena terdiri dari graf bintang S_3 sebanyak 3 yang salah satu daun pada S_3 yang sebanyak 3 terhubung pada titik akar.

2.12 Dekomposisi Graf

Definisi 2.12.1 (Chartrand and Zang, 2012) *Graf G dapat dikatakan terdekomposisi menjadi beberapa subgraf H_1, H_2, \dots, H_n jika $\{E(H_1), E(H_2), \dots, E(H_n)\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Jika setiap H_i dari graf G adalah isomorfik pada suatu graf K , maka dekomposisi dari graf G adalah dekomposisi- K .*

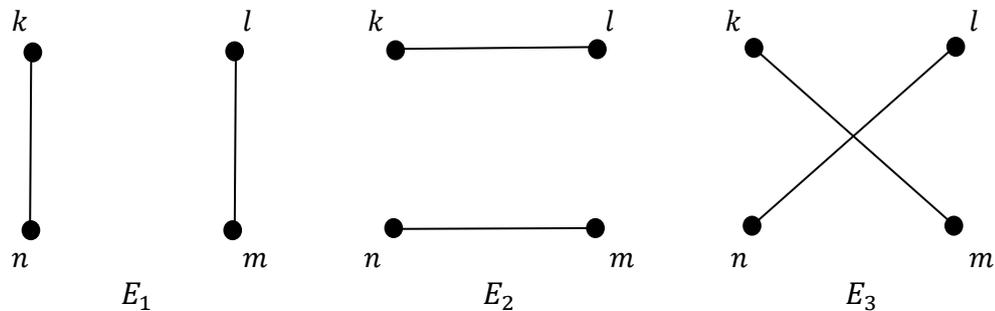
Dekomposisi dicontohkan sebagai berikut.



Gambar 2.22 Graf G

Pada Gambar 2.22 terlihat bahwa $V(G) = \{k, l, m, n\}$ dan $E(G) = \{kl, lm, mn, nk, km, ln\}$.

Berikut adalah beberapa partisi sisi dari graf G .



Gambar 2.23 Partisi Sisi dari Graf G

Pada Gambar 2.23 terlihat bahwa E_1 , E_2 dan E_3 adalah partisi dari $E(G)$, dengan

$$E_1 = \{kn, lm\}$$

$$E_2 = \{kl, nm\}$$

$$E_3 = \{km, ln\}$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = E(G)$ maka

$$H_1 = G[E_1] = G[\{kn, lm\}]$$

$$H_2 = G[E_2] = G[\{kl, nm\}]$$

$$H_3 = G[E_3] = G[\{km, ln\}]$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf G dapat didekomposisikan. Jika $\{H_i\}_{i=1}^3$ adalah dekomposisi dari graf G dan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i , maka graf G merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

2.13 Pembagian Golongan Manusia Berdasarkan Surat al-Waqi'ah

Surat al-Waqi'ah merupakan surat ke 56 dari 114 surat yang ada di dalam al-Qur'an. Posisi surat al-Waqi'ah berada setelah surat ar-Rahman dan sebelum

surat al-Hadid. Surat al-Waqi'ah merupakan salah satu surat yang diturunkan di Kota Makkah yang sehingga disebut surat *Makiyah*.

Dijelaskan dalam Tafsir al-Misbah bahwa surat al-Waqi'ah menjelaskan tentang hari kiamat dan apa yang akan terjadi ketika hari kiamat dan juga balasan bagi orang-orang yang bertakwa berupa banyak kenikmatan dan balasan bagi orang-orang yang durhaka kepada tuhan nya berupa siksaan yang pedih (Suhandi, 2015).

Pada surat Al-Waqi'ah ayat 7 – 10:

كُنْتُمْ أَزْوَاجًا ثَلَاثَةً (٧) فَأَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ مَا أَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ (٨) وَأَصْحَابُ الْمَشْأَمَةِ مَا أَصْحَابُ الْمَشْأَمَةِ (٩)
وَالسَّابِقُونَ السَّابِقُونَ (١٠)

Artinya: (7) dan kamu menjadi tiga golongan. (8) yaitu golongan kanan, alangkah mulianya golongan kanan itu. (9) dan golongan kiri, alangkah sengsaranya golongan kiri itu. (10) dan orang-orang yang paling dahulu (beriman), merekalah yang paling dahulu (masuk surga) (QS. Al-Waqi'ah: 7-10).

Menurut Imam al-Baq'a'i pada surat al-Waqi'ah ada penjelasan bahwa nanti di akhirat akan terdapat kelompok manusia yang terbagi menjadi tiga, yaitu kelompok pertama atau *as-sabiqun*, yaitu orang-orang yang paling mulia. Kelompok kedua atau *ashhabul yamin*, merupakan orang-orang yang taat kepada Tuhannya yang berbeda dengan kelompok pertama. Kelompok ketiga atau *ashhabul syimal*, merupakan orang-orang yang durhaka dan memiliki sifat munafik baik dari kalangan manusia dan jin (Shihab, 2002).

Dalam hal ini, al-Qur'an membahas tentang pembagian kelompok atau kumpulan atau himpunan. Berdasarkan pendapat Imam al-Baq'a'i di dalam surat al-Waqi'ah terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya yaitu pengumpulan objek-objek. Hal inilah yang dalam matematika dinamakan sebagai himpunan (Darwanto, 2020).

2.13.1 Golongan Yang Paling Mulia

Al-Munir telah menjelaskan bahwa golongan pertama adalah golongan *as-sabiqun*. Mereka adalah orang-orang yang terdepan dan akan sampai paling awal kepada kebaikan dunia dan akhirat serta terdepan untuk mencapai keimanan dan ketaatan tanpa lambat sedikit pun. Golongan *as-sabiqun* merupakan orang-orang yang akan mendapat kedudukan dan derajat tertinggi di dalam surga karena mereka adalah orang-orang yang istimewa di sisi Allah (Az-Zuhaili, 2014).

Orang-orang yang termasuk dalam golongan *as-sabiqun* adalah sebagai berikut.

- a. Nabi; orang-orang yang diberi wahyu oleh Allah untuk dirinya sendiri agar dicontoh oleh umatnya.
- b. Rasul; orang-orang yang diberi wahyu oleh Allah untuk dirinya sendiri dan untuk didakwahkan kepada umatnya (Az-Zuhaili, 2014).

2.13.2 Golongan Kanan atau Penghuni Surga

Telah dijelaskan oleh Imam al-Munir dalam tafsirnya, bahwa golongan kedua adalah *ashhabul yamin* atau golongan kanan. Mereka adalah golongan yang menerima buku catatan amal perbuatan di dunia dengan tangan kanannya. Betapa besar dan agung serta mulianya amal perbuatan mereka di dunia yang sehingga dapat mengantarkan mereka kedalam surga. Mereka adalah pemilik kedudukan yang luhur. Mereka adalah orang-orang terdahulu dan beberapa orang yang kemudian (Az-Zuhaili, 2014).

Orang-orang yang termasuk dalam golongan *ashhabul yamin* adalah sebagai berikut.

- a. Para mukminin; orang-orang yang beriman kepada Allah.

- b. Para shalihin; orang-orang yang beriman kepada rukun iman dan beramal shaleh.
- c. Para mukhlisin; orang-orang yang selalu taat kepada perintah Allah (Az-Zuhaili, 2014).

2.13.3 Golongan Kiri atau Penghuni Neraka

Al-Munir juga menjelaskan bahwa golongan ketiga adalah golongan *ashhabul syimal* atau golongan kiri yang akan menerima catatan buku amal perbuatan di dunia menggunakan tangan kiri. Betapa rendahnya posisi mereka karena masuk neraka. Mereka adalah golongan pemilik kedudukan yang hina (Az-Zuhaili, 2014).

Orang-orang yang termasuk dalam golongan *ashhabul syimal* adalah sebagai berikut.

- a. Orang fasik; orang muslim yang secara sadar melanggar perintah Allah.
- b. Orang zalim; orang yang melakukan maksiat. Orang kafir; orang yang menolak agama Islam yang telah disampaikan oleh Nabi Muhammad.
- c. Orang musyrik; orang yang menyekutukan Allah.
- d. Orang munafik; orang yang bermuka dua, mengaku beragama Islam tetapi dalam hatinya ingkar (Az-Zuhaili, 2014).

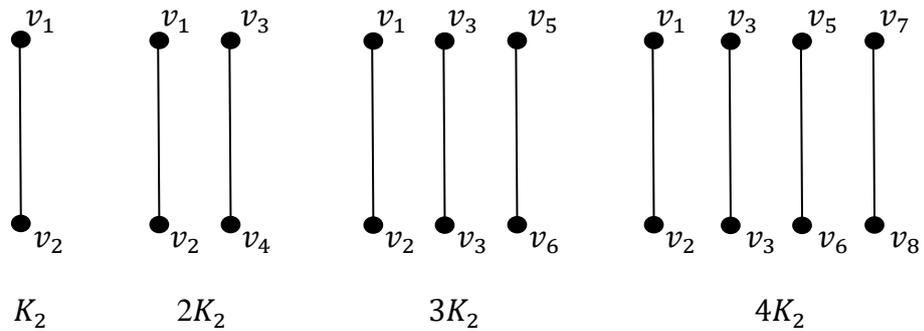
Berdasarkan uraian diatas, al-Qur'an membahas tentang pengelompokan beberapa objek menjadi beberapa bagian kelompok. Dalam surat al-Waqi'ah ayat 7 sampai 10 terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya yaitu tentang dekomposisi.

Keterkaitan surat al-Waqi'ah ayat 7 sampai 10 dengan dekomposisi graf adalah surat al-Waqi'ah ayat 7 sampai 10 diibaratkan suatu graf. Kemudian graf

tersebut dipartisi menjadi tiga yang diibaratkan dengan tiga kelompok di akhirat yaitu kelompok pertama atau *as-sabiqun* yang terdiri dari para nabi dan para rasul, kelompok kedua atau *ashhabul yamin* yang terdiri dari para mukminin, para shalihin dan para mukhlisin dan kelompok ketiga atau *ashhabul syimal* yang terdiri dari orang fasik, orang zalim, orang kafir, orang musyrik dan orang munafik.

BAB III
PEMBAHASAN

Untuk mengerjakan bab ini dibutuhkan gambar berikut.



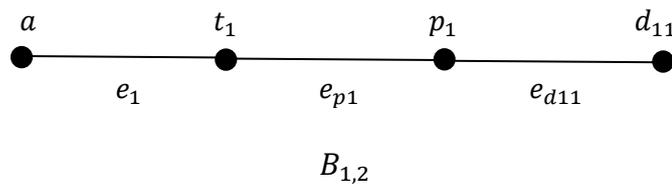
Gambar 3.1 $K_2, 2K_2, 3K_2, 4K_2$

3.1 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

3.1.1 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,2}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{1,2}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun pada graf S_2 .

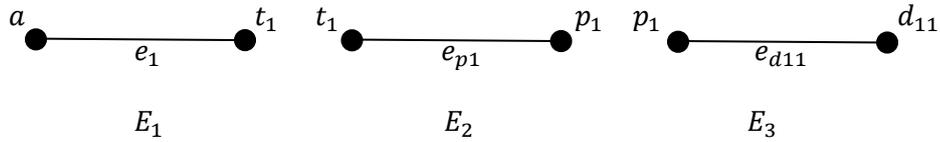
Graf pohon pisang $B_{1,2}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Pohon Pisang $B_{1,2}$

Pada Gambar 3.2 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{1,2}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik graf pohon pisang $B_{1,2}$ adalah $V(B_{1,2}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}\}$ dan himpunan sisi graf pohon pisang $B_{1,2}$ adalah $E(B_{1,2}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{1,2}$:



Gambar 3.3 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{1,2}$

Pada Gambar 3.3 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{1,2}$ sebanyak 3. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 1 maka partisinya sebanyak 3 yaitu E_1 , E_2 dan E_3 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{1,2}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1\},$$

$$E_2 = \{e_{p_1}\},$$

$$E_3 = \{e_{d_{11}}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2$ dan 3 , maka

$$H_1 = B_{1,2}[E_1] = B_{1,2}[\{e_1\}],$$

$$H_2 = B_{1,2}[E_2] = B_{1,2}[\{e_{p_1}\}],$$

$$H_3 = B_{1,2}[E_3] = B_{1,2}[\{e_{d_{11}}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{1,2}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_1) isomorfik dengan graf $1K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 2 titik dan 1 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\phi: V(H_1) \rightarrow V(1K_2)$$

$$a \rightarrow v_1$$

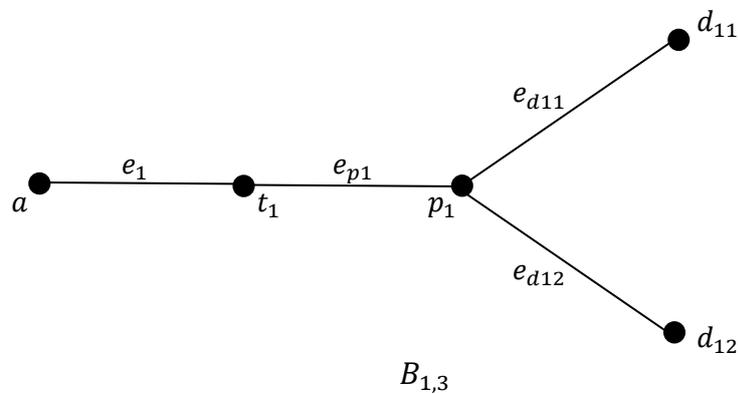
$$t_1 \rightarrow v_2$$

Karena $\{H_i\}_{i=1}^3$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{1,2}$ dan $H_i \cong 1K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{1,2}$ merupakan $1K_2$ -dekomposisi.

3.1.2 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,3}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{1,3}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun pada graf S_3 .

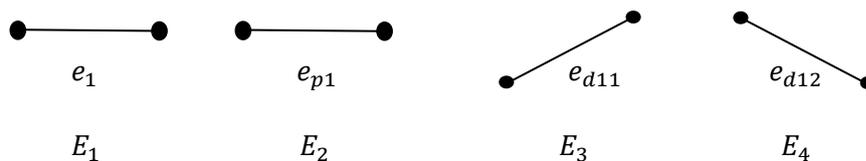
Graf pohon pisang $B_{1,3}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Pohon Pisang $B_{1,3}$

Pada Gambar 3.4 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{1,3}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{1,3}$ adalah $V(B_{1,3}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{1,3}$ adalah $E(B_{1,3}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{1,3}$:



Gambar 3.5 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{1,3}$

Pada Gambar 3.5 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{1,3}$ sebanyak 4. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 1 maka partisinya sebanyak 4 yaitu E_1, E_2, E_3 dan E_4 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{1,3}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3$ dan 4, maka

$$H_1 = B_{1,3}[E_1] = B_{1,3}[\{e_1\}],$$

$$H_2 = B_{1,3}[E_2] = B_{1,3}[\{e_{11}\}],$$

$$H_3 = B_{1,3}[E_3] = B_{1,3}[\{e_{d11}\}],$$

$$H_4 = B_{1,3}[E_4] = B_{1,3}[\{e_{d12}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{1,3}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_1) isomorfik dengan graf $1K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 2 titik dan 1 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\phi: V(H_1) \rightarrow V(1K_2)$$

$$a \rightarrow v_1$$

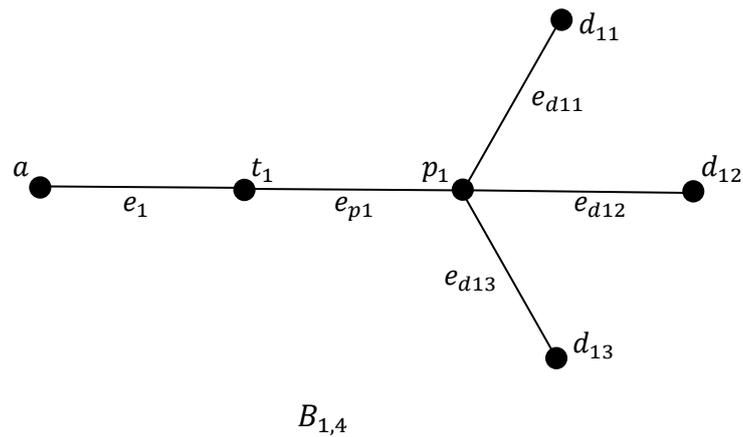
$$t_1 \rightarrow v_2$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^4$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{1,3}$ dan $H_i \cong 1K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{1,3}$ merupakan $1K_2$ -dekomposisi.

3.1.3 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,4}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{1,4}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun pada graf S_4 .

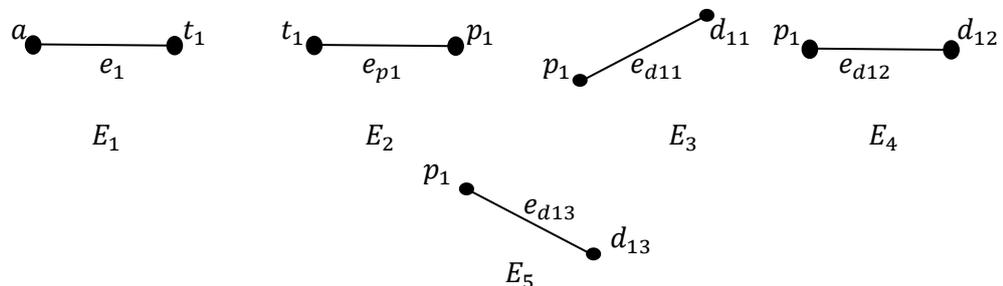
Graf pohon pisang $B_{1,4}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Pohon Pisang $B_{1,4}$

Pada Gambar 3.6 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{1,4}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{1,4}$ adalah $V(B_{1,4}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{1,4}$ adalah $E(B_{1,4}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{1,4}$:



Gambar 3.7 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{1,4}$

Pada Gambar 3.7 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{1,4}$ sebanyak 5. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 1 maka partisinya sebanyak 5 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{1,4}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dan 5, maka

$$H_1 = B_{1,4}[E_1] = B_{1,4}[\{e_1\}],$$

$$H_2 = B_{1,4}[E_2] = B_{1,4}[\{e_{p1}\}],$$

$$H_3 = B_{1,4}[E_3] = B_{1,4}[\{e_{d11}\}],$$

$$H_4 = B_{1,4}[E_4] = B_{1,4}[\{e_{d12}\}],$$

$$H_5 = B_{1,4}[E_5] = B_{1,4}[\{e_{d13}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{1,4}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_1) isomorfik dengan graf $1K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 2 titik dan 1 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\phi: V(H_1) \rightarrow V(1K_2)$$

$$a \rightarrow v_1$$

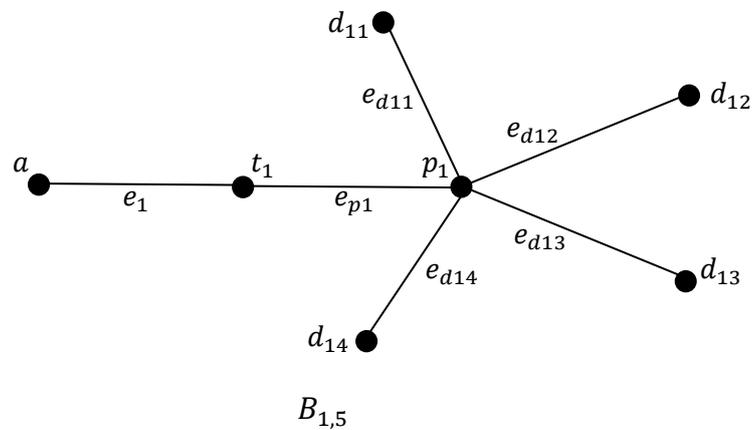
$$t_1 \rightarrow v_2$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^5$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{1,4}$ dan $H_i \cong 1K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{1,4}$ merupakan $1K_2$ -dekomposisi.

3.1.4 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,5}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{1,5}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun pada graf S_5 .

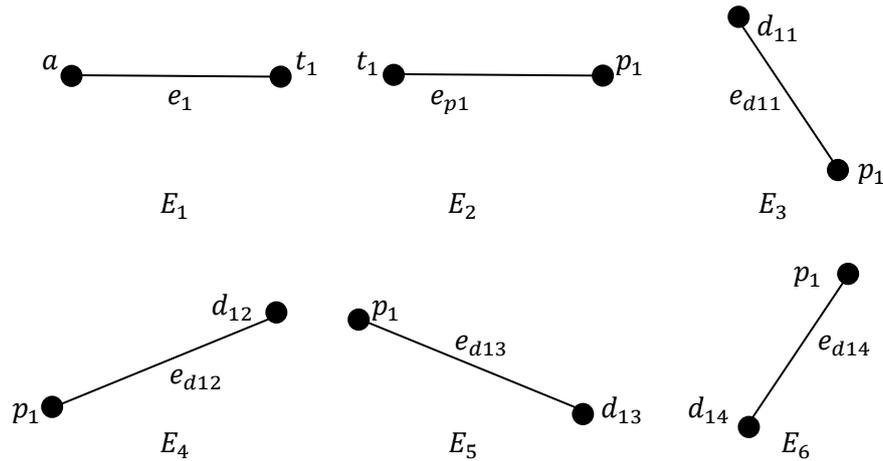
Graf pohon pisang $B_{1,5}$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.8 Graf Pohon Pisang $B_{1,5}$

Pada Gambar 3.8 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{1,5}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{1,5}$ adalah $V(B_{1,5}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{1,5}$ adalah $E(B_{1,5}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_{d14}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{1,5}$:



Gambar 3.9 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{1,5}$

Pada Gambar 3.9 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{1,5}$ sebanyak 6. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 1 maka partisinya sebanyak 6 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dan E_6 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{1,5}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}\},$$

$$E_6 = \{e_{d14}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan 6, maka

$$H_1 = B_{1,5}[E_1] = B_{1,5}[\{e_1\}],$$

$$H_2 = B_{1,5}[E_2] = B_{1,5}[\{e_{p1}\}],$$

$$H_3 = B_{1,5}[E_3] = B_{1,5}[\{e_{d11}\}],$$

$$H_4 = B_{1,5}[E_4] = B_{1,5}[\{e_{d12}\}],$$

$$H_5 = B_{1,5}[E_5] = B_{1,5}[\{e_{d13}\}],$$

$$H_6 = B_{1,5}[E_6] = B_{1,5}[\{e_{d14}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{1,5}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_1) isomorfik dengan graf $1K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 2 titik dan 1 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\phi: V(H_1) \rightarrow V(1K_2)$$

$$a \rightarrow v_1$$

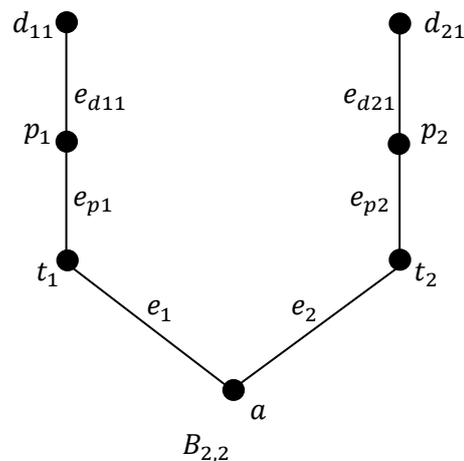
$$t_1 \rightarrow v_2$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^6$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{1,5}$ dan $H_i \cong 1K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{1,5}$ merupakan $1K_2$ -dekomposisi.

3.1.5 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,2}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{2,2}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap dua graf S_2 .

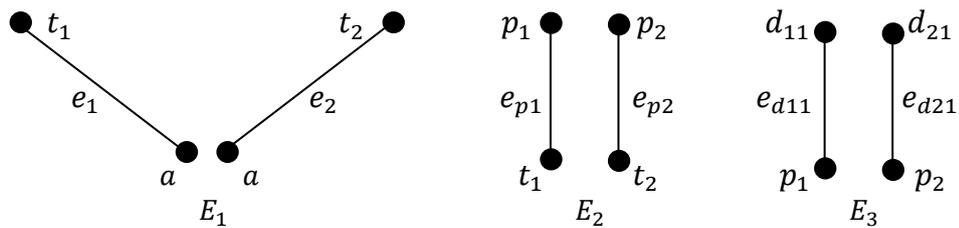
Graf pohon pisang $B_{2,2}$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.10 Graf Pohon Pisang $B_{2,2}$

Pada Gambar 3.10 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{2,2}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{2,2}$ adalah $V(B_{2,2}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, t_2, p_2, d_{21}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{2,2}$ adalah $E(B_{2,2}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_2, e_{p2}, e_{d21}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{2,2}$:



Gambar 3.11 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{2,2}$

Pada Gambar 3.11 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{2,2}$ sebanyak 6. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 2 maka partisinya sebanyak 3 yaitu E_1 , E_2 dan E_3 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{2,2}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2$ dan 3 , maka

$$H_1 = B_{2,2}[E_1] = B_{2,2}[\{e_1, e_2\}],$$

$$H_2 = B_{2,2}[E_2] = B_{2,2}[\{e_{p1}, e_{p2}\}],$$

$$H_3 = B_{2,2}[E_3] = B_{2,2}[\{e_{d11}, e_{d21}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{2,2}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $2K_2$ (pada

Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 4 titik dan 2 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

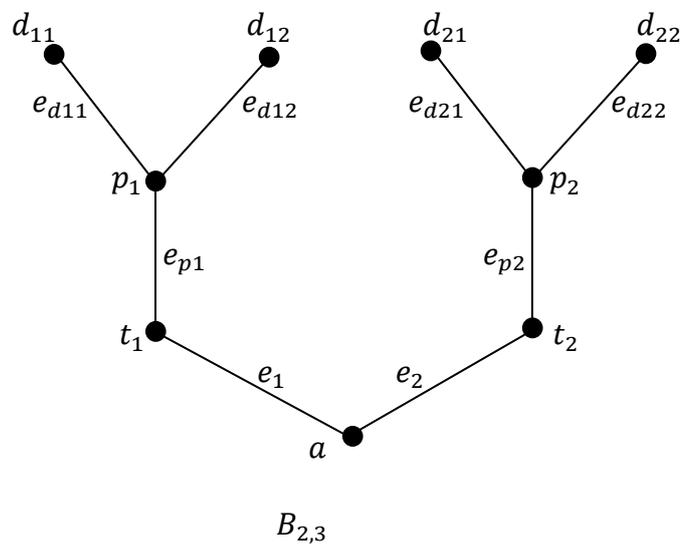
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & p_2 \rightarrow v_3 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_2 \rightarrow v_4 \end{array}$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^3$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{2,2}$ dan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{2,2}$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

3.1.6 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{2,3}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap dua graf S_3 .

Graf pohon pisang $B_{2,3}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

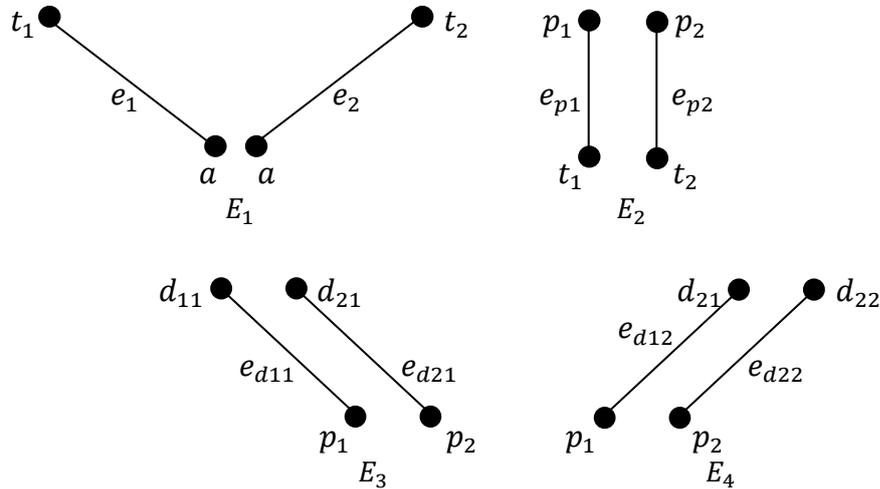


Gambar 3.12 Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$

Pada Gambar 3.12 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{2,3}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{2,3}$

adalah $V(B_{2,3}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{2,3}$ adalah $E(B_{2,3}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{2,3}$:



Gambar 3.13 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$

Pada Gambar 3.13 terlihat bahwa karena sisi dari graf pohon pisang $B_{2,3}$ sebanyak 8. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 2 maka partisinya sebanyak 4 yaitu E_1, E_2, E_3 dan E_4 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{2,3}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3$ dan 4, maka

$$H_1 = B_{2,3}[E_1] = B_{2,3}[\{e_1, e_2\}],$$

$$H_2 = B_{2,3}[E_2] = B_{2,3}[\{e_{p1}, e_{p2}\}],$$

$$H_3 = B_{2,3}[E_3] = B_{2,3}[\{e_{d11}, e_{d21}\}],$$

$$H_4 = B_{2,3}[E_4] = B_{2,3}[\{e_{d12}, e_{d22}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{2,3}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $2K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 4 titik dan 2 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

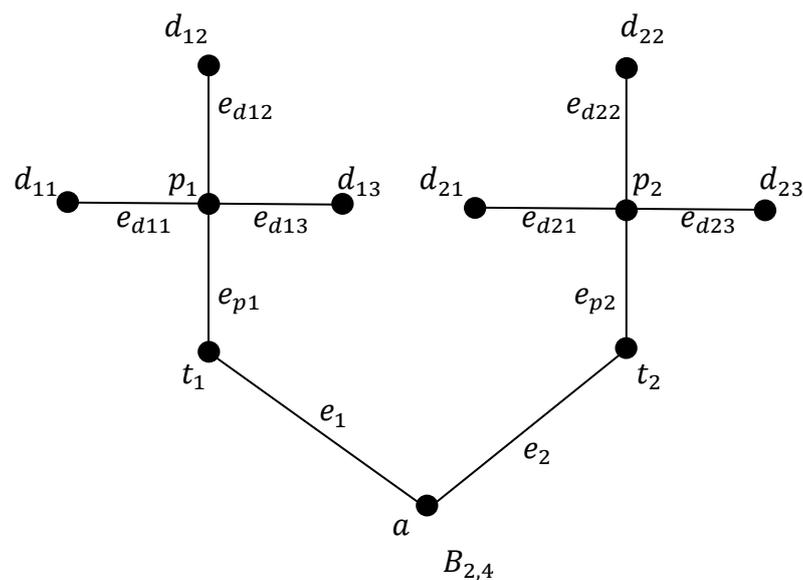
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & p_2 \rightarrow v_3 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_2 \rightarrow v_4 \end{array}$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^4$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{2,3}$ dan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{2,3}$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

3.1.7 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,4}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{2,4}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap dua graf S_4 .

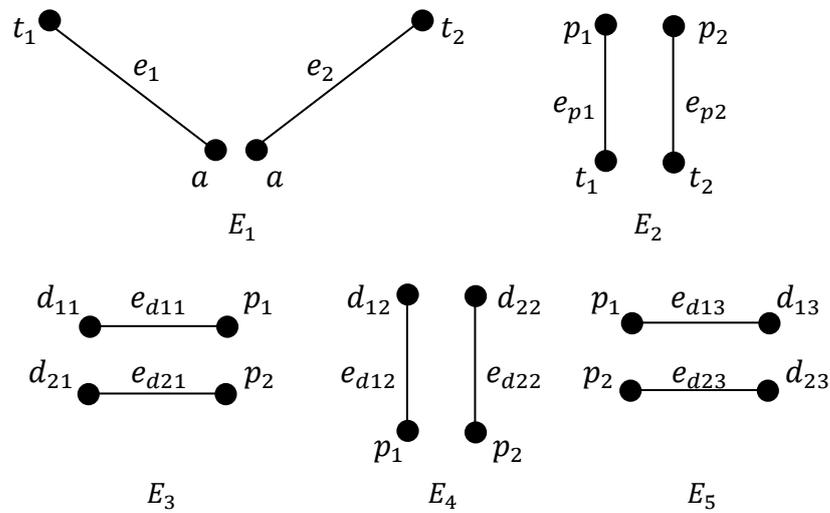
Graf pohon pisang $B_{2,4}$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.14 Graf Pohon Pisang $B_{2,4}$

Pada Gambar 3.14 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{2,4}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{2,4}$ adalah $V(B_{2,4}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, d_{23}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{2,4}$ adalah $E(B_{2,4}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_{d23}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{2,4}$.



Gambar 3.15 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{2,4}$

Pada Gambar 3.15 terlihat bahwa karena sisi dari graf pohon pisang $B_{2,4}$ sebanyak 10. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 2 maka partisinya sebanyak 5 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{2,4}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}, e_{d23}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dan 5 , maka

$$H_1 = B_{2,4}[E_1] = B_{2,4}[\{e_1, e_2\}],$$

$$H_2 = B_{2,4}[E_2] = B_{2,4}[\{e_{p1}, e_{p2}\}],$$

$$H_3 = B_{2,4}[E_3] = B_{2,4}[\{e_{d11}, e_{d21}\}],$$

$$H_4 = B_{2,4}[E_4] = B_{2,4}[\{e_{d12}, e_{d22}\}],$$

$$H_5 = B_{2,4}[E_5] = B_{2,4}[\{e_{d13}, e_{d23}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{2,4}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $2K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 4 titik dan 2 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

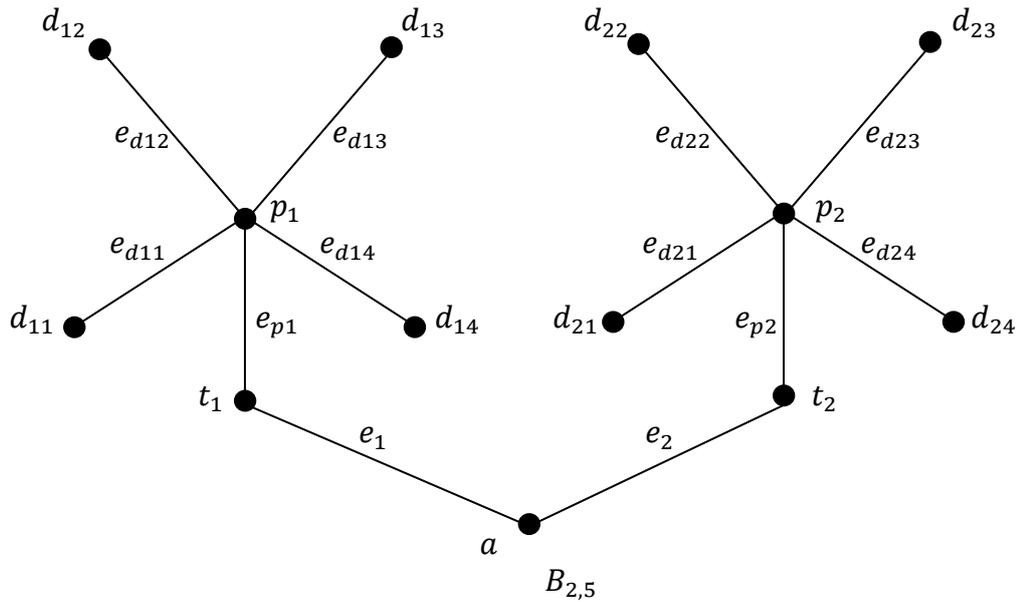
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & p_2 \rightarrow v_3 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_2 \rightarrow v_4 \end{array}$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^5$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{2,4}$ dan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{2,4}$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

3.1.8 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,5}$

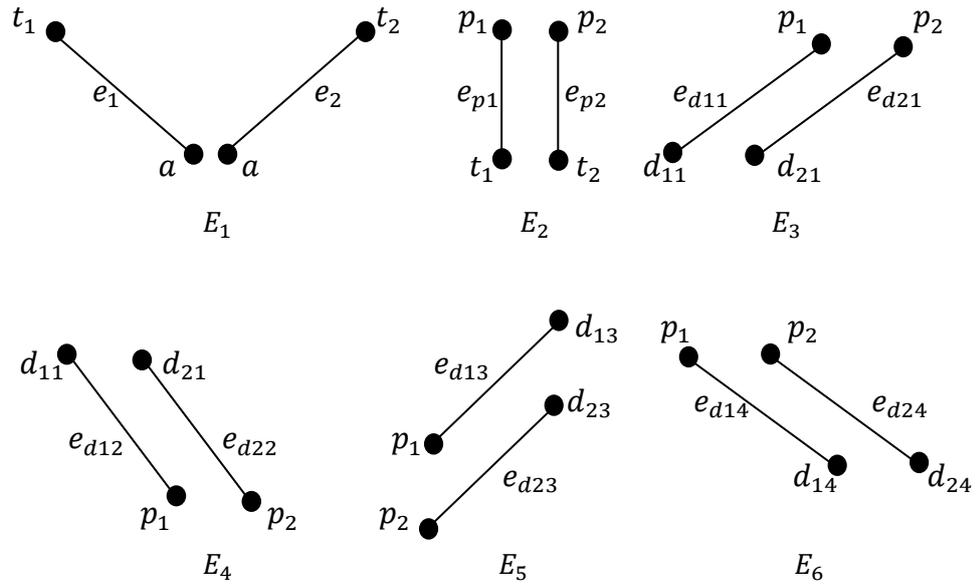
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{2,5}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap dua graf S_5 .

Graf pohon pisang $B_{2,5}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.16 Graf Pohon Pisang $B_{2,5}$

Pada Gambar 3.16 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{2,5}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{2,5}$ adalah $V(B_{2,5}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{2,5}$ adalah $E(B_{2,5}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_{d14}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_{d23}, e_{d24}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{2,5}$:

Gambar 3.17 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{2,5}$

Pada Gambar 3.17 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{2,5}$ sebanyak 12. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 2 maka partisinya sebanyak 6 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dan E_6 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{2,4}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}, e_{d23}\},$$

$$E_6 = \{e_{d14}, e_{d24}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan 6, maka

$$H_1 = B_{2,5}[E_1] = B_{2,5}[\{e_1, e_2\}],$$

$$H_2 = B_{2,5}[E_2] = B_{2,5}[\{e_{p1}, e_{p2}\}],$$

$$H_3 = B_{2,5}[E_3] = B_{2,5}[\{e_{d11}, e_{d21}\}],$$

$$H_4 = B_{2,5}[E_4] = B_{2,5}[\{e_{d12}, e_{d22}\}],$$

$$H_5 = B_{2,5}[E_5] = B_{2,5}[\{e_{d13}, e_{d23}\}],$$

$$H_6 = B_{2,5}[E_6] = B_{2,5}[\{e_{d14}, e_{d24}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{2,5}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $2K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 4 titik dan 2 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

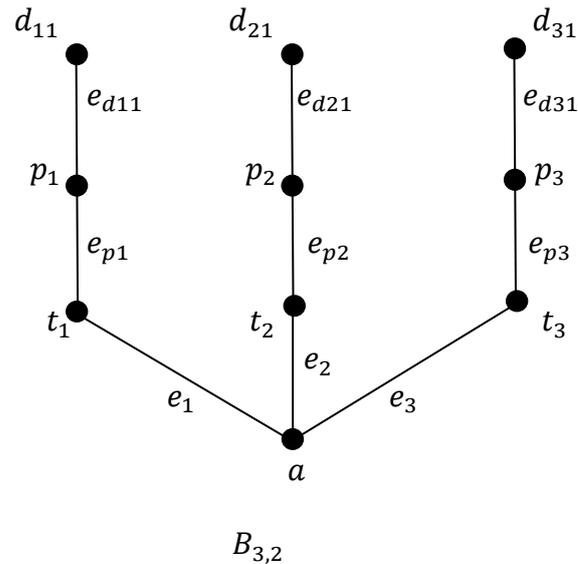
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(2K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & p_2 \rightarrow v_3 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_2 \rightarrow v_4 \end{array}$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^6$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{2,5}$ dan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{2,5}$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

3.1.9 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,2}$

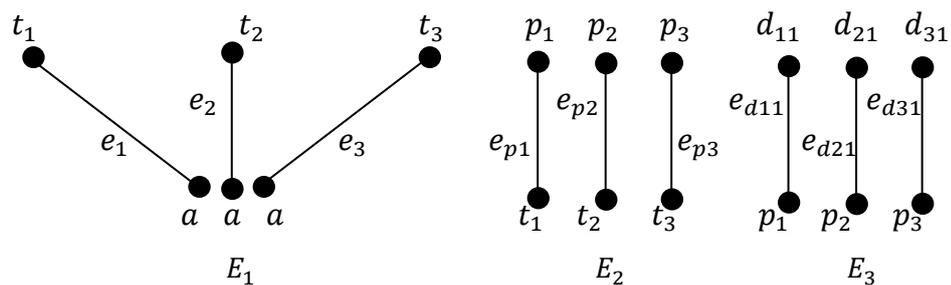
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{3,2}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap tiga graf S_2 .

Graf pohon pisang $B_{3,2}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3.18 Graf Pohon Pisang $B_{3,2}$

Pada Gambar 3.18 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{3,2}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{3,2}$ adalah $V(B_{3,2}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, t_2, p_2, d_{21}, t_3, p_3, d_{31}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{3,2}$ adalah $E(B_{3,2}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_3, e_{p3}, e_{d31}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{3,2}$.

Gambar 3.19 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{3,2}$

Pada Gambar 3.19 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{3,2}$ sebanyak 9. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari

sisi sebanyak m yaitu 3 maka partisinya sebanyak 3 yaitu E_1 , E_2 , dan E_3 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{3,2}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2$ dan 3 , maka

$$H_1 = B_{3,2}[E_1] = B_{3,2}[\{e_1, e_2, e_3\}],$$

$$H_2 = B_{3,2}[E_2] = B_{3,2}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\}],$$

$$H_3 = B_{3,2}[E_3] = B_{3,2}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{3,2}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $3K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 6 titik dan 3 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) \qquad \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2)$$

$$p_1 \rightarrow v_1$$

$$t_2 \rightarrow v_4$$

$$t_1 \rightarrow v_2$$

$$p_3 \rightarrow v_5$$

$$p_2 \rightarrow v_3$$

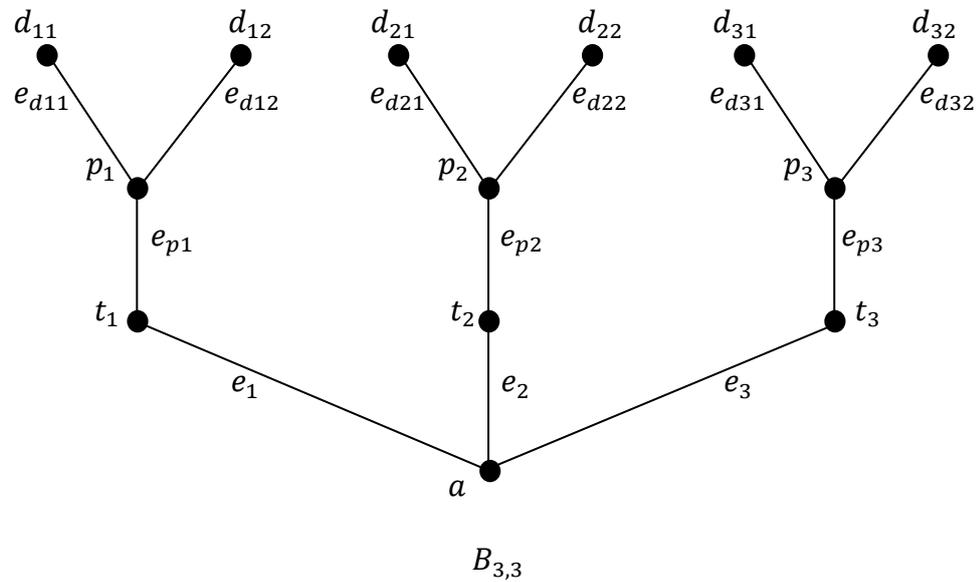
$$t_3 \rightarrow v_6$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^3$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{3,2}$ dan $H_i \cong 3K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{3,2}$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi.

3.1.10 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,3}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{3,3}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap tiga graf S_3 .

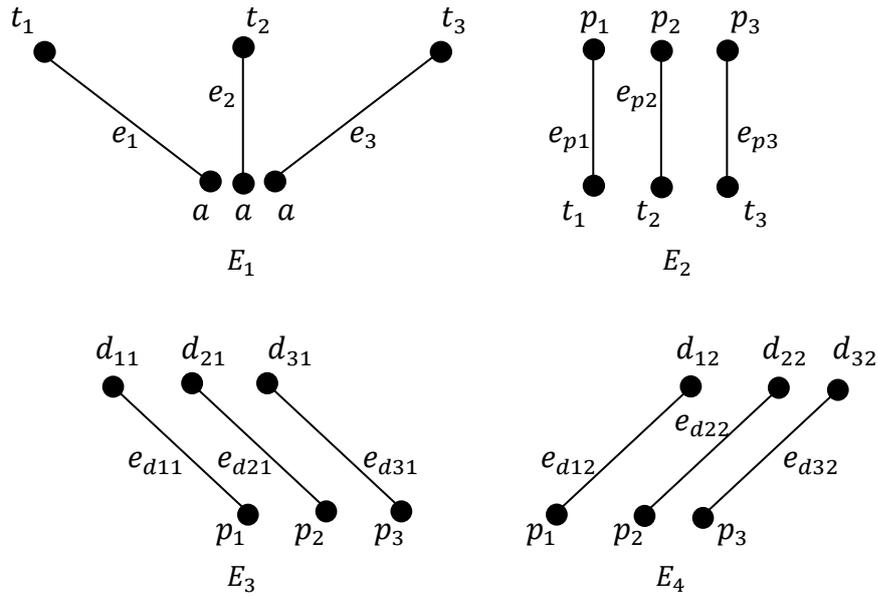
Graf pohon pisang $B_{3,3}$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.20 Graf Pohon Pisang $B_{3,3}$

Pada Gambar 3.20 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{3,3}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{3,3}$ adalah $V(B_{3,3}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, t_3, p_3, d_{31}, d_{32}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{3,3}$ adalah $E(B_{3,3}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_{d32}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{3,3}$.



Gambar 3.21 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{3,3}$

Pada Gambar 3.21 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{3,3}$ sebanyak 12. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 3 maka partisinya sebanyak 4 yaitu E_1, E_2, E_3 dan E_4 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{3,3}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3$ dan 4, maka

$$H_1 = B_{3,3}[E_1] = B_{3,3}[\{e_1, e_2, e_3\}],$$

$$H_2 = B_{3,3}[E_2] = B_{3,3}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\}],$$

$$H_3 = B_{3,3}[E_3] = B_{3,3}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\}],$$

$$H_4 = B_{3,3}[E_4] = B_{3,3}[\{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{3,3}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $3K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 6 titik dan 3 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

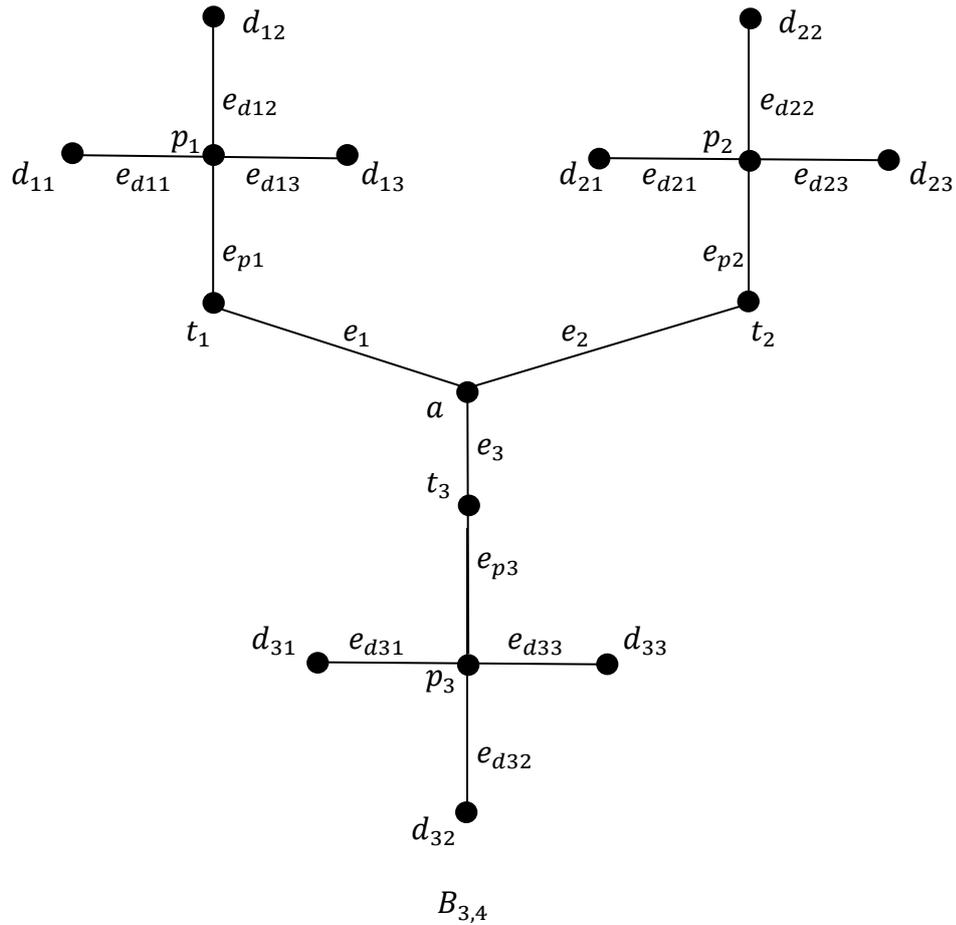
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & t_2 \rightarrow v_4 \\ t_1 \rightarrow v_2 & p_3 \rightarrow v_5 \\ p_2 \rightarrow v_3 & t_3 \rightarrow v_6 \end{array}$$

Jika koleksi $\{H_i\}_{i=1}^4$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{3,3}$ dan $H_i \cong 3K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{3,3}$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi.

3.1.11 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,4}$

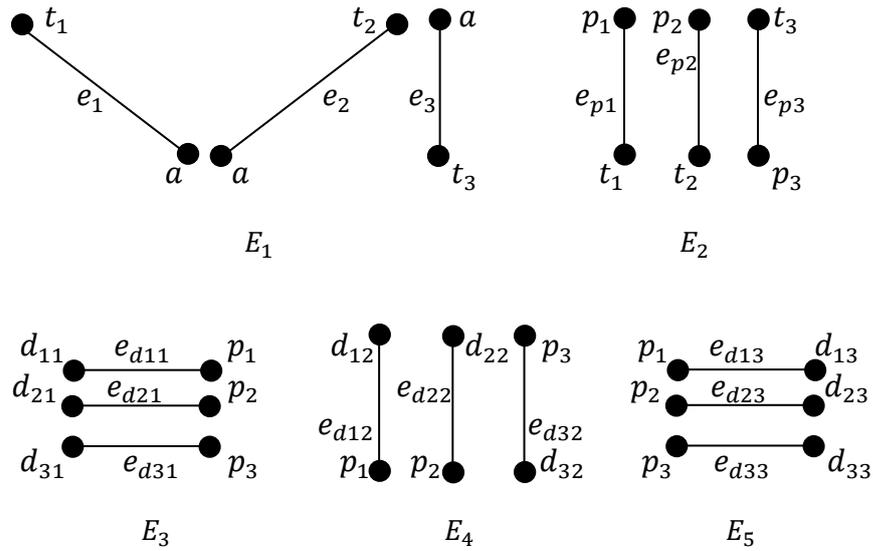
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{3,4}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap tiga graf S_4 .

Graf pohon pisang $B_{3,4}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.22 Graf Pohon Pisang $B_{3,4}$

Pada Gambar 3.22 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{3,4}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{3,4}$ adalah $V(B_{3,4}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, d_{23}, t_3, p_3, d_{31}, d_{32}, d_{33}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{3,4}$ adalah $E(B_{3,4}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_{d23}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_{d32}, e_{d33}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{3,4}$.



Gambar 3.23 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{3,4}$

Pada Gambar 3.23 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{3,4}$ sebanyak 15. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 3 maka partisinya sebanyak 5 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{3,4}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dan 5, maka

$$H_1 = B_{3,4}[E_1] = B_{3,4}[\{e_1, e_2, e_3\}],$$

$$H_2 = B_{3,4}[E_2] = B_{3,4}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\}],$$

$$H_3 = B_{3,4}[E_3] = B_{3,4}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\}],$$

$$H_4 = B_{3,4}[E_4] = B_{3,4}[\{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}\}],$$

$$H_5 = B_{3,4}[E_5] = B_{3,4}[\{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{3,4}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $3K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 6 titik dan 3 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

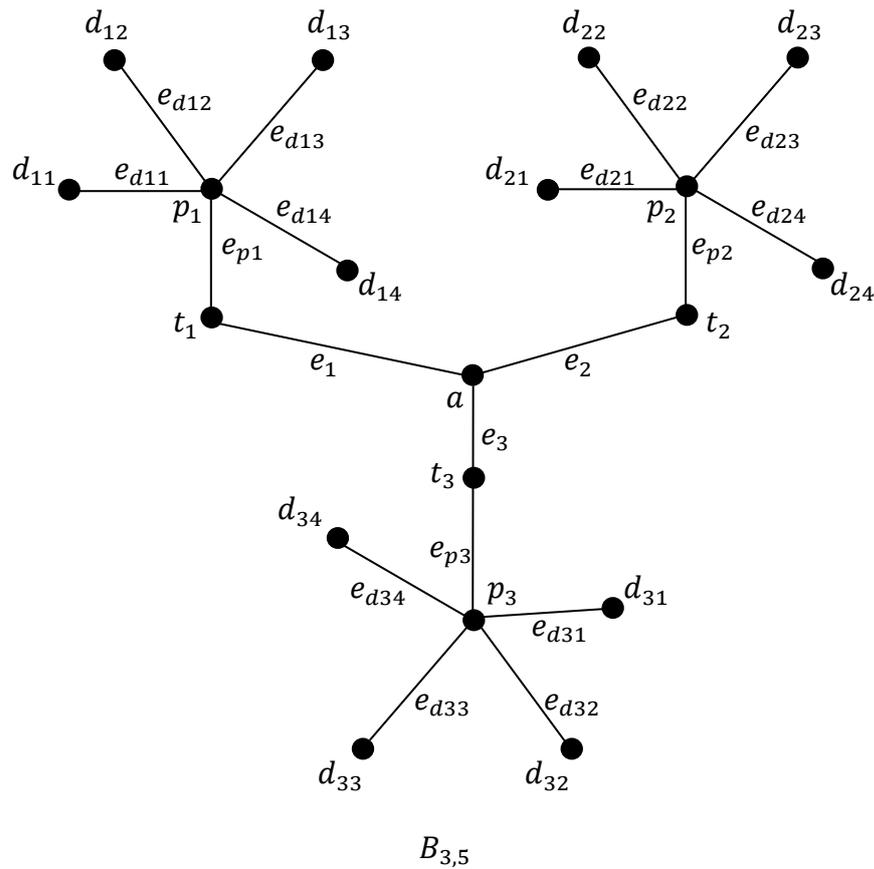
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & t_2 \rightarrow v_4 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_3 \rightarrow v_5 \\ p_2 \rightarrow v_3 & p_3 \rightarrow v_6 \end{array}$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^5$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{3,4}$ dan $H_i \cong 3K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{3,4}$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi.

3.1.12 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$

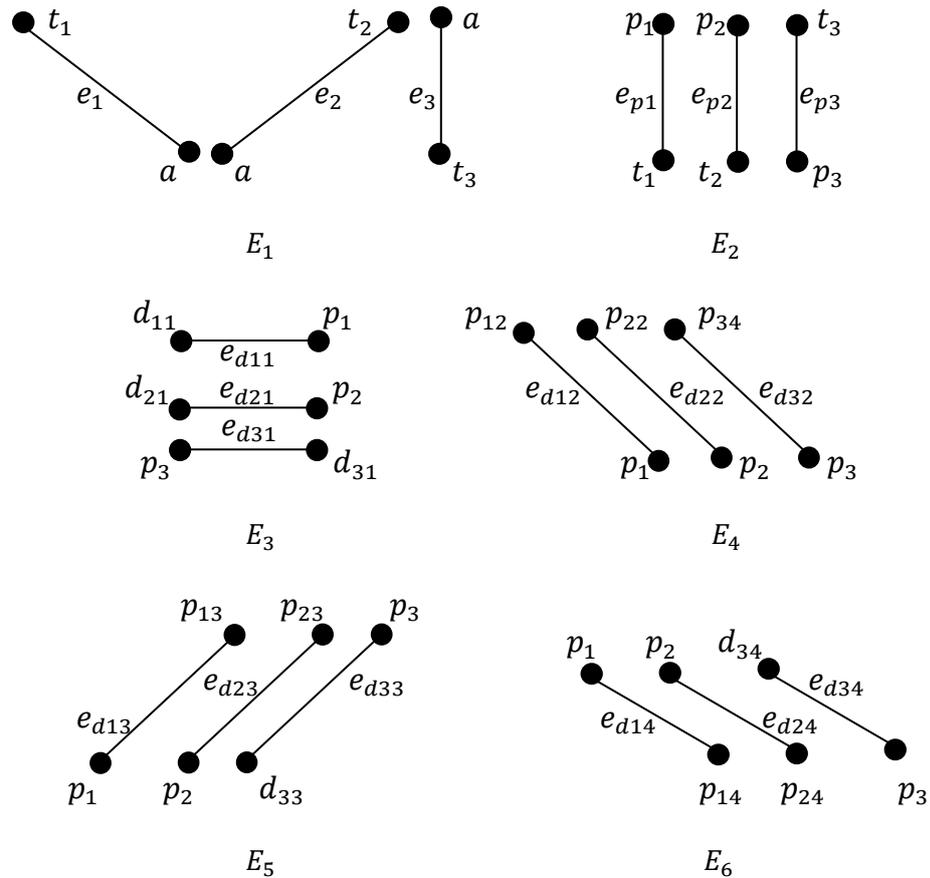
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{3,5}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap tiga graf S_5 .

Graf pohon pisang $B_{3,5}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.24 Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$

Pada Gambar 3.24 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{3,5}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{3,5}$ adalah $V(B_{3,5}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}, t_3, p_3, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}\}$ dan himpunan sisi pada graf graf pohon pisang $B_{3,5}$ adalah $E(B_{3,5}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_{d14}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_{d23}, e_{d24}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_{d32}, e_{d33}, e_{d34}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{3,5}$.



Gambar 3.25 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{3,5}$

Pada Gambar 3.25 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{3,5}$ sebanyak 18. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 3 maka partisinya sebanyak 6 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dan E_6 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{3,5}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}\},$$

$$E_6 = \{e_{d14}, e_{d24}, e_{d34}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan 6 , maka

$$\begin{aligned} H_1 &= B_{3,5}[E_1] = B_{3,5}[\{e_1, e_2, e_3\}], \\ H_2 &= B_{3,5}[E_2] = B_{3,5}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}\}], \\ H_3 &= B_{3,5}[E_3] = B_{3,5}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}\}], \\ H_4 &= B_{3,5}[E_4] = B_{3,5}[\{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}\}], \\ H_5 &= B_{3,5}[E_5] = B_{3,5}[\{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}\}], \\ H_6 &= B_{3,5}[E_6] = B_{3,5}[\{e_{d14}, e_{d24}, e_{d34}\}]. \end{aligned}$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{3,5}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $3K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 6 titik dan 3 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

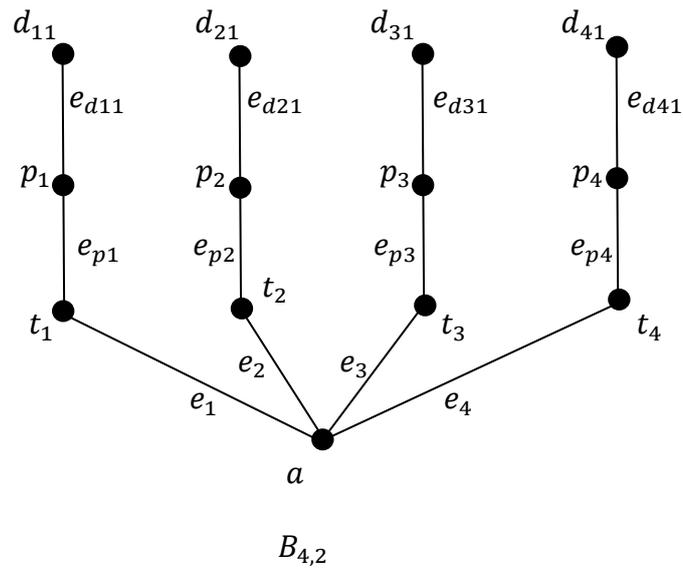
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & t_2 \rightarrow v_4 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_3 \rightarrow v_5 \\ p_2 \rightarrow v_3 & p_3 \rightarrow v_6 \end{array}$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^6$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{3,5}$ dan $H_i \cong 3K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{3,5}$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi.

3.1.13 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,2}$

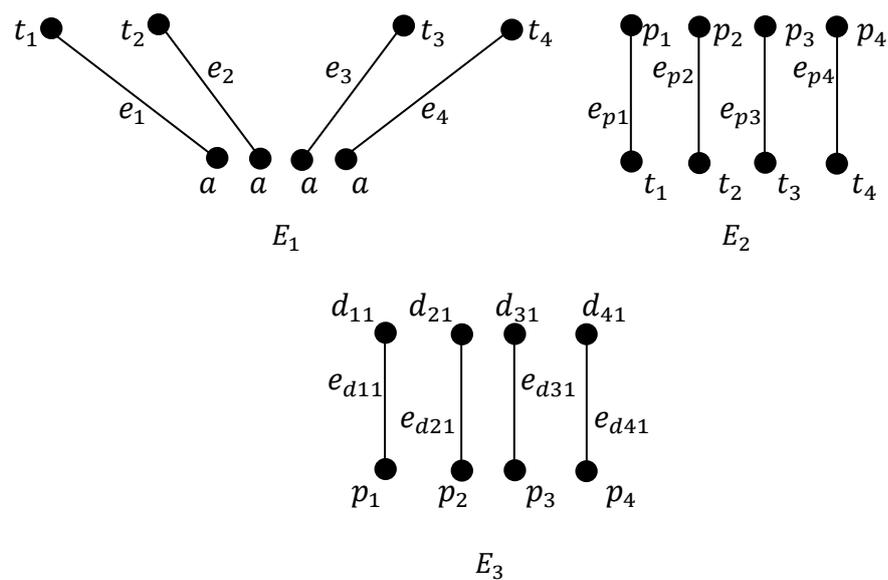
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{4,2}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap empat graf S_2 .

Graf pohon pisang $B_{4,2}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3.26 Graf Pohon Pisang $B_{4,2}$

Pada Gambar 3.26 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{4,2}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{4,2}$ adalah $V(B_{4,2}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, t_2, p_2, d_{21}, t_3, p_3, d_{31}, t_4, p_4, d_{41}\}$ dan himpunan sisi pada graf graf pohon pisang $B_{4,2}$ adalah $E(B_{4,2}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_4, e_{p4}, e_{d41}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{4,2}$:

Gambar 3.27 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{4,2}$

Pada Gambar 3.27 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{4,2}$ sebanyak 12. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 4 maka partisinya sebanyak 3 yaitu E_1 , E_2 dan E_3 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{4,2}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2$ dan 3 , maka

$$H_1 = B_{4,2}[E_1] = B_{4,2}[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}],$$

$$H_2 = B_{4,2}[E_2] = B_{4,2}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\}],$$

$$H_3 = B_{4,2}[E_3] = B_{4,2}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{4,2}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $4K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 6 titik dan 3 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2) \qquad \phi: V(H_1) \rightarrow V(3K_2)$$

$$p_1 \rightarrow v_1$$

$$p_3 \rightarrow v_5$$

$$t_1 \rightarrow v_2$$

$$t_3 \rightarrow v_6$$

$$p_2 \rightarrow v_3$$

$$p_4 \rightarrow v_7$$

$$t_2 \rightarrow v_4$$

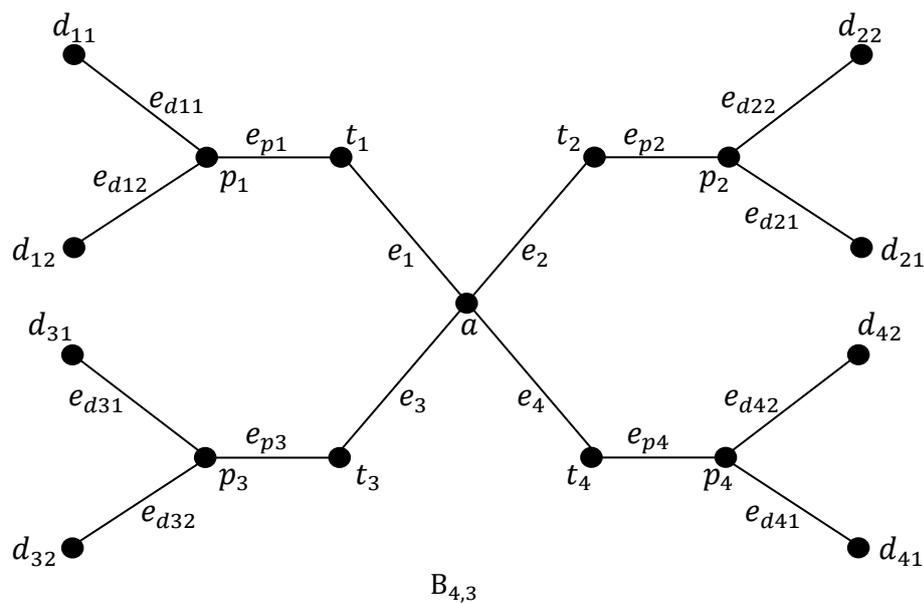
$$p_4 \rightarrow v_8$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^3$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{4,2}$ dan $H_i \cong 4K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{4,2}$ merupakan $4K_2$ -dekomposisi.

3.1.14 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,3}$

Untuk membuat graf pohon pisang $B_{4,3}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap empat graf S_3 .

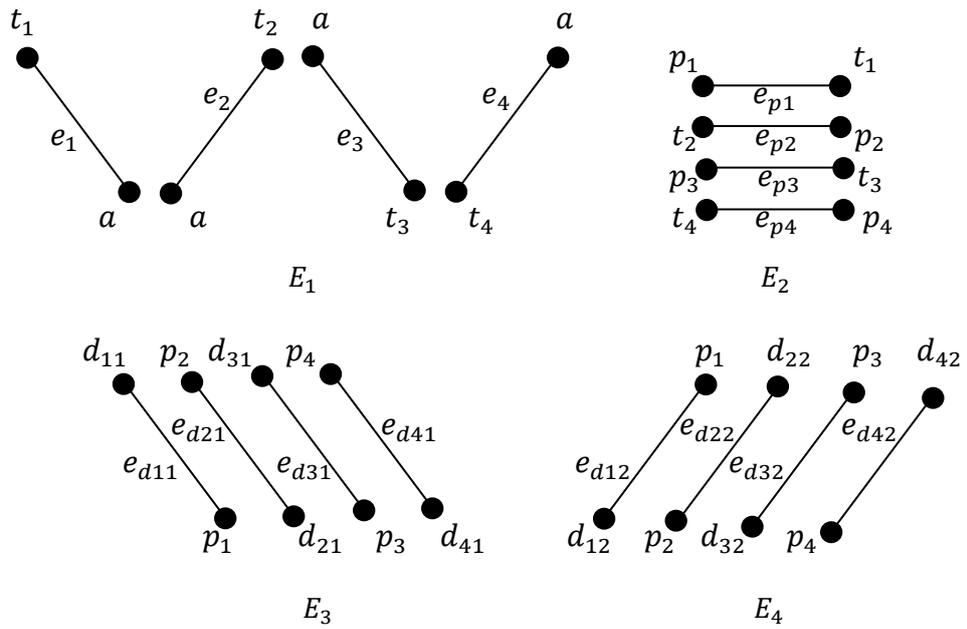
Graf pohon pisang $B_{4,3}$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.28 Graf Pohon Pisang $B_{4,3}$

Pada Gambar 3.28 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{4,3}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{4,3}$ adalah $V(B_{4,3}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, t_3, p_3, d_{31}, d_{32}, t_4, p_4, d_{41}, d_{42}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{4,3}$ adalah $E(B_{4,3}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_{d32}, e_4, e_{p4}, e_{d41}, e_{d42}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{4,3}$:

Gambar 3.29 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{4,3}$

Pada Gambar 3.29 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{4,3}$ sebanyak 16. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 4 maka partisinya sebanyak 4 yaitu E_1, E_2, E_3 dan E_4 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{4,3}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}, e_{d42}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang dibangun atau terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3$ dan 4, maka

$$H_1 = B_{4,3}[E_1] = B_{4,3}[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}],$$

$$H_2 = B_{4,3}[E_2] = B_{4,3}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\}],$$

$$H_3 = B_{4,3}[E_3] = B_{4,3}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\}],$$

$$H_4 = B_{4,3}[E_4] = B_{4,3}[\{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}, e_{d42}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{4,3}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $4K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 8 titik dan 4 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

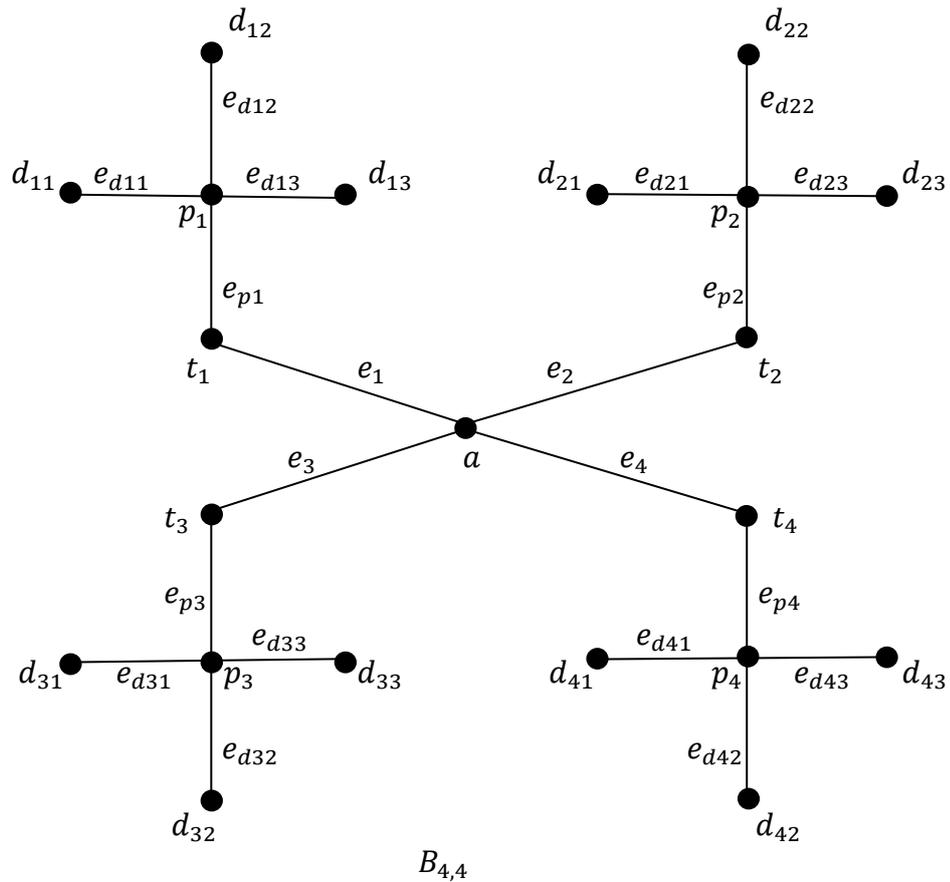
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(4K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(4K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & p_3 \rightarrow v_5 \\ t_1 \rightarrow v_2 & t_3 \rightarrow v_6 \\ t_2 \rightarrow v_3 & t_4 \rightarrow v_7 \\ p_2 \rightarrow v_4 & p_4 \rightarrow v_8 \end{array}$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^4$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{4,3}$ dan $H_i \cong 4K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{4,3}$ merupakan $4K_2$ -dekomposisi.

3.1.15 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,4}$

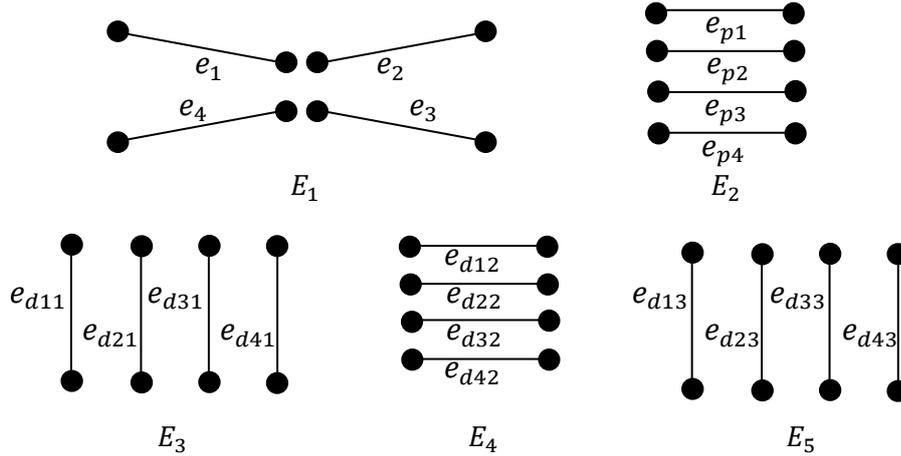
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{4,4}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap empat graf S_4 .

Graf pohon pisang $B_{4,4}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.30 Graf Pohon Pisang $B_{4,4}$

Pada Gambar 3.30 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{4,4}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{4,4}$ adalah $V(B_{4,4}) = \{ a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, d_{23}, t_3, p_3, d_{31}, d_{32}, d_{33}, t_4, p_4, d_{41}, d_{42}, d_{43} \}$ dan himpunan sisi pada graf graf pohon pisang $B_{4,4}$ adalah $E(B_{4,4}) = \{ e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_{d23}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_{d32}, e_{d33}, e_4, e_{p4}, e_{d41}, e_{d42}, e_{d43} \}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{4,4}$.



Gambar 3.31 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{4,4}$

Pada Gambar 3.31 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{4,4}$ sebanyak 20. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 4 maka partisinya sebanyak 5 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5 .

Partisi dari graf pohon pisang $B_{4,4}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}, e_{d42}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}, e_{d43}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dan 5, maka

$$H_1 = B_{4,4}[E_1] = B_{4,4}[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}],$$

$$H_2 = B_{4,4}[E_2] = B_{4,4}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\}],$$

$$H_3 = B_{4,4}[E_3] = B_{4,4}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\}],$$

$$H_4 = B_{4,4}[E_4] = B_{4,4}[\{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}, e_{d42}\}],$$

$$H_5 = B_{4,4}[E_5] = B_{4,4}[\{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}, e_{d43}\}].$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{4,4}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $4K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 8 titik dan 4 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

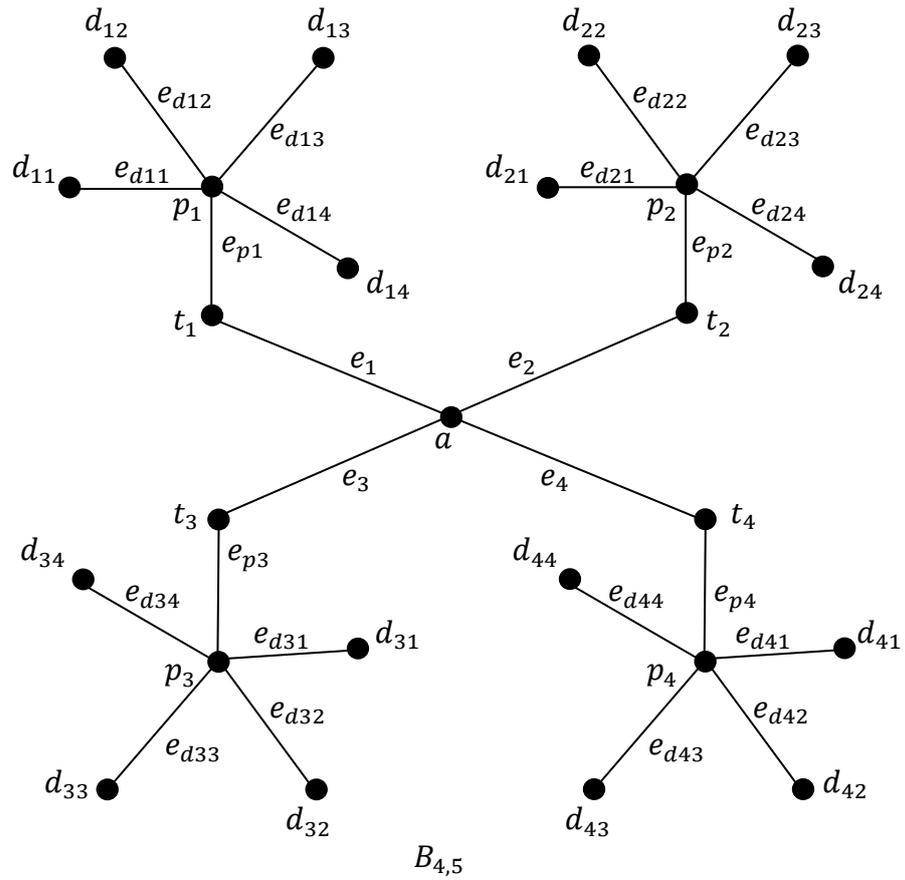
$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(4K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(4K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & t_3 \rightarrow v_5 \\ t_1 \rightarrow v_2 & p_3 \rightarrow v_6 \\ p_2 \rightarrow v_3 & t_4 \rightarrow v_7 \\ t_2 \rightarrow v_4 & p_4 \rightarrow v_8 \end{array}$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^5$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{4,4}$ dan $H_i \cong 4K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{4,4}$ merupakan $4K_2$ -dekomposisi.

3.1.16 Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$

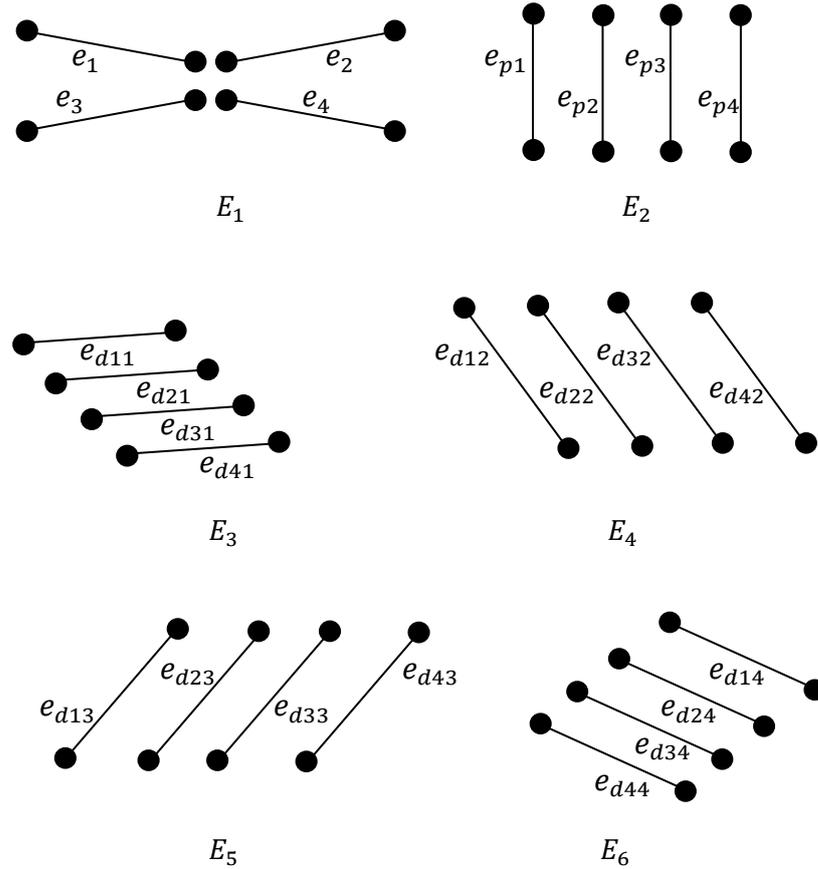
Untuk membuat graf pohon pisang $B_{4,5}$ adalah dengan cara membuat sisi sebagai jembatan untuk menghubungkan antara titik a atau graf K_1 sebagai titik akar dengan salah satu daun disetiap empat graf S_5 .

Graf pohon pisang $B_{4,5}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.32 Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$

Pada Gambar 3.32 terlihat bahwa graf pohon pisang $B_{4,5}$ telah diberi label pada setiap titik dan sisinya, maka himpunan titik pada graf pohon pisang $B_{4,5}$ adalah $V(B_{4,5}) = \{a, t_1, p_1, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, t_2, p_2, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}, t_3, p_3, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, t_4, p_4, d_{41}, d_{42}, d_{43}, d_{44}\}$ dan himpunan sisi pada graf pohon pisang $B_{4,5}$ adalah $E(B_{4,5}) = \{e_1, e_{p1}, e_{d11}, e_{d12}, e_{d13}, e_{d14}, e_2, e_{p2}, e_{d21}, e_{d22}, e_{d23}, e_{d24}, e_3, e_{p3}, e_{d31}, e_{d32}, e_{d33}, e_{d34}, e_4, e_{p4}, e_{d41}, e_{d42}, e_{d43}, e_{d44}\}$.

Berikut adalah gambar partisi sisi dari graf pohon pisang $B_{4,5}$.

Gambar 3.33 Partisi Sisi Dari Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$

Pada Gambar 3.33 terlihat bahwa sisi dari graf pohon pisang $B_{4,5}$ sebanyak 24. Selanjutnya akan dibentuk partisi yang masing-masing partisinya terdiri dari sisi sebanyak m yaitu 4 maka partisinya sebanyak 6 yaitu E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dan E_6 . Partisi dari graf pohon pisang $B_{4,5}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$E_2 = \{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\},$$

$$E_3 = \{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\},$$

$$E_4 = \{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}, e_{d42}\},$$

$$E_5 = \{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}, e_{d43}\},$$

$$E_6 = \{e_{d14}, e_{d24}, e_{d34}, e_{d44}\}.$$

Selanjutnya membentuk subgraf H_i yang dibangun atau terinduksi oleh E_i untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan 6 , maka

$$\begin{aligned} H_1 &= B_{4,5}[E_1] = B_{4,5}[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}], \\ H_2 &= B_{4,5}[E_2] = B_{4,5}[\{e_{p1}, e_{p2}, e_{p3}, e_{p4}\}], \\ H_3 &= B_{4,5}[E_3] = B_{4,5}[\{e_{d11}, e_{d21}, e_{d31}, e_{d41}\}], \\ H_4 &= B_{4,5}[E_4] = B_{4,5}[\{e_{d12}, e_{d22}, e_{d32}, e_{d42}\}], \\ H_5 &= B_{4,5}[E_5] = B_{4,5}[\{e_{d13}, e_{d23}, e_{d33}, e_{d43}\}], \\ H_6 &= B_{4,5}[E_6] = B_{4,5}[\{e_{d14}, e_{d24}, e_{d34}, e_{d44}\}]. \end{aligned}$$

Subgraf H_i telah memenuhi definisi dekomposisi graf maka graf pohon pisang $B_{4,5}$ dapat didekomposisikan. H_i (misal H_2) isomorfik dengan graf $4K_2$ (pada Gambar 3.1) karena memiliki order dan ukuran yang sama yaitu 8 titik dan 4 sisi serta titik-titiknya saling berkorespondensi satu-satu, yaitu.

$$\begin{array}{ll} \phi: V(H_1) \rightarrow V(4K_2) & \phi: V(H_1) \rightarrow V(4K_2) \\ p_1 \rightarrow v_1 & t_3 \rightarrow v_5 \\ t_1 \rightarrow v_2 & p_3 \rightarrow v_6 \\ p_2 \rightarrow v_3 & t_4 \rightarrow v_7 \\ t_2 \rightarrow v_4 & p_4 \rightarrow v_8 \end{array}$$

Karena koleksi $\{H_i\}_{i=1}^6$ adalah dekomposisi dari graf pohon pisang $B_{4,5}$ dan $H_i \cong 4K_2$ untuk setiap i , maka graf pohon pisang $B_{4,5}$ merupakan $4K_2$ -dekomposisi.

3.2 Tabulasi Dekomposisi Graf Pohon Pisang

Tabel 3.1 Pola Sisi dan Titik Pada Graf Pohon Pisang $B_{1,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ E(B_{1,n}) $ | $ V(B_{1,n}) $ |
|-------------------|-----|-----------------|-----------------|
| $B_{1,2}$ | 2 | 3 | 4 |
| $B_{1,3}$ | 3 | 4 | 5 |
| $B_{1,4}$ | 4 | 5 | 6 |
| $B_{1,5}$ | 5 | 6 | 7 |
| ... | ... | ... | ... |
| $B_{1,n}$ | n | $n \cdot m + 1$ | $n \cdot m + 1$ |

Diketahui dari tabel 3.1 bahwa pola sisi pada graf pohon pisang $B_{1,n}$ adalah $n \cdot m + 1$, hal ini diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola sisinya bertambah sebanyak 1. Sedangkan pola banyaknya titik pada graf pohon pisang $B_{1,n}$ adalah $n \cdot m + 1$, hal ini juga diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola titiknya bertambah sebanyak 1. Pada tabel 3.1 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Berdasarkan definisi dekomposisi maka diperoleh dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{1,n}$ dengan n merupakan bilangan asli, sebagai berikut:

Tabel 3.2 Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{1,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ H_i(B_{1,n}) $ | $ E(H_i) $ | $ V(H_i) $ |
|-------------------|-----|---------------------------------|------------|------------|
| $B_{1,2}$ | 2 | 3 dengan $H_i \cong 1K_2$ | 1 | 2 |
| $B_{1,3}$ | 3 | 4 dengan $H_i \cong 1K_2$ | 1 | 2 |
| $B_{1,4}$ | 4 | 5 dengan $H_i \cong 1K_2$ | 1 | 2 |
| $B_{1,5}$ | 5 | 6 dengan $H_i \cong 1K_2$ | 1 | 2 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $B_{1,n}$ | n | $n + 1$ dengan $H_i \cong 1K_2$ | 1 | 2 |

Diketahui dari tabel 3.2 bahwa pola dekomposisi $B_{1,n}$ adalah $1K_2$ –dekomposisi dengan $H_i \cong 1K_2$ untuk setiap i . Di setiap subgraf H_i terdapat 1 sisi dan 2 titik. Sedangkan pola banyaknya subgraf H_i adalah $n + 1$, hal ini dapat diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka subgraf H_i di setiap i akan bertambah sebanyak 1. Pada tabel 3.2 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Tabel 3.3 Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{2,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ E(B_{2,n}) $ | $ V(B_{2,n}) $ |
|-------------------|-----|-----------------|-----------------|
| $B_{2,2}$ | 2 | 6 | 7 |
| $B_{2,3}$ | 3 | 8 | 9 |
| $B_{2,4}$ | 4 | 10 | 11 |
| $B_{2,5}$ | 5 | 12 | 13 |
| ... | ... | ... | ... |
| $B_{2,n}$ | n | $n \cdot m + 2$ | $n \cdot m + 2$ |

Diketahui dari tabel 3.3 bahwa pola sisi pada graf pohon pisang $B_{2,n}$ adalah $n \cdot m + 2$, hal ini diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola sisinya akan bertambah sebanyak 2. Sedangkan pola banyaknya titik pada graf pohon pisang $B_{2,n}$ adalah $n \cdot m + 2$, hal ini juga diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola titiknya akan bertambah sebanyak 2. Pada tabel 3.3 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Berdasarkan definisi dekomposisi maka diperoleh dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{2,n}$ dengan n merupakan bilangan asli, sebagai berikut:

Tabel 3.4 Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{2,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ H_i(B_{1,n}) $ | $ E(H_i) $ | $ V(H_i) $ |
|-------------------|-----|---------------------------------|------------|------------|
| $B_{2,2}$ | 2 | 3 dengan $H_i \cong 2K_2$ | 2 | 4 |
| $B_{2,3}$ | 3 | 4 dengan $H_i \cong 2K_2$ | 2 | 4 |
| $B_{2,4}$ | 4 | 5 dengan $H_i \cong 2K_2$ | 2 | 4 |
| $B_{2,5}$ | 5 | 6 dengan $H_i \cong 2K_2$ | 2 | 4 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $B_{2,n}$ | n | $n + 1$ dengan $H_i \cong 2K_2$ | 2 | 4 |

Diketahui dari tabel 3.4 bahwa pola dekomposisi $B_{2,n}$ adalah $2K_2$ –dekomposisi dengan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i . Di setiap subgraf H_i terdapat 2 sisi dan 4 titik. Sedangkan pola banyaknya subgraf H_i adalah $n + 1$, hal ini dapat diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka subgraf H_i di setiap i akan bertambah sebanyak 1. Pada tabel 3.4 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Tabel 3.5 Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{3,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ E(B_{3,n}) $ | $ V(B_{3,n}) $ |
|-------------------|-----|-----------------|-----------------|
| $B_{3,2}$ | 2 | 9 | 10 |
| $B_{3,3}$ | 3 | 12 | 13 |
| $B_{3,4}$ | 4 | 15 | 16 |
| $B_{3,5}$ | 5 | 18 | 19 |
| ... | ... | ... | ... |
| $B_{3,n}$ | n | $n \cdot m + 3$ | $n \cdot m + 3$ |

Diketahui dari tabel 3.5 bahwa pola sisi pada graf pohon pisang $B_{3,n}$ adalah $n \cdot m + 3$, hal ini diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola sisinya akan

bertambah sebanyak 3. Sedangkan pola banyaknya titik pada graf pohon pisang $B_{3,n}$ adalah $n \cdot m + 3$, hal ini juga diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola titiknya akan bertambah sebanyak 3. Pada tabel 3.5 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Berdasarkan definisi dekomposisi maka diperoleh dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{3,n}$ dengan n merupakan bilangan asli, sebagai berikut:

Tabel 3.6 Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{3,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ H_i(B_{1,n}) $ | $ E(H_i) $ | $ V(H_i) $ |
|-------------------|-----|---------------------------------|------------|------------|
| $B_{3,2}$ | 2 | 3 dengan $H_i \cong 3K_2$ | 3 | 6 |
| $B_{3,3}$ | 3 | 4 dengan $H_i \cong 3K_2$ | 3 | 6 |
| $B_{3,4}$ | 4 | 5 dengan $H_i \cong 3K_2$ | 3 | 6 |
| $B_{3,5}$ | 5 | 6 dengan $H_i \cong 3K_2$ | 3 | 6 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $B_{3,n}$ | n | $n + 1$ dengan $H_i \cong 3K_2$ | 3 | 6 |

Pada Tabel 3.6 terlihat bahwa pola dekomposisi $B_{3,n}$ adalah $3K_2$ –dekomposisi dengan $H_i \cong 3K_2$ untuk setiap i . Di setiap subgraf H_i terdapat 3 sisi dan 6 titik. Sedangkan pola banyaknya subgraf H_i adalah $n + 1$, hal ini dapat diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka subgraf H_i di setiap i akan bertambah sebanyak 1. Pada tabel 3.6 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah di setiap i .

Tabel 3.7 Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{4,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ E(B_{4,n}) $ | $ V(B_{4,n}) $ |
|-------------------|-----|-----------------|-----------------|
| $B_{4,2}$ | 2 | 12 | 13 |
| $B_{4,3}$ | 3 | 16 | 17 |
| $B_{4,4}$ | 4 | 20 | 21 |
| $B_{4,5}$ | 5 | 24 | 25 |
| ... | ... | ... | ... |
| $B_{4,n}$ | n | $n \cdot m + 4$ | $n \cdot m + 4$ |

Pada Tabel 3.7 terlihat bahwa pola sisi pada graf pohon pisang $B_{4,n}$ adalah $n \cdot m + 4$, hal ini diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola sisinya akan bertambah sebanyak 4. Sedangkan pola banyaknya titik pada graf pohon pisang $B_{4,n}$ adalah $n \cdot m + 4$, hal ini juga diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka pola titiknya akan bertambah sebanyak 4. Pada tabel 3.7 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Berdasarkan definisi dekomposisi maka diperoleh dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{4,n}$ dengan n merupakan bilangan asli, sebagai berikut:

Tabel 3.8 Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{4,n}$

| Graf Pohon Pisang | n | $ H_i(B_{1,n}) $ | $ E(H_i) $ | $ V(H_i) $ |
|-------------------|-----|---------------------------------|------------|------------|
| $B_{4,2}$ | 2 | 3 dengan $H_i \cong 4K_2$ | 4 | 8 |
| $B_{4,3}$ | 3 | 4 dengan $H_i \cong 4K_2$ | 4 | 8 |
| $B_{4,4}$ | 4 | 5 dengan $H_i \cong 4K_2$ | 4 | 8 |
| $B_{4,5}$ | 5 | 6 dengan $H_i \cong 4K_2$ | 4 | 8 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $B_{4,n}$ | n | $n + 1$ dengan $H_i \cong 4K_2$ | 4 | 8 |

Pada Tabel 3.8 terlihat bahwa pola dekomposisi $B_{4,n}$ adalah $4K_2$ –dekomposisi dengan $H_i \cong 4K_2$ untuk setiap i . Di setiap subgraf H_i terdapat 4 sisi dan 8 titik. Sedangkan pola banyaknya subgraf H_i adalah $n + 1$, hal ini dapat diketahui dari pola n . Jika n ditambah 1 maka subgraf H_i di setiap i akan bertambah sebanyak 1. Pada tabel 3.8 tidak diberi keterangan pola banyaknya m karena m tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya n yang berubah.

Tabel 3.9 Pola Sisi dan Titik Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

| Graf Pohon Pisang | m | $ E(B_{m,n}) $ | $ V(B_{m,n}) $ |
|-------------------|-----|-----------------|-----------------|
| $B_{1,n}$ | 1 | $n \cdot m + 1$ | $n \cdot m + 1$ |
| $B_{2,n}$ | 2 | $n \cdot m + 2$ | $n \cdot m + 2$ |
| $B_{3,n}$ | 3 | $n \cdot m + 3$ | $n \cdot m + 3$ |
| $B_{4,n}$ | 4 | $n \cdot m + 4$ | $n \cdot m + 4$ |
| ... | ... | ... | ... |
| $B_{m,n}$ | m | $n \cdot m + m$ | $n \cdot m + m$ |

Pada Tabel 3.9 terlihat bahwa pola sisi pada graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah $n \cdot m + m$, hal ini diketahui dari pola m . Jika m ditambah 1 maka pola penjumlahannya akan bertambah sebanyak 1. Sedangkan pola banyaknya titik pada graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah $n \cdot m + m$, hal ini diketahui dari pola m . Jika m ditambah 1 maka pola penjumlahannya akan bertambah sebanyak 1. Pada tabel 3.9 tidak diberi keterangan pola banyaknya n karena n tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya m yang berubah.

Berdasarkan definisi dekomposisi maka diperoleh dugaan dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$ dengan m merupakan bilangan asli, sebagai berikut:

Tabel 3.10 Pola Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

| Graf Pohon Pisang | m | $ H_i(B_{1,n}) $ | $ E(H_i) $ | $ V(H_i) $ |
|-------------------|-----|---------------------------------|------------|-------------|
| $B_{1,n}$ | 1 | $n + 1$ dengan $H_i \cong mK_2$ | 1 | 2 |
| $B_{2,n}$ | 2 | $n + 1$ dengan $H_i \cong mK_2$ | 2 | 4 |
| $B_{3,n}$ | 3 | $n + 1$ dengan $H_i \cong mK_2$ | 3 | 6 |
| $B_{4,n}$ | 4 | $n + 1$ dengan $H_i \cong mK_2$ | 4 | 8 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $B_{m,n}$ | m | $n + 1$ dengan $H_i \cong mK_2$ | m | $m \cdot 2$ |

Pada Tabel 3.10 terlihat bahwa pola dekomposisi $B_{m,n}$ adalah mK_2 –dekomposisi dengan $H_i \cong mK_2$ untuk setiap i . Pola banyaknya subgraf H_i adalah $n + 1$. Pola ini dapat diketahui dari setiap graf pohon pisang $B_{m,n}$ bahwa pola banyaknya subgraf H_i adalah $n + 1$. Pada subgraf H_i terdapat pola banyaknya sisi yaitu m . Pola banyaknya sisi tersebut diketahui dari banyaknya m pada setiap $B_{m,n}$. Pada subgraf H_i juga terdapat pola banyaknya titik yaitu $m \cdot 2$, hal ini diketahui dari pola m . Jika m ditambah 1 maka polanya akan bertambah sebanyak 2. Pada tabel 3.10 tidak diberi keterangan pola banyaknya n karena n tetap atau tidak berubah seperti keterangan pola banyaknya m yang berubah.

Teorema 3.1 Misal $B_{m,n}$ adalah graf pohon pisang dengan m dan n merupakan bilangan asli, maka graf pohon pisang $B_{m,n}$ merupakan mK_2 –dekomposisi.

Bukti

Misalkan $V(B_{m,n}) = \{a, t_1, t_2, t_m, p_1, p_2, p_m, d_{11}, d_{1n}, d_{21}, d_{2n}, d_{m1}, d_{mn}\}$

$$E(B_{m,n}) = \{e_1, e_2, e_m, e_{p1}, e_{p2}, e_{pm}, e_{d11}, e_{d1n}, e_{d21}, e_{d2n}, e_{dm1}, e_{dmn}\}$$

dengan

$$e_1 = (a, t_m)$$

$$e_{pm} = (p_m, t_m)$$

$$e_{dm1} = (p_m, d_{m1})$$

$$e_{dmn} = (p_m, d_{mn})$$

Selanjutnya membentuk partisi sisi pada $B_{m,n}$ sebanyak $n + 1$ yang sehingga disetiap partisi terdiri dari sisi-sisi sebanyak m .

Sebelum melanjutkan ke cara mempartisi perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.11 Penjelasan Sisi

| Simbol | Arti | Simbol | Arti |
|-----------|------------------------|------------|-------------------------|
| e_{i1} | e_{i1} yang ke-1 | e_{dm11} | e_{dm11} yang ke-1 |
| e_{i2} | e_{i2} yang ke-2 | e_{dm12} | e_{dm12} yang ke-2 |
| e_{im} | e_{im} yang ke- m | e_{dm1m} | e_{dm1m} yang ke- m |
| e_{pm1} | e_{pm1} yang ke-1 | e_{dmn1} | e_{dmn1} yang ke-1 |
| e_{pm2} | e_{pm2} yang ke-2 | e_{dmn2} | e_{dmn2} yang ke-2 |
| e_{pmm} | e_{pmm} yang ke- m | e_{dmnm} | e_{dmnm} yang ke- m |

Cara mempartisinya sebagai berikut.

$$E_1 = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{im}\}$$

$$E_2 = \{e_{pm1}, e_{pm2}, e_{pmm}\}$$

$$E_n = \{e_{dm11}, e_{dm12}, e_{dm1m}\}$$

$$E_{n+1} = \{e_{dmn1}, e_{dmn2}, e_{dmnm}\}$$

Maka akan dibuktikan bahwa $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ adalah suatu partisi dari $B_{m,n}$.

a. $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1} = E$

Jika $E_1 = \{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_m}\}$; $E_2 = \{e_{pm_1}, e_{pm_2}, e_{pm_m}\}$; $E_n = \{e_{dm1_1}, e_{dm1_2}, e_{dm1_m}\}$; $E_{n+1} = \{e_{dmn_1}, e_{dmn_2}, e_{dmn_m}\}$ Maka benar jika $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1} = E$

b. $E_i \cap E_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

Jika i dan j adalah himpunan sisi ke 1, 2, n , $n+1$. Perhatikan bahwa $E_1 = \{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_m}\}$ dan $E_2 = \{e_{pm_1}, e_{pm_2}, e_{pm_m}\}$, sedangkan $1 \neq 2$ maka $e_{i_1} \neq e_{pm_1}$ dan $e_{i_2} \neq e_{pm_2}$ dan $e_{i_m} \neq e_{pm_m}$. Kemudian $E_1 = \{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_m}\}$ dan $E_n = \{e_{dmi_1}, e_{dmi_2}, e_{dmi_m}\}$ sedangkan $1 \neq n$ maka $e_{i_1} \neq e_{dmi_1}$ dan $e_{i_2} \neq e_{dmi_2}$ dan $e_{i_m} \neq e_{dmi_m}$. Kemudian $E_1 = \{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_m}\}$ dan $E_{n+1} = \{e_{dmn_1}, e_{dmn_2}, e_{dmn_m}\}$ sedangkan $1 \neq n+1$ maka $e_{i_1} \neq e_{dmn_1}$ dan $e_{i_2} \neq e_{dmn_2}$ dan $e_{i_m} \neq e_{dmn_m}$. Kemudian $E_2 = \{e_{pm_1}, e_{pm_2}, e_{pm_m}\}$ dan $E_n = \{e_{dmi_1}, e_{dmi_2}, e_{dmi_m}\}$ sedangkan $2 \neq n$ maka $e_{pm_1} \neq e_{dmi_1}$ dan $e_{pm_2} \neq e_{dmi_2}$ dan $e_{pm_m} \neq e_{dmi_m}$. Kemudian $E_2 = \{e_{pm_1}, e_{pm_2}, e_{pm_m}\}$ dan $E_{n+1} = \{e_{dmn_1}, e_{dmn_2}, e_{dmn_m}\}$ sedangkan $2 \neq n+1$ maka $e_{pm_1} \neq e_{dmn_1}$ dan $e_{pm_2} \neq e_{dmn_2}$ dan $e_{pm_m} \neq e_{dmn_m}$. Kemudian $E_n = \{e_{dmi_1}, e_{dmi_2}, e_{dmi_m}\}$ dan $E_{n+1} = \{e_{dmn_1}, e_{dmn_2}, e_{dmn_m}\}$ sedangkan $n \neq n+1$ maka $e_{dmi_1} \neq e_{dmn_1}$ dan $e_{dmi_2} \neq e_{dmn_2}$ dan $e_{dmi_m} \neq e_{dmn_m}$.

Maka benar bahwa $E_i \cap E_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$.

Karena terbukti benar bahwa $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ memenuhi a dan b maka $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ adalah partisi dari $E(B_{m,n})$. Selanjutnya akan dibentuk subgraf dari graf pohon

pisang $B_{m,n}$. Pada dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$, subgraf dari graf pohon pisang $B_{m,n}$ terinduksi oleh partisi sisi dari $E(B_{m,n})$. Misalkan pada subgraf H_i , maka subgraf H_i terinduksi oleh E_i untuk setiap i , yang sehingga

$$\text{untuk } i = 1 \text{ adalah } H_1 = B_{m,n}[E_1] = B_{m,n}[\{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_m}\}]$$

$$\text{untuk } i = 2 \text{ adalah } H_2 = B_{m,n}[E_2] = B_{m,n}[\{e_{pm_1}, e_{pm_2}, e_{pm_m}\}]$$

$$\text{untuk } i = n \text{ adalah } H_n = B_{m,n}[E_n] = B_{m,n}[\{e_{dm1_1}, e_{dm1_2}, e_{dm1_m}\}]$$

$$\text{untuk } i = n + 1 \text{ adalah } H_{n+1} = B_{m,n}[E_{n+1}] = B_{m,n}[\{e_{dmn_1}, e_{dmn_2}, e_{dmn_m}\}]$$

Karena $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ merupakan sisi-sisi pada subgraf H_i yang tidak memuat titik berderajat 0 yang sehingga subgraf H_i tidak memuat titik terisolasi. Maka dari itu koleksi subgraf $\{H_i\}_{i=1}^{n+1}$ memenuhi definisi dekomposisi, maka graf pohon pisang $B_{m,n}$ dapat didekomposisikan. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\text{untuk } i = 1 \text{ adalah } H_1 = B_{m,n}[E_1] = B_{m,n}[\{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_m}\}]$$

$$\text{untuk } i = 2 \text{ adalah } H_2 = B_{m,n}[E_2] = B_{m,n}[\{e_{pm_1}, e_{pm_2}, e_{pm_m}\}]$$

$$\text{untuk } i = n \text{ adalah } H_n = B_{m,n}[E_n] = B_{m,n}[\{e_{dm1_1}, e_{dm1_2}, e_{dm1_m}\}]$$

$$\text{untuk } i = n + 1 \text{ adalah } H_{n+1} = B_{m,n}[E_{n+1}] = B_{m,n}[\{e_{dmn_1}, e_{dmn_2}, e_{dmn_m}\}]$$

dengan

$$e_1 = (a, t_m)$$

$$e_{pm} = (p_m, t_m)$$

$$e_{dmi} = (p_m, d_{m1})$$

$$e_{dmn} = (p_m, d_{mn})$$

Berdasarkan definisi graf isomorfik bahwa koleksi subgraf $\{H_i\}_{i=1}^{n+1}$ berupa mK_2 yang dapat ditulis dengan $H_i \cong mK_2$. Hal ini dapat diketahui dari sisi e_1 yang bersisian dengan titik a dan titik t_m , sedangkan titik e_{pm} bersisian dengan titik p_m dan titik t_m , sedangkan titik e_{ami} bersisian dengan titik p_m dan titik d_{m1} dan sedangkan titik e_{amn} bersisian dengan titik p_m dan titik d_{mn} . Jadi, jika $H_i \cong mK_2$ untuk setiap i maka $B_{m,n}$ merupakan mK_2 –dekomposisi.

3.3 Pengelompokan Manusia Berdasarkan Teori Graf

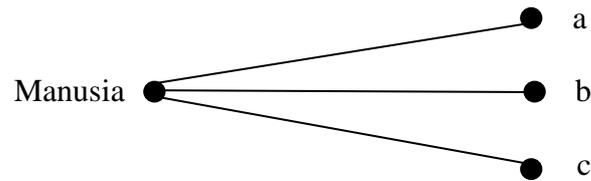
Ketika dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$ diintegrasikan dengan kajian agama maka akan sama dengan konsep himpunan. Himpunan merupakan kumpulan beberapa objek yang berbeda yang ada di dalam himpunan dan terdefinisi. Objek-objek yang terdapat didalam himpunan disebut dengan elemen-elemen, unsur-unsur atau anggota-anggota dari himpunan.

Pada surat al-Waqi'ah ayat 7 – 10 berbunyi sebagai berikut:

وَكُنْتُمْ أَزْوَاجًا ثَلَاثَةً (٧) فَأَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ مَا أَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ (٨) وَأَصْحَابُ الْمَشْأَمَةِ مَا
أَصْحَابُ الْمَشْأَمَةِ (٩) وَالسَّابِقُونَ السَّابِقُونَ (١٠)

Artinya: (7) dan kamu menjadi tiga golongan. (8) yaitu golongan kanan, alangkah mulianya golongan kanan itu. (9) dan golongan kiri, alangkah sengsaranya golongan kiri itu. (10) dan orang-orang yang paling dahulu (beriman), merekalah yang paling dahulu (masuk surga) (QS. Al-Waqi'ah: 7-10).

Dari ayat tersebut telah dijelaskan bahwa nantinya manusia akan dibagi menjadi tiga golongan, yaitu (1) *ashhabul yamin* atau golongan kanan, (2) *ashhabul syimal* atau golongan kiri dan (3) *as-sabiqun* atau orang yang selalu mendekati diri kepada Allah.



Gambar 3.34 Representasi Graf Pada Surat al-Waqi'ah

Keterangan gambar 3.34 :

a = *ashhabul yamin* atau golongan kanan atau penghuni surga

b = *ashhabul syimal* atau golongan kiri atau penghuni neraka

c = *as-sabiqun* atau orang yang selalu berusaha mendekatkan diri kepada Allah

Dalam surat al-Waqi'ah dari ayat 88 sampai 94 terdapat penjelasan tentang ketiga golongan ini sebagai berikut:

فَأَمَّا إِنْ كَانَ مِنَ الْمُقَرَّبِينَ (٨٨) فَرَوْحٌ وَرَيْحَانٌ وَجَنَّةٌ نَعِيمٌ (٨٩)
 وَأَمَّا إِنْ كَانَ مِنْ أَصْحَابِ الْيَمِينِ (٩٠) فَسَلَامٌ لَكَ مِنْ أَصْحَابِ الْيَمِينِ (٩١)
 وَأَمَّا إِنْ كَانَ مِنَ الْمُكَذَّبِينَ الضَّالِّينَ (٩٢) فَنُزُلٌ مِنْ حَمِيمٍ (٩٣) وَتَصْلِيَةٌ جَهِيمٍ (٩٤)

Artinya: (88) Jika dia (orang yang mati) itu termasuk yang didekatkan (kepada Allah). (89) maka dia memperoleh ketenteraman dan rezeki serta surga (yang penuh dengan) kenikmatan. (90) Dan jika dia termasuk golongan kanan. (91) maka, "Salam bagimu (wahai) dari golongan kanan" (sambut dari malaikat). (92) Dan adapun jika dia termasuk golongan orang yang mendustakan dan sesat. (93) maka dia akan siraman air yang mendidih. (94) dan dibakar di dalam neraka (QS. al-Waqi'ah: 88-94).

Ayat tersebut menjelaskan tentang keadaan manusia setelah kematian. Mereka akan dibagi menjadi tiga golongan, yaitu *ashhabul yamin* atau golongan kanan yaitu orang-orang yang akan mendapat sambutan dari malaikat dan akan masuk surga. Kedua, *ashhabul syimal* atau golongan kiri yaitu orang-orang yang akan mendapat siksaan di dalam neraka. Ketiga, *as-sabiqun* atau orang yang selalu berusaha mendekatkan diri kepada Allah dan pasti akan masuk surga (Shihab, 2002).

Allah menyatakan bahwa golongan *as-sabiqun* akan memperoleh ketentrangan serta kenyamanan dari segala kegelisahan, kegundahan dan segala keburukan. Mereka juga akan mendapat rezeki berupa rahmat yang melimpah, penyambutan yang mewah dengan banyak karangan bunga yang sangat harum serta surga yang kenikmatannya tidak dapat dijelaskan dengan kata-kata (Shihab, 2002).

Adapun *ashhabul yamin* atau golongan kanan. Menurut al-Baq'a'i pada ayat 91 menjelaskan tentang balasan bagi golongan *ashhabul yamin* sebagai puncak keselamatan dan perwujudan dari kedamaian yang diperoleh. Golongan *ashhabul yamin* berada ditingkatan sedikit lebih rendah dari golongan *as-sabiqun* tetapi para *ashhabul yamin* ini juga akan masuk surga. Golongan *ashhabul yamin* juga akan mendapat kenikmatan surga berupa keselamatan, kesejahteraan dan penghormatan (Shihab, 2002). Walaupun golongan *ashhabul yamin* dan golongan *as-sabiqun* sama-sama masuk surga dan dalam tingkatan yang berbeda mereka tidak akan pernah timbul perselisihan, rasa iri, dengki dan segala perasaan yang buruk karena di dalam surga sudah terbebas dari perasaan-perasaan buruk seperti itu (Shihab, 2002).

Selanjutnya tentang *ashhabul syimal* atau golongan kiri. Golongan *ashhabul syimal* merupakan penghuni neraka yang akan disiksa di dalamnya. Mereka merupakan golongan pembohong, pengingkar kebenaran yang sesat maka akan mendapat balasan berupa air mendidih dan dibakar di dalam neraka jahanam (Shihab, 2002).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Misalkan m dan n graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah bilangan asli maka berdasarkan pembahasan graf pohon pisang $B_{m,n}$ dapat didekomposisikan oleh graf mK_2 , maka dapat ditemukan kesimpulan bahwa graf pohon pisang $B_{m,n}$ merupakan dekomposisi mK_2 .

4.2 Saran

Pada penelitian skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok pembahasan masalah pada dekomposisi graf pohon pisang $B_{m,n}$. Untuk penulisan penelitian skripsi selanjutnya, penulis menyarankan agar dilanjutkan meneliti dekomposisi menggunakan jenis graf yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdullah, M. 2003. Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.
- Al-Qur'an Terjemahan. 2015. *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.
- Az-Zuhaili, Wahbah. 2014. *Tafsir Al-Munir fi Aqidah wa Syari'ah wa Manhaj*, Pent Abdul hayyie Al-Kattani dkk, Cet.1, Jakarta: Gema Insani.
- Bell, Eric Temple. 1951. *Mathematics: Queen and Servent of Science*. New York: Mc Graw-Hill.
- Chartrand, Gary, Lesniak, L., and Zang, Pink. 2011. *Graphs and Digraphs Fifth Edition*. New York: Chapman & Hall/CRC.
- Chartrand, Gary and Zang, Pink. 2012. *A First Course in Graph Teory*. Dover Publication, Inc. New York.
- Darwanto. Dinata, Karsoni Berta dan Junaidi. 2020. *Teori Himpunan*. Lampung: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.
- Nur, Melati, Wellyanti, Des dan Narwen. 2020. Bilangan Kromatik Lokasi Untuk Graf Pohon Pisang $B_{n,k}$. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol. 9. No. 2. Hal.70-75.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah: Pesan. Kesan dan Keserasian Al-Quran*. Jakarta: Lentera Hati.
- Suhandi, Machdi Zakia. 2015. *Multi Perspektif Surat Al-Waqi'ah*. Jakarta, Ilmu Pendidikan Islam B.
- Yesi, I, Sudarsana, I W. dan Musdalifah, S., 2016. Pelabelan Total Tringular Pada Beberapa Kelas Graf Pohon. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*. Vol. 13. No.2, Hal 17-24.

RIWAYAT HIDUP



Alfi Istijap Aji Sailendra yang biasa dipanggil dengan nama Istijap atau Kang Is. Lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 13 Januari 1999. Penulis merupakan seorang putra dari bapak Teguh Wahyudi dan ibu Sri Hayunik. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Tinggal di Dusun Wonosari, Desa Wonosari, Kecamatan Wonosari, Kabupaten Malang, Provinsi Jawa Timur.

Penulis memulai dunia Pendidikan dari TK Dharma Wanita Persatuan 01 Kecamatan Wonosari selama dua tahun dan lulus pada tahun 2005. Penulis melanjutkan pendidikan di SD Islam Unggulan “Kyai Zakaria” selama enam tahun dan lulus pada tahun 2011. Penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Wonosari selama tiga tahun dan lulus pada tahun 2014. Penulis mendapat pendidikan *diniyyah* di Pondok Pesantren Baitul Karim yang berada di Desa Putat Lor Kecamatan Gondanglegi dan juga melanjutkan Pendidikan formalnya di MAN Gondanglegi yang sekarang berganti nama menjadi MAN 1 Malang dan lulus pada tahun 2017. Kemudian, penulis memulai pendidikan dibangku kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Pada tahun 2018 penulis melanjutkan pendidikan *diniyyah*-nya di Pesantren Mahasiswa Al-Hikam Malang.

Selama menjadi mahasiswa di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, penulis pernah menjadi bagian dari Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) “Integral” Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang sebagai anggota Devisi *Internal Public Relation* (IPR) selama dua periode. Pada periode pertama, penulis pernah menjadi ketua pelaksana Studi Integritas Mahasiswa Matematika (SIGMA) 2018 dengan tema “Mengintegritaskan Matematikawan Muslim Ulul Albab Yang Intelektual, Responsif dan Profesional”. Setelah masa tugas selesai dari kepengurusan HMJ, penulis melanjutkan langkah organisasinya di Dewan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi (DEMA FST) sebagai anggota Departemen Dalam Negeri selama satu periode kepengurusan.



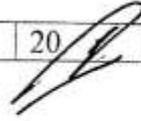
KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG FAKULTAS
SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

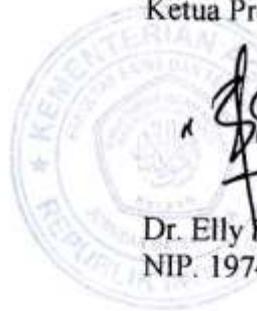
Nama : Alfi Istijap Aji Sailendra
NIM : 17610105
Fakultas/Program Studi: Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Dekomposisi Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|----|-------------------|--|--------------|
| 1 | 16 Maret 2021 | Konsultasi Bab I | 1. |
| 2 | 24 Maret 2021 | Revisi Bab I dan Konsultasi Bab II | 2. |
| 3 | 31 Maret 2021 | Konsultasi Integrasi Agama Bab I & II | 3. |
| 4 | 02 April 2021 | Revisi Bab II | 4. |
| 5 | 05 April 2021 | Revisi Integrasi Agama Bab I & II | 5. |
| 6 | 09 April 2021 | ACC Seminar Proposal Pembimbing I | 6. |
| 7 | 09 April 2021 | ACC Seminar Proposal Pembimbing II | 7. |
| 8 | 05 Mei 2021 | Revisi Bab II dan Konsultasi Bab III | 8. |
| 9 | 07 Mei 2021 | Konsultasi Integrasi Agama Bab III | 9. |
| 10 | 09 Juni 2021 | Revisi Bab III | 10. |
| 11 | 23 Juni 2021 | Revisi Bab III | 11. |
| 12 | 30 Juni 2021 | Revisi Bab III | 12. |
| 13 | 13 Juli 2021 | Revisi Integrasi Agama Bab III | 13. |
| 14 | 28 Juli 2021 | Revisi Bab III | 14. |
| 15 | 13 Agustus 2021 | Revisi Integrasi Agama Bab III | 15. |
| 16 | 15 September 2021 | Revisi Bab III dan Konsultasi Pembuktian Bab III | 16. |
| 17 | 27 September 2021 | Revisi Pembuktian Bab III | 17. |
| 18 | 06 Oktober 2021 | Revisi Bab IV | 18. |
| 19 | 29 Oktober 2021 | ACC Sidang Pembimbing I | 19. |

| | | | |
|----|-----------------|--------------------------|----|
| 20 | 29 Oktober 2021 | ACC Sidang Pembimbing II | 20 |
|----|-----------------|--------------------------|----|



Malang, 17 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005