SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HOLDER PADA RUANG LEBESGUE DENGAN VARIABEL EKSPONEN

SKRIPSI

OLEH
MOHAMAD ABDUL BA'IS
NIM. 17610007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HOLDER PADA RUANG LEBESGUE DENGAN VARIABEL EKSPONEN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memeuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mohamad Abdul Ba'is
NIM. 17610007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HOLDER PADA RUANG LEBESGUE DENGAN VARIABEL EKSPONEN

SKRIPSI

Oleh
Mohamad Abdul Ba'is
NIM. 17610007

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 30 November 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M. Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 198004292006041003	NIDT. 19760722018020122 22

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HOLDER PADA RUANG LEBESGUE DENGAN VARIABEL EKSPONEN

SKRIPSI

Oleh
Mohamad Abdul Ba'is
NIM. 17610007

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 15 Desember 2021

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Ketua Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si.	....
Sekertaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji	: Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika,

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005

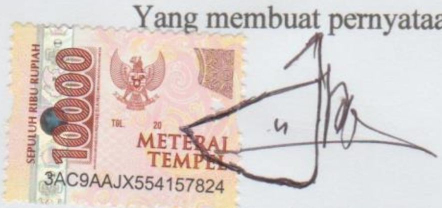
KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mohamad Abdul Ba'is
NIM	: 17610007
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul skrispi	: Syarat Cukup Ketaksamaan Holder pada Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, keduali dengan mencantumkan sumber cuplikan atau daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 November 2021
Yang membuat pernyataan,



Mohamad Abdul Ba'is,
NIM. 17610007

MOTTO

"Hiduplah bermanfaat agar bermartabat"

خَيْرُ الناسِ أَنفَعُهُم لِلنَّاسِ

"Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain"

(Hadits Riwayat Ath-Thabrani)

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Zaenal Mustofa dan Ibu Kunyati tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, materi dan kasih sayang yang tak ternilai, serta kakak tercinta Sayyidati Novita yang selalu menjadi panutan dan partner terbaik dalam hidup penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Syarat Cukup Ketaksamaan Holder pada Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen dan Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta Salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak menerima bimbingan, masukan, dan arahan dari berbagai pihak. Oleh Karena itu melalui halaman ini penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H.M. Zainudin, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M. Si., selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Erna Herawati, M. Pd. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
6. Prof. Dr. Turmudi, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan arahan dan motivasi kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dan pengalaman yang luar biasa selama proses perkuliahan.Segenap keluarga terutama Ayah dan Ibu yang sudah memberikan dukungan doa dan lainnya.

8. Bapak dan Ibu serta Kakak tercinta yang serlalu memeberikan do’a semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017 yang selalu memberi .dukungan dan semangat kepada penulis.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 20 Desember 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan Riil
$\mathbb{R}^n$	: Himpunan bilangan Riil berdimensi n
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan Asli
$x \in \mathbb{R}$	: x anggota $\mathbb{R}$
$f(x)$	: Fungsi terhadap x
$f^{-1}(x)$	: Invers fungsi terhadap x
$\forall x$	: Untuk setiap unsur x
$\exists x$	: Terdapat unsur x
$\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$	: Himpunan yang terdiri atas $f_1, f_2, \cdots, f_n$
χ	: Fungsi karakteristik
$\lVert\cdot\rVert$	: Norm
$\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$	: Irisan $a_1 \cap a_2 \cap \cdots$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$	: Gabungan $a_1 \cup a_2 \cup \cdots$
$B(\alpha, r)$	: Bola buka dengan pusat α dan jari-jari r
sup	: Batas atas terkecil
inf	: Batas bawah terbesar
$L^{p(\cdot)}$	: Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen

$wL^{p(\cdot)}$	: Ruang Lebesgue Lemah dengan Variabel Eksponen
$\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$	: Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen
$w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$	: Ruang Morrey Lemah dengan Variabel Eksponen
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	: Fungsi pada himpunan bilangan Riil berdimensi n

ABSTRAK

Ba'is, Mohamad Abdul. 2021. **Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M. Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Ketaksamaan Hölder, Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen, Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen, Syarat Cukup

Ketaksamaan Hölder merupakan ketaksamaan dasar yang ada di analisis fungsional.Ketaksamaan Hölder banyak digunakan untuk membuktikan ketaksamaan lain. Pada penelitian ini dilakukan pengembangan pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen. Ketaksamaan Hölder yang digunakan adalah Ketaksamaan Hölder integral karena ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen merupakan ruang fungsi. Penelitian ini menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen sesuai dengan norm fungsi dan karakteristiknya.

ABSTRACT

Ba'is, Mohamad Abdul. 2021. **The Sufficient Conditions of Hölder Inequality in Lebesgue Spaces with Variable Exponent.** Thesis. Mathematics Study Program, Science and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M. Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Hölder Inequality, Lebesgue Spaces with Variable Exponent, Morrey Spaces with Variable Exponent, Sufficient Condition

Hölder inequality is a basic inequality in functional analysis. The inequality is used for proofing other inequalities. In this research, the development of the application of the Hölder inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent and Morrey spaces with variable exponent is done. The integral Hölder inequality is used because the Lebesgue spaces with variable exponent and Morrey spaces with variable exponent is a function space. This research shows the sufficient condition of Hölder inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent and the Morrey spaces with variable exponent according to the norm of the function and its characteristics.

مخلص

الباعث ,محمّد عبد .٢٠٢١.**شروط كافية عدم المساواة هولدير (Hölder) في فضاء ليبيسقي (Lebesgue) مع متغير الأس**. البحث العلمي. قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك ابراهيم الاسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (١) الدوكتور حير الرحمن, الماجستير. (٢) ايرنا هيراواتي, الماجستير.

الكلمات الرنيسية: عدم المساوة هولدير(Hölder), فضاء ليبيسقي(Lebesgue) مع متغير الأس, فضاء موري (Morrey) مع متغير الأس, شروط كافية

عدم المساواة هولدير(Hölder) هي عدم المساواة أساسية في التحليل الوظيفي. في هذا البحث ، تم تطوير تطبيق هولدير (Hölder) متباينة في فضاء ليبيسقي (Lebesgue) باستخدام متغير الأس وفضاء موري (Morrey) مع متغير الأس. متباينة هولدير(Hölder) المستخدمة هي متباينة هولدير(Hölder) المتكاملة لأن مساحة ليبيسقي (Lebesgue) مع المتغير الأس ومساحة موري مع متغير الأس هي مسافات دالة. يوضح هذا البحث الشرط الكافي لعدم مساواة هولدر(Hölder) في مساحة ليبيسقي(Lebesgue) مع متغير الأس وفضاء موري (Morrey) مع متغير الأس حسب معيار الوظيفة وخصائصها.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan disiplin ilmu yang paling awal berkembang dan terkenal (Krantz, 2006). Ilmu matematika pada saat ini berkembang sangat pesat. Perkembangannya sudah sejak lama sekitar 4000 tahun lalu. Salah satu cabang ilmu matematika yang termasuk induk dari ilmu matematika adalah bidang analisis. Bidang analisis hingga saat ini mengalami perkembangan yang sangat pesat.

Salah satu ruang dalam analisis yang memiliki peran penting yang sering dibahas adalah ruang Lebesgue atau dikenal dengan simbol L^p. Ruang lebesgue merupakan ruang Banach di mana $1 \leq p \leq \infty$ (Besov, 2018). Ruang Lebesgue memiliki peranan penting dalam bidang ilmu di bidang analis terutama pada Analisis Fungsional, Teori Ukuran, Teori Integral, dan lainnya. Pada tahun 1991, Kovacik mengembangkan ruang Lebesgue dengan variabel eksponen atau bisa dilambangkan dengan $L^{p(\cdot)}$ (Kovacik dan Rakosnik, 1991).

C.B. Morrey memberikan perumuman dari ruang Lebesgue yaitu ruang Morrey atau dilambangkan dengan $\mathcal{M}_q^p$ dimana $1 \leq p \leq \infty$ (Morrey, 1938). Dalam perkembangannya ruang Morrey dikembangkan oleh Almeida di mana $1 < q(\cdot) < \infty$ dan $p(\cdot)$ pada $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ yang dikenal dengan ruang Morrey dengan Variabel Eksponen yang dilambangkan dengan $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$ dan $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$ sebagai ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen.

Pada bidang analisis terdapat beberapa ketaksamaan dasar yang sering dipakai dalam sebuah penelitian. Banyak sekali ketaksamaan yang bisa dibahas dalam bidang analisis. Salah satu ketaksamaan yang ada pada bidang analisis adalah Ketaksamaan Hölder. Ketaksamaan Hölder pertama kali diperkenalkan Leonard James Rogers pada tahun 1888 dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 (Y. Li dan Zhao, 2018). Ketaksamaan Hölder sendiri merupakan salah satu ketaksamaan yang digunakan untuk membuktikan ketaksamaan-ketaksamaan lain bidang analisis.

Pengaplikasian pertama pada ketaksamaan Hölder adalah di ruang Lebesgue menggunakan Hölder konjugat sebagai syarat cukup untuk membuktikannya. Setelah berjalannya waktu banyak pengembangan-pengembangan yang dilakukan oleh para peneliti. Salah satunya adalah Ifronika (2018) yang mengaplikasikan ketaksamaan Hölder di ruang Morrey di mana pada penelitian ini peneliti menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu membuktikannya (Ifronika dkk., 2018).

Ilmuwan matemtaika diciptakan oleh Allah untuk memperluas ilmu di bidang Matematika. Ilmuwan Matematika seperti: CB Morrey, Ifronika, Jingshi Xu dan Xiaodi yang terus melakukan perkembangan ilmu di bidang matematika. Sesuai dengan kalam Allah SWT pada surat Al-Ghasiyah ayat 17-20 yaitu:

اَفَلاَيَنْظُرُوْنَ اِلَى الاِبِلِ كَيْفَ خُلِقَتْ(١٧) وَإِلَى السَّمَآءِ كَيْفَ رُفِعَتْ)(١٨) وَإِلَى الْجِبَالِ كَيْفَ نُصِبَتْ
(١٩) وَإِلَى لْأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ (٢٠)

"Maka tidaklah mereka memperhatikan unta, bagaimana diciptakan? Dan langit, bagaimana ditinggikan? Dan gunung-gunung, bagaimana ditegakkan? Dan bumi bagaimana dihamparkan?"

Pada ayat ini menjelaskan bahwa pertanyaan sindiran yang dilakukan oleh Allah kepada orang-orang yang kafir yang tidak berfikir dan memperhatikan kekuasaan Allah di mana yang dimaksud perhatian adalah perhatian yang dibarengi dengan keinginan mengambil pelajaran dari ciptaan Allah. Pertanyaan ini bermaksud agar selalu berfikir dan mencari tau terhadap ilmu yang baru diketahui sebelumnya. Menurut Mustafa al Maraghi Surat Al Ghasyiyah turun di Makkah setelah surat Adz-Dzariyat sehingga tergolong kelompok surat Makiyah. Ayat ini diturunkan setelah turun ayat tertang siksaan neraka dan nikmat surga di awal surat Al Ghosyiyah, orang-orang kafir takjub dan menganggap aneh hal itu, maka Allah SWT menurunkan ayat lanjutannya yang menyuruh memperhatikan benda-benda di alam sekitar agar memahami kebenatan akhir nanti (Tafsir Al-Maraghi).

Pada surat Al-Ghasiyah ayat 17-20 menekankan pada pertanyaaan yang diberikan oleh Allah kepada manusia di mana kita harus berfikir dan mengembangkan ilmu. Pengamalan dalam kehidupan saat ini adalah kita harus selalu mengembangkan ilmu pengetahuan terutama pada bidang analisis matematika. Sehingga berdasarkan paparan di atas dan berdasarkan pengalaman surat Al-Ghasiyah ayat 17-20, selanjutnya akan dikembangkan Ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen. Pada penelitian sebelumnya telah dibahas pengaplikasian Ketaksamaan Holder di ruang Morrey oleh Ifronika (2018). Penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian sebelumnya, untuk mengaplikasian Ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen sesuai dengan masing-masing definisinya. Pada penelitian ini akan ditunjukkan syarat cukup ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas pada penelitian ini berdasarkan latar belakang yaitu bagaimana syarat cukup ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang dibahas pada penelitian ini berdasarkan rumusan masalah yaitu untuk mengetahui syarat cukup ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diharapkan memberikan ilmu baru yang berkaitan dengan syarat cukup Ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini membuktikan bahwa Lebesgue dengan variabel eksponen $L^{p(\cdot)}$, ruang Morrey dengan variabel eksponen $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$ adalah ruang banach dan Lebesgue lemah dengan variabel eksponen $wL^{p(\cdot)}$, ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$ adalah ruang kuasi-banach. Selanjutnya akan menunjukkan syarat cukup berlakunya ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur (literature study) atau kepustakaan. Metode ini berdasarkan pada informasi yang diperoleh pada buku, jurnal, artikel dan sumber-sumber lain yang berkaitan dengan rumusan masalah. Kegiatan yang dilakukan meliputi pengumpulan data kepustakaan, membaca dan menelaah, serta menganalisa dan mengolah bahan penelitian. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk membuktikan syarat cukupt ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen beserta ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen, ruang Morrey dengan variabel eksponen beserta ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah ruang Banach dan raung Lebesgue lemah dengan variabel eksponen adalah ruang-ruang kuasi-Banach, ruang Morrey dengan variabel eksponen adalah raung Banach dan ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen adalah ruang kuasi-Banach.
2. Menunjukkan keberlakuan syarat cukup ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen beserta ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen, ruang Morrey dengan variabel eksponen beserta ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen menggunakan definisi norm pada ruang-ruang tersebut.
3. Menarik kesimpulan atas hasil penelitian

1.7 Sistematika Penulisan

Sistem kepenulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada Bab I Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada Bab II membahas kajian teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian pustaka dalam penelitian ini meliputi: fungsi terukur, ketaksamaan Holder, ruang metrik, ruang vektor, ruang bernorma, ruang Banach, ruang fungsi, serta kajian keislaman yang berkaitan tentang perintah Allah untuk pengembangan ilmu di bidang analisis.

Bab III Pembahasan

Bab III ini berisi bukti-bukti teorema Ketaksamaan Holder pada ruang Lebesgue berdasarkan kajian-kajian teorema yang sudah ada.

Bab IV Penutup

Bab IV berisi kesimpulan dan saran dari penelitian.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ukuran Luar

Konsep ukuran luar berangkat dari konsep ukuran, di mana panjang $l(I)$ dari suatu interval I didefinisikan sebagai selisih dari titik-titik ujung I jika I dibatasi, dan ∞ jika I tidak dibatasi. Panjang interval adalah contoh dari fungsi himpunan, yaitu fungsi yang memetakan setiap himpunan di koleksi himpunan ke bilangan Riil yang diperluas ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Pada pembahasan berikutnya akan dijelaskan koleksi himpunan yang disebut sebagai himpunan yang terukur Lebesgue dan fungsi himpunan untuk koleksi ini yang disebut dengan ukuran Lebesgue yang dinotasikan dengan m. Fungsi himpunan m memiliki tiga sifat berikut (Royden dan Fitzpatrick, 2010).

1. Ukuran suatu interval adalah panjangnya. Setiap interval I tak kosong terukur Lebesgue dan
$$m(I) = l(I)$$
2. Ukuran adalah *translation invariant*. Jika E adalah ukuran Lebesgue dan y adalah sembarang bilangan, maka translasi dari E dengan y, $E + y = \{x + y | x \in E\}$ adalah terukur Lebesgue, maka
$$m(E + y) = m(E)$$
3. Ukuran dapat dijumlahkan terukur (*countably additivity)* atas gabungan himpunan-himpunan yang saling lepas dan terhitung. Jika $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ koleksi himpunan terukur Lebesgue yang saling lepas, maka

$$\boldsymbol{m}^*(\cup_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{E_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{m}^*(\boldsymbol{E_k}) \tag{2.1}$$

2.2 Himpunan Terukur

Himpunan terukur oleh Royden dan Fitzpatrick pada tahun 2010 sebagai berikut.

Definisi 2.2 *Suatu himpunan E dikatakan terukur jika untuk sebarang himpunan A memenuhi*

$$\boldsymbol{m}^*(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}^*(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{m}^*(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E^C}) \tag{2.2}$$

di mana m^**merupakan ukuran luar.*

2.3 Fungsi Terukur

Fungsi yang terukur Lebesgue pada $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ adalah fungsi yang memenuhi proporsi berikut.

Proposisi 2.3 (*Royden dan Fitzpatrick, 2010) Misalkan fungsi f adalah fungsi terukur pada domain E, sehingga pernyataan dibawah ini adalah ekuivalen :*

1. *Untuk semua c* $\in \mathbb{R}$*, himpunan* $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ *terukur*
2. *Untuk semua c* $\in \mathbb{R}$*, himpunan* $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ *terukur*
3. *Untuk semua c* $\in \mathbb{R}$*, himpunan* $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ *terukur*
4. *Untuk semua c* $\in \mathbb{R}$*, himpunan* $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ *terukur*
5. *Sifat-sifat tersebut berarti bahwa untuk setiap c* $\in \mathbb{R}$ *maka,*

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\} \qquad \boldsymbol{terukur} \tag{2.3}$$

Bukti. Himpunan (1) dan (4) saling komplemen di E, seperti halnya himpunan (2) dan (3). Komplemen suatu hmpunan terukur adalah terukur, maka (1) dan (4) ekuivalen, seperti halnya (2) dan (3). Jadicukup ditunjukkan bahwa (1) ↔ (2) yang sama halnya dengan (3) ↔ (4).

1. Akan ditunjukkan (1) →(2).

   Perhatikan bahwa,

$$\{x \in E \mid f(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E \middle| f(x) > c - \frac{1}{k}\right\}$$

   karena $c - \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, maka $\{x \in E | f(x) > c\}$ terukur. Selanjutnya irisannya juga terukur. Jadi, $\{x \in E | f(x) \geq c\}$ terukur.

2. Akan ditunjukkan (2) →(1).

   Perhatikan bahwa,

$$\{x \in E \mid f(x) > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E \middle| f(x) \geq c + \frac{1}{k}\right\}$$

   karena $c + \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, maka $\{x \in E | f(x) \geq c\}$ terukur. Selanjutngabungannya juga terukur. Jadi, $\{x \in E | f(x) > c\}$ terukur.

Pernyataan (1) - (4) ekuivalen, sehingga keempat pernyataan tersebut memenuhi. Jika $c \in \mathbb{R}$, $\{x \in E | f(x) = c\} = \{x \in E | f(x) \geq c\} \cap \{x \in E | f(x) \leq c\}$, maka $f^{-1}(c)$ terukur karena irisan dari dua himpunan terukur. Sedangkan jika $c = \infty$

$$\{x \in E \mid f(x) = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E | f(x) > k\}$$

maka $f^{-1}(c)$ terukur karena irisan dari himpunan terukur.

2.4 Ketaksamaan Hölder

Sebelumnya akan ditunjukkan terlebih dahulu definisi yang berkaitan dengan bilangan konjugat.

Definisi 2.4. *(Royden dan Fitzpatrick, 2010) Konjugat dari suatu bilangan* $p \in (1,\infty)$ *adalah* $q = \frac{p}{p-1}$ *dimana bilangan tunggal* $q \in (1,\infty)$ *berlaku*

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1} \tag{2.4}$$

konjugat dari 1 didefinisikan ∞ dan konjugat dari ∞ didefinisikan 1.

Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu ketaksamaan di bidang analisis fungsional. Pada dasarnya, ketaksamaan Hölder memiliki beragam kondisi, namun dalam penelitian ini digunakan ketaksamaan Hölder integral. Ketaksamaan Hölder sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 (Y. Li dan Zhao, 2018).

Proposisi 2.5. *(Kantorovich dan Akilov, 1982) Misalkan* $f(x)$ *dan* $g(x)$ *merupakan fungsi terukur pada himpunan terukur* (X,μ). *Maka diperoleh ketaksamaan*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.5}$$

di mana $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Bukti. Asumsikan bahwa

$$0<\alpha^p=\int_X |f(x)|^p d\mu<\infty, \qquad 0<\beta^q=\int_X |g(x)|^q d\mu<\infty$$

karena ketaksamaan tersebut akan terbukti trivial jika salah satu dari integral tersebut bernilai nol atau tak hingga. Misalkan

$$f'(x)=\frac{f(x)}{\alpha}, \qquad g'(x)=\frac{g(x)}{\beta}$$

untuk setiap $x \in X$ diperoleh $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (bilangan konjugat), dan diperoleh

$$|f'(x)g'(x)| \leq \frac{|f'(x)|^p}{p}+\frac{|g'(x)|^q}{q}$$

di mana ketika diintegralkan diperoleh

$$\int_X |f'(x)g'(x)|d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X |f'(x)|^p d\mu+\frac{1}{q}\int_X |f(x)|^p d\mu$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

sehingga

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \alpha\beta$$

2.5 Ruang Metrik

Ruang metrik didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.6. *(Muscat, 2014) Suatu himpunan tak kosong X dengan pemetaan $X \times X \rightarrow R$ disebut ruang metrik jika pemetaan d memenuhi:*

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ $(simetris)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $(ketaksamaan\ segitiga)$

untuk setiap $x,y,z \in X$

Fungsi jarak memberikan gambaran tentang lingkungan dari suatu titik. Diberikan titik a dan bilangan $r > 0$, kita dapat membedakan antara titik-titik yang dekat dengannya, memenuhi $d(x, a) < r$, dan yang tidak memen

Definisi 2.7. *(Muscat, 2014) Bola buka dengan pusat a dan jari-jari $r > 0$ adalah himpunan*

$$\boldsymbol{B_r(a)} \coloneqq \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}: \boldsymbol{d}(x,a) < \boldsymbol{r} \tag{2.6}$$

2.6 Ruang Vektor

Ruang vektor adalah struktur matematika yang dibentuk oleh sekumpulan vektor, yaitu objek yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan suatu bilangan, yang disebut skalar. Operasi penjumlahan dan perkalian vektor harus memenuhi persyaratan tertentu yang dinamakan aksioma. Pada tahun 2014 Anton dan Rorres mendefinisikan ruang vektor sebagai berikut.

Definisi 2.8 (Anton dan Rorres, 2014) *Misalkan X adalah himpunan tak kosong di lapangan $\mathbb{F}$ dengan dua operasi yang didefinisikan sebagai operasi penjumlahan vektor $+\colon\ X^2 \to X$ yang memenuhi sifat asosiatif, komutatif, aksioma nol dan invers, dan operasi perkalian skalar $\mathbb{F} \times X \to X$ yang memenuhi masing-masing aturan distributif untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*

1. *Untuk setiap $x, y \in X$ maka $x + y \in X$.*
2. $x + y = y + x$; $\forall x, y \in X$.
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$; $\forall x, y, z \in X$.
4. *Terdapat vektor tunggal 0, dinamakan vektor nol sedemikian sehingga $0 + x = x + 0 = x; \forall x \in X$.*
5. *Untuk setiap $x \in X$, terdapat vektor tunggal$-x$ yang disebut negatif dari x sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
6. *Jika $x \in X$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ maka $\alpha \in \mathbb{R}$ juga di X.*
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
9. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
10. $1x = x$

Aksioma 1-5 merupakan sifat grup komutatif terhadap penjumlahan sedangkan aksima 6-10 merupakan sifat dengan operasi perkalian skalar.

2.7 Ruang Bernorma

Setelah membahas tentang ruang vektor selanjutnya akan dibahas ruang bernorma. Ruang bernorma didefinisikan oleh Rynne dan Youngson (2000) sebagai berikut.

Definisi 2.9 *Misalkan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Suatu norma di X merupakan fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x,y \in X$ dan $\alpha \in F$, memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:*

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Ketaksamaan Segitiga)*

Ruang vektor X yang memiliki norm disebut ruang vektor bernorma atau ruang bernorma. Diantara salah satu contoh ruang bernorma adalah ruang Banach. Sedangkan (Kalton, 2003) mendefinisikan quasi-norm sebagai berikut.

Definisi 2.10 *(Kalton, 2003) Kuasi-norm $\|\cdot\|$ pada ruang vektor X atas lapangan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ merupakan suatu pemetaan $X \to [0,\infty)$ dengan $x,y \in X$ dan α sebarang scalar di K yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3. *Terdapat konstanta* $\mathrm{k} \geq 1$ *sedemikian sehingga*

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \mathrm{k}(\|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|)$$

2.8 Ruang Banach

Menurut Royden dan Fitzpatrick (2010), definisi ruang Banach berasal dari ruang bernorma berikut:

Definisi 2.11 *Suatu barisan $\{f_n\}$ merupakan ruang linier X dengan norma $\|\cdot\|$ disebut Cauchy di X dengan syarat untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk setiap $m,n \geq N$ berlaku*

$$\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \tag{2.7}$$

Ruang bernorma X disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke fungsi di X. *Ruang bernorma yang lengkap ini disebut ruang Banach.*

Definisi 2.12. *(Royden dan Fitzpatrick, 2010) Suatu barisan* (a_n) *diruang metrik* (A,f) *disebut barisan Cauchy jika untuk setiap* $\epsilon > 0$, *terdapat indeks N di mana*

$$jika\ n,m \geq N,\ maka\ f(a_n,a_m) < \epsilon$$

Suatu ruang metrik A dikatakan Lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy di A konvergen ke satu titik di A

Pada tahun 2008 Wu dan Li mendefinisikan ruang Kuasi-Banach sebagai berikut.

Definisi 2.13. *Jika* $||\cdot||$ *adalah kuasi-norm di ruang vektor X berlaku ruang metrik lengkap, maka ruang vektor X disebut ruang kuasi-Banach.*

2.9 Ruang Fungsi

Ruang fungsi merupakan ruang vektor dengan unsur - unsur di dalamnya berupa fungsi yang kontinu. Banyak penelitian yang dilakukan pada ruang fungsi yang mengakibatkan banyak definisi baru yang dihasilkan. Ruang fungsi merupakan ruang Banach dengan kondisi yang berbeda pada tiap ruang fungsi dan bisa dikombinasi dengan variabel eksponen. Ruang fungsi memiliki memiliki kondisi lemah pada masing-masing ruang fungsi.

2.9.1 Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen

Sebelumnya terlebih dahulu ditunjukkan definisi dari ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue merupakan perumuman dari ruang vektor yang memiliki norma. Ruang Lebesgue didefinisikan oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) sebagai berikut.

Definisi 2.14. *(Royden dan Fitzpatrick, 2010) Untuk* $\mathbb{R}^n$ *himpunan terukur,* $1 \leq p \leq \infty$*, dan suatu fungsi* f *di* $\mathbb{R}^n$ *didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

untuk sebarang fungsi terukur Lebesgue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa ruang Lebesgue adalah ruang bernorma.

Ambil sebarang $f(x), g(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$

1. $\|f\|_{L^p} \geq 0$

   Perhatikan bahwa

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Berdasarkan definisi harga mutlak, maka $\|f\|_{L^p} \geq 0$

2. $\|f\|_{L^p} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   $(\to)$ jika $\|f\|_{L^p} = 0$

$$\|f\|_{L^p} = 0$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = 0^p$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 0$$

   Karena $f(x) \in \mathbb{R}$ dan dan $|f(x)| \geq 0$, maka kemungkinan $|f(x)| = 0$ atau $|f(x)| > 0$ karena $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 0$ maka yang memenuhi pasti $|f(x)| = 0$ jadi

$$f(x) = 0$$

$(\leftarrow)$ jika $f = 0$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |0|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} 0\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 0^{\frac{1}{p}}$$

$$= 0$$

3. $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}; \forall \alpha \mathbb{R}^n$

$$\|\alpha f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha|^p |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|\alpha|^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \|f\|_{L^p}$$

4. $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ (Ketaksamaan Minkowski)

$$\|f + g\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p + |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right) + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx \right) \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Dari pembuktian tersebut, diperoleh bahwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya. Sebelumnya akan ditunjukkan terlebih dahulu lemma yang digunakan untuk membuktikan kelengkapan dari $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.14. *(Kalton, 2003) Ruang bernorma X lengkap jika dan hanya jika setiap barisan$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke X ketika $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$*

Bukti. Pertama, asumsikan X lengkap dengan $|| \cdot ||$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$. Untuk $n \in \mathbb{N}$, misalkan $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Kemudian $||S_m - S_n|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||x_k||$ untuk setiap $m. n \in \mathbb{N}$ maka $(S_n)_{n=1}^{\infty}$barisan Cauchy. Karena X lengkap maka barisab $\sum_{n=1}^{\infty} x_j$ konvergen.

Sebaliknya, asumsikan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ketika $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$. Misalkan $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy di X. Ambil barisan monoton naik $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dari bilangan asli sedemikian sehingga

$$||y_p - y_q|| < \frac{1}{2^k}. \ ketika \ p > q \geq n_k$$

Misalkan $y_{n_0} = 0$. Maka

$$y_{n_k} = \sum_{j=1}^{k} \left(y_{n_j} - y_{n_{j-1}} \right). \ k \in \mathbb{N}$$

Maka dari itu, diperoleh $\left\|y_{n_j} - y_{n_{j-1}}\right\| < \frac{1}{2^{j-1}}. \forall j \geq 2$. sehingga diperoleh bahwa $\sum_{j=1}^{k} \left\|y_{n_j} - y_{n_{j-1}}\right\| < \infty$. Berarti bahwa subbaris $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ konvergen ke beberapa unsur di X. Misalkan y adalah nilai limit dari subbarisan $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$.

Misalkan diberikan $\epsilon > 0$, dipilih $K \in \mathbb{N}$ cukup besar sehingga $\left\|y_{n_K} - y\right\| < \frac{\epsilon}{2}$ dan $\frac{1}{2^K} < \frac{\epsilon}{2}$. Berdasarkan definisi, jika $> n_K$, maka $\left\|y_m - y_{n_K}\right\| \leq \frac{1}{2^K}$. Maka

$$\|y_m - y\| \leq \left\|y_m - y_{n_K}\right\| + \left\|y_{n_K} - y\right\| < \frac{1}{2^K} + \frac{\epsilon}{2}$$

di mana $m > n_K$. Oleh karena itu, $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ adalah barisan konvergen.

Lemma 2.15. *(Royden dan Fitzpatrick, 2010) Misalkan* $\{f_n\}$ *barisan dari fungsi terukur tak negatif di* $\mathbb{R}^n$.

$$Jika\ \{f_n\} \to f\ hampir\ dimana - mana\ di\ E.$$

$$maka \int_{\mathbb{R}^n} f \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_n \tag{2.8}$$

Bukti. Fungsi f tak negatif dan terukur karena terdapat masing-masing titik batas pada suatu fungsi dari barisan tersebut. Untuk menunjukkan ketaksamaan lemma tersebut, cukup dan perlu untuk menunjukkan bahwa jika h fungsi terbatas dan terukur di mana $0 \leq h \leq f$ di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_n$$

Misalkan h suatu fungsi. Pilih $M \geq 0$ di mana $|h| \leq M$ di $\mathbb{R}^n$. Didefinisikan $E_0 = \{x \in E | h(x) \neq 0\}$. Maka $m(E_0) < \infty$. Misalkan n bilangan asli, fungsi h_n di E didefinisikan sebagai

$$h_n = \min\{h. f_n\} \quad di \ \mathbb{R}^n$$

Perhatikan bahwa fungsi h_n terukur, yaitu

$$0 \leq h_n \leq M \ di \ E_0 \ dan \ h_n = 0 \ di \ \mathbb{R}^n \sim E_0$$

Selanjutnya, untuk setiap x di $\mathbb{R}^n$, karena $h(x) \ \leq \ f(x)$ dan

$$\{f_n(x)\} \to f(x). \{h_n(x)\} \to h(x)$$

Berdasarkan teorema konvergen terbatas yang dibahas oleh Thomson (2020) diaplikasikan pada barisan terbatas seragam yang dibatasi oleh $h_n$di $\mathbb{R}^n \sim E_0$ bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n = \lim_{n\to\infty} \int_{E_0} h_n = \int_{E_0} h = \int_{\mathbb{R}^n} h$$

Akan tetapi, $\forall n. h_n \ \leq \ f_n$ di $\mathbb{R}^n$, oleh karena itu dengan definisi integral f_n atas $\mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} h_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_n$. Maka

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n \leq \lim\inf \int_{\mathbb{R}^n} f_n$$

Proposisi 2.16. (*Bowers dan Kalton, 2014) $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach.*

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah lengkap, maka akan menggunakan Lemma 2.13 sebagai berikut.

Asumsikan $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ adalah fungsi barisan di L^p $(\mathbb{R}^n)$ sedemikian hingga $\sum_{k=1}^{\infty} ||fk||_{L^p} < \infty$. Misalkan $M = \sum_{k=1}^{\infty} \left||fk|\right|_{L^p}$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $g_n(\omega a) = \sum_{k=1}^{\infty} \ |f_k(\omega)|$ untuk setiap $\omega \ \in \mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah fungsi barisan terukur negatif dan $g_n \ \leq \ g_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Lemma 2.14, diperoleh

$$\int \ lim\ inf_{n\to\infty} |gn|^p \ dx \ \leq \lim\inf_{n\to\infty} \int \ |gn|^p \ dx \ = \lim\inf_{n\to\infty} \left||g_n|\right|_{L^p}$$

$$\leq \ M^p < \ \infty$$

Berarti bahwa $\lim\inf\limits_{n\to\infty} |g_n|^p dx \ < \ \infty$ terukur hampir di mana-mana, dan akibatnya diperoleh

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p = \lim\inf_{n\to\infty}|g_n|^p < \infty$$

Sehingga fungsi $g = \sum_{k=1}^{\infty}|fk|$ ada dan $\|g\|^p \leq M$.

Selanjutnya misalkan $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, berarti bahwa f ada dan terukur dimana-mana, karena $|f(\omega)| \leq g(\omega)$ di mana $\forall\omega \in \mathbb{R}^n$, Perhatikan juga bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(\omega)\right| \leq g(\omega). \omega \in \mathbb{R}^n$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa $\sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergen ke f di L^p.

Pada ruang Lebesgue juga dikembang oleh Amalia (2018) menjadi ruang Lebesgue dengan variabel eksponen yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.17. *Misalkan* $1 \leq p(\cdot) < \infty$, *Ruang Lebesgue dengan variabel eksponen* $L^{p(\cdot)}$ $(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai*

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^{p(\cdot)}: \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \infty\right\} \tag{2.9}$$

di mana normnya didefinisikan sebagai

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(\cdot)}dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \tag{2.10}$$

Masing-masing ruang fungsi memiliki kondisi lemahnya, begitu juga dengan ruang Lebesgue sebagai berikut.

Definisi 2.18. *(Mu'tazili, 2019) Misalkan* $1 \leq p < \infty$. *Ruang Lebesgue lemah* wL^p $(\mathbb{R}^n)$ *adalah himpunan semua fungsi terukur* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sehingga*

$$\|f\|_{wL^p} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.11}$$

dengan $|x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda|$ *menyatakan ukuran Lebesgue dari* $x \in \mathbb{R}^n :$ $|f(x)| > \lambda$.

Pada tahun 2014, Limanta telah membuktikan bahwa ruang Lebesgue Lemah merupakan ruang kuasi-Banach dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.19. *(Limanta, 2014) wL^p merupakan ruang kuasi-Banach.*

Bukti. Ambil sebarang $f(x), g(x) \in wL^p(\mathbb{R}^n)$

1. $\|f\|_{wL^p} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   ($\rightarrow$) jika $\|f\|_{wL^p} = 0$

$$\|f\|_{wL^p} = 0$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\left(\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}\right)^p = 0^p$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = 0$$

   Karena $f(x) \in \mathbb{R}$ dan dan $|f(x)| \geq 0$, maka kemungkinan $|f(x)| = 0$ atau $|f(x)| > 0$ karena $\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = 0$ maka yang memenuhi pasti $|f(x)| = 0$ jadi

$$f(x) = 0$$

   ($\leftarrow$) jika $f = 0$

$$\begin{aligned} \|f\|_{wL^p} &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |0| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |0|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\|\alpha f\|_{wL^p} = |\alpha|\|f\|_{wL^p}; \forall\alpha \in \mathbb{R}^n$

Jika α = 0, maka jelas bahwa $\|\alpha f\|_{wL^p} = |\alpha|\|f\|_{wL^p}$. Kemudian asumsikan $\alpha \neq 0$, maka diperoleh

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right|$$

berakibat

$$\|\alpha f\|_{wL^p} = \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

Ambil $\mu = \frac{\lambda}{|\alpha|}$ maka diperoleh

$$\|\alpha f\|_{wL^p} = \sup_{\lambda>0} |\alpha|\mu\, |\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \mu\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \mu\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha|\|f\|_{wL^p}$$

3. $\|f + g\|_{wL^p} \leq \|f\|_{wL^p} + \|g\|_{wL^p}$

Perhatikan bahwa

$$\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x) + g(x)| > \lambda\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

berakibat

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x) + g(x)| > \lambda\}| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

$$+ \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

sehingga

$$\lambda|\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x) + g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$+\lambda\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\lambda|\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)+g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq \left(\lambda\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$+\left(\lambda\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$\lambda^p|\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)+g(x)| > \lambda\}| \leq \lambda^p\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

$$+\lambda^p\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

maka diperoleh

$$\|f+g\|_{wL^p} \leq 2^p\left(\sup_{\lambda>0}\lambda^p\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|\right.$$

$$\left.+\sup_{\lambda>0}\lambda^p\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|\right)$$

$$= 2^p(\|f\|_{wL^p} + \|g\|_{wL^p})$$

Berdasarkan aksioma diatas, maka terbukti bahwa ruang Lebesgue lemah merupakan kuasi-norm. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa ruang Lebesgue lemah adalah ruang kuasi-Banach, maka harus dibuktikan terlebih dahulu kelengkapannya.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di wL^p $(\mathbb{R}^n)$. Kemudian asumsikan bahwa terdapat barisan konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1} - f_k\|\_(wL^p) \leq ak;\ \forall k \tag{2.12}$$

karena

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{j=n}^{n+k+1}\left[f_{j+1} - f_j\right];\forall n.k$$

maka

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leq \sum_{j=n}^{n+k+1} \|f_{j+1} - f_j\|_{wL^p}$$

$$\leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

misalkan $x \in wL^p$, maka

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j; \forall n. k$$

Barisan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy terhadap bilangan riil. Himpunan bilangan riil merupakan ruang yang lengkap. Misalkan limit dari $(f_n(x))$ adalah $f(x)$, maka untuk $k \rightarrow \infty$ diperoleh

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \text{ ; } \forall n. \forall x \in wL^p$$

Sehingga diperoleh bahwa (f_n) konvergen seragam ke $f(x)$. Karena $f(n)$ kontinu, maka berlaku juga pada f. Barisan Cauchy disebut konvergen jika terdapat barisan konvergen dan barisan Cauchy di wL^p memiliki subbarisan di mana persamaan (2.11) berlaku. Jadi, terbukti bahwa wL^p $(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang kuasi-Banach.

Seorang ilmuwan Shao dan Thao (2019) mengembangkan ruang Lebesgue lemah menjadi ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen sebagai berikut.

Definisi 2.20. *Misalkan* $1 \leq p(\cdot) < \infty$. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}$^$n)$. *Ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen* $wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}$^$n)$ *adalah himpunan semua fungsi terukur* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *sehingga*

$$\|f\|_{wL^{p(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} < \infty \tag{2.13}$$

dengan $|x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda|$ *menyatakan ukuran Lebesgue dari* $x \in \mathbb{R}^n :$ $|f(x)| > \lambda.$

2.9.1 Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen

Setelah mendefinisikan ruang Lebesgue dengan variabel eksponen selanjutnya akan ditunjukkan ruang Morrey dengan variabel eksponen. Akan tetapi, terlebih dahulu akan ditunjukkan definisi dari ruang Morrey. Berdasarkan Sawano ruang Morrey didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.21. *(Sawano dkk., 2020) Misalkan* $1 \leq p \leq q < \infty$, *Ruang Morrey* $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai,*

$$\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} < \infty\}$$

di mana Normnya didefinisikan sebagai,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a \in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dengan $B(a.r)$ *menotasikan bola buka berdimensi* n *dan berpusat di* $a \in \mathbb{R}^n$ *dengan jari-jari* $r > 0$ *, dan* $|B(a.r)|$ *menyatakan ukuran Lebesgue dari* $B(a.r)$

Selanjutnya akan ditunjukkan definisi ruang Morrey dengan variabel eksponen sebagai berikut

Definisi 2.22. *(Shao dan Tao, 2019) Misalkan* $1 \leq p(\cdot) \leq q(\cdot) < \infty$, $p(\cdot).q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *maka ruang Morrey dengan variabel eksponen* $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai,*

$$\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} < \infty\} \tag{2.14}$$

di mana normanya didefinisikan sebagai,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \tag{2.15}$$

Masing-masing ruang fungsi memiliki kondisi lemahnya, begitu juga dengan ruang Morrey dengan variabel eksponen. Sebelumnya akan terlebih dahulu ditunjukkan definisi ruang Morrey lemah sebagai berikut.

Definisi 2.24. *(Sawano dkk., 2020) Misalkan* $1 \le p \le q < \infty$, *Sawano mendefinisikan Ruang Morrey lemah* $w\mathcal{M}_q^p$ $(\mathbb{R}^n)$ *merupakan himpunan fungsi terukur* f *di* $\mathbb{R}^n$ *untuk* $\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} < \infty$ *di mana normanya didefinisikan sebagai,*

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma|\{x\in B(a.r): |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dengan $|\{x\in B(a.r): |f(x)|>\gamma\}|$ *menyatakan ukuran lebesgue dari* $\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan definisi ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen sebagai berikut

Definisi 2.25. *(Shao dan Tao, 2019) Misalkan* $1 \le p(\cdot) \le q(\cdot) < \infty$, $p(\cdot).q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *maka norm dari Ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen* $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai,*

$$\begin{aligned}\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma \\ |\{x\in B(a.r): |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} < \infty\end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $|\{x\in B(a.r): |f(x)|>\gamma\}|$ *menyatakan ukuran lebesgue dari* $\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}$.

2.10 Kajian Keislaman

Pada sub bab ini, akan dibahas bagaimana Al-Qur’an menjelaskan keluasan ilmu Allah yang tidak akan pernah habis. Keluasan ilmu Allah digambarkan di dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yaitu :

قُلْ لَّوْ كَانَ الْبَحْرُمِدَادًالِّكَلِمَاتِ رَبِّى لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ اَنْ تَنْفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّى وَلَوْجِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَادًا (١٠٩)

"Katakanlah (Muhammad), "Seandainya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, maka pasti habislah lautan itu sebelum selesai (penulisan) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu pula""

Ayat ini diturunkan berkenaan dengan orang-orang Yahudi yang menganggap bahwa mereka telah mendapatkan ilmu yang sangat banyak dengan sampainya kitab Taurat kepada mereka. Awalnya adalah ketika orang-orang Yahudi mendengar Q.S. Al-Isra' ayat 85 yang artinya *"Sedangkan kalian diberi pengetahuan hanya sedikit."* Ketika mereka mendengar ayat yang menyebutkan bahwa ilmu mereka masih sedikit, salah seorang dari kaum Yahudi menjawab, *“Kami telah mendapatkan ilmu yang sangat banyak, yaitu dengan diberikannya kitab Taurat kepada kami. Dan barang siapa telah diberi kitab Taurat, maka ia telah mendapatkan banyak kebaikan.”* Setelah itu diturunkanlah surat Al-Kahfi ayat 109 sebagai penegasan bahwa ilmu yang mereka peroleh masih sangat sedikit jika dibandingkan dengan ilmu yang dimiliki oleh Allah (Lubab an-Nuqul fi Asbab an-Nuzul).

Surat Al-Kahfi ayat 109 menunjukkan bahwa ilmu Allah sangat luas. Manusia diperintahkan agar selalu berfikir untuk mengembangkan ilmu yang sudah kita ketahui. Pengembangan ilmu ini adalah pada Ketaksamaan Hölder yang diaplikasikan di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen. Konsep perintah selalu berfikir dan pengembangan ilmu pengetahuan diperintahkan Allah pada surat Al-Ghasiyah ayat 17-20 yaitu :

اَفَلاَيَنْظُرُوْنَ اِلَى الاِبِلِ كَيْفَ خُلِقَتْ(١٧) وَإِلَى السَّمَآءِ كَيْفَ رُفِعَتْ)(١٨) وَإِلَى الْجِبَالِ كَيْفَ نُصِبَتْ
(١٩) وَإِلَى الْأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ (٢٠)

"Maka tidaklah mereka memperhatikan unta, bagaimana diciptakan? Dan langit, bagaimana ditinggikan? Dan gunung-gunung, bagaimana ditegakkan? Dan bumi bagaimana dihamparkan?"

Makna yang dapat diambil dari surat Al-Ghasiyah ayat 17-20 bahwa setiap ilmu yang diberikan oleh Allah itu sangat luas di mana kebanyakan manusia belum mengetahuinya. Sebagai contoh adalah Allah menciptakan unta, meninggikan langit, menegakkan gunung, dan menghamparkan bumi sebagai bentuk kekuasaannya. Tentu saat ini manusia tidak mengetahui tentang kekuasaan Allah tersebut. Akan tetapi Allah memperintahkan kita untuk berfikir dan memperhatikan dengan keinginan mengambil pelajaran dari peristiwa yang terjadi.

Menurut Tafsir Al-Mishbah bahwa Allah menyuruh untuk memperhatikan bukti kuasa Allah yang terbentang di alam raya ini, antara lain kepada unta yang menjadi kendaraan dan sumber pangan bagaimana diciptakan oleh Allah dengan sangat mengagumkan. Apakah mereka tidak merenungkan tentang langit yang demikian luas dan yang selalu disaksikan bagaimana ditinggikan tanpa ada yang menopangnya. Gunung-gunung yang demikian tegar dan yang biasa didaki bagaimana ia ditegakkan oleh Allah. Bumi sebagai tempat tinggal dan yang tercipat bulat bagaimana dihamparkan oleh Allah sehingga manusia bisa menempatinya (Tafsir Al-Mishbah).

Kesimpulan yang diperoleh adalah ilmu Allah sangat luas sehingga Allah memerintahkan untuk memperhatikan tentang kekuasaannya dan juga diperintahkan untuk terus mengkaji ilmu yang belum diketahui yang sebenarnya bisa dipelajari. Sama halnya dengan ilmu didalam matematika di mana Ketaksamaan Hölder dapat dikaji dan dikembangkan lebih dalam yang diaplikasikan pada ruang Lebesgue dengan variabel eksponen. Pengembangan ini sesuai dengan pengamalan surat Al-Ghasiyah ayat 17-20.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen

Sebelumnya akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah ruang Banach dan ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen adalah ruang kuasi-Banach.

Pertama akan ditunjukkan bahwa ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah ruang Banach. Di mana $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ harus memenuhi aksioma norm dengan kelengkapannya:

Bukti.

Misalkan $f.g \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

1. $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 0$

   Perhatikan bahwa

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

   Berdasarkan definisi harga mutlak, maka $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 0$

2. $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   $(\rightarrow)$ jika $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 0$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 0$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} = 0$$

$$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\right)^{p(\cdot)} = 0^{p(\cdot)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx = 0$$

Karena $f(x) \in \mathbb{R}$ dan dan $|f(x)| \geq 0$, maka kemungkinan $|f(x)| = 0$ atau $|f(x)| > 0$ karena $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 0$ maka yang memenuhi pasti $|f(x)| = 0$ jadi

$$f(x) = 0$$

($\leftarrow$) jika $f = 0$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |0|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} 0 dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= 0^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= 0$$

3. $\| \alpha f \|_{L^{p(\cdot)}} = |\alpha| \; \| f \|_{L^{p(\cdot)}}; \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\| \alpha f \|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha|^{p(\cdot)} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \left(|\alpha|^{p(\cdot)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= |\alpha|^{p(\cdot)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= |\alpha| \; \| f \|_{L^{p(\cdot)}}$$

4. $\| f + g \|_{L^{p(\cdot)}} \leq \| f \|_{L^{p(\cdot)}} + \| g \|_{L^{p(\cdot)}}$

$$\| f + g \|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|g(x)|^{p(\cdot)} + |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p(\cdot)} dx\right)\right]^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \| f \|_{L^{p(\cdot)}} + \| g \|_{L^{p(\cdot)}}$$

Dari pembuktian tersebut, diperoleh bahwa $L^{p(\cdot)}$ $(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $L^{p(\cdot)}$ $(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya dari $L^{p(\cdot)}$ $(\mathbb{R}^n)$.

Ambil sebarang barisan Cauchy (f_n) di $L^{p(\cdot)}$. Misalkan (f_{n_k}) merupakan sub barisan dari (f_n) dimana $n_1 < n_2 < \ldots$yang memenuhi

$$\| f_m - (f_{n_k}) \|_{L^{p(\cdot)}} < 2^{-k} \equiv \forall m \geq n_k$$

Definisikan, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$,

$$g_k = |f_{n_1}| + \sum_{t=1}^{k-1} |f_{n_{t+1}} - f_{n_t}|$$

Jelas bahwa

$\| g_k \|_{L^{p(\cdot)}} \leq \| f_{n1} \|_{L^{p(\cdot)}} + \sum_{t=1}^{k-1} ||f_{n_{t+1}} - f_{n_t} \|_{L^{p(\cdot)}} < \| f_{n1} \|_{L^{p(\cdot)}} + 1 < \infty$

Misalkan $g = \lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{t=1}^{\infty} |f_{n_{t+1}} - f_{n_t}|$. Berdasarkan Lemma 2.14 kita memperoleh $\| g \|_{L^{p(\cdot)}} \leq \| f_{n_1} \|_{L^{p(\cdot)}} + 1$. Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir dimana-mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{t=1}^{k-1} (f_{n_{t+1}}(x) - f_{n_t}(x))$$

Konvergen mutlak untuk hampir semua x. Didefinisikan jumlah pada deret diatas sebagai $f(x)$ untuk x dimana deret tersebut konvergen dan $f\ (x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_1} + \sum_{t=1}^{k-1} (f_{n_{t+1}} - f_{n_t}) = f_{n_k}$$

Maka kita mempunyai $f(x) = \lim_{t \to \infty} f_{n_t}(x)$ hampir dimana-mana. Maka cukup buktikan bahwa f adalah titik limit dari f_n. Ambil sebarang $\mu > 0.$ Karena (f_n) Cauchy, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m. n > N$ kita peroleh $\| f_m - f_n \|_{L^{p(\cdot)}} < \frac{\mu}{2}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \| f_n - f \|_{L^{p(\cdot)}} &= \| f_n + f_{n_k} + f_{n_k} - f \|_{L^{p(\cdot)}} \\ &\leq \| f_n - f_{n_k} \|_{L^{p(\cdot)}} + \| f_{n_k} - f \|_{L^{p(\cdot)}} \\ &< \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu \end{aligned}$$

Untuk setiap $n > N$. Hal ini membuktikan $f_n \to f$. Jadi $L^{p(\cdot)}\ (\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen adalah ruang kuasi-Banach sebagai berikut.

Bukti. Misalkan $f(x).\ g(x) \in w\ L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

1. $\| f \|_{wLp(\cdot)} = 0$, jika dan hanya jika $f = 0$

   $(\to)$ jika $\| f \|_{wLp(\cdot)} = 0$

$$\| f \|_{wLp(\cdot)} = 0$$

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} = 0$$

$$\left(\sup_{\lambda > 0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \right)^{p(\cdot)} = 0^{p(\cdot)}$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = 0$$

Karena $f(x)$ bernilai mutlak, maka jelas bahwa $f(x) = 0$

($\leftarrow$) jika $f(x) = 0$

$$\| f \|_{wLp(\cdot)} = \sup_{\lambda>0} \lambda \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{\lambda>0} \lambda \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |0| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{\lambda>0} \lambda \, |0|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{\lambda>0} \lambda \, (0)$$

$$= 0$$

2. $\| \alpha f \|_{wL^{p(\cdot)}} = |\alpha| \, \| f \|_{wL^{p(\cdot)}}; \; \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$

jika $\alpha = 0$, maka jelas bahwa $\| \alpha f \|_{wL^{p(\cdot)}} = |\alpha| \, \| f \|_{wL^{p(\cdot)}}$. Kemudian asumsikan $\alpha \neq 0$, maka diperoleh

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\alpha f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right|$$

berakibat

$$\| \alpha f \|_{wL^{p(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

Ambil $\mu = \frac{\lambda}{|\alpha|}$ maka diperoleh

$$\| \alpha f \|_{wLp(\cdot)} = \sup_{\mu>0} |\alpha| \mu |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \mu\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\mu>0} \mu \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \mu\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \, \| f \|_{wL^{p(\cdot)}}.$$

3. $\| f + g \|_{wL^{p(\cdot)}} \leq k \left(\| f \|_{wL^{p(\cdot)}} + \| g \|_{wL^{p(\cdot)}} \right); \ \forall k \geq 1$

Perhatikan bahwa

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

Berakibat

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\}| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Sehingga

$$\lambda|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}} + \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\lambda|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(\lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p + \left(\lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$\lambda^p|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\}| \leq \lambda^p \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \lambda^p \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

Maka diperoleh

$$\| f + g \|_{wLp(\cdot)} \leq 2^p \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\left\{x : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \sup_{\lambda>0} \lambda^p \left|\left\{x : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \right)$$

$$= 2^p \left(\| f \|^p_{wL^{p(\cdot)}} + \| g \|^p_{wL^{p(\cdot)}} \right)$$

Berdasarkan aksioma di atas, maka terbukti bahwa ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen merupakan kuasi-norm. selanjutnya untuk menunjukkan bahwa ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen adalah ruang kuasi-Banach, maka harus dibuktikan terlebih dahulu kelengkapannya.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Kemudian asumsikan bahwa terdapat barisan konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sedemikian sehingga

$$\| f_{k+1} - f_k \|_{wL^{p(\cdot)}} \leq a_k \; ; \; \forall k$$

karena

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{j=n}^{n+k+1} \left[f_{j+1} - f_j \right] ; \forall n.k$$

maka

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leq \sum_{j=n}^{n+k+1} \left\| f_{j+1} - f_j \right\|_{wL^{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

misalkan $x \in wL^{p(\cdot)}$, maka

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j ; \forall n.k$$

Barisan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy terhadap bilangan riil. Himpunan bilangan riil merupakan ruang yang lengkap. Misalkan limit dari $(f_n(x))$ adalah $f(x)$, maka untuk $k \to \infty$ diperoleh

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \; ; \forall n. \forall x \in wL^{p(\cdot)}$$

Sehingga diperoleh bahwa (f_n) konvergen seragam ke $f(x)$. Karena $f(n)$ kontinu, maka berlaku juga pada f. Barisan Cauchy disebut konvergen jika terdapat barisan konvergen dan barisan Cauchy di $wL^{p(\cdot)}$ memiliki subbarisan di mana persamaan (2.11) berlaku. Jadi, terbukti bahwa $wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang kuasi-Banach.

Setelah terbukti bahwa ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah ruang Banach, maka definisi ruang lebesgue dengan variabel eksponen berlaku dan dapat diaplikasikan pada ketaksamaan Hölder. Hal ini juga terbukti pada ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen. Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu dari ketaksamaan di bidang analisis. Ketaksamaan Holder yang digunakan pada penelitian ini adalah ketaksamaan Hölder integral di mana pada tahun 1982 Kantorovich dan Akilov mendefinisikannya. Penelitian yang dilakukan adalah menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dalam teorema berikut.

Teorema 3.1. *Misalkan* $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. *Jika* $f(x) \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g(x) \in L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}} \tag{3.1}$$

di mana $fg \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti.

Diketahui sembarang $fg \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sehingga berdasarkan definisi norm di $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ diperoleh

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{fg \in L^{p(\cdot)}: \|fg\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \infty\right\}$$

di mana normnya didefinisikan sebagai

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

Karena fg bernilai mutlak, maka jelas bahwa $\|fg\|_{L^{p(\cdot)}}$ bernilai tak negatif. Kemudian diketahui juga bahwa $f \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, sehingga diperoleh

$$\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

dan

$$\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

Oleh karena f dan g bernilai mutlak, maka nilai $\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}$ dan $\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}}$ tak negatif. Selanjutnya akan ditunjukkkan keberlakuan Persamaan 3.1 diatas menggunakan definisi yang telah dijabarkan.

Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{L^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)} \mid g(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)} dx \times \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&= \|f\|_{L^{p_1(\cdot)}} \|g\|_{L^{p_2(\cdot)}}
\end{aligned}$$

Teorema diatas menunjukkan berlakunya syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. Selanjutnya akan ditunjukkan syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen sebagai berikut

Teorema 3.2. *Misalkan* $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. *Jika* $f(x) \in wL^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g(x) \in wL^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{wL^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{wL^{p_2(\cdot)}} \tag{3.2}$$

di mana $fg \in wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti.

Diketahui sembarang $fg \in wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sehingga berdasarkan definisi norm di $wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ diperoleh

$$\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

Karena fg bernilai mutlak, maka jelas bahwa $\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}}$ bernilai tak negatif. Kemudian diketahui juga bahwa $f \in wL^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in wL^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, sehingga diperoleh

$$\|f\|_{wL^{p_1(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

dan

$$\|g\|_{wL^{p_2(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

Oleh karena f dan g bernilai mutlak, maka nilai $\|f\|_{wL^{p_1(\cdot)}}$ dan $\|g\|_{wL^{p_2(\cdot)}}$ tak negatif. Selanjutnya akan ditunjukkkan keberlakuan Persamaan 3.2 diatas menggunakan definisi yang telah dijabarkan.

Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)}+\frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\,|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{\lambda>0} \lambda\,|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)|\,|g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{\lambda>0} \lambda\left(|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}\,|\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}\right)$$

$$\leq \sup_{\lambda>0} \lambda\,|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

$$\times \sup_{\lambda>0} \lambda\,|\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

$$= \|f\|_{wL^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{wL^{p_2(\cdot)}}$$

Teorema diatas menunjukkan berlakunya syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)}+\frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$.

3.2 Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen

Sebelumnya akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa ruang Morrey dengan variabel eksponen adalah ruang Banach sebagai berikut.

Bukti. Misalkan $f.g \in \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

1. $\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \geq 0$

   Perhatikan bahwa

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

   berdasarkan definisi harga mutlak, maka $\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \geq 0$

2. $\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   $(\rightarrow)$ jika $\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} = 0$$

   Perhatikan bahwa $|B(a.r)|$ adalah ukuran Lebesgue di mana $r > 0$ maka diperoleh $|B(a.r)| > 0$. Maka haruslah

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 0$$

$$\left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} = 0$$

$$\left(\left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\right)^{p(\cdot)} = 0^{p(\cdot)}$$

$$\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)} dx = 0$$

   Karena $f(x) \in \mathbb{R}$ dan dan $|f(x)| \geq 0$, maka kemungkinan $|f(x)| = 0$ atau $|f(x)| > 0$ karena $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 0$ maka yang memenuhi pasti $|f(x)| = 0$ jadi

$$f(x) = 0$$

(←) jika $f = 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |0|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} (0\,)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} (0)$$

$$= 0$$

3. $\|\alpha f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = |\alpha|\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}. \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\|\alpha f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |\alpha f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\left(|\alpha|^{p(\cdot)} \int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} |\alpha| \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= |\alpha| \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= |\alpha|\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$$

4. $\|f+g\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \le \|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} + \|g\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$

$$\|f+g\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)+g(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)} + |g(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q\,(\cdot)}-\frac{1}{p\,(\cdot)}}$$

$$\left\{\left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\, dx\right) + \left(\int_{B(a.r)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx\right)\right\}^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

$$+ \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

$$= \|f\|_{\mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_1(\cdot)}} + \|g\|_{\mathcal{M}^{p_2(\cdot)}_{q_2(\cdot)}}$$

Dari pembuktian tersebut, diperoleh bahwa $\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya dari $\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Selanjutnya ambil sebarang barisan Cauchy (f_n) di $\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}$. Misalkan (f_{n_k}) merupakan sub barisan dari (f_n) di mana $n_1 < n_2 < \cdots$ yang memenuhi

$$\|f_m = f_{n_k}\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} < 2^{-k}. \forall m \geq n_k$$

Definisikan, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

$$g_k = |f_{n_1}| + \sum_{t=1}^{k-1} |f_{n_{t+1}} - f_{n_t}|$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} \leq \|f_{n_1}\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} + \sum_{t=1}^{k-1} \|f_{n_{t+1}} - f_{n_t}\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} < \|f_{n_1}\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} + 1 < \infty$$

Misalkan $g = \lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{t=1}^{k-1} |f_{n_{t+1}} - f_{n_t}|$. Berdasarkan Lemma 2.14 kita memperoleh $\|g\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} \leq \|f_{n_1}\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} + 1$. Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir dimana-mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{t=1}^{k-1} (f_{n_{t+1}}(x) - f_{n_t}(x))$$

konvergen mutlak untuk hampir semua x. Definisikan deret diatas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_1} + \sum_{t=1}^{k-1} \left(f_{n_{t+1}} - f_{n_t}\right) = f_{n_k}$$

maka kita mempunyai $f(x) = \lim_{t\to\infty} f_{n_t}(x)$ hampir dimana-mana. Maka cukup buktikan bahwa f adalah titik limit dari f_n. Ambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena (f_n) Cauchy, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m.n \geq N$ kita peroleh $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} < \frac{\epsilon}{2}$. Karena (f_{n_k}) konvergen ke f, maka dapat kita pilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan$\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} < \frac{\epsilon}{2}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} &= \|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} \\
&\leq \|f_n - f_{n_k}\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} + \|f_{n_k} - f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

untuk setiap $n > N$. Hal ini membuktikan $f_n \to f$. Jadi $\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen adalah ruang kuasi-banach sebagai berikut.

Misalkan $f.g \in w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, maka

1. Jelas bahwa $\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

   ($\rightarrow$) Misalkan bahwa $\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = 0$, berdasarkan definisi ruang Morrey lemah maka diperoleh

   $$\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

   $$0 = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

   Dapat dipastikan bahwa$|\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}| = 0$. Atau dengan kata lain $|\{x \in B(a.r): |f(x)| \neq 0\}| = 0$. Sehingga berdasarkan definisi ukuran, diperoleh $f = 0$

   ($\leftarrow$) Jika $f = 0$

   $$\begin{aligned}\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} &= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}\\ &= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x \in B(a.r): |0| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}\\ &= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x \in B(a.r): 0 > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}\\ &= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

3. Untuk $\alpha \in \mathbb{R}^n$, akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = |\alpha|\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$

Perhatikan bahwa

$$\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\, |\{x \in B(a.r): |\alpha||f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma \left|\left\{x \in B(a.r): |f(x)| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

Pilih $\mu = \frac{\gamma}{|\alpha|}$, sehingga

$$\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}|\alpha|\mu\, |\{x \in B(a.r): |f(x)| > \mu\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= |\alpha| \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\mu\, |\{x \in B(a.r): |f(x)| > \mu\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$= |\alpha|\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$$

4. $\|f+g\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \leq\ k\left(\|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} + \|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}}\right)$

Pilih $k = 2$ karena

$$|\{x \in B(a.r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}| \leq\ |\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}| + |\{x \in B(a.r): |g(x)| > \gamma\}|$$

maka diperoleh

$$\|f+g\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\ |\{x \in B(a.r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}\gamma \left|\left\{x \in B(a.r): |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

$$+ \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}}\gamma \left|\left\{x \in B(a.r): |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

$$= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}2\,\gamma\, |\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

$$+\sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0}|B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}}2\gamma\,|\{x\in B(a.r):|g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

$$=2\Big(\sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0}|B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}2\,\gamma\,|\{x\in B(a.r):|f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

$$+\sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0}|B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}}2\gamma\,|\{x\in B(a.r):|g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}\Big)$$

$$=2\left(\|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}}+\|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}}\right)$$

Proposisi diatas mengatakan bahwa $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$ merupakan kuasi norm. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang yang lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ maka $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan Cauchy dalam ukuran. Untuk $n_1 < n_2 < \cdots$, akan dikonstruksi sub barisan $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dari $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yang konvergen hampir di mana-mana dengan

$$\left|\left\{x\in B(\alpha.r):\left|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\right|>2^{-k}\right\}\right|<2^{-k}$$

untuk setiap $k\ \in\mathbb{N}$. Kemudian definisikan

$$A_k=\left\{x\in B(\alpha.r):\left|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\right|>2^{-k}\right\}$$

untuk setiap $k\ \in\mathbb{N}$. Perhatikan bahwa $|A_k|\ <\ 2^{-k}$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k\ |<\ \infty$. Untuk setiap $m\ =\ 1.\ 2.\ ...$ diperoleh

$$\left|\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k\right|\le\sum_{k=m}^{\infty}|A_k|$$

$$\le\sum_{k=m}^{\infty}2^{-k}=2^{1-m}<1<\infty$$

Dari sini, kita dapat melihat bahwa hampir semua x pada sembarang $B(\alpha.r)$ termuat paling banyak berhingga A_k, atau dengan kata lain, terdapat indeks $K(x)$ sedemikian sehingga $x \notin A_k$ jika $k \geq K(x)$. Dengan begitu

$$\left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \leq 2^{-k}$$

untuk semua $K \geq K(x)$. Perhatikan bahwa untuk $i \geq j \geq j_0 \geq k$,

$$\left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right| \leq \sum_{l=j}^{i} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

$$\leq \sum_{l=j}^{i} 2^{-l} \leq 2^{1-j} \leq 2^{1-j_0}$$

Ini mengakibatkan $\{f_{n_i}\}_{i\in N}$ barisan Cauchy hampir di mana-mana pada $B(\alpha.r)$. Karena ℝ^n lengkap dan $B(\alpha.r) \subset \mathbb{R}^n$ maka $\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergen hampir di mana-mana. Definisikan $f(x)$ untuk x di mana $\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $f(x)$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lainnya. Kemudian akan dibuktikan bahwa $f \in w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Karena

$$\left|\left\{x \in B(a.r) : \liminf_{n\to\infty}\left|f_{n_k}(x)\right| > \gamma\right\}\right|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty}\left|\left\{x \in B(a.r) : \left|f_{n_k}(x)\right| > \gamma\right\}\right|$$

maka untuk sebarang $B(\alpha.r)$ dan $\gamma > 0$, diperoleh

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \left\|\liminf_{n\to\infty} |f_{n_k}|\right\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty}\left\| |f_{n_k}|\right\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} < \infty$$

Jadi $f \in w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Selanjutnya, ambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena $\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ barisan Cauchy, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m.n > N$ kita mempunyai $\|f_m - f_n\|_{w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}}$. Karena

$$\|f_n - f\|_{w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} = \left\|f_m - f_{n_k} + f_{n_k} - f\right\|_{w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}}$$

$$\leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} + \left\|f_{n_k} - f\right\|_{w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

untuk $n \geq N$. Hal ini membuktikan bahwa f_n konvergen ke $f \in w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Dengan kata lain $w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang yang lengkap. Karena $w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang kuasi norm yang lengkap, maka terbukti bahwa $w\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang kuasi-Banach.

Setelah terbukti bahwa ruang Morrey dengan variabel eksponen adalah ruang Banach, maka definisi ruang Morrey dengan variabel eksponen berlaku dan dapat diaplikasikan pada ketaksamaan Hölder. Hal ini juga terbukti pada ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen. Selanjutnya akan ditunjukkan yarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Morrey dengan variabel eksponen dalam teorema-teorema sebagai berikut.

Teorema 3.3. *Misalkan* $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *dan* $q(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ *dan* $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. *Jika* $f(x) \in \mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g(x) \in \mathcal{M}^{p_2(\cdot)}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_1(\cdot)}} \|g\|_{\mathcal{M}^{p_2(\cdot)}_{q_2(\cdot)}} \tag{3.3}$$

di mana $fg \in \mathcal{M}^{p\,(\cdot)}_{q\,(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Bukti.

Diketahui sembarang $fg \in \mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sehingga berdasarkan definisi norm di $\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ diperoleh

$$\|fg\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)g(x)|^{p(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

Karena fg bernilai mutlak, maka jelas bahwa $\|fg\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{q(\cdot)}}$ bernilai tak negatif. Kemudian diketahui juga bahwa $f \in \mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in \mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, sehingga diperoleh

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_1(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

dan

$$\|g\|_{\mathcal{M}^{p_2(\cdot)}_{q_2(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx\right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

Oleh karena f dan g bernilai mutlak, maka nilai $\|f\|_{\mathcal{M}^{p_1(\cdot)}_{q_1(\cdot)}}$ dan $\|g\|_{\mathcal{M}^{p_2(\cdot)}_{q_2(\cdot)}}$ tak negatif. Selanjutnya akan ditunjukkkan keberlakuan Persamaan 3.3 diatas menggunakan definisi yang telah dijabarkan.

Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\|fg\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a \in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)} - \frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)g(x)|^{p(\cdot)}\, dx \right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a \in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)} - \frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx \right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a \in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)} - \frac{1}{p_1(\cdot)}} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)} - \frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

$$\left\{ \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\, dx \right) \left(\int_{B(a.r)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx \right) \right\}^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

$$\leq \sup_{a \in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)} - \frac{1}{p_1(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\, dx \right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

$$\times \sup_{a \in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)} - \frac{1}{p_2(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\, dx \right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

$$= \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} \|g\|_{\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}}$$

Teorema diatas menunjukkan berlakunya syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$.

Seperti halnya ruang Lebesgue, syarat cukup ketaksamaan Holder tidak hanya dibuktikan di ruang Morrey dengan variabel eksponen $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, namun juga ditunjukkan di ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sebagai berikut.

Teorema 3.4. *Misalkan* $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *dan* $q(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ *dan* $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. *Jika* $f(x) \in w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g(x) \in w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} \|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}} \tag{3.4}$$

di mana $fg \in w\mathcal{M}_{q\,(\cdot)}^{p\,(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Bukti.

Diketahui sembarang $fg \in w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sehingga berdasarkan definisi norm di $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ diperoleh

$$\|fg\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\, |\{x \in B(a.r): |f(x)g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}}$$

Karena fg bernilai mutlak, maka jelas bahwa $\|fg\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$ bernilai tak negatif. Kemudian diketahui juga bahwa $f \in w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, sehingga diperoleh

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}\gamma\, |\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}$$

dan

$$\|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}}\gamma\, |\{x \in B(a.r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}}$$

Oleh karena f dan g bernilai mutlak, maka nilai $\|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}}$ dan $\|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}}$ tak negatif. Selanjutnya akan ditunjukkkan keberlakuan Persamaan 3.4 diatas menggunakan definisi yang telah dijabarkan.

Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).\ q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)},\ \frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} &= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x\in B(a.r): |f(x)g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma|\{x\in B(a.r): |f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}|B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&\qquad \gamma|\{x\in B(a.r): |f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}\gamma\,|\{x\in B(a.r): |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}} \\
&\quad \times \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}}\gamma\,|\{x\in B(a.r): |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&= \|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}\|g\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}
\end{aligned}$$

Teorema diatas menunjukkan berlakunya syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).\ q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)},\ \frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$.

3.3 Integrasi Keluasan Ilmu Allah Swt.

Surat Al-Kahfi ayat 109 diturunkan berkenaan dengan orang-orang Yahudi yang menganggap bahwa mereka telah mendapatkan ilmu yang sangat banyak dengan sampainya kitab Taurat kepada mereka. Awalnya adalah ketika orang-orang Yahudi mendengar Q.S. Al-Isra' ayat 85 yang artinya "Sedangkan kalian diberi pengetahuan hanya sedikit." Ketika mereka mendengar ayat yang menyebutkan bahwa ilmu mereka masih sedikit, salah seorang dari kaum Yahudi menjawab, "Kami telah mendapatkan ilmu yang sangat banyak, yaitu dengan diberikannya kitab Taurat kepada kami. Dan barang siapa telah diberi kitab Taurat, maka ia telah mendapatkan banyak kebaikan." Setelah itu diturunkanlah surat Al-Kahfi ayat 109 sebagai penegasan bahwa ilmu yang mereka peroleh masih sangat sedikit jika dibandingkan dengan ilmu yang dimiliki oleh Allah. Surat Al-Kahfi ayat 109 menunjukkan bahwa ilmu Allah sangat luas. Manusia diperintahkan agar selalu berfikir untuk mengembangkan ilmu yang sudah kita ketahui. Pengembangan ilmu ini adalah pada Ketaksamaan Hölder yang diaplikasikan di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen.

Makna yang dapat diambil dari surat Al-Ghasiyah ayat 17-20 bahwa setiap ilmu yang diberikan oleh Allah itu sangat luas di mana kebanyakan manusia belum mengetahuinya. Sebagai contoh adalah Allah menciptakan unta, meninggikan langit, menegakkan gunung, dan menghamparkan bumi sebagai bentuk kekuasaannya. Unta disini dijadikan perumpamaan karena unta pada waktu itu adalah sesuatu yang berharga bagi mereka. Unta mampu bertahan hidup dan menjadi kendaraan andal di tengah gurun padang pasir yang tandus dan minim cadangan air. Tentu saat ini manusia tidak mengetahui tentang kekuasaan Allah tersebut. Akan tetapi Allah memperintahkan kita untuk berfikir dan memperhatikan dengan keinginan mengambil pelajaran dari peristiwa yang terjadi.

Kesimpulan yang diperoleh adalah ilmu Allah sangat luas sehingga Allah memerintahkan untuk memperhatikan tentang kekuasaannya dan juga diperintahkan untuk terus mengkaji ilmu yang belum diketahui yang sebenarnya bisa dipelajari. Sama halnya dengan ilmu didalam matematika di mana Ketaksamaan Hölder dapat dikaji dan dikembangkan lebih dalam yang diaplikasikan pada ruang Lebesgue dengan variabel eksponen. Pengembangan ini sesuai dengan pengamalan surat Al-Ghasiyah ayat 17-20.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dibahas pada bab sebelumnya, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa syarat cukup ketaksamaan Hölder diruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan lemahnya adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. sedangkan syarat cukup ketaksamaan Hölder diruang Morrey dengan variabel eksponen dan lemahnya adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}\ dan\ \frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$.

4.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya untuk menunjukkan syarat perlu Ketaksamaan Holder di ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen dan di ¨ ruang Morrey dengan Variabel Eksponen sehingga dapat diketahui nilai ekuivalennya. Selain itu juga bisa dilakukan penelitian untuk mengaplikasikan ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen dan ruang Morrey dengan Variabel Eksponen di ketaksamaan-ketaksamaan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan Terjemahnya. (1998). Al Basyir. Semarang: Asy-Syifa'.

Al-Maraghi, A. M. (1969). *Tafsir al-Maraghi Jilid IV*. Mesir: Mushthafa al-Bab.

Amalia, D. N. (2018). Kekonfergenan Dalam Ruang Lebesgue Lemah dan Ekuivalensinya dengan Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue. *Eureka Matika*, 6(2), 25–35.

As-Suyuti, A. A.-F. (2012). *Lubab An-Nuqul Fi Asbab an-Nuzul*. Beirut: Dar Al-Kutub Al-'Ilmiah.

Besov, O. (2018). Embeddings of Spaces of Functions of Positive Smoothness on Irregular Domains in Lebesgue Spaces. *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*, 103(3), 223–345.

Bowers, A., & Kalton, N. J. (2014). An Introductory Course in Functional Analysis. *Springer,* New York.

Fitzpatrick, P., & Royden, H. (2010). *Real Analysis Fourth Edition.* Republic of China: China Machine Press.

Ifronika, I. M. (2018). Generalized Holder's Inequality in Morrey Spaces. *Matematicki Vesnik*, 4(70), 326–337.

Kalton, N. (2003). *Quasi-Banach Spaces. In: Handbook of The Geometry of.* United States of America: Elsevier Science.

Kantorovich, L. V. (1982). Functional Analysis (Second Edition): Normed Spaces, Pergamon. *Institut Teknologi Bandung*.

Kovacik, O., & Rakosnik, J. (1991). On Space Lp(x) and Wk,p(x). *Czechoslovak Math*, 41(116), 592–618.

Krantz, S. (20006). An Episodic History of Mathematics. *h.iii*, *St. Louis*.

Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: John.

Limanta, K. M. (2014). Ruang Morrey Kuat dan Lemah. *Tugas Akhir Program Sarjana, Institut Teknologi Bandung*.

Lu, S., & Xu, L. (2005). Boundedness of Rough Singular Integral Operators on tThe Homogeneous Morrey-Herz Spaces. *Hokkaido Mathematical Journal*, 34, 299–314.

Maligranda, L. (1995). A Simple Proof of the Holder and the Minkowski Inequality. *Mathematical Association of America*, 256-259.

Morrey, C. (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(2), 126–166.

Muscat, J. (2014). *Functional Analysis.* New York: Springer.

Mu'tazili, A. (2019). *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang.* Institut Teknologi Bandung: Tesis Program Magister.

Rorres, H. A. (2005). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces.* New York: Springer.

Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2000). *Undergraduate Mathematics Series.* London: Springer Undergraduate Mathematics Series.

Sawano, Y. H. (2020). Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operators and PDE’s. *researchgate,* Volume I.

Shao, X., & Tao, S. (2019). Weak Type Estimates of Variable Kernel Fractional Integral and Their Commutators on Variable Exponent Morrey Spaces. *Hindawi*, 2(1), 1–11.

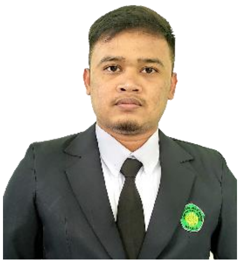
Shihab, M. Q. (2012). *Tafsir al-Misbah.* Jakarta: Lentera Hati.

Thomson, B. S. (2020). The Bounded Convergence Theorem. *The American*, 485-503.

Xu, J., & Yang, X. (2015). Herz-Morrey-Hardy Spaces with Variable Exponents and Their Applications. *Hindawi*, 1, 1–19.

Y. Li, X. G., & Zhao, J. (2018). The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality is Equivalent to the Holder Inequality. *Symmetry*, 10.

RIWAYAT HIDUP



Mohamad Abdul Ba'is, lahir di Kediri pada tanggal 22 Maret 1999. Putra kedua dari Bapak Zaenal Mustofa dan Ibu Kunyati. Ia dilahirkan di sebuah desa yang yang terletak di Jalan Melati 02 Desa Karanganyar Kecamatan Wates Kabupaten Kediri.

Seorang laki-laki desa dengan nama Ba'is ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita yang lulus pada tahun 2005, dilanjutkan dengan pendidikan dasar di SDN Karanganyar yang selesai pada tahun 2011. Kemudian dia melanjutkan pendidikan menengahnya di MTsN Kota Kediri 2 yang lulus pada tahun 2014. Pada saat dia menjadi siswa Mts, dia juga menempuh pendidikan non-formal di Pondok Pesantren Al-Amien selama 2 tahun. Kemudian dia melanjutkan pendidikannya di MAN 3 Kota Kediri yang selesai pada tahun 2017. Selama menjadi siswa MAN dia juga melanjutkan pendidikan non-formalnya di Pondok Pesantren Darussalam selama kurang lebih 3 tahun. Pada tahun 2017 ini dia diterima dan tercatat sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.

Seorang laki-laki desa ini aktif berorganisasi mulai dari Mts. Pada saat itu, dia dipercayai oleh sekolah untuk menjadi ketua Pramuka atau dalam sebutan lain adalah Pratama. Selain aktif di organisasi pramuka, dia juga aktif sebagai anggota Patroli Keamanan Sekolah yang membantu untuk menertibkan keamanan dilingkungan sekolah. Saat di jenjang sekolah atas dia melanjutkan organisasi yang telah ditekuni dari Mts tersebut yaitu Pramuka. Pada saat itu juga, dia dipercayai lagi menjadi pemimpin organisasi tersebut. Saat tiba perayaan hari kemerdekaan dia juga dipercayai menjadi pemimpin danton Paskibraka. Selama menjadi mahasiswa, dia mengikuti organisasi HMJ "Integral" Matematika selama 1 periode dan juga menjadi anggota remaja masjid di Perumahan Joyogrand RW. 08 Kelurahan Merjosari.

KEMENTERIANAGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG FAKULTAS
SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Mohamad Abdul Ba'is
NIM	: 17610007
Fakultas/Prodi	: Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	: Ketaksamaan Hölder di Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Maret 2021	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	18 Maret 2021	Konsultasi Bab I, II & III	2.
3.	21 Maret 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	26 Maret 2021	ACC Bab 1 & Bab II	4.
5.	13 April 2021	Konsultasi Bab III	5.
6.	23 April 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	6.
7.	26 April 2021	Konsultasi Bab IV	7.
8.	5 Mei 2021	Konsultasi Abstrak	8.
9.	10 Juni 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	9.
10.	26 November 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	10.
11.	29 November 2021	ACC Bab III	11.
12.	22 Desember 2021	ACC Kajian Keagamaan	12.
13.	24 Desember 2021	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 24 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005