BILANGAN KROMATIK TITIK DARI DUAL GRAF BERLIAN

SKRIPSI

OLEH
NURUL HAFIDHOH ANWAR
NIM. 17610044

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

BILANGAN KROMATIK TITIK DARI DUAL GRAF BERLIAN

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Nurul Hafidhoh Anwar
NIM. 17610044

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

BILANGAN KROMATIK TITIK DARI DUAL GRAF BERLIAN

SKRIPSI

Oleh
Nurul Hafidhoh Anwar
NIM. 17610044

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 29 November 2021

Pembimbing I,

Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Pembimbing II,

Dewi Ismiarti, M.Si
NIDT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

BILANGAN KROMATIK TITIK DARI DUAL GARF BERLIAN

SKRIPSI

Oleh
Nurul Hafidhoh Anwar
NIM. 17610044

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana (S.Mat)
Tanggal 10 Desember 2021

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nurul Hafidhoh Anwar
NIM	: 17610044
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 29 November 2021
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
7CE8CAJX548313728

Nurul Hafidhoh Anwar
NIM. 17610044

MOTO

Berdoa, berusaha yang terbaik, lalu pasrahkan segalanya kepada Allah.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah, skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah dan Ibu tercinta, Ayahanda Khairul Anwar, S.E dan Ibunda Khalimah, atas doa yang tiada henti dan selalu memberikan yang terbaik kepada anak-anaknya.

Adik-adik tersayang, adinda Atho'illah Azizul Haqqy, adinda Naila Fadhilah, adinda (Alm.) Muhammad Jamaluddin, dan adinda Niswatul Aini yang selalu menghibur dan memberikan semangat kepada penulis.

Seluruh keluarga besar yang selalu memberi dukungan dan motivasi.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, serta karunia-Nya, khususnya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, juga segenap keluarga, sahabat, serta umatnya hinggar akhir zaman.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak hambatan dan kesulitan. Namun, atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak yang diterima oleh penulis.

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, M.A, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang dengan sabar membimbing dan memberikan banyak ilmu, arahan, nasihat, serta motivasi kepada penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah membimbing dan memberikan ilmu dan arahan kepada penulis.
6. Evawati Alisah, M.Pd dan Dr. Abdussakir, M.Pd selaku Dosen Penguji yang banyak memberikan saran dan masukan guna menyempurnakan skripsi ini.

7. Civitas akademika Program Studi Matematika, terutama bapak dan ibu dosen yang telah memberikan bekal ilmu yang tidak ternilai harganya.
8. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa memberikan do'a, pengertian, dan dukungan.
9. Adik tersayang yang telah memberikan dukungan dan semangat dalam menyelesaikan skripsi.
10. Keluarga besar yang sudah memberikan banyak dukungan.
11. Seseorang yang selalu menemani penulis, M. Rafli Wahfiuddin. Terimakasih selalu memberikan support dan meluangkan waktunya.
12. Seluruh sahabat dan teman-teman yang selalu support kepada penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
13. Seluruh pihak yang terlibat secara langsung maupun tidak langsung yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis sadar tidak bisa memberikan apapun selain ucapan terimakasih dan berdoa semoga semua bantuan yang telah diberikan mendapat imbalan dari Allah SWT. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Anwar, Nurul Hafidhoh. 2021. **Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata Kunci: Pewarnaan Titik, Bilangan Kromatik, Graf Dual, Graf Berlian

Pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik di G sedemikian sehingga titik-titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai semua titik G disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Suatu graf disebut planar jika dapat digambarkan pada bidang sehingga tidak ada sisi-sisinya yang berpotongan. Dari graf planar dapat dibentuk suatu graf yang disebut graf dual. Setiap wilayah dari graf planar dapat diwakili oleh satu titik dari graf dual. Dua titik dari graf dual terhubung langsung jika titik yang mewakili wilayah pada graf planar bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Graf berlian yang dinotasikan dengan Br_n, adalah salah satu model graf yang digunakan untuk merepresentasikan struktur jaringan. Pada penelitian ini diperoleh bahwa bilangan kromatik titik dari dual graf berlian adalah

$$\chi({Br_n}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ dan } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

ABSTRACT

Anwar, Nurul Hafidhoh. 2021. **On The Chromatic Number of The Diamond Graph Dual**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science dan Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: Vertex Coloring, Chromatic Number, Dual Graph, Diamond Graph

A vertex coloring of a graph G, is an assigments of colors to the vertices of G, such that no two adjacent vertices are assigned the same color. The least number of colors needed for an vertices coloring of a graph G is the chromatic number, denoted by $\chi(G)$. A graph is said to be planar if it can be drawn in the plane so that no edges crossing except at endpoints. A dual graph is constructed from the planar graph. Each region in a planar graph can be represented by a vertex of the dual graph. Two vertices are adjacent if the region represented by these vertices are neighbours and have a common border. A diamond graph denoted by Br_n, can be used to model a networks structure. In this study, it is shown that the chromatic number of the diamond graph dual is

$$\chi({Br_n}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ and } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

ملخص

أنوار، نورالحافظة. ٢٠٢١. **أرقام لوني في الرسم البياني المزدوج من الماس**. بحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم ألإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) محمد نافع جوهري، لماجستير، المشرفة (٢) ديوي إسميارتي، الماجستير.

الكلمة المفتاحية: قمم التلوين، أرقام لوني، الرسم البياني المزدوج، الرسم البياني الماس.

قمم التلوين على الرسم البياني G هي لون النقاط G بحيث يكون للنقاط المجاورة ألوان مختلفة. الحد الأدنى لعدد الألوان المطلوبة لتلوين جميع نقاط G يسمى الرقم اللوني ويُشار إليه بالرمز $\chi(G)$. يسمى الرسم البياني مستويًا إذا كان من الممكن رسمه على مستوى حتى لا تتقاطع أي من حوافها. من الرسم البياني المستوي ، يمكن تشكيل رسم بياني يسمى رسم بياني مزدوج. يمكن تمثيل كل منطقة في الرسم البياني المستوي برأس رسم بياني مزدوج. يتم توصيل رأسين من الرسم البياني المزدوج بشكل مباشر إذا كانت الرؤوس التي تمثل مناطق الرسم البياني المستوي متجاورة ومحدودة بالحافة نفسها. يعد الرسم البياني الماسي ، الذي يشير إليه Br_n، أحد نماذج الرسم البياني المستخدمة لتمثيل هياكل الشبكة. الرسم البياني الماسي هو نموذج رسم بياني يستخدم لتمثيل هياكل الشبكة. في هذه الدراسة ، تبين أن الرقم اللوني للرسم البياني الماسي المزدوج هو

$$\chi({Br_n}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ و } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari titik dan sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Graf banyak digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan. Caranya dengan merepresentasikan masalah ke dalam graf, sehingga dapat mempermudah menemukan solusi dari permasalahan tersebut. Misalnya, graf digunakan untuk merepresentasikan jaringan komunikasi yang menghubungkan pusat data. Titik graf mewakili pusat data dan sisi graf mewakili jaringan komunikasi (Rosen, 2012:641).

Terdapat beberapa bentuk graf, salah satunya adalah graf planar. Suatu graf disebut planar jika dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan/bersilangan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi tersebut (Lipschutz & Marc, 2007:166). Suatu graf mungkin saja planar meskipun biasanya digambar dengan sisi yang saling berpotongan, karena graf tersebut dapat digambarkan kembali dengan cara berbeda tanpa adanya perpotongan (Rosen, 2012:719). Selanjutnya, dari graf planar dapat dibentuk suatu graf yang disebut graf dual. Setiap wilayah dari graf planar dapat digambarkan sebagai titik dari graf dual. Dua titik dari graf dual terhubung langsung jika dan hanya jika titik yang mewakili wilayah pada graf planar bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama (Lipschutz & Marc, 2007:170-171).

Salah satu topik pada graf yang biasa digunakan untuk memodelkan permasalahan adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf menjadi salah satu topik pada teori graf yang sangat menarik, terutama karena sejarahnya yang menarik, hasil teoritisnya yang beragam, masalah yang belum terpecahkan, dan berbagai aplikasinya (Chartrand et al, 2016:363). Terdapat tiga macam pewarnaan dalam graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*map coloring*) (Gross et al, 2019:351).

Pewarnaan graf merupakan salah satu masalah optimasi. Secara umum aplikasi pewarnaan graf berfungsi untuk mencari warna optimal, di mana titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda dan banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik harus seminimal mungkin (bilangan kromatik). Optimasi dapat dipahami sebagai cara untuk memperoleh hasil maksimal dengan meminimalkan usaha. Konsep ini dapat dianalogikan dengan kajian Islam yang menganjurkan umatnya untuk hidup hemat dan melarang umatnya mempunyai sifat boros.

Allah SWT melarang hamba-Nya bersikap boros dan menjelaskan cara menafkahkan harta yang baik. Hal ini sebagaimana difirmankan oleh Allah SWT

Artinya: *"Dan berikanlah kepada keluarga-keluarga yang dekat akan haknya, kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros."* (QS. Al-Israa': 26).

Jadi, maksud dari ayat di atas janganlah kamu menafkahkan hartamu melainkan secara wajar, bukan untuk kemaksiatan, melainkan diberikan kepada orang-orang yang berhak mendapatkannya serta tidak berlebihan dan boros (Az-Zuhaili, 2016:76).

Masalah pewarnaan graf yang paling banyak mendapat perhatian adalah pewarnaan titik. Oleh karena itu, penelitian ini fokus pada masalah pewarnaan titik. Pewarnaan titik dari suatu graf G adalah pemberian warna pada titik-titik di G

sedemikian sehingga titik-titik yang terhubung langsung memiliki warna berbeda (Chartrand et al, 2016:363). Permasalahan pewarnaan graf tidak hanya mewarnai titik dengan warna yang berbeda dari warna titik tetangganya saja, tetapi diharapkan dapat menggunakan warna seminimal mungkin. Banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memberi warna yang berbeda pada titik yang terhubung langsung disebut bilangan kromatik (Rosen, 2012:727).

Penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh Mostafa Javedankherad, dkk (2020) tentang aplikasi pewarnaan graf pada jaringan dengan memodelkan jaringan ke dalam bentuk graf, lalu melakukan pewarnaan pada graf tersebut. Penelitian lain oleh Nurdin Hinding, dkk (2018) yang menyatakan bahwa jaringan erat kaitannya dengan graf berlian. Artikel tersebut membahas tentang jaringan yang dibentuk menggunakan graf berlian. Artikel tersebut membahas tentang jaringan yang dibentuk menggunakan graf berlian. Berdasarkan latar belakang tersebut, pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut mengenai pewarnaan graf dengan lebih fokus pada pewarnaan titik dengan judul "Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana formula bilangan kromatik titik dari dual graf berlian?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang diharapkan dalam penelitian ini adalah mengetahui formula bilangan kromatik titik dari dual graf berlian.

1.4 Manfaat Penelitian

Dalam penulisan penelitian ini, diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain:

1. Menambah informasi dan pengetahuan tentang teori graf, khususnya terkait pewarnaan minimum titik dari dual graf berlian.
2. Menjadi referensi tambahan untuk bahan penelitian di masa yang akan datang.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka, yaitu dengan cara mempelajari teori-teori yang berhubungan dengan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian. Sumber penelitian ini diperoleh dari beberapa buku, skripsi, dan literatur ilmiah yang mendukung dan berkaitan dengan penelitian. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode analisis deskriptif, yaitu mendeskripsikan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menggambar graf berlian Br_n, untuk $n = 2, \dots, 6$.
2. Mencari dual dari graf berlian Br_n, untuk $n = 2, \dots, 6$.
3. Menentukan pewarnaan titik dari dual graf berlian Br_n, untuk $n = 2, \dots, 6$.
4. Menentukan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian Br_n, untuk $n = 2, \dots, 6$.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika berguna untuk memudahkan dalam memahami jalan pemikiran penelitian ini secara keseluruhan. Penelitian ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian sebagai berikut.

BAB I Pendahuluan

Bab ini sebagai ulasan tentang pendahuluan yang memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Dalam bab ini memuat landasan teori yang mendasari pemecahan masalah yang berkaitan dengan judul penelitian dengan mencantumkan beberapa teorema pendukung dan juga memaparkan kajian agama yang berkaitan dengan judul penelitian.

BAB III Pembahasan

Pada bab pembahasan, memuat penjelasan secara rinci mengenai cara membentuk dual dari graf berlian dan menentukan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian, serta memuat hasil-hasil penelitian. Dan akan dibahas juga kaitannya dengan kajian agama islam.

BAB IV Penutup

Penutup memuat kesimpulan dari pembahasan masalah dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Graf G adalah pasangan terurut $(V(G), E(G))$ yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang saling lepas dari $V(G)$. Terdapat fungsi *incidence* (keterkaitan) $\psi_G(e)$ yang menghubungkan setiap sisi dari G dengan pasangan tak terurut (tidak harus berbeda) dari titik G. Jika e adalah sisi dan u dan v adalah titik-titik G sehingga $\psi_G(e) = \{u, v\}$, maka e dikatakan menghubungkan (join) titik u dan v, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Banyaknya titik di G disebut orde G, dinotasikan dengan $v(G)$. Sedangkan banyaknya sisi di G disebut ukuran, dinotasikan dengan $e(G)$ (Bondy & Murty, 2008:2).

Untuk penyederhanaan notasi, pasangan tak terurut $\{u, v\}$ ditulis uv. Berikut adalah contoh dari graf G.

$$G = \big(V(G), E(G)\big)$$

dengan

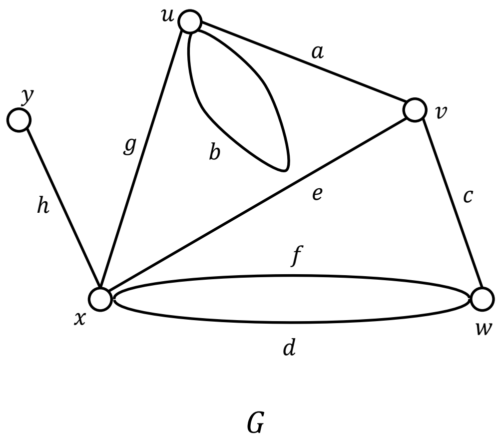
$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

dan ψ_G didefinisikan sebagai

$$\psi_G(a) = uv, \psi_G(b) = uu, \psi_G(c) = vw, \psi_G(d) = wx$$

$$\psi_G(e) = vx, \psi_G(f) = wx, \psi_G(g) = ux, \psi_G(h) = xy$$



Gambar 2.1 Graf G

Pada graf G di atas, titik-titik direpresentasikan sebagai lingkaran kecil.

Sisi dengan titik ujung yang sama disebut *loop* dan sisi dengan ujung yang berbeda disebut penghubung (*link*). Dua atau lebih *link* dengan pasangan ujung yang sama disebut sisi rangkap (*parallel edges*). Pada Gambar 2.1, sisi b adalah *loop* dan semua sisi lainnya adalah *link*. Sedangkan sisi d dan f adalah sisi rangkap (Bondy & Murty, 2008:2-3).

Graf disebut sederhana jika tidak memiliki loop atau sisi ganda. Graf pada contoh di bawah ini adalah graf sederhana.

$$H = (V(H), E(H))$$

dengan

$$V(H) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

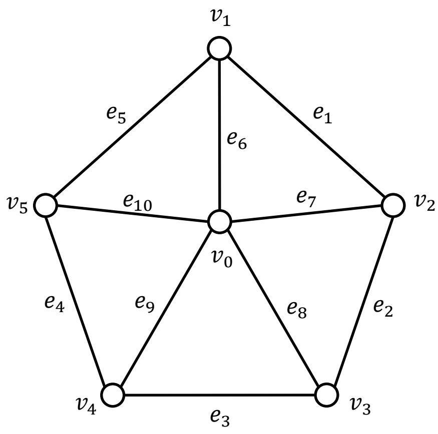
$$E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

dan ψ_H didefinisikan sebagai

$$\psi_H(e_1) = v_1v_2, \psi_H(e_2) = v_2v_3, \psi_H(e_3) = v_3v_4, \psi_H(e_4) = v_4v_5$$

$$\psi_H(e_5) = v_5v_1, \psi_H(e_6) = v_0v_1, \psi_H(e_7) = v_0v_2, \psi_H(e_8) = v_0v_3$$

$$\psi_H(e_9) = v_0v_4, \psi_H(e_{10}) = v_0v_5$$



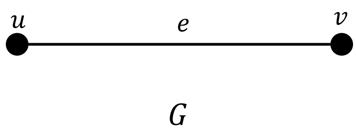
Gambar 2.2 Graf H

(Bondy & Murty, 2008:3).

2.2 *Adjacent* dan *Incident*

Suatu sisi dikatakan terkait (*incident*) pada masing-masing titik ujungnya, dan sebaliknya. Dua titik dikatakan terhubung langsung (*adjacent*) jika terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut, begitu pula dengan dua sisi dikatakan terhubung langsung (*adjacent*) jika terdapat titik yang menghubungkan kedua sisi tersebut. Dua titik dikatakan bertetangga (*neighbours*) jika keduanya terhubung langsung. Himpunan tetangga dari titik v di G dinotasikan dengan $N_G(v)$ (Bondy & Murty, 2008:3).

Misalkan u dan v adalah dua titik yang berbeda di G dan $\psi_G(e) = \{u, v\}$ adalah sisi di G. Titik u dan titik v dikatakan terhubung langsung *(adjacent)* karena dihubungkan oleh sisi e. Sedangkan sisi e terkait *(incident)* dengan titik u dan v.



Gambar 2.3 Graf G

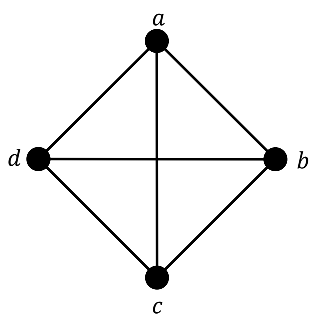
(Wilson & Watkins, 1990:31).

2.3 Derajat Titik *(Degree)*

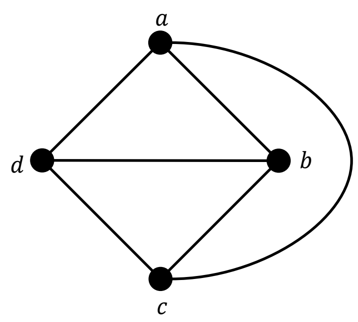
Derajat titik v di graf G yang dinotasikan dengan $d_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait dengan titik v (untuk setiap *loop* dihitung sebagai dua sisi). Jika G adalah graf sederhana, $d_G(v)$ adalah banyaknya tetangga v di G. Titik berderajat nol disebut debagai titik terisolasi (*isolated vertex*). Derajat minimum G dinotasikan dengan $\delta(G)$, sedangkan derajat maksimum G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Bondy & Murty, 2008:7).

2.4 Graf Planar

Graf planar adalah graf yang dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan/bersilangan kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi tersebut. Graf G disebut graf planar jika dan hanya jika berupa graf sederhana. Graf planar yang digambar pada bidang disebut graf bidang *(plane graph)*. Di bawah ini merupakan contoh graf planar.



(a) $G = K_4$

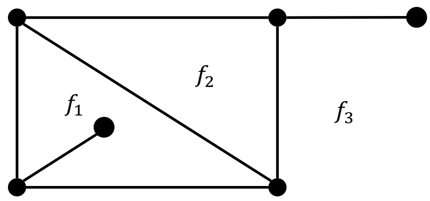


(b) H

Gambar 2.4 (a) Graf Planar, dan (b) Graf Bidang

Graf K_4 adalah graf planar, umumnya digambar dengan sisi yang saling berpotongan seperti pada Gambar 2.5 (a). Jika graf K_4 digambar ulang, dapat dibentuk suatu graf tanpa ada sisi yang saling berpotongan (Budayasa, 2007:69-70).

Pada graf planar terdapat wilayah-wilayah yang dibatasi oleh masing-masing sisi yang disebut wilayah/muka *(face)*. Wilayah yang tidak ada batasnya yang terdapat di luar graf disebut wilayah luar *(exterior face)*. Ketika wilayah pada graf bidang dibatasi oleh sikel, maka sikel tersebut juga disebut sebagai wilayah. Sebagai contoh, graf planar di bawah ini memiliki tiga wilayah, f_1, f_2 dan wilayah luar f_3. Dari ketiganya, f_1 dan f_2 yang dibatasi oleh sikel.



G

Gambar 2.5 Graf Bidang

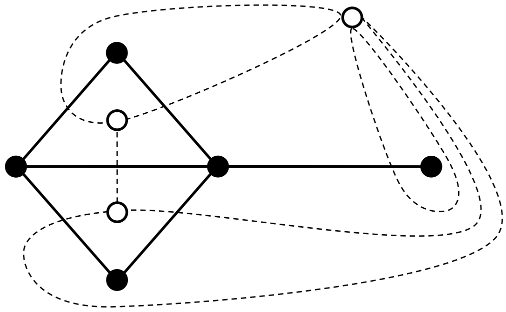
(Harary, 1969:103).

2.5 Graf Dual

Misalkan G adalah graf planar yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Dapat dibentuk graf lain G^* yang disebut dual dari G yang dibentuk melalui tahap sebagai berikut.

1. Di dalam setiap wilayah *(region)*/muka *(face)* dari G dapat dibentuk suatu titik v^* (titik-titik ini adalah titik di G^*).
2. Setiap sisi e dari G dapat digambar suatu garis e^* yang memotong sisi e dan menghubungkan titik v^* (garis-garis ini adalah sisi di G^*).

Pada gambar di bawah ini digambarkan graf dual G^* dari graf planar G.



Gambar 2.6 Graf Dual G^* dari Graf Planar G

Titik-titik v^* dari graf G^* direpresentasikan dengan lingkaran putih dan sisi-sisi e^* dari graf G^* dengan garis putus-putus (Wilson, 1996:73). Hubungan berikut merupakan akibat langsung dari definisi graf dual G^*.

$$v(G^*) = f(G), e(G^*) = e(G), d_{G^*}(f^*) = d_G(f), \forall f \in F(G)$$

(Bondy & Murty, 2008:253).

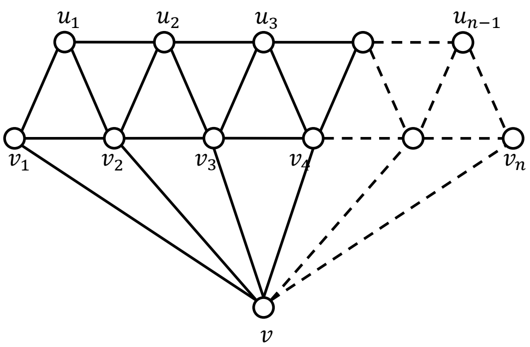
2.6 Graf Berlian

Graf Berlian yang dinotasikan Br_n adalah graf dengan definisi sisi dan titik sebagai berikut:

$V(Br_n) = \{v\} \cup \{v_i | 1 \le i \le n\} \cup \{u_i | 1 \le i \le n-1\}$

$E(Br_n) = \{vv_i | 1 \le i \le n\} \cup \{v_i v_i | 1 \le i \le n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \le i \le n-2\}$

$\cup \{u_i v_i | 1 \le i \le n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \le i \le n-1\}$



Gambar 2.7 Graf Br_n

(Syafnur, dkk, 2018).

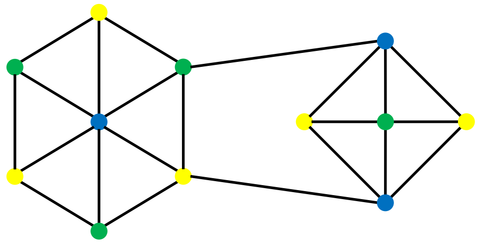
2.7 Pewarnaan Titik

Misalkan G suatu graf. Pewarnaan-k dari graf G yaitu pewarnaan semua titik-titik dengan menggunakan k warna sedemikian sehingga dua titik G yang berhubungan langsung memiliki warna yang berbeda. Jika G memiliki pewarnaan-k maka G dapat diwarnai dengan k warna. Suatu pewarnaan-k dari graf G biasanya ditunjukkan dengan melabeli titik-titik dari graf G dengan warna $1,2,3,\dots,k$ (Budayasa, 2007:151).

Di dalam pewarnaan graf tidak hanya mewarnai titik dengan warna yang berbeda dari warna titik tetangganya saja, akan tetapi diharapkan dapat menggunakan warna seminimal mungkin. Banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memberi warna yang berbeda pada titik yang terhubung langsung disebut bilangan kromatik (Rosen, 2012:727).

2.8 Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik dari graf G adalah banyaknya minimum warna berbeda yang digunakan untuk mewarnai suatu graf G, sehingga dua titik yang terhubung langsung memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik pada pewarnaan titik dinotasikan dengan $\chi(G)$. Graf G dikatakan k-kromatik jika $\chi(G) = k$.



G

Gambar 2.8 Bilangan Kromatik pada Graf G

Graf G di atas menunjukkan bahwa bilangan kromatiknya adalah $\chi(G) = 3$, karena memuat 3 titik yang saling terhubung langsung (Gross et al, 2019:352-353).

Teorema berikut merupakan akibat langsung dari definisi bilangan kromatik suatu graf.

Teorema 2.1 *Jika H graf bagian dari graf G, maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Bukti. Misal H graf bagian dari graf G. Berarti $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Karena setiap pewarnaan titik H dapat diperluas ke pewarnaan titik G, maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Teorema 2.2 *Misalkan G graf tak kosong. Graf G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$.*

Bukti. Misalkan G graf bipartisi dengan partisi X dan Y. Karena setiap dua titik di X tidak terhubung langsung, maka semua titik X dapat diwarnai dengan menggunakan satu warna, katakan warna 1. Begitu juga semua titik Y dapat diwarnai dengan satu warna, katakan warna 2. Jadi terdapat suatu pewarnaan-2 pada G. Berdasarkan definisi, $\chi(G) \leq 2$. Karena graf G tak kosong, maka minimum ada satu sisi G yang menghubungkan suatu titik u di X dan suatu titik v di Y. Dalam pewarnaan G titik u dan tititk v harus mendapat warna berbeda. Jadi $\chi(G) \geq 2$. Akibatnya, $\chi(G) = 2$.

Sebaliknya, misalkan $\chi(G) = 2$. Berarti ada pewarnaan-2 pada graf G. Misalkan X adalah himpunan semua titik G berwarna 1 dan Y adalah himpunan semua titik G berwarna 2. Karena semua titik di X warnanya sama, maka tidak ada sisi G yang menghubungkan dua titik X; begitu juga, tidak ada dua titik di Y yang terhubung langsung. Karena G tak kosong, maka setiap sisi G pasti menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y. Kesimpulannya, graf G adalah graf bipartisi dengan partisi X dan Y.

Teorema 2.3 *Jika C_n adalah sikel dengan n titik, maka* $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, jika\ n\ genap \\ 3, jika\ n\ ganjil \end{cases}$

Bukti. Misalkan C_n adalah sikel dengan n titik. Maka panjang sikel C_n adalah n. Jika n genap, maka C_n adalah graf bipartisi. Sehingga berdasarkan Teorema 3 bilangan kromatik C_n adalah 2. Jika n ganjil, maka C_n bukan graf bipartisi. Sehingga berdasarkan Teorema 3 dan C_n bukan graf kosong, maka $\chi(C_n) \geq 3$. Selanjutnya, misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Untuk i ganjil dan $1 \leq i \leq n-2$, warnai titik v_i dengan warna 1; untuk i genap dan $1 \leq i \leq n-1$, warnai titik v_i dengan warna 2, akhrinya warnai titik v_n dengan warna 3. Maka diperoleh suatu pewarnaan-3 pada C_n. Berdasarkan definisi bilangan kromatik, maka $\chi(C_n) \leq 3$. Akibatnya, untuk n ganjil, bilangan kromatik C_n adalah 3 (Budayasa, 2007:153-156).

2.9 Kajian Agama

Pada bagian ini, akan dibahas bagaimana keterkaitan antara kajian Islam tentang perintah untuk hidup hemat dan larangan bersifat boros dengan aplikasi pewarnaan graf. Firman Allah SWT dalam QS. Al-Israa' ayat 29

Artinya: *"Dan janganlah kamu jadikan tanganmu terbelenggu pada lehermu dan janganlah kamu terlalu mengulurkannya karena itu kamu menjadi tercela dan menyesal."*

Allah SWT memerintahkan untuk berhemat dalam hidup. Allah SWT mencela sikap kikir dan Dia melarang pemborosan (Kosasih dkk, 2017:319-320).

Hemat adalah menggunakan segala sesuatu yang tersedia berupa harta benda, uang, waktu, dan tenaga menurut ukuran keperluan, mengambil jalan tengah tidak kurang dan juga tidak berlebihan (Ya'qub, 1985:129). Allah SWT berfirman

Artinya: *"Dan (termasuk hamba-hamba Tuhan yang Maha pengasih) orang-orang yang apabila menginfakkan (harta), mereka tidak berlebihan, dan tidak (pula) kikir, di antara keduanya secara wajar."* (QS. Furqan: 67).

Allah SWT melarang sikap berlebih-lebihan dalam membelanjakan harta. Yang dianjurkan adalah yang secukupnya saja (Kosasih dkk, 2017:318-319).

Dalam Tafsir Al-Munir, Allah SWT memerintahkan untuk menggunakan harta secara wajar, di sini Allah SWT menyebutkan adab atau etika dalam menggunakan harta dan bersikap wajar dalam kehidupan dengan mencela sifat kikir dan melarang sifat boros. Yakni, janganlah kamu terlalu kikir terhadap diri sendiri dan keluargamu dengan tidak menggunakan harta untuk menyambung silaturahim dan melakukan kebaikan kepada mereka. Juga janganlah bersikap boros dan berlebihan dalam membelanjakan harta dengan memberi mereka melebihi kemampuanmu dan melebihi penghasilanmu, sehingga tidak ada yang tersisa lagi di tanganmu (Az-Zuhaili, 2016:77).

Allah SWT melarang hamba-Nya bersikap boros dan menjelaskan cara menafkahkan harta yang baik. Hal ini sebagaimana difirmankan oleh Allah SWT

Artinya: *"Dan berikanlah kepada keluarga-keluarga yang dekat akan haknya, kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros."* (QS. Al-Israa': 26).

Jadi, maksud dari di atas janganlah kamu menafkahkan hartamu melainkan secara wajar, bukan untuk kemaksiatan, melainkan diberikan kepada orang-orang yang berhak mendapatkannya serta tidak berlebihan dan boros (Az-Zuhaili, 2016:76).

Kemudian Allah SWT mengingatkan buruknya sikap boros dengan menyebutnya sebagai perbuatan setan. Allah SWT berfirman

Artinya: *"Sesungguhnya pemboros-pemboros itu adalah saudara-saudara setan dan setan itu sangat ingkar kepada Tuhannya."* (QS. Al-Israa': 27).

Orang-orang yang menggunakan harta mereka untuk maksiat menyerupai setan-setan dalam perbuatan buruknya itu. Mereka adalah teman-teman setan di dunia dan akhirat. Mereka juga serupa dengan setan-setan tersebut dalan sifat dan perbuatan (Az-Zuhaili, 2016:77).

Ibnu Mas'ud RA berkata, "*At-Tabdziir* (menghambur-hamburkan harta secara boros) adalah menggunakan harta untuk hal yang tidak benar." Mujahid berkata, "Jika seseorang mengguakan seluruh hartanya untuk hal yang benar, maka dia bukanlah *mubadzdzir*. Namun, jika ia menggunakan satu mud saja hartanya untuk hal yang tidak benar, ia adalah orang yang *mubadzdzir*." (Az-Zuhaili, 2016:77).

Diriwayatkan dari Ali bin Abi Thalib, dia berkata, "Apa yang kamu gunakan untuk keperluanmu dan keluargamu secara tidak boros dan tidak berlebihan, serta apa yang kamu sedekahkan, maka itu adalah untukmu, Sedangkan, yang kamu gunakan untuk pamer, maka itu adalah untuk setan." Ada seseorang menggunakan banyak hartanya untuk kebaikan, lalu ia ditegur, "Tidak ada kebaikan sama sekali dalam pemborosan." Namun orang itu menjawab, "Tidak ada istilah boros dalam kebaikan." (Az-Zuhaili, 2016:77).

Jika terdapat pewarnaan-k dari graf G yaitu pewarnaan semua titik-titik dengan menggunakan k warna sedemikian sehingga dua titik G yang berhubungan langsung memiliki warna yang berbeda. Karena bilangan kromatik merupakan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai semua titik pada graf G, sedemikian sehingga syarat pewarnaan terpenuhi. Sama halnya dengan perintah Allah SWT untuk hidup hemat dan juga larangan mempunyai sifat boros. Allah SWT telah menjamin rezeki tiap hamba-Nya agar digunakan untuk hal-hal yang baik dan bermanfaat. Pada pewarnaan graf bisa saja mewarnai semua titik dengan sembarang warna, akan tetapi terdapat syarat yang harus dipenuhi yaitu titik-titik yang terhubung langsung harus memiliki warna yang berbeda dan bilangan kromatik menuntut agar mewarnai dengan warna seminimal mungkin. Hal ini bisa diibaratkan dengan bagaimana cara menggunakan harta. Bisa saja harta yang dimiliki digunakan untuk memenuhi keinginan tanpa memikirkan kebutuhan pokok yang seharusnya didahulukan. Allah SWT melarang hamba-Nya menggunakan harta untuk hal-hal yang berlebihan atau pemborosan dan menghamburkan harta untuk bermaksiat. Akan tetapi, sebaiknya digunakan untuk berbuat baik, menjalin silaturahim dengan keluarga, dan diberikan kepada orang yang berhak menerimanya. Karena, perbuatan buruk orang yang memiliki sifat boros dan membelanjakan hartanya untuk maksiat menyerupai setan.

BAB III

PEMBAHASAN

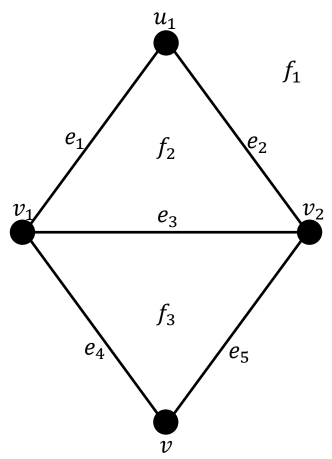
Bab ini akan membahas bagaimana menentukan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian Br_2, Br_3, Br_4, Br_5, dan Br_6 untuk memunculkan dugaan. Selanjutnya, akan dibuktikan secara umum bilangan kromatik titik dari dual graf berlian Br_n, untuk $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Menentukan Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian $\boldsymbol{Br_n}$, untuk $\boldsymbol{n = 2, \dots, 6}$

Cara menentukan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian adalah dengan membentuk suatu titik pada setiap wilayah dari graf berlian (termasuk wilayah di luar graf) dan dua titik pada graf dual yang mewakili wilayah yang dipisahkan oleh sisi asalnya dapat dihubungkan dengan suatu sisi dari graf dualnya.

3.1.1 Graf Berlian $\boldsymbol{Br_2}$

Diberikan graf berlian Br_2 sebagai berikut.



Gambar 3.1 Graf Berlian Br_2

Graf berlian Br_2 di atas merupakan graf planar, karena dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan. Misalkan graf berlian Br_2 memiliki 4 titik, 5 sisi, dan 3 wilayah. Sehingga diperoleh

$V(Br_2) = \{u_1, v_1, v_2, v\}$

$v(Br_2) = 4$

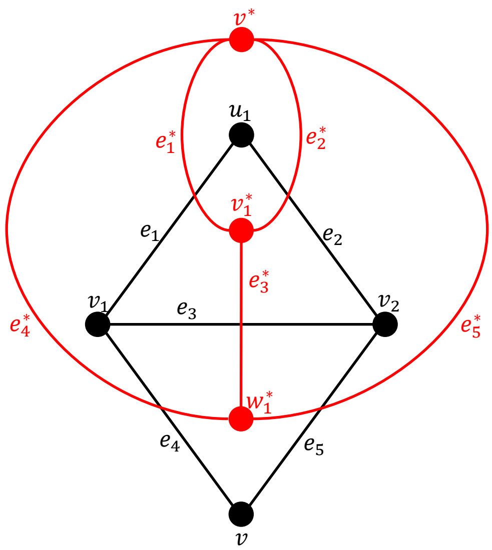
$E(Br_2) = \{e_1, \dots, e_5\}$

$e(Br_2) = 5$

$F(Br_2) = \{f_1, f_2, f_3\}$

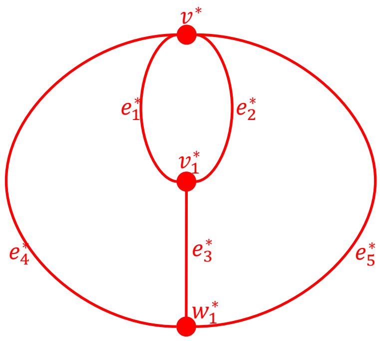
$f(Br_2) = 3$

Pada gambar di bawah ini digambarkan graf $Br_2{}^*$.



Gambar 3.2 Graf Berlian Br_2 dan Dual dari Graf Berlian $Br_2{}^*$

Misalkan graf $Br_2{}^*$ yang merupakan dual dari graf Br_2 dibentuk dengan membuat titik $v^*, v_1{}^*, w_1{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_2 (termasuk satu titik di wilayah luar graf Br_2). Dua titik pada graf $Br_2{}^*$ yang mewakili dua wilayah di graf Br_2 terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Akibatnya, sisi pada graf $Br_2{}^*$ memotong sisi dari graf Br_2. Titik v^* dan $v_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi oleh dua sisi yang sama, yaitu sisi e_1 dan e_2. Sehingga, dapat dibentuk sisi $e_1{}^*$ dan $e_2{}^*$ yang memotong sisi e_1 dan e_2. Begitu juga dengan titik v^* dan $w_1{}^*$ yang terhubung langsung dan dibatasi oleh dua sisi yang sama, yaitu sisi e_4 dan e_5. Dapat dibentuk sisi $e_4{}^*$ dan $e_5{}^*$ yang memotong sisi e_4 dan e_5. Titik $v_1{}^*$ dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi oleh suatu sisi yang sama, yaitu sisi e_3. Dapat dibentuk sisi $e_3{}^*$ yang memotong sisi e_3.



Gambar 3.3 Dual dari Graf Berlian $Br_2{}^*$

Titik-titik dari graf $Br_2{}^*$ digambarkan berwarna merah dan sisi-sisi graf $Br_2{}^*$ digambarkan dengan garis berwarna merah.

Didefinisikan dual dari graf berlian Br adalah Br^*. Misalkan $v^*, v_i{}^*, w_i{}^*$ adalah titik dari dari graf dual dan e^* adalah sisi yang menghubungkan antar $v^*, v_i{}^*, w_i{}^*$ dari graf dual. Maka diperoleh

$V(Br_2{}^*) = \{v^*, v_1{}^*, w_1{}^*\}$

$v(Br_2{}^*) = 3$

$E(Br_2{}^*) = \{e_1{}^*, \dots, e_5{}^*\}$

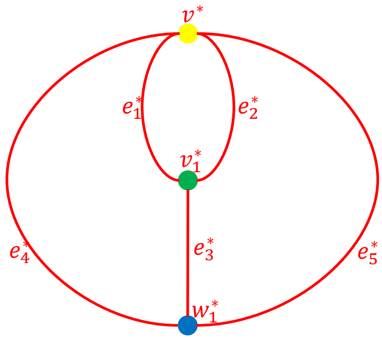
$e(Br_2{}^*) = 5$

Dari hasil di atas, diketahui bahwa $v(Br_2{}^*) = f(Br_2)$ dan $e(Br_2{}^*) = e(Br_2)$.

Selanjutnya akan dilakukan pewarnaan titik pada graf $Br_2{}^*$. Berikut ini akan diuraikan cara mewarnai titik pada graf $Br_2{}^*$:

1. Titik v^* diberi warna 1 (kuning).
2. Titik $v_1{}^*$ dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dengan titik v^*, sehingga kedua titik tersebut harus diberi warna berbeda.
3. Titik $v_1{}^*$ dan titik $w_1{}^*$ saling terhubung langsung, sehingga harus diberi warna berbeda. Titik $v_1{}^*$ diberi warna 2 (hijau) dan titik $w_1{}^*$ diberi warna 3 (biru).

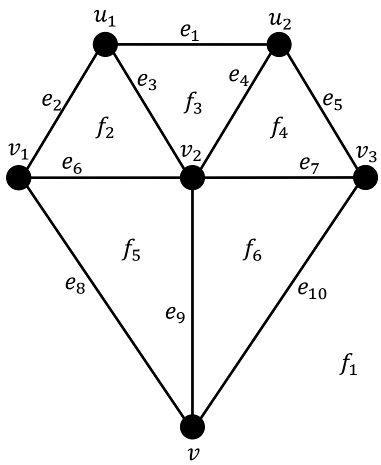
Graf $Br_2{}^*$ dapat diwarnai dengan 3 warna, maka $\chi(Br_2{}^*) = 3$.



Gambar 3.4 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian $Br_2{}^*$

3.1.2 Graf Berlian Br_3

Diberikan graf berlian Br_3 sebagai berikut.



Gambar 3.5 Graf Berlian Br_3

Graf berlian Br_3 di atas merupakan graf planar, karena dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan. Graf berlian Br_3 memiliki 6 titik, 10 sisi, dan 6 wilayah. Sehingga diperoleh

$V(Br_3) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v\}$

$v(Br_3) = 6$

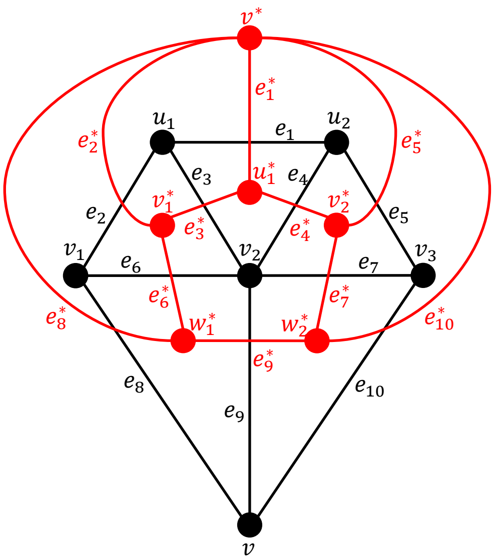
$E(Br_3) = \{e_1, \dots, e_{10}\}$

$e(Br_3) = 10$

$F(Br_3) = \{f_1, \dots, f_6\}$

$f(Br_3) = 6$

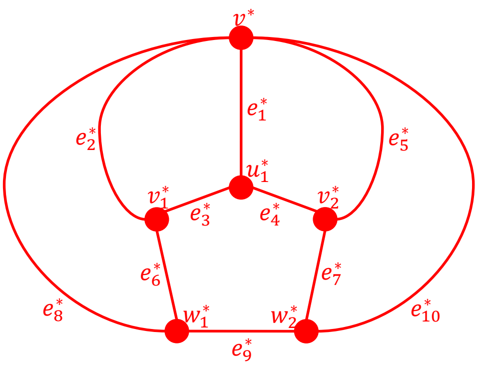
Pada gambar di bawah ini digambarkan graf $Br_3{}^*$.



Gambar 3.6 Graf Berlian Br_3 dan Dual dari Graf Berlian $Br_3{}^*$

Misalkan graf $Br_3{}^*$ yang merupakan dual dari graf Br_3 dibentuk dengan membuat titik $v^*, u_1{}^*, v_1{}^*, v_2{}^*, w_1{}^*, w_2{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_3 (termasuk satu titik di wilayah luar graf Br_3). Dua titik pada graf $Br_3{}^*$ yang mewakili dua wilayah di graf Br_3 terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Akibatnya, sisi pada graf $Br_3{}^*$ memotong sisi dari graf Br_3.

- Titik v^* dan $u_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi oleh suatu sisi yang sama, yaitu sisi e_1. Sehingga, dapat dibentuk sisi $e_1{}^*$ yang memotong sisi e_1.
- Titik v^* dan $v_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_2. Dapat dibentuk sisi $e_2{}^*$ yang memotong sisi e_2.
- Titik $v_1{}^*$ dan $u_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_3. Dapat dibentuk sisi $e_3{}^*$ yang memotong sisi e_3.
- Titik $u_1{}^*$ dan $v_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_4. Dapat dibentuk sisi $e_4{}^*$ yang memotong sisi e_4.
- Titik v^* dan $v_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_5. Dapat dibentuk sisi $e_5{}^*$ yang memotong sisi e_5.
- Titik $v_1{}^*$ dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_6. Dapat dibentuk sisi $e_6{}^*$ yang memotong sisi e_6.
- Titik $v_2{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_7. Dapat dibentuk sisi $e_7{}^*$ yang memotong sisi e_7.
- Titik v^*dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_8. Dapat dibentuk sisi $e_8{}^*$ yang memotong sisi e_8.
- Titik $w_1{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_9. Dapat dibentuk sisi $e_9{}^*$ yang memotong sisi e_9.
- Titik v^* dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{10}. Dapat dibentuk sisi $e_{10}{}^*$ yang memotong sisi e_{10}.



Gambar 3.7 Dual dari Graf Berlian $Br_3{}^*$

Titik-titik graf $Br_3{}^*$ digambarkan berwarna merah dan sisi-sisi graf $Br_3{}^*$ digambarkan dengan garis berwarna merah.

Didefinisikan dual dari graf berlian Br adalah Br^*. Misalkan $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*$, $w_i{}^*$ adalah titik dari dari graf dual dan e^* adalah sisi yang menghubungkan antar $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*, w_i{}^*$ dari graf dual. Maka diperoleh

$V(Br_3{}^*) = \{v^*, u_1{}^*, v_1{}^*, v_2{}^*, w_1{}^*, w_2{}^*\}$

$v(Br_3{}^*) = 6$

$E(Br_3{}^*) = \{e_1{}^*, \dots, e_{10}{}^*\}$

$e(Br_3{}^*) = 10$

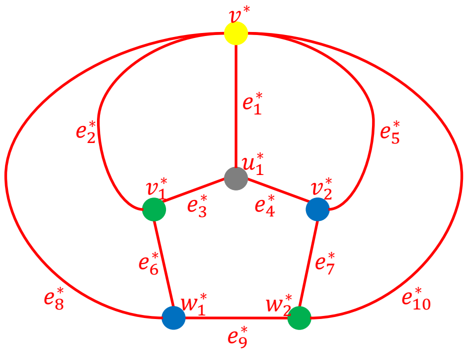
Dari hasil di atas, diketahui bahwa $v(Br_3{}^*) = f(Br_3)$ dan $e(Br_3{}^*) = e(Br_3)$.

Langkah-langkah pewarnaan titik pada dual dari graf berlian $Br_3{}^*$:

1. Titik v^* diberi warna 1 (kuning).
2. Titik $u_1{}^*, v_1{}^*, v_2{}^*, w_1{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dengan titik v^*, sehingga tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik v^*.
3. Titik $v_1{}^*$ dan titik $w_2{}^*$ tidak saling terhubung langsung, sehingga dapat diwarnai dengan warna yang sama yaitu warna 2 (hijau).
4. Titik $v_2{}^*$ dan titik $w_1{}^*$ tidak saling terhubung langsung, sehingga dapat diwarnai dengan warna yang sama yaitu warna 3 (biru).

5. Titik ${u_1}^*$ diberi warna 4 (abu-abu), karena titik ${u_1}^*$ terhubung langsung dengan titik yang mempunyai warna 1 (kuning), warna 2 (hijau), dan warna 3 (biru).

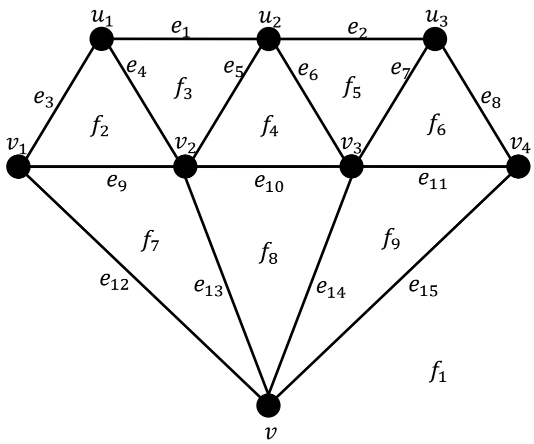
Graf ${Br_3}^*$ dapat diwarnai dengan 4 warna, maka $\chi({Br_3}^*) = 4$.



Gambar 3.8 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian ${Br_3}^*$

3.1.3 Graf Berlian Br_4

Diberikan graf berlian Br_4 sebagai berikut.



Gambar 3.9 Graf Berlian Br_4

Graf berlian Br_4 di atas merupakan graf planar, karena dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan. Graf berlian Br_4 memiliki 8 titik, 15 sisi, dan 9 wilayah. Sehingga diperoleh

$V(Br_4) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, v\}$

$v(Br_4) = 8$

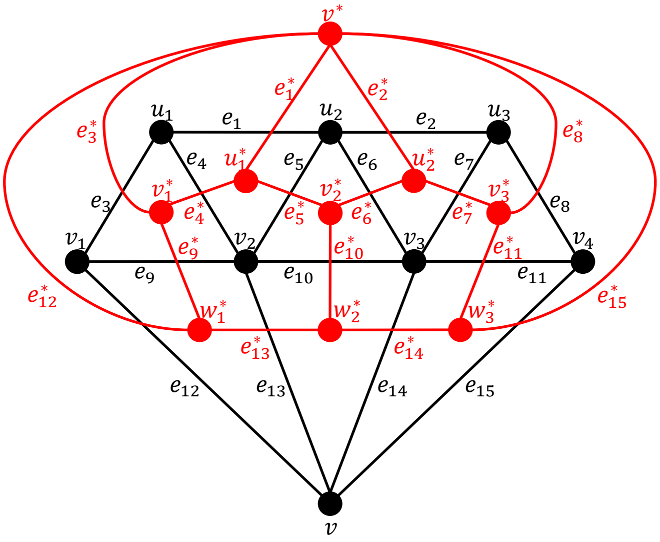
$E(Br_4) = \{e_1, \dots, e_{15}\}$

$e(Br_4) = 15$

$F(Br_4) = \{f_1, \dots, f_9\}$

$f(Br_4) = 9$

Pada gambar di bawah ini digambarkan graf $Br_4{}^*$.



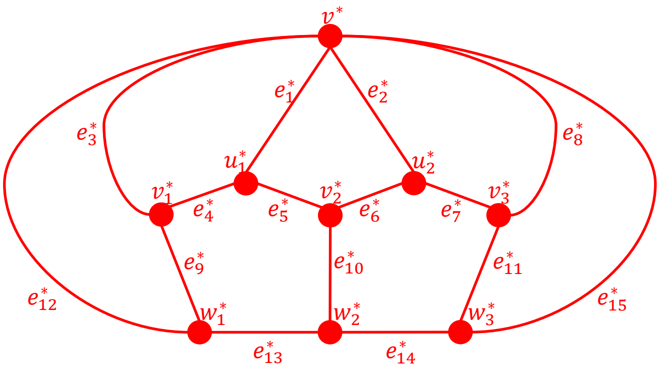
Gambar 3.10 Graf Berlian Br_4 dan Dual dari Graf Berlian $Br_4{}^*$

Misalkan graf $Br_4{}^*$ yang merupakan dual dari graf Br_4 dibentuk dengan membuat titik $v, u_1{}^*, u_2{}^*, v_1{}^*, v_2{}^*, v_3{}^*, w_1{}^*, w_2{}^*, w_3{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_4 (termasuk satu titik di wilayah luar graf Br_4). Dua titik pada graf $Br_4{}^*$ yang mewakili dua wilayah di graf Br_4 terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Akibatnya, sisi pada graf $Br_4{}^*$ memotong sisi dari graf Br_4.

- Titik v^* dan $u_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi oleh sisi yang sama, yaitu sisi e_1. Sehingga, dapat dibentuk sisi $e_1{}^*$ yang memotong sisi e_1.
- Titik v^* dan $u_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_2. Dapat dibentuk sisi $e_2{}^*$ yang memotong sisi e_2.

- Titik v^* dan $v_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_3. Dapat dibentuk sisi $e_3{}^*$ yang memotong sisi e_3.
- Titik $v_1{}^*$ dan $u_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_4. Dapat dibentuk sisi $e_4{}^*$ yang memotong sisi e_4.
- Titik $u_1{}^*$ dan $v_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_5. Dapat dibentuk sisi $e_5{}^*$ yang memotong sisi e_5.
- Titik $v_2{}^*$ dan $u_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_6. Dapat dibentuk sisi $e_6{}^*$ yang memotong sisi e_6.
- Titik $u_2{}^*$ dan $v_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_7. Dapat dibentuk sisi $e_7{}^*$ yang memotong sisi e_7.
- Titik v^* dan $v_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_8. Dapat dibentuk sisi $e_8{}^*$ yang memotong sisi e_8.
- Titik $v_1{}^*$ dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_9. Dapat dibentuk sisi $e_9{}^*$ yang memotong sisi e_9.
- Titik $v_2{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{10}. Dapat dibentuk sisi $e_{10}{}^*$ yang memotong sisi e_{10}.
- Titik $v_3{}^*$ dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{11}. Dapat dibentuk sisi $e_{11}{}^*$ yang memotong sisi e_{11}.
- Titik v^* dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{12}. Dapat dibentuk sisi $e_{12}{}^*$ yang memotong sisi e_{12}.
- Titik $w_1{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{13}. Dapat dibentuk sisi $e_{13}{}^*$ yang memotong sisi e_{13}.
- Titik $w_2{}^*$ dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{14}. Dapat dibentuk sisi $e_{14}{}^*$ yang memotong sisi e_{14}.

- Titik v^* dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{15}. Dapat dibentuk sisi $e_{15}{}^*$ yang memotong sisi e_{15}.



Gambar 3.11 Dual dari Graf Berlian $Br_4{}^*$

Titik-titik graf $Br_4{}^*$ digambarkan berwarna merah dan sisi-sisi graf $Br_4{}^*$ digambarkan dengan garis berwarna merah.

Didefinisikan dual dari graf berlian Br adalah Br^*. Misalkan $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*$, $w_i{}^*$ adalah titik dari dari graf dual dan e^* adalah sisi yang menghubungkan antar $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*, w_i{}^*$ dari graf dual. Maka diperoleh

$V(Br_4{}^*) = \{v, u_1{}^*, u_2{}^*, v_1{}^*, v_2{}^*, v_3{}^*, w_1{}^*, w_2{}^*, w_3{}^*\}$

$v(Br_4{}^*) = 9$

$E(Br_4{}^*) = \{e_1{}^*, \dots, e_{14}{}^*\}$

$e(Br_4{}^*) = 14$

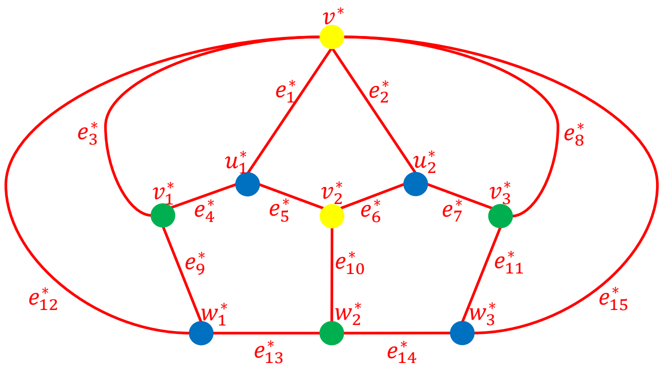
Dari hasil di atas, diketahui bahwa $v(Br_4{}^*) = f(Br_4)$ dan $e(Br_4{}^*) = e(Br_4)$.

Langkah-langkah pewarnaan titik pada dual dari graf berlian $Br_4{}^*$:

1. Titik v^* diberi warna 1 (kuning).
2. Terdapat 2 titik yang tidak terhubung langsung dengan titik v^*. Warnai salah satu titik dengan warna yang sama dengan titik v^*. Pilih titik $v_2{}^*$ dan warnai dengan warna 1 (kuning).

3. Titik ${v_1}^*$ diberi warna 2 (hijau). Warnai titik lain yang belum diwarnai dan tidak terhubung langsung dengan titik ${v_1}^*$. Titik ${v_3}^*$ dan ${w_2}^*$ dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik ${v_1}^*$.
4. Titik ${u_1}^*$ diberi warna 3 (biru). Warnai titik lain yang belum diwarnai dan tidak terhubung langsung dengan titik ${u_1}^*$. Titik ${u_2}^*, {w_1}^*$, dan ${w_3}^*$ dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik ${u_1}^*$.

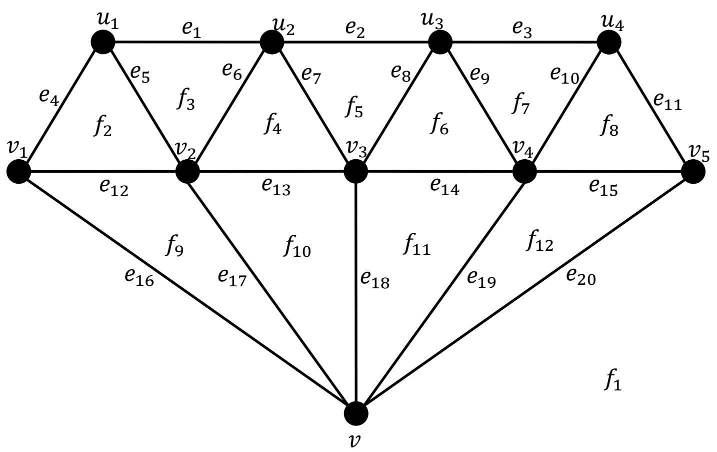
Graf ${Br_4}^*$ dapat diwarnai dengan 3 warna, maka $\chi({Br_4}^*) = 3$.



Gambar 3.12 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian ${Br_4}^*$

3.1.4 Graf Berlian Br_5

Diberikan graf berlian Br_5 sebagai berikut.



Gambar 3.13 Graf Berlian Br_5

Graf berlian Br_5 di atas merupakan graf planar, karena dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan. Graf berlian Br_5 memiliki 10 titik, 20 sisi, dan 12 wilayah. Sehingga diperoleh

$V(Br_5) = \{u_1, \dots, u_4, v_1, \dots, v_5, v\}$

$v(Br_5) = 10$

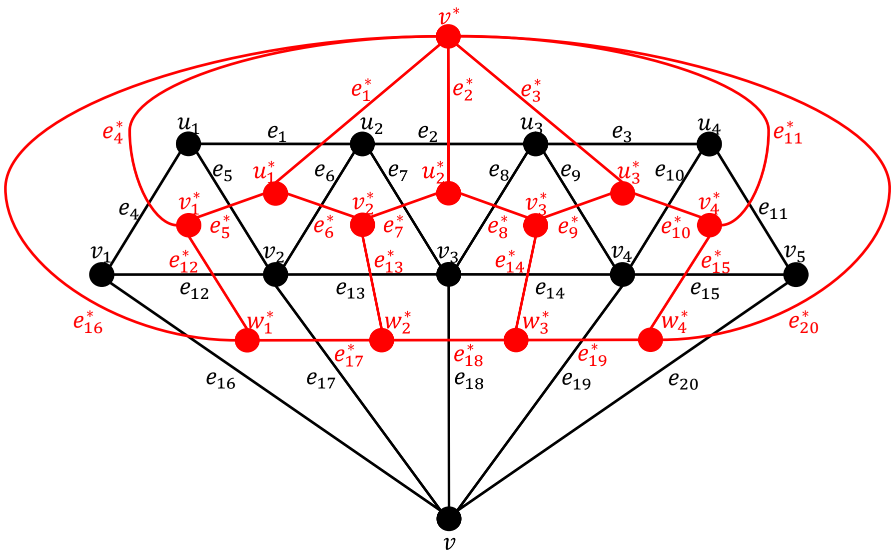
$E(Br_5) = \{e_1, \dots, e_{20}\}$

$e(Br_5) = 20$

$F(Br_5) = \{f_1, \dots, f_{12}\}$

$f(Br_5) = 12$

Pada gambar di bawah ini digambarkan graf $Br_5{}^*$.

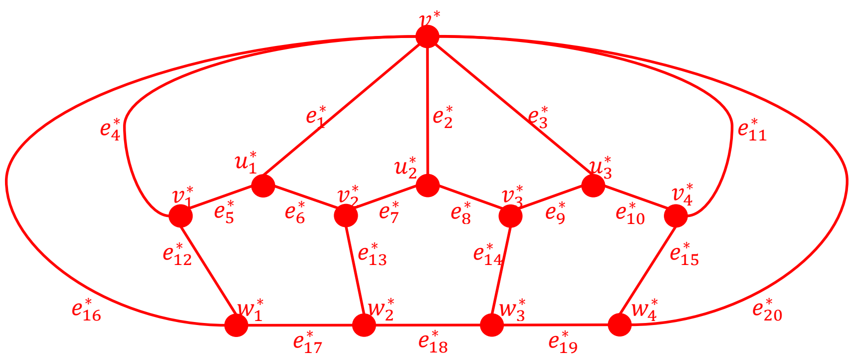


Gambar 3.14 Graf Berlian Br_5 dan Dual dari Graf Berlian $Br_5{}^*$

Misalkan graf $Br_5{}^*$ yang merupakan dual dari graf Br_5 dibentuk dengan membuat titik $v^*, u_1{}^*, u_2{}^*, u_3{}^*, v_1{}^*, \dots, v_4{}^*, w_1{}^*, \dots, w_4{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_5 (termasuk satu titik di wilayah luar graf Br_5). Dua titik pada graf $Br_5{}^*$ yang mewakili dua wilayah di graf Br_5 terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Akibatnya, sisi pada graf ${Br_5}^*$ memotong sisi dari graf Br_5.

- Titik v^* dan ${u_1}^*$ terhubung langsung dan dibatasi oleh sisi yang sama, yaitu sisi e_1. Sehingga, dapat dibentuk sisi ${e_1}^*$ yang memotong sisi e_1.
- Titik v^* dan ${u_2}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_2. Dapat dibentuk sisi ${e_2}^*$ yang memotong sisi e_2.
- Titik v^* dan ${u_3}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_3. Dapat dibentuk sisi ${e_3}^*$ yang memotong sisi e_3.
- Titik v^* dan ${v_1}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_4. Dapat dibentuk sisi ${e_4}^*$ yang memotong sisi e_4.
- Titik ${v_1}^*$ dan ${u_1}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_5. Dapat dibentuk sisi ${e_5}^*$ yang memotong sisi e_5.
- Titik ${u_1}^*$ dan ${v_2}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_6. Dapat dibentuk sisi ${e_6}^*$ yang memotong sisi e_6.
- Titik ${v_2}^*$ dan ${u_2}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_7. Dapat dibentuk sisi ${e_7}^*$ yang memotong sisi e_7.
- Titik ${u_2}^*$ dan ${v_3}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_8. Dapat dibentuk sisi ${e_8}^*$ yang memotong sisi e_8.
- Titik ${v_3}^*$ dan ${u_3}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_9. Dapat dibentuk sisi ${e_9}^*$ yang memotong sisi e_9.
- Titik ${u_3}^*$ dan ${v_4}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{10}. Dapat dibentuk sisi ${e_{10}}^*$ yang memotong sisi e_{10}.
- Titik v^* dan ${v_4}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{11}. Dapat dibentuk sisi ${e_{11}}^*$ yang memotong sisi e_{11}.

- Titik $v_1{}^*$ dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{12}. Dapat dibentuk sisi $e_{12}{}^*$ yang memotong sisi e_{12}.
- Titik $v_2{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{13}. Dapat dibentuk sisi $e_{13}{}^*$ yang memotong sisi e_{13}.
- Titik $v_3{}^*$ dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{14}. Dapat dibentuk sisi $e_{14}{}^*$ yang memotong sisi e_{14}.
- Titik $v_4{}^*$ dan $w_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{15}. Dapat dibentuk sisi $e_{15}{}^*$ yang memotong sisi e_{15}.
- Titik v^* dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{16}. Dapat dibentuk sisi $e_{16}{}^*$ yang memotong sisi e_{16}.
- Titik $w_1{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{17}. Dapat dibentuk sisi $e_{17}{}^*$ yang memotong sisi e_{17}.
- Titik $w_2{}^*$ dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{18}. Dapat dibentuk sisi $e_{18}{}^*$ yang memotong sisi e_{18}.
- Titik $w_3{}^*$ dan $w_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{19}. Dapat dibentuk sisi $e_{19}{}^*$ yang memotong sisi e_{19}.
- Titik v^* dan $w_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{20}. Dapat dibentuk sisi $e_{20}{}^*$ yang memotong sisi e_{20}.



Gambar 3.15 Dual dari Graf Berlian $Br_5{}^*$

Titik-titik graf $Br_5{}^*$ digambarkan berwarna merah dan sisi-sisi graf $Br_5{}^*$ digambarkan dengan garis berwarna merah.

Didefinisikan dual dari graf berlian Br adalah Br^*. Misalkan $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*$, $w_i{}^*$ adalah titik dari dari graf dual dan e^* adalah sisi yang menghubungkan antar $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*, w_i{}^*$ dari graf dual. Maka diperoleh

$V(Br_5{}^*) = \{v^*, u_1{}^*, u_2{}^*, u_3{}^*, v_1{}^*, \dots, v_4{}^*, w_1{}^*, \dots, w_4{}^*\}$

$v(Br_5{}^*) = 12$

$E(Br_5{}^*) = \{e_1{}^*, \dots, e_{20}{}^*\}$

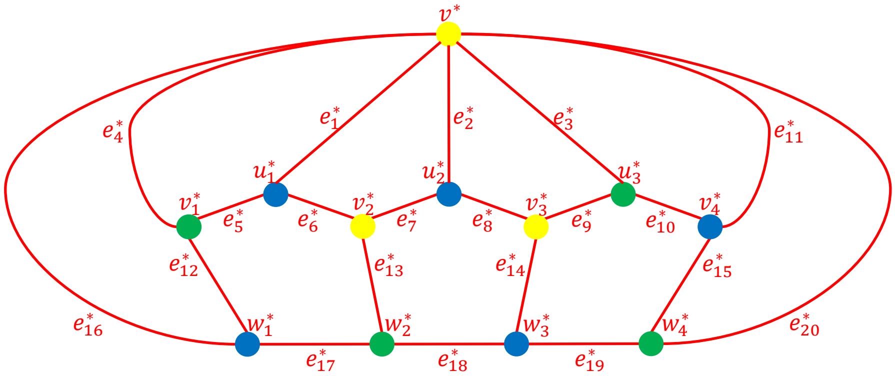
$e(Br_5{}^*) = 20$

Dari hasil di atas, diketahui bahwa $v(Br_5{}^*) = f(Br_5)$ dan $e(Br_5{}^*) = e(Br_5)$.

Langkah-langkah pewarnaan titik pada dual dari graf berlian $Br_5{}^*$:

1. Titik v^* diberi warna 1 (kuning).
2. Titik $v_2{}^*$ dan $v_3{}^*$ diberi warna 1 (kuning).
3. Titik $v_1{}^*$ diberi warna 2 (hijau). Warnai titik lain yang belum diwarnai dan tidak terhubung langsung dengan titik $v_1{}^*$. Titik $u_3{}^*, w_2{}^*$, dan $w_4{}^*$ dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik $v_1{}^*$.
4. Titik $u_1{}^*$ diberi warna 3 (biru). Warnai titik lain yang belum diwarnai dan tidak terhubung langsung dengan titik $u_1{}^*$. Titik $u_2{}^*, v_4{}^*, w_1{}^*$, dan $w_3{}^*$ dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik $u_1{}^*$. Titik $u_2{}^*, v_4{}^*, w_1{}^*$, dan $w_3{}^*$ diberi warna 3 (biru).

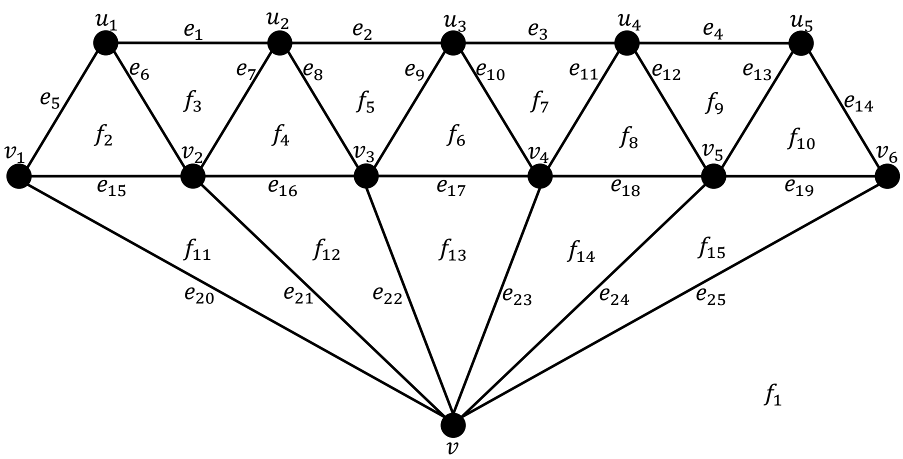
Graf $Br_5{}^*$ dapat diwarnai dengan 3 warna, maka $\chi(Br_5{}^*) = 3$.



Gambar 3.16 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian $Br_5{}^*$

3.1.5 Graf Berlian Br_6

Diberikan graf berlian Br_6 sebagai berikut.



Gambar 3.17 Graf Berlian Br_6

Graf berlian Br_6 di atas merupakan graf planar, karena dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan. Graf berlian Br_6 memiliki 12 titik, 25 sisi, dan 15 wilayah. Sehingga diperoleh

$V(Br_6) = \{u_1, \dots, u_5, v_1, \dots, v_6, v\}$

$v(Br_6) = 12$

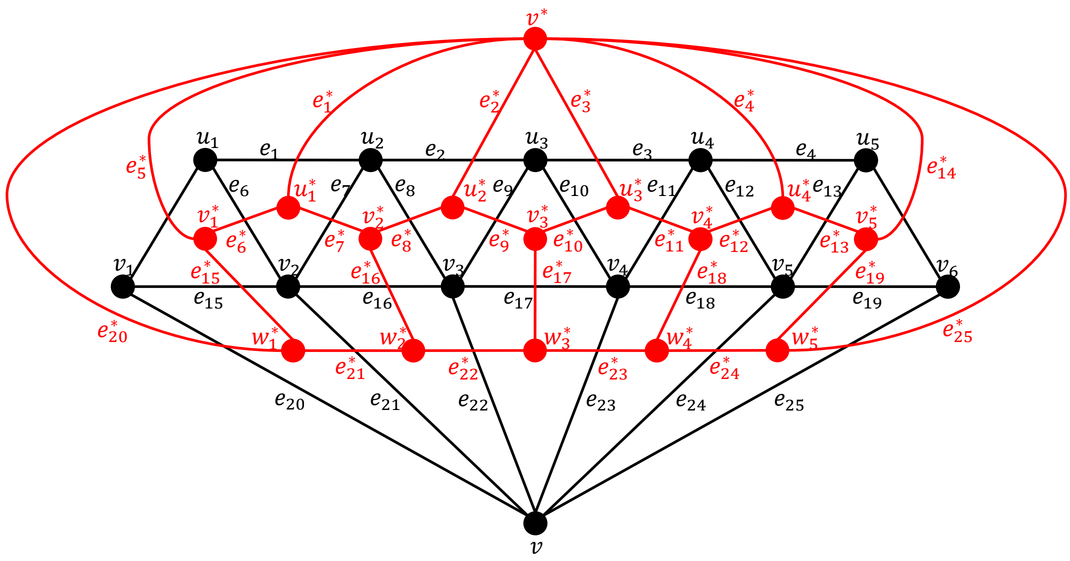
$E(Br_6) = \{e_1, \dots, e_{25}\}$

$e(Br_6) = 25$

$F(Br_6) = \{f_1, \dots, f_{15}\}$

$f(Br_6) = 15$

Pada gambar di bawah ini digambarkan graf $Br_6{}^*$.



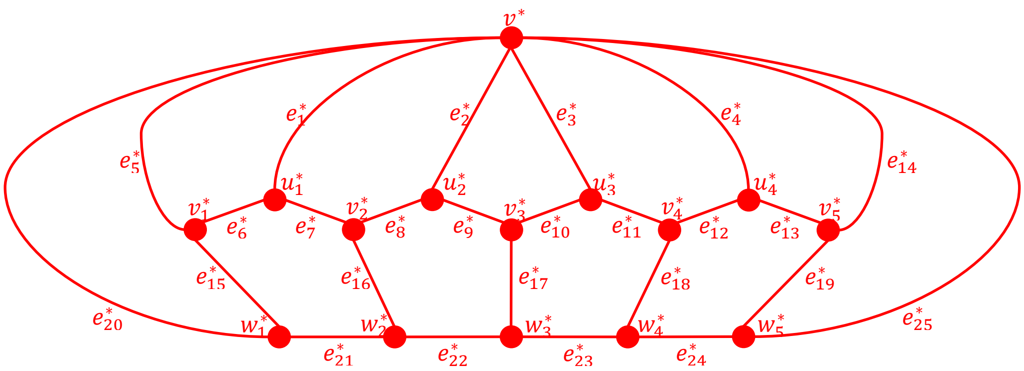
Gambar 3.18 Graf Berlian Br_6 dan Dual dari Graf Berlian $Br_6{}^*$

Misalkan graf $Br_6{}^*$ yang merupakan dual dari graf Br_6 dibentuk dengan membuat titik $v^*, u_1{}^*, \dots, u_4{}^*, v_1{}^*, \dots, v_5{}^*, w_1{}^*, \dots, w_5{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_6 (termasuk satu titik di wilayah luar graf Br_6). Dua titik pada graf $Br_6{}^*$ yang mewakili dua wilayah di graf Br_6 terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Akibatnya, sisi pada graf $Br_6{}^*$ memotong sisi dari graf Br_6.

- Titik v^* dan $u_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi oleh sisi yang sama, yaitu sisi e_1. Sehingga, dapat dibentuk sisi $e_1{}^*$ yang memotong sisi e_1.
- Titik v^* dan $u_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_2. Dapat dibentuk sisi $e_2{}^*$ yang memotong sisi e_2.
- Titik v^* dan $u_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_3. Dapat dibentuk sisi $e_3{}^*$ yang memotong sisi e_3.

- Titik v^* dan $u_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_4. Dapat dibentuk sisi $e_4{}^*$ yang memotong sisi e_4.
- Titik v^* dan $v_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_5. Dapat dibentuk sisi $e_5{}^*$ yang memotong sisi e_5.
- Titik $v_1{}^*$ dan $u_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_6. Dapat dibentuk sisi $e_6{}^*$ yang memotong sisi e_6.
- Titik $u_1{}^*$ dan $v_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_7. Dapat dibentuk sisi $e_7{}^*$ yang memotong sisi e_7.
- Titik $v_2{}^*$ dan $u_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_8. Dapat dibentuk sisi $e_8{}^*$ yang memotong sisi e_8.
- Titik $u_2{}^*$ dan $v_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_9. Dapat dibentuk sisi $e_9{}^*$ yang memotong sisi e_9.
- Titik $v_3{}^*$ dan $u_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{10}. Dapat dibentuk sisi $e_{10}{}^*$ yang memotong sisi e_{10}.
- Titik $u_3{}^*$ dan $v_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{11}. Dapat dibentuk sisi $e_{11}{}^*$ yang memotong sisi e_{11}.
- Titik $v_4{}^*$ dan $u_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{12}. Dapat dibentuk sisi $e_{12}{}^*$ yang memotong sisi e_{12}.
- Titik $u_4{}^*$ dan $v_5{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{13}. Dapat dibentuk sisi $e_{13}{}^*$ yang memotong sisi e_{13}.
- Titik v^* dan $v_5{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{14}. Dapat dibentuk sisi $e_{14}{}^*$ yang memotong sisi e_{14}.
- Titik $v_1{}^*$ dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{15}. Dapat dibentuk sisi $e_{15}{}^*$ yang memotong sisi e_{15}.

- Titik $v_2{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{16}. Dapat dibentuk sisi $e_{16}{}^*$ yang memotong sisi e_{16}.
- Titik $v_3{}^*$ dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{17}. Dapat dibentuk sisi $e_{17}{}^*$ yang memotong sisi e_{17}.
- Titik $v_4{}^*$ dan $w_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{18}. Dapat dibentuk sisi $e_{18}{}^*$ yang memotong sisi e_{18}.
- Titik $v_5{}^*$ dan $w_5{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{19}. Dapat dibentuk sisi $e_{19}{}^*$ yang memotong sisi e_{19}.
- Titik v^* dan $w_1{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{20}. Dapat dibentuk sisi $e_{20}{}^*$ yang memotong sisi e_{20}.
- Titik $w_1{}^*$ dan $w_2{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{21}. Dapat dibentuk sisi $e_{21}{}^*$ yang memotong sisi e_{21}.
- Titik $w_2{}^*$ dan $w_3{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{22}. Dapat dibentuk sisi $e_{22}{}^*$ yang memotong sisi e_{22}.
- Titik $w_3{}^*$ dan $w_4{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{23}. Dapat dibentuk sisi $e_{23}{}^*$ yang memotong sisi e_{23}.
- Titik $w_4{}^*$ dan $w_5{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{24}. Dapat dibentuk sisi $e_{24}{}^*$ yang memotong sisi e_{24}.
- Titik v^* dan $w_5{}^*$ terhubung langsung dan dibatasi sisi e_{25}. Dapat dibentuk sisi $e_{25}{}^*$ yang memotong sisi e_{25}.



Gambar 3.19 Dual dari Graf Berlian $Br_6{}^*$

Titik-titik graf $Br_6{}^*$ digambarkan berwarna merah, sedangkan sisi-sisi graf $Br_6{}^*$ digambarkan dengan garis berwarna merah.

Didefinisikan dual dari graf berlian Br adalah Br^*. Misalkan $v^*, u_i{}^*$, $v_i{}^*, w_i{}^*$ adalah titik dari dari graf dual dan e^* adalah sisi yang menghubungkan antar $v^*, u_i{}^*, v_i{}^*, w_i{}^*$ dari graf dual. Maka diperoleh

$V(Br_6{}^*) = \{v^*, u_1{}^*, \dots, u_4{}^*, v_1{}^*, \dots, v_5{}^*, w_1{}^*, \dots, w_5{}^*\}$

$|V(Br_6{}^*)| = 15$

$E(Br_6{}^*) = \{e_1{}^*, \dots, e_{25}{}^*\}$

$|E(Br_6{}^*)| = 25$

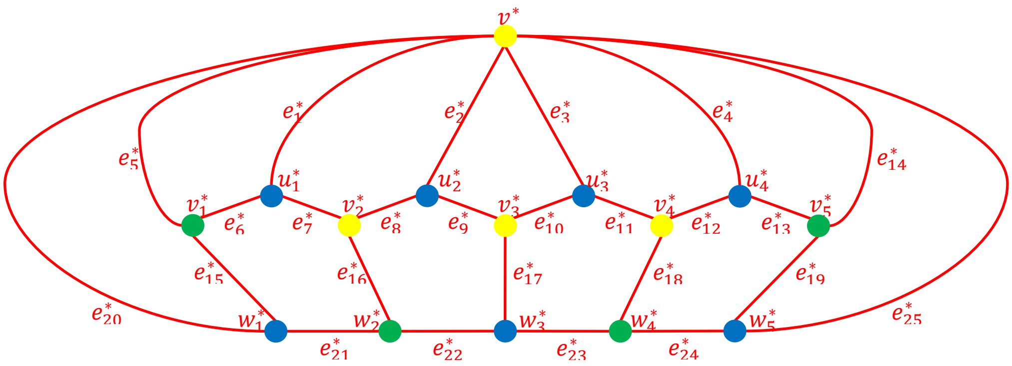
Dari hasil di atas, diketahui bahwa $F(Br_6) = V(Br_6{}^*) = 15$ dan $E(Br_6) = E(Br_6{}^*) = 25$.

Langkah-langkah pewarnaan titik pada dual dari graf berlian $Br_6{}^*$:

1. Titik v^* diberi warna 1 (kuning).
2. Titik $v_2{}^*, v_3{}^*$, dan $v_4{}^*$ diberi warna 1 (kuning).
3. Titik $v_1{}^*$ diberi warna 2 (hijau). Warnai titik lain yang belum diwarnai dan tidak terhubung langsung dengan titik $v_1{}^*$. Titik $v_5{}^*, w_2{}^*$, dan $w_4{}^*$ dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik $v_1{}^*$.

4. Titik $u_1{}^*$ diberi warna 3 (biru). Warnai titik lain yang belum diwarnai dan tidak terhubung langsung dengan titik $u_1{}^*$. Titik $u_2{}^*, u_3{}^*, u_4{}^*, w_1{}^*, w_3{}^*$, dan $w_5{}^*$ dapat diwarnai dengan warna yang sama dengan titik $u_1{}^*$.

Graf $Br_6{}^*$ dapat diwarnai dengan 3 warna, maka $\chi(Br_6{}^*) = 3$.



Gambar 3.20 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian $Br_6{}^*$

Dari hasil penelitian ini diperoleh data sebagai berikut

***Tabel 3.1** Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian*

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{V(Br_n{}^*)}$	$\boldsymbol{\chi(Br_n{}^*)}$
2	3	3
3	6	4
4	9	3
5	12	3
6	15	3

Keterangan:

n = banyaknya titik v pada graf berlian

$V(Br_n{}^*)$ = Banyak titik dari dual graf berlian

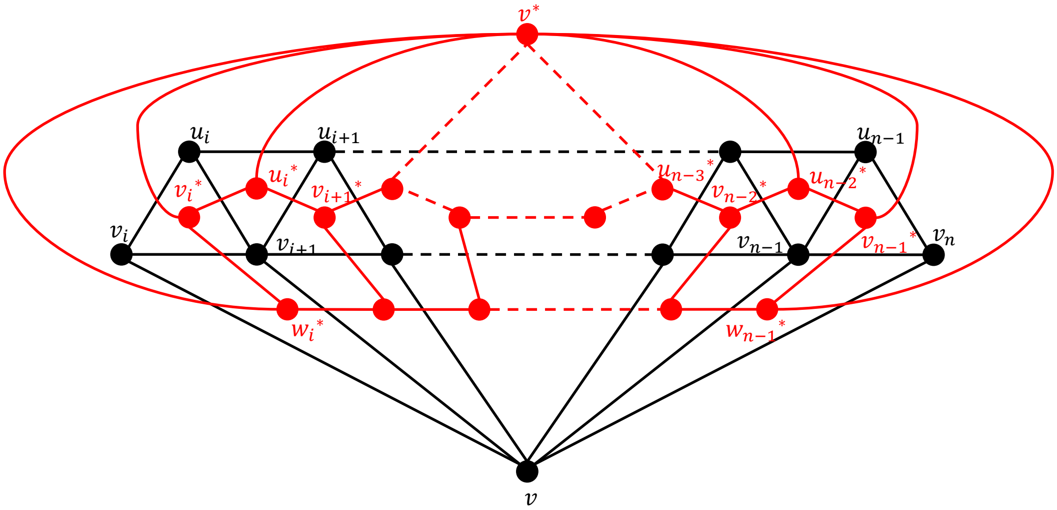
$\chi(Br_n{}^*)$ = bilangan kromatik titik dari dual graf berlian

Berdasarkan tabel di atas, maka diperoleh dugaan bahwa bilangan kromatik titik dari dual graf berlian adalah sebagai berikut

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ dan } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

3.2 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian

Perhatikan gambar dual dari graf berlian $Br_n{}^*$ berikut.



Gambar 3.21 Dual dari Graf Berlian $Br_n{}^*$

Misalkan v^* adalah titik yang mewakili wilayah yang tidak terbatas yang terdapat di luar graf.

Misalkan $u_i{}^*$, untuk $i = 1,2,\dots,n-2$ didefinisikan sebagai titik yang mewakili wilayah yang dibangun oleh titik $u_i, u_{i+1}, v_{i+1} \in V(Br_n)$.

Misalkan $v_i{}^*$, $i = 1,2,\dots,n-1$ didefinisikan sebagai titik yang mewakili wilayah yang dibangun oleh titik $v_i, v_{i+1}, u_i \in V(Br_n)$.

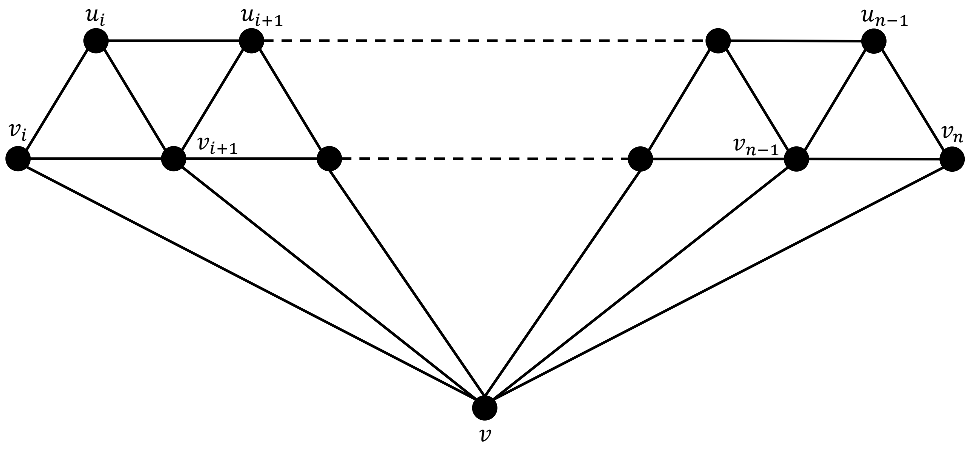
Misalkan $w_i{}^*$, untuk $i = 1,2,\dots,n-1$ didefinisikan sebagai titik yang mewakili wilayah yang dibangun oleh titik $v, v_i, v_{i+1} \in V(Br_n)$.

Teorema 3.1 *Bilangan kromatik titik dari dual graf berlian adalah*

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \; dan \; n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

Bukti.

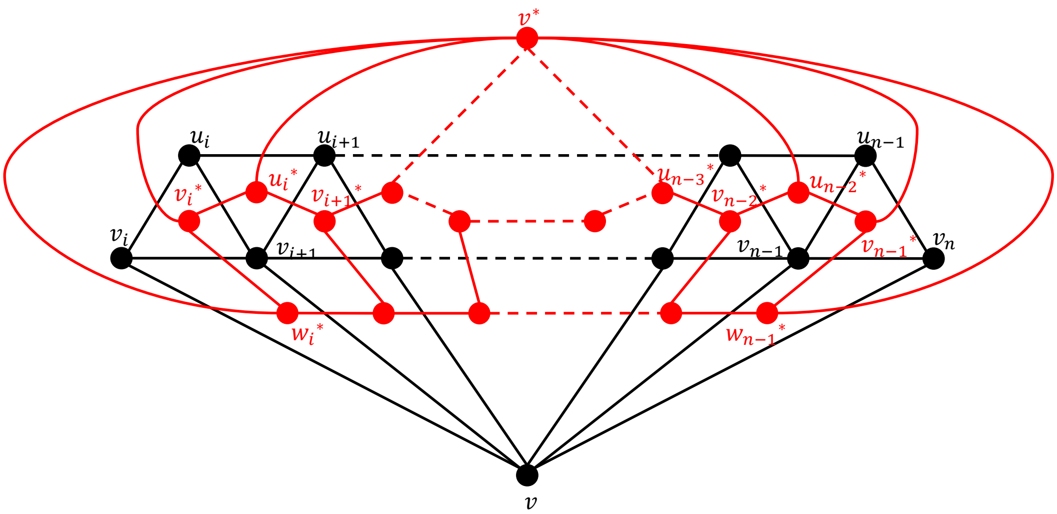
Misalkan graf berlian Br_n digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.22 Graf Berlian Br_n

Dari gambar di atas, diketahui $V(Br_n) = \{u_1, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}, v_1, v_{i+1}, \dots v_n\}$.

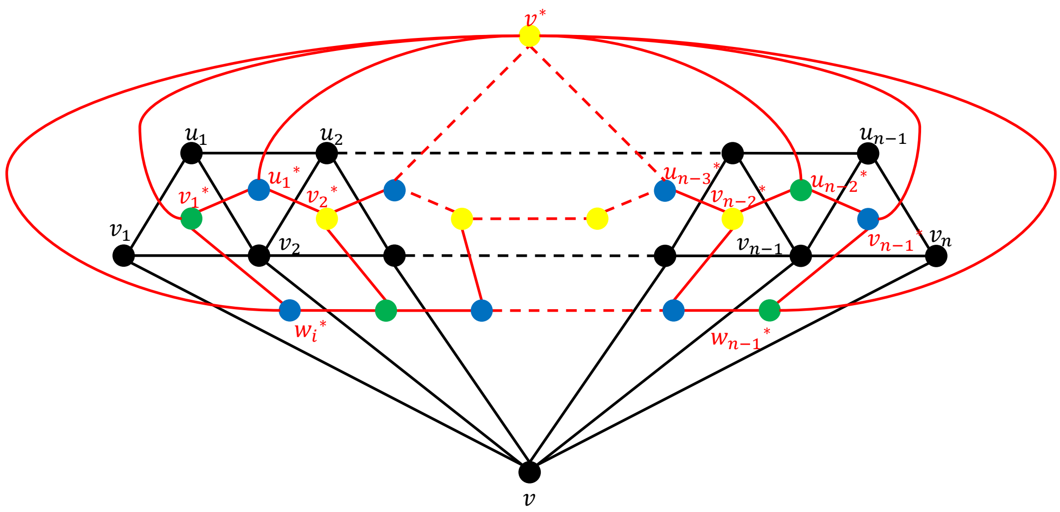
Selanjutnya, akan dibentuk dual dari graf berlian $Br_n{}^*$. Misalkan graf $Br_n{}^*$ yang merupakan dual dari graf berlian Br_n, dibentuk dengan membuat titik $u_i{}^*, \dots, u_n{}^*, v_i{}^*, \dots, v_{n-1}{}^*, w_i{}^*, \dots, w_{n-1}{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_n (termasuk satu wilayah di wilayah luar graf Br_n). Dua titik pada graf $Br_n{}^*$ yang mewakili dua wilayah terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama.



Gambar 3.23 Dual dari Graf Berlian $Br_n{}^*$

Didefinisikan dual dari graf berlian Br_n adalah $Br_n{}^*$. Misalkan $u_i{}^*, \dots, u_n{}^*, v_i{}^*, \dots, v_{n-1}{}^*, w_i{}^*, \dots, w_{n-1}{}^*$ adalah titik dual dari graf berlian. Selanjutnya akan dilakukan pewarnaan titik pada graf $Br_n{}^*$. Dua titik yang saling terhubung langsung atau bertetangga harus diberi warna berbeda. Berikut digambarkan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian $Br_n{}^*$.

1. Bilangan kromatik titik dari dual graf $Br_n{}^*$, untuk n ganjil.



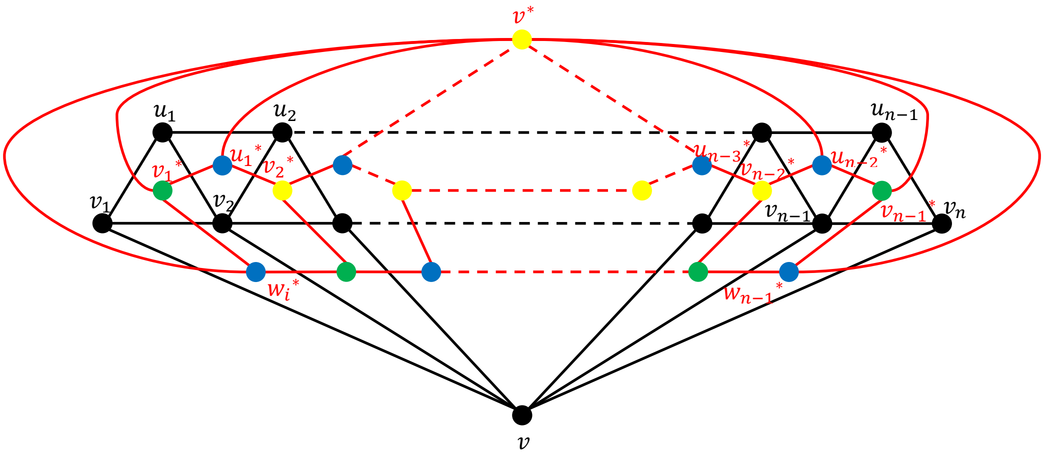
Gambar 3.24 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian $Br_n{}^*$, untuk n Ganjil

Dari gambar di atas, diketahui bahwa tidak terdapat dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna sama.

- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_i{}^*$, untuk $i = 1,2,3, \dots, n-3$ selalu berwarna 3 (biru).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_1{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_1{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau).

- Titik v^* bertetangga dengan titik $w_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik w^* selalu berwarna 3 (biru) jika ganjil.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_{n-2}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_{n-2}{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau) jika ganjil.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_{n-1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_{n-1}{}^*$ selalu berwarna 3 (biru) jika ganjil.
- Titik $u_i{}^*$ bertetangga dengan titik $v_{i+1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik $u_i{}^*$ selalu berwarna 3 (biru) dan titik $v_{i+1}{}^*$ selalu berwarna 1 (kuning).

2. Bilangan kromatik titik dari dual graf berlian $Br_n{}^*$, untuk n genap.

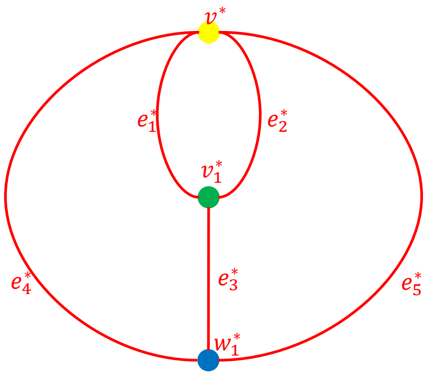


Gambar 3.25 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian $Br_n{}^*$, untuk n Genap

Dari gambar di atas, diketahui bahwa tidak terdapat dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna sama.

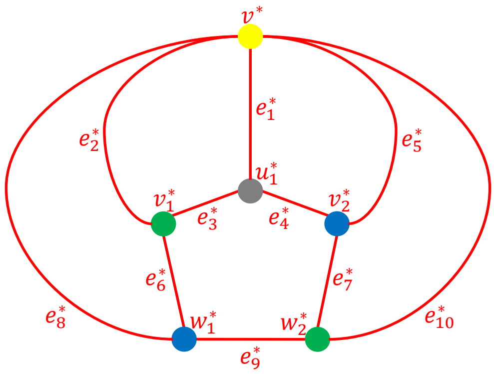
- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_i{}^*$, untuk $i = 1,2,3, \dots, n-3$ selalu berwarna 3 (biru).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_1{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_1{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $w_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik w^* selalu berwarna 2 (biru) jika genap.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_{n-2}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_{n-2}{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau) jika genap.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_{n-1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_{n-1}{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau) jika genap.
- Titik $u_i{}^*$ bertetangga dengan titik $v_{i+1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik $u_i{}^*$ selalu berwarna 3 (biru) dan titik $v_{i+1}{}^*$ selalu berwarna 1 (kuning).

Misal untuk $n = 2$, telah diketahui bahwa $\chi({Br_2}^*) = 3$.



Gambar 3.26 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian ${Br_2}^*$

Untuk $n = 3$, telah diketahui bahwa $\chi({Br_3}^*) = 4$.



Gambar 3.27 Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian ${Br_3}^*$

Untuk $n \geq 4$, definisikan $x: V({Br_n}^*) \to \mathbb{N}$ dengan

$x(v^*) = 1$

$x({u_i}^*) = 3, i = 1,2,3, \dots, n-3$

$$x({u_{n-2}}^*) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

$x({v_1}^*) = 2$

$x({v_i}^*) = 1, i = 2,3, \dots, n-2$

$$x({v_{n-1}}^*) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$x({w_i}^*) = \begin{cases} 2, & \text{jika } i \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Kerena titik-titik yang terhubung langsung telah diwarnai dengan warna berbeda, maka x merupakan fungsi pewarnaan titik sejati pada $Br_n{}^*$. Dengan demikian

$$\chi(Br_n{}^*) \leq 3. \quad (1)$$

Karena titik-titik $u_1{}^*, v_1{}^*, v^*$ membentuk suatu C_3, maka

$$\chi(Br_n{}^*) \geq 3. \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa $\chi(Br_n{}^*) = 3, \forall n \geq 4$.

Dengan demikian

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n \neq 3 \\ 4, & \text{jika } n = 3. \end{cases}$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik dari dual graf berlian adalah sebagai berikut

$$\chi({Br_n}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ dan } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

4.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan yang telah diambil, penulis memberikan saran untuk penelitian selanjutnya dapat menentukan bilangan kromatik titik dari dual graf lain. Selain itu dapat melakukan pewarnaan menggunakan program untuk mempermudah proses pewarnaan.

DAFTAR RUJUKAN

Al-Khalidi, S. A. F. 2017. *Mudah Tafsir Ibnu Katsir (Jilid 4)*. Jakarta: Maghfirah Pustaka.

Al-Qur'an Terjemahan. 2015. *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.

Az-Zuhaili, W. 2016. *Tafsir Al-Munir (Jilid 8)*. Jakarta: Gema Insani.

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. 2008. *Graduate Texts in Mathematics: Graph Theory*. Springer.

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graf & Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., and Zhang, P. 2016. *Graphs & Digraphs (6th ed)*. Boca Raton: Chapman & Hall/RC.

Gross, J. L., Yellen J., and Anderson, M. 2019. *Graph Theory and Its Applications (3rd ed)*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Hinding, N., Firmayasari, D., Basir, H., Bača, M., and Semaničová-Feňovčíková, A. 2018. *On Irregularity Strength of Diamond Network*, *15(3)* 291-297. http://doi.org/10.1016/j.akcej.2017.10.003

Javedankherad, M., Zeinalpour-Yazdi, Z., and Ashtiani, F. 2020. *Content Placement in Cache Networks Using Graph Coloring*, *14(3)*, 3129-3138. https://doi.org/10.1109/JSYST.2020.2978105

Lipschutz, S. and Lipson, M. L. (Ed). 2007. *Theory and Problems of Discrete Mathematics (3rd ed.)*. Schaum's Outlines. United States: McGraw-Hill.

Rosen, K. H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications (7th ed)*. United States: The McGraw-Hill Companies.

Syafnur, M. R., Yulianti, L. dan Welyyanti, D. 2018. *Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Berlian* Br_n *untuk* $n = 3$ *dan* $n = 4$, *7(2)*, 105-111.

Wilson, R. J. 1996. *Introduction to Graph Theory (4th ed)*. England: Addison Wasley Longman Limited.

Wilson, R. J. and Watkins, J. J. 1990. *Graph An Introductory Approach*. Terjemahan: Theresia M.H. Tirta. Surabaya: IKIP Surabaya University Press. 376 hal.

RIWAYAT HIDUP

Nurul Hafidhoh Anwar, lahir di Kota Mojokerto pada tanggal 03 Juni 1999, tinggal di Desa Kemadu RT/RW 02/04, Desa Kemadu, Kec. Sulang, Kab. Rembang. Putri pertama dari Bapak Khairul Anwar, S.E dan Ibu Khalimah.

Pendidikan taman kanak-kanak ditempuh di TK Peni dan lulus pada tahun 2005, setelah itu menempuh pendidikan dasar di SDN Kemadu dan lulus pada tahun 2011, selanjutnya menempuh jenjang pendidikan menengah pertama di MTs Raudlatul Ulum Guyangan Trangkil Pati dan lulus pada tahun 2014, kemudian menempuh jenjang pendidikan menengah atas di MA Unggulan K.H. Abd Wahab Hasbullah Bahrul Ulum Tambakberas Jombang dan lulus pada tahun 2017. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif dalam mengembangkan kemampuan akademiknya dengan menjadi koordinator akademik bidang aljabar di komunitas Serambi Matematika Aktif (SeMatA), anggota Mathematics English Club (MEC), dan Komunitas Alfarazi Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurul Hafidhoh Anwar
NIM : 17610044
Fakultas/Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II : Dewi Ismiarti, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Maret 2021	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	05 April 2021	Konsultasi Bab II dan Bab III	2.
3.	09 April 2021	Revisi Bab III	3.
4.	07 Mei 2021	Konsultasi Bab II dan Revisi Bab III	4.
5.	17 Juni 2021	Revisi Bab II	5.
6.	25 Juni 2021	Konsultasi Bab I dan Bab III	6.
7.	27 Agustus 2021	Konsultasi Bab III	7.
8.	18 September 2021	Revisi Bab III	8.
9.	29 Oktober 2021	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III dan Kajian Agama	9.
10.	05 November 2021	Revisi Bab II, Kajian Agama, dan ACC Seminar	10.
11.	19 November 2021	Revisi Kajian Agama	11.
12.	23 November 2021	Konsultasi Bab III dan Bab IV	12.
13.	28 November 2021	Konsultasi Bab III, Bab IV, dan Abstrak	13.
14.	29 November 2021	ACC Kajian Agama	14.
15.	30 November 2021	ACC keseluruhan	15.

Malang, 23 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005