IMPLEMENTASI METODE TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD ROFIUL HAMIM
NIM. 15610121

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

IMPLEMENTASI METODE TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
MUHAMMAD ROFIUL HAMIM
NIM. 15610121

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

IMPLEMENTASI METODE TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

Oleh
MUHAMMAD ROFIUL HAMIM
NIM. 15610121

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 26 Maret 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Heni Widayani, M.Si	Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229	NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

IMPLEMENTASI METODE TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

Oleh
MUHAMMAD ROFIUL HAMIM
NIM. 15610121

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 Juni 2021

Penguji Utama	:	Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Juhari, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

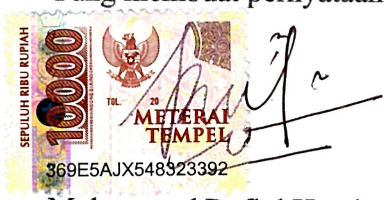
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	: Muhammad Rofiul Hamim
NIM	: 15610121
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Implementasi Metode Transformasi Laplace Ganda pada Penyelesaian Persamaan Telegraf

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Oktober 2021
Yang membuat pernyataan



Muhammad Rofiul Hamim
NIM. 15610121

MOTTO

"Kebodohan itu merusak, tapi sok pintar itu lebih merusak"

\- Gus Baha

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Muhammad Hambali dan Ibunda Sutinah yang senantiasa ikhlas dan sabar mendoakandan memberi dukungan yang berlimpah, serta semua guru maupun dosen yang telah mendidik penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas berkat rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa kita dari jalan kegelapan meuju jalan yang terang benderang yakni agam Islam yang sempurna.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta saran dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih banyak kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA. Selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang sabar dan telaten membantu dan memberi arahan, nasihat dan pengalaman berharga bagi penulis.
5. Dr. Usman pagalay, M.Sc, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak Memberikan arahan dan ilmunya kepada penulis.
6. Ari Kusumawati, M.Si, M.Pd, selaku dosen penguji I yang telah banyak memberi saran kepada penulis.
7. Juhari, M.Si, selaku dosen penguji II yang telah banyak memberikan masukan kepada penulis.
8. Dosen Program Studi Matematika yang sabar mendidik penulis.
9. Kedua orang tua penulis yang selalu mengingatkan sholat dan terus belajar.
10. Rekan Program Studi Matematika yang bersedia meluangkan waktu dan pikiran untuk diskusi tentang penyusunan skripsi ini.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 Oktober 2021

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Hamim, Muhammad Rofiul. 2021. **Implementasi Metode Transformasi Laplace Ganda pada Penyelesaian Persamaan Telegraf.** Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing:(I) Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata kunci: eksak, metode transformasi laplace ganda, persamaan telegraf, persamaan diferensial parsial

Penelitian ini mengkaji tentang penyelesaian persamaan telegraf linier maupun nonlinier dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda. Metode transformasi laplace ganda merupakan pengembangan dari konsep metode transformasi laplace yang diperkenalkan oleh Pierre-Simon. Metode tersebut digunakan untuk menentukan solusi eksak dari persamaan diferensial parsial dengan mentransformasikan fungsi $f(x,t)$ menjadi $\bar{f}(p,s)$, dimana p dan s merupakan bilangan kompleks. Langkah pertama dari metode ini adalah mentransformasikan fungsi $f(x,0)$ ke fungsi $f(p,0)$ yang diketahui dari kondisi awal. Kemudian mentransformasikan fungsi $f(0,t)$ ke fungsi $f(0,q)$ yang diketahui dari kondisi batas. Langkah berikutnya yaitu mensubtitusikan hasil transformasi kondisi awal dan kondisi batas ke dalam persamaan diferensial parsial, dalam penelitian ini menggunakan persamaan telegraf. Selanjutnya menerapkan invers transformasi laplace ganda pada persamaan telegraf linier, sedangkan persamaan telegraf nonlinier membutuhkan metode iterativ untuk mempermudah dalam menerapkan invers transformasi laplace ganda. Setelah itu didapatkan solusi eksak dari persamaan telegraf. Langkah terakhir yaitu mengkonfirmasi atau menguji solusi eksak yang didapatkan dari persamaan telegraf. Kemudian didapatkan hasil atau solusi eksak yang sudah valid. Berdasarkan langkah-langkah tersebut dapat disimpulkan bahwa metode transformasi laplace ganda dapat diimplementasikan pada penyelesaian persamaan telegraf linier maupun nonlinier.

ABSTRACT

Hamim, Muhammad Rofiul. 2021. **Implementation of the Double Laplace Transform Method on the Telegraph Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors:(I) Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keywords: exact, double laplace transform method, telegraph equation, partial differential equation

This study examines the solution of linear and nonlinear telegraph equations using the double laplace transformation method. The double laplace transformation method is a development of the concept of the laplace transformation method introduced by Pierre-Simon. The method is used to determine the exact solution of the partial differential equation by transforming the function $f(x,t)$ to $\bar{f}(p,s)$, where p and s are complex numbers. The first step of this method is to transform the function $f(x,0)$to the function $f(p,0)$which is known from the initial conditions. Then transform the function $f(0,t)$ to the function $f(0,q)$ which is known from the boundary conditions. The next step is to substitute the results of the transformation of the initial conditions and boundary conditions into a partial differential equation, in this study, using the telegraph equation. Furthermore, applying the inverse double laplace transformation to the linear telegraph equation, while the nonlinear telegraph equation requires an iterative method to make it easier to apply the inverse double laplace transformation. After that, the exact solution of the telegraph equation is obtained. The last step is to confirm or test the exact solution obtained from the telegraph equation. Then obtained results or exact solutions that are already valid. Based on these steps, it can be concluded that the double laplace transformation method can be implemented in solving linear and nonlinear telegraph equations.

ملخص

الحميم، محمد رافع. 2021. **تنفيذ طريقة تحويل لابلاس (Laplace) المزدوج على معادلة التلغراف (Telegraf).** البحث الجامعي. الشعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (1) هَيني ويداياني, الماجستير.(2) الدكتور عثمان فاكالّي، الماجستير.

الكلملت الرئيسية: الضبط، تحويل لابلاس المزدوج، معادلة التلغراف، المعادلة التفاضلية الجزئية

تبحث هذه الدراسة في حل معادلات التلغراف الخطية وغير الخطية باستخدام طريقة التحويل المزدوج لابلاس. طريقة التحويل المزدوج لابلاس هي تطوير لمفهوم طريقة تحويل لابلاس التي قدمها *بيير سيمون*(Pierre-Simon). تُستخدم الطريقة لتحديد الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية الجزئية عن طريق تحويل الدالة $f(x,t)$ إلى الدالة $f(\bar{p},s)$, حيث p و s أرقام معقدة. تتمثل الخطوة الأولى في هذه الطريقة في تحويل الدالة $f(x,0)$ إلى الدالة $f(p,0)$ المعروفة من الشروط الأولية. ثم قاما بتحويل الدالة $f(0,t)$ إلى الدالة $f(0,q)$ المعروفة من شروط الحدود. الخطوة التالية هي استبدال نتائج تحويل الشروط الأولية والشروط الحدودية إلى معادلة تفاضلية جزئية ، في هذه الدراسة باستخدام معادلة التلغراف.ثم علي ذلك تطبيق تحويل لابلاس المزدوج المعكوس على معادلة التلغراف الخطية ، بينما تتطلب معادلة التلغراف غير الخطية طريقة تكرارية لتسهيل تطبيق تحويل لابلاس المزدوج العكسي. وبعد ذلك ، يتم الحصول على الحل الدقيق لمعادلة التلغراف. الخطوة الأخيرة هي تأكيد أو اختبار الحل الدقيق الذي تم الحصول عليه من معادلة التلغراف. ثم تم الحصول على النتائج أو الحلول الدقيقة الصالحة بالفعل. بناءً على هذه الخطوات ، يمكن استنتاج أن طريقة التحويل المزدوج لابلاس يمكن تنفيذها في حل معادلات التلغراف الخطية وغير الخطية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai persoalan dalam kehidupan ini dapat dijawab dan ditemukan solusinya dengan menggunakan matematika. Oleh karena itu, matematika mempunyai bidang yang meimplementasikan persoalan dunia nyata ke dalam rumus matematis, sehingga diperoleh solusi atau jawaban dengan mudah. Bidang tersebut dikenal dengan pemodelan matematika.

Proses pemodelan matematika menghasilkan pola matematika yang disebut model matematika. Model matematika sendiri banyak digunakan untuk menjawab problem berbagai disiplin ilmu seperti fisika, biologi, kedokteran, teknik, ekonomi, ilmu sosial, politik dan jaringan komputer. Karena model matematika digunakan dalam berbagai bidang ilmu yang berbeda, maka pola pendekatan model matematika terhadap berbagai bidang ilmu tersebut tentunya berbeda. Oleh karena itu, dibutuhkan persamaan diferensial untuk mengkonstruksi beberapa model matematika, khususnya pada bidang mekanika getaran dan dinamika populasi.

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang mengandung turunan terhadap satu atau lebih variable bebas Al-Badrani (2016). Kemudian menurut Debnath dan Dambaru (2007) berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua kategori, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Jika turunan fungsi hanya memuat satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika turunan fungsi memuat lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial.

Salah satu contoh persamaan diferensial parsial adalah persamaan telegraf. Persamaan telegraf merupakan persamaan yang dapat diaplikasikan dalam beberapa hal, terutama dalam analisis sinyal untuk transmisi dan propagasi sinyal listrik. Salah satu persamaan telegraf adalah penyelesaian masalah sistem komunikasi yang melibatkan transmisi sinyal dari satu titik ke titik lain. Hal ini seperti peristiwa kilat yang terjadi di atmosfer disebabkan oleh pelepasan muatan listrik negatif maupun positif. Pelepasan muatan listrik tersebut terjadi akibat perbedaan tegangan yang cukup besar. Pelepasan tersebut bisa terjadi dalam satu awan, antar awan maupun dari awan ke bumi (Septiadi, dkk:2011). Peristiwa kilat tersebut juga dijelaskan dalam (Q.S. Ar-Rad :12).

هُو َالَّذيْ يُرِيْكُمُ الْبَرْقَ خَوْفًا وَّ طَمَعًا وَّ يُنْشِئُ السَّحَابَ الثِّقَالَ

***Artinya** : “Dia-lah Tuhan yang memperlihatkan kilat kepadamu untuk menimbulkan kekuatan dan harapan, dan Dia mengadakan awan mendung”.*

Studi lebih lanjut tentang persamaan telegraf seperti penelitian yang dilakukan oleh Hassan Eltayeb dan Adem Kilicman (2018), yang hanya meneliti tentang solusi analitik dari persamaan telegraf linier menggunakan metode transformasi laplace ganda dengan langkah - langkah yang terbatas.

Metode transformasi laplace ganda sendiri merupakan pengembangan dari konsep metode transformasi laplace yang diperkenalkan oleh Pierre-Simon Laplace untuk menyederhana suatu persamaan. Metode transformasi laplace ganda digunakan untuk menentukan solusi analitik dari persamaan diferensial parsial dengan mentransformasikan fungsi $f(x,t)$ menjadi $\bar{\bar{f}}(p,s)$, dimana p dan s merupakan bilangan kompleks. Metode transformasi laplace ganda dinilai sebagai metode yang sederhana dengan solusi eksaknya dapat diperiksa kebenerannya.

Berdasarkan pemaparan di atas, pada penelitian ini akan fokus mengkaji tentang solusi eksak dari persamaan telegraf linier maupun nonlinier menggunakan metode transformasi laplace ganda. Sehingga penelitian ini berjudul "Implementasi Metode Transformasi Laplace Ganda pada Persamaan Telegraf".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan telegraf linier dan nonlinier menggunakan metode transformasi laplace ganda?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui penyelesaian persamaan telegraf linier dan nonlinier menggunakan metode transformasi laplace ganda.

1.4 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat penelitian ini diantaranya sebagai berikut

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini diharapkan dapat memperdalam pemahaman penulis tentang analisis transformasi laplace ganda sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan telegraf.

2. Bagi Pembaca

   Penelitian ini diharapkan menambah wawasan pembaca tentang analisis transformasi laplace ganda sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial, sekaligus sebagai refrensi untuk mencari solusi analitik dari persamaan telegraf.

3. Bagi Program Studi Matematika

   Sabagai tambahan bahan pustaka di bidang matematika terapan yang dapat dimanfaatkan sebagai refrensi dan perkembangan ilmu pengetahuan.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi dua persamaan diferensial parsial satu dimensi dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda. Persamaan-persamaan yang digunakan diambil dari beberapa referensi.

Persamaan pertama yaitu persamaan telegraf linier yang diambil dari jurnal yang ditulis oleh Eltayeb (2016):

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t - u = -2e^{x+t}$$

kondisi awal $u(0,t) = e^t$ $u_x(0,t) = e^t$

kondisi batas $u(x,0) = e^x$ $u_t(x,0) = e^x$

Persamaan kedua yaitu persamaan telegraf nonlinier yang diambil dari hasil modifikasi persamaan telegraf linier pada penelitian ini, persamaannya sebagai berikut: $u_{xx} - u_{tt} - u_t = u^2 - e^{2(x+t)} - e^{x+t}$

kondisi awal $u(0,t) = e^t$ $u_x(0,t) = e^t$

kondisi batas $u(x,0) = e^x$ $u_t(x,0) = e^x$

1.6 Metode Penelitian

Teknik penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*). Merujuk pada Dhunde (2016), adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mentransformasikan fungsi $f(x,0)$ ke fungsi $f(p,0)$ yang diketahui dari kondisi awal.
2. Mentransformasikan fungsi $f(0,t)$ ke fungsi $f(0,q)$ yang diketahui dari kondisi batas.

3. Mensubtitusikan hasil transformasi kondisi awal dan batas ke dalam persamaan diferensial parsial.
4. Mendapatkan solusi dari invers transformasi laplace ganda pada persamaan diferensial parsial. Khusus untuk persamaan diferensial parsial nonlinier dibutuhkan metode iterativ untuk mempermudah mendapatkan hasil invers transformasi laplace ganda.
5. Memeriksa solusi yang didapat dengan mensubtitusikannya ke dalam persamaan diferensial parsial tersebut.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan penulis terdiri dari empat bab yang masing-masing terdapat beberapa subbab seperti berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang definisi maupun teorema teorema yang mendukung topik yaitu definisi metode transformasi laplace, definisi metode transformasi laplace ganda, identifikasi persamaan telegraf nonlinier, identifikasi persamaan dinamika gas nonlinier serta kajian agama yang akan dipakai dalam pembahasan.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang aplikasi metode transformasi laplace ganda pada persamaan diferensial parsial nonlinier serta membahas tentang kajian keagamaan.

Bab IV Penutup

Bab ini menyajikan poin poin hasil dari pembahasan secara garis besar berupa kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Metode Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ dengan $t \geq 0$ dan f memenuhi kondisi tertentu. Kemudian transformasi laplace dari f, yang ditulis $L\{f(t)\}$ atau $F(s)$ didefinisikan Kreyszig (2011).

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.1}$$

dimana e^{-st} merupakan kernel dari transformasi dan s variabel transformasi yang merupakan bilangan kompleks.

Debanth (2007) dalam bukunya mendefinisikan Invers dari transformasi laplace sebagai berikut.

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)ds \text{ dengan } c > 0 \tag{2.2}$$

Berikut ini adalah sifat-sifat dari transformasi laplace Naphade (2017).

a. Linieritas $\quad L\{af(t) + bg(t) \ = aF(s) + bG(s)$

b. Penskalaan dalam waktu $\quad L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

c. Sifat Perubahan Pertama $\quad L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$

d. Perkalian t^n $\quad L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$

e. Sifat Integral $\quad L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

f. Sifat Diferensial $\quad L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$

g. Integral Frekuensi $\quad L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty F(s)\, ds$

2.2 Metode Transformasi Laplace Ganda

Solusi eksak dari persamaan nonlinier klein-gordon menggunakan metode transformasi laplace ganda dan iterativ pernah diteliti oleh Dhunde,dkk (2016), di dalam jurnalnya menjelaskan definisi transformasi laplace ganda.

Sebuah fungsi $f(x,t)$ adalah fungsi dua variabel x dan t didefinisikan di quadran pertama bidang $x-t$.

$$L_tL_x\{f(x,t)\} = F(p,s) = \int_0^\infty e^{-px}\int_0^\infty e^{-st} f(x,t)dtdx \qquad (2.3)$$

dimana p dan s merupakan bilangan kompleks. Kemudian dari definisi disimpulkan menjadi

$$L_tL_x = \{f(x)g(t)\} = F(p)G(s) = L_x\{f(x)\}L_t\{g(t)\} \qquad (2.4)$$

Menurut Naphade (2017) transformasi laplace ganda merupakan sebuah transformasi integral linier.

$$L_2\{a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)\} = \int_0^\infty\int_0^\infty \{a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)\}\ e^{-(px+qy)}\,dxdy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty a_1f_1(x,y)\,e^{-(px+qy)}\,dxdy +$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty a_2f_2(x,y)e^{-(px+qy)}dxdy$$

$$L_tL_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1,s_2) = a_1\int_0^\infty\int_0^\infty f_1(x,y)e^{-(px+qy)}\,dxd\,y +$$

$$a_2\int_0^\infty\int_0^\infty f_2(x,y)e^{-(px+qy)}\,dxdy$$

$$L_2\{a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)\} = a_1L_1\{f_1(x,y)\} + a_2L_2\{f_2(x,y)\} \qquad (2.5)$$

dimana a_1, a_2 konstan.

Terdapat beberapa sifat transformasi laplace ganda sebagai berikut

1. Sifat Linier

   Jika $f(x,t)$ dan $g(x,t)$ merupakan dua fungsi dari x dan t sedemikian hingga

   $L_tL_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1,s_2)$ dan $L_tL_x\{g(x,t)\} = \bar{g}(s_1,s_2)$

   maka

   $$L_tL_x\{\alpha f(x,t)+\beta g(x,t)\} = \alpha L_tL_x\{f(x,t)\} + \beta L_tL_x\{g(x,t)\} \qquad (2.6)$$

   dimana α dan β konstan.

2. Sifat Penskalaan dalam Waktu

   Jika $L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1, s_2)$

   maka $L_t L_x\{f(ax, bt)\} = \frac{1}{ab}\bar{f}\left(\frac{s_1}{a}, \frac{s_2}{b}\right)$ (2.7)

   dimana a dan b konstanta.

3. Sifat Perubahan Pertama

   Jika $L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1, s_2)$

   maka $L_t L_x\{e^{ax+bt} f(x,t)\} = \bar{f}(s_1 - a, s_2 - b)$ (2.8)

   dimana a dan b konstanta.

4. Sifat Turunan

   Jika $L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1, s_2)$

   maka $L_t L_x\left\{\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(x,t)\right\} = L_t L_x\{f_{xt}(x,t)\}$ (2.9)

5. Sifat Integral

   Jika $L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1, s_2)$

   maka $L_t L_x\left\{\int_0^x \int_0^t f(u,v) du\, dv\right\} = \frac{\bar{f}(s_1, s_2)}{s_1 s_2}$ (2.10)

   dimana $s_1 > 0, s_2 > 0$

6. Sifat Perkalian

   Jika $L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1, s_2)$

   maka $L_t L_x\{xt\, f(x,t)\} = (-1)^{1+1} \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \bar{f}(s_1, s_2)$ (2.11)

7. Sifat Pembagian

   Jika $L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(s_1, s_2)$

   maka $L_t L_x\left\{\frac{f(x,t)}{xt}\right\} = \int_{s_1}^{\infty} \int_{s_2}^{\infty} (s_1, s_2) ds_1 ds_2$ (2.12)

Pembuktian sifat-sifat tersebut dapat diperoleh di jurnal Dhunde (2016).

Beberapa transformasi laplace ganda pada turunan parsial yang dijelaskan oleh Dhunde,dkk (2016) sebagai berikut.

Definisi transformasi laplace ganda untuk turunan parsial pertama terhadap x sebagai berkut $L_t L_x\{f_x(x,t)\} = p\bar{f}(p,s) - \bar{f}(0,s)$ (2.13)

sedangkan definisi transformasi laplace ganda pada turunan parsial pertama terhadap t $L_t L_x\{f_t(x,t)\} = s\bar{f}(p,s) - \bar{f}(p,0)$ (2.14)

Definsi transformasi laplace ganda pada turunan parsial kedua terhadap x

$$L_t L_x\{f_{xx}(x,t)\} = p^2\bar{f}(p,s) - p\bar{f}(0,s) - \bar{f}_x(0,s) \tag{2.15}$$

Sedangkan definisi transformasi laplace ganda pada turunan parsial kedua terhadap t

$$L_t L_x\{f_{tt}(x,t)\} = s^2\bar{f}(p,s) - s\bar{f}(p,0) - \bar{f}_t(p,0) \tag{2.16}$$

2.3 Identifikasi Persamaan Telegraf Linier

Persamaan Telegraf umumnya digunakan dalam pembelajaran gelombang dan sinyal elektrik di dalam kabel transmisi. Banyak penelitian yang menggunakan metode analitik maupun numerik untuk membuktikan persamaan telegraf.

Persamaan pertama yaitu persamaan telegraf linier yang diambil dari jurnal yang ditulis oleh Eltayeb (2016):

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t - u = -2e^{x+t}$$

kondisi awal $u(0,t) = e^t$ $u_x(0,t) = e^t$

kondisi batas $u(x,0) = e^x$ $u_t(x,0) = e^x$

2.4 Identifikasi Persamaan Telegraf Nonlinier

Persamaan kedua yaitu persamaan telegraf nonlinier yang diambil dari hasil modifikasi persamaan telegraf linier pada penelitian ini, persamaannya yaitu:

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t = u^2 - e^{2(x+t)} - e^{x+t}$$

kondisi awal $\quad u(0,t) = e^t \qquad u_x(0,t) = e^t$

kondisi batas $\quad u(x,0) = e^x \qquad u_t(x,0) = e^x$

2.5 Kajian Al-Quran

Al-Quran adalah pedoman yang tidak hanya diperuntukkan kepada manusia, namun juga untuk seluruh ciptaan Allah SWT. Allah bersumpah atas nama seluruh ciptaan-Nya di dalam al-Quran agar manusia memikirkan atau bertafakkur atas keagungan ciptaan Allah SWT. Hal ini menjadi sebab, baik al-Quran maupun kejadian-kejadian di alam raya merupakan tanda yang menunjukkan realitas Allah SWT.

Al-Quran adalah kitab suci yang lengkap karena mengandung segala ilmu pengetahuan. Al-Quran mencakup ilmu pengetahuan dari yang sudah ditemukan, sedang diteliti, maupun ilmu pengetahuan yang belum diketahui manusia.

Semua pakar dari berbagai disiplin ilmu menjadikan Al-Quran sebagai pedoman untuk mendapatkan petunjuk. Salah satu peristiwa alam yang diteliti dan terdapat dalam Al-Quran adalah kilat. Kilat merupakan peristiwa alam yang terjadi di dalam atmosfer yang disebabkan oleh pelepasan muatan listrik baik negatif maupun positif yang terdapat di dalam awan. Pelepasan muatan listrik terjadi akibat adanya perbedaan teganggan yang cukup besar. Pelepasan muatan listrik bisa terjadi dalam satu awan, antar awan maupun dari awan ke bumi (Septiadi, dkk, 2011). Allah berfirman dalam (Q.S. Ar-Rad: 12).

هُوَ الَّذِيْ يُرِيْكُمُ الْبَرْقَ خَوْفًا وَّ طَمَعًا وَّ يُنْشِئُ السَّحَابَ الثِّقَال

Artinya: *"Dia-lah Tuhan yang memperlihatkan kilat kepadamu untuk menimbulkan kekuatan dan harapan, dan Dia mengadakan awan mendung".*

Muhammad Quraish Shihab menafsirkan bahwa kekuasaan Allah di dalam alam raya ini sungguh jelas dan nyata. Dialah, misalnya, yang memperlihatkan kilat kepada kalian yang membuat kalian takut melihatnya atau khawatir akan turun hujan yang tidak kalian butuhkan lalu memusnahkan tanaman kalian. Atau sebaliknya, kilat yang membuat kalian justru sangat berharap akan turunnya hujan lebat yang kalian perlukan untuk memperbaiki tanaman kalian. Dialah pula yang membentuk gumpalan awan yang penuh dengan air hujan Shihab (2002).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang analisis penyelesaian persamaan telegraf linier maupun nonlinier dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda.

3.1 Analisis Bentuk Transformasi Laplace untuk Persamaan Telegraf Linier

Diasumsikan persamaan telegraf linier sebagai berikut:

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t - u = -2e^{x+t} \tag{3.1}$$

dengan nilai awal $u(0,t) = e^t$ (3.2)

$$u_x(0,t) = e^t \tag{3.3}$$

dan kondisi batas $u(x,0) = e^x$ (3.4)

$$u_t(x,0) = e^x \tag{3.5}$$

i. Mentransformasi nilai awal dan kondisi batas menggunakan definisi (2.3)

$$\begin{aligned} L_t L_x\{u(0,t)\} &= \bar{u}(0,s) \\ &= \int_0^\infty e^{-s(t)} \int_0^\infty e^{-p(0)}\, e^t dxdt \\ &= \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt \\ &= \frac{1}{s-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} L_t L_x\{u_x(0,t)\} &= \bar{u}_x(0,s) \\ &= \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt \\ &= \frac{1}{s-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} L_t L_x\{u(x,0)\} &= \bar{u}(p,0) \\ &= \int_0^\infty e^{-s(0)} \int_0^\infty e^{-p(x)}\, e^x dxdt \\ &= \int_0^\infty e^{(1-p)x} dx = \frac{1}{p-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$L_t L_x\{u_t(x,0)\} = u_t(p,0)$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(0)} \int_0^\infty e^{-p(x)}\, e^x dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-p)x} dx$$

$$= \frac{1}{p-1} \tag{3.9}$$

ii. Mentransformasi Persamaan (3.1) Menggunakan Definisi (2.3)

$$L_tL_x(u_{xx}) - L_tL_x(u_{tt}) - L_tL_x(u_t) - L_tL_x(u) = L_tL_x(-2e^{x+t}) \tag{3.10}$$

Untuk menghitung $L_tL_x(-2e^{x+t})$ dapat menggunakan definisi (2.3) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L_xL_t\{-2e^{x+t}\} &= -\int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} 2e^{x+t} dxdt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} 2e^x e^t dxdt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}\, e^t \int_0^\infty e^{-px} 2e^x dxdt \\ &= -2\int_0^\infty e^{(1-s)t} \int_0^\infty e^{(1-p)x} dxdt \\ &= -2\int_0^\infty e^{(1-s)t} \frac{1}{p-1} dt \\ &= -2\left(\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sehingga transformasi persamaan (3.1) didapatkan hasil sebagai berikut.

$$p^2\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s) - \{s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0)\}$$

$$-\{s\bar{u}(p,s) - \bar{u}(p,0)\} - \bar{u}(p,s) = -\frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$p^2\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s) - s^2\bar{u}(p,s) + s\bar{u}(p,0)$$

$$+\bar{u}_t(p,0) - s\bar{u}(p,s) + \bar{u}(p,0) - \bar{u}(p,s) = -\frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$(p^2 - s^2 - s - 1)\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s) + s\bar{u}(p,0)$$

$$+\bar{u}_t(p,0) + \bar{u}(p,0) = -\frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$(p^2 - s^2 - s - 1)\bar{u}(p,s) = p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0) - \bar{u}(p,0) - \frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$(p^2 - s^2 - s - 1)\bar{u}(p,s) = p\left(\frac{1}{s-1}\right) + \left(\frac{1}{s-1}\right) - s\left(\frac{1}{p-1}\right) - \left(\frac{1}{p-1}\right) - \left(\frac{1}{p-1}\right) - \frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$= (p+1)\left(\frac{1}{s-1}\right) + (-s-2)\left(\frac{1}{p-1}\right) - \frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$= \frac{p+1}{s-1} - \frac{s+2}{p-1} - \frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$= \frac{(p-1)(p+1)}{(p-1)(s-1)} - \frac{(s+2)(s-1)}{(p-1)(s-1)} - \frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$= \frac{(p^2+p-p-1)}{(p-1)(s-1)} - \frac{(s^2-s+2s-2)}{(p-1)(s-1)} - \frac{2}{(p-1)(s-1)}$$

$$= \frac{p^2-1-s^2+s-2s+2-2}{(p-1)(s-1)}$$

$$= \frac{p^2-s^2-s-1}{(p-1)(s-1)}$$

$$(p^2 - s^2 - s - 1)\bar{u}(p,s) = \frac{p^2-s^2-s-1}{(p-1)(s-1)}$$

$$\bar{u}(p,s) = \left(\frac{p^2-s^2-s-1}{(p-1)(s-1)}\right)\left(\frac{1}{p^2-s^2-s-1}\right)$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(p-1)(s-1)} \tag{3.12}$$

iii. Menerapkan Invers Transformasi laplace ganda pada Persamaan (3.12)

$$u(x,t) = L_p^{-1}L_s^{-1}\{\bar{u}(p,s)\}$$

$$= L_p^{-1}L_s^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(s-1)}\right\}$$

$$= L_p^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\}L_s^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= e^x e^t$$

$$= e^{x+t}6$$

Sehingga diperoleh solusi analitik

$$u(x,t) = e^{x+t} \tag{3.13}$$

iv. Konfirmasi Solusi Analitik

Mensubtitusi persamaan (3.13) ke dalam persamaan telegraf linier

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t - u = -2e^{x+t}$$

Subtitusi $u(x,t) = e^{x+t}$ ke persamaan di atas

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{x+t}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{x+t}) - \frac{\partial}{\partial t}(e^{x+t}) - e^{x+t} = -2e^{x+t}$$

Mencari turunan dari e^{x+t}:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(e^{x+t}) &= e^{x+t}\frac{d}{dx}(x+t) \\
&= e^{x+t}\left(\frac{dx}{dx} + \frac{dt}{dx}\right) \\
&= e^{x+t}(1+0) \\
&= e^{x+t}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{x+t}) = e^{x+t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{x+t}) &= e^{x+t}\frac{d}{dt}(x+t) \\
&= e^{x+t}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dt}{dt}\right) \\
&= e^{x+t}(0+1) \\
&= e^{x+t}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{x+t}) = e^{x+t}$$

Sehingga diperoleh $e^{x+t} - e^{x+t} - e^{x+t} - e^{x+t} = -2e^{x+t}$

$$\Leftrightarrow -2e^{x+t} = -2e^{x+t}$$

Berdasarkan pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa solusi analitik dari penyelesaian persamaan telegraf linier dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda dikatakan benar.

3.2 Analisis Bentuk Transformasi Laplace untuk Persamaan Telegraf Nonlinier

Diasumsikan persamaan telegraf nonlinier sebagai berikut:

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t = u^2 - e^{2(x+t)} - e^{x+t} \tag{3.14}$$

dengan nilai awal $u(0,t) = e^t$ (3.15)

$u_x(0,t) = e^t$ (3.16)

kondisi batas $u(x,0) = e^x$ (3.17)

$u_t(x,0) = e^x$ (3.18)

i. Mentransformasi nilai awal dan kondisi batas menggunakan definisi (2.3)

$$L_tL_x\{u(0,t)\} = \int_0^\infty e^{-s(t)} \int_0^\infty e^{-p(0)} e^t \, dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-1} \tag{3.19}$$

$$L_tL_x\{u_x(0,t)\} = \int_0^\infty e^{-s(t)} \int_0^\infty e^{-p(0)} e^t \, dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-1} \tag{3.20}$$

$$L_tL_x\{u(x,0)\} = \int_0^\infty e^{-s(0)} \int_0^\infty e^{-p(x)} e^x \, dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-p)x} dt$$

$$= \frac{1}{p-1} \tag{3.21}$$

$$L_tL_x\{u_t(x,0)\} = \int_0^\infty e^{-s(0)} \int_0^\infty e^{-p(x)} e^x \, dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-p)x} dt$$

$$= \frac{1}{p-1} \tag{3.22}$$

ii. Mentransformasi Persamaan (3.14) Menggunakan Definisi (2.3)

$$L_tL_x(u_{xx}) - L_tL_x(u_{tt}) - L_tL_x(u_t) = L_tL_x\left(u^2 - e^{2(x+t)}\right)$$
$$-L_tL_x(-e^{x+t}) \qquad (3.23)$$

Untuk menghitung $L_tL_x\{-e^{x+t}\}$ dapat menggunakan definisi (2.3) sebagai berikut:

$$L_tL_x\{-e^{x+t}\} = -\int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px}\, e^{x+t} dxdt$$
$$= -\int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px}\, e^x . e^t dxdt$$
$$= -\int_0^\infty e^{-st} . e^t \int_0^\infty e^{-px} . e^x dxdt$$
$$= -\int_0^\infty e^{(1-s)t} \int_0^\infty e^{(1-p)x}\ dxdt$$
$$= -\int_0^\infty e^{(1-s)t} . \frac{1}{p-1} dt$$
$$= -\left(\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right) \qquad (3.24)$$

sehingga transformasi persamaan (3.14) didapatkan hasil sebagai berikut.

$$p^2\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s) - \{s^2\bar{u}(p,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0)\}$$
$$-\{s\bar{u}(p,s) - \bar{u}(p,0)\} = L_tL_x\left(u^2 - e^{2(x+t)}\right) - \left(\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow p^2\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s) - s^2\bar{u}(p,s) + s\bar{u}(p,0) + \bar{u}_t(p,0)$$
$$-s\bar{u}(p,s) + \bar{u}(p,0) = L_tL_x(u^2 - e^{2(x+t)}) - \left(\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow (p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s) + s\bar{u}(p,0) + \bar{u}_t(p,0)$$
$$+\bar{u}(p,0) = L_tL_x(u^2 - e^{2(x+t)}) - \left(\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow (p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = p\bar{u}(0,s) + \bar{u}_x(0,s) - s\bar{u}(p,0) - \bar{u}_t(p,0)$$
$$-\bar{u}(p,0) - \frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_tL_x(u^2 - e^{2(x+t)})$$

Subtitusi hasil transformasi nilai awal dan kondisi batas

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = p\left(\frac{1}{s-1}\right) + \left(\frac{1}{s-1}\right) - s\left(\frac{1}{p-1}\right) - \left(\frac{1}{p-1}\right) - \left(\frac{1}{p-1}\right) -$$

$$\frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x\left(u^2 - e^{2(x+t)}\right)$$

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = (p+1)\left(\frac{1}{s-1}\right) + (-s-2)\left(\frac{1}{p-1}\right) - \frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})$$

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = \frac{p+1}{s-1} - \frac{s+2}{p-1} - \frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})$$

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = \frac{(p-1)(p+1)}{(p-1)(s-1)} - \frac{(s+2)(s-1)}{(p-1)(s-1)} - \frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x\left(u^2 - e^{2(x+t)}\right)$$

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = \frac{(p^2+p-p-1)}{(p-1)(s-1)} - \frac{(s^2-s+2s-2)}{(p-1)(s-1)} - \frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})$$

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = \frac{p^2-1-s^2+s-2s+2-1}{(p-1)(s-1)} - \frac{1}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})$$

$$(p^2 - s^2 - s)\bar{u}(p,s) = \frac{p^2-s^2-s}{(p-1)(s-1)} + L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})$$

$$\bar{u}(p,s) = \left(\frac{p^2-s^2-s}{(p-1)(s-1)}\right)\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}\right) + \left(L_t L_x\left(u^2 - e^{2(x+t)}\right)\right)\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}\right)$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(p-1)(s-1)} + \frac{L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})}{p^2-s^2-s} \qquad (3.25)$$

iii. Menerapkan invers transformasi laplace ganda pada persamaan (3.25)

$$u(x,t) = L_p^{-1} L_s^{-1}\{\bar{u}(p,s)\}$$

$$= L_p^{-1} L_s^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}.\frac{1}{s-1} + \frac{L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})}{p^2-s^2-s}\right\}$$

$$= L_p^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) L_s^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + L_p^{-1} L_s^{-1}\left(\frac{L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})}{p^2-s^2-s}\right)$$

$$u(x,t) = e^{x+t} + L_p^{-1} L_s^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s} L_t L_x(u^2 - e^{2(x+t)})\right)$$

Untuk mengetahui $L_p^{-1}L_s^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(u^2-e^{2(x+t)})\right)$maka menggunakan metode iterativ sebagai berikut:

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t) \tag{3.26}$$

kemudian subtitusi persamaan (3.26) ke dalam persamaan $L_p^{-1}L_s^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(u^2-e^{2(x+t)})\right)$ sehingga didapatkan

$$u_0(x,t) = e^{x+t}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= L_t^{-1}L_x^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(u_0^2-e^{2(x+t)})\right)\\
&= L_t^{-1}L_x^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(e^{2(x+t)}-e^{2(x+t)})\right)\\
&= L_t^{-1}L_x^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(0)\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= L_t^{-1}L_x^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x((u_0+u_1)^3-u_0^3)\right)\\
&= L_t^{-1}L_x^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(3u_0^2.u_1+3u_0.u_1^2+u_1^3)\right)\\
&= L_t^{-1}L_x^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(3e^{2(x+t)}.0+3e^{2(x+t)}.0+0)\right)\\
&= 0 \quad \text{dan seterusnya}
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan solusi eksak sebagai berikut

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= e^{x+t}+L_p^{-1}L_s^{-1}\left(\frac{1}{p^2-s^2-s}L_tL_x(u^2-e^{2(x+t)})\right)\\
u(x,t) &= e^{x+t}+0\\
u(x,t) &= e^{x+t} \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

iv. Konfirmasi Solusi Analitik

Mensubtitusi persamaan (3.27) ke dalam persamaan (3.14)

$$u_{xx}-u_{tt}-u_t = u^2-e^{2(x+t)}-e^{x+t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{x+t}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{x+t}) - \frac{\partial^2}{\partial t}(e^{x+t}) = e^{2(x+t)} - e^{2(x+t)} - e^{x+t}$$

sehingga didapatkan

$$e^{x+t} - e^{x+t} - e^{x+t} = e^{2(x+t)} - e^{2(x+t)} - e^{x+t}$$

$$-e^{x+t} = -e^{x+t}$$

Berdasarkan pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa solusi analitik dari penyelesaian persamaan telegraf nonlinier dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda dikatakan benar.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa solusi eksak dari persamaan telegraf linier maupun nonlinier bisa didapatkan dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda. Namun, metode tersebut memiliki kelemahan saat mencari invers dari persamaan telegraf nonlinier. Oleh karena itu dibutuhkan metode iterativ $u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i\,(x,t)$ agar mempermudah mendapatkan hasil invers dari persamaan telegraf nonlinier. Adapun solusi eksak dari persamaan telegraf linier maupun nonlinier dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda yaitu sebagai berikut:

1. Solusi eksak dari persamaan telegraf linier

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t - u = -2e^{x+t}$$

dengan nilai awal $u(0,t) = e^t$, $u_x(0,t) = e^t$

dan kondisi batas $u(x,0) = e^x$, $u_t(x,0) = e^x$ adalah $u(x,t) = e^{x+t}$

2. Solusi eksak dari persamaan telegraf nonlinier

$$u_{xx} - u_{tt} - u_t = u^2 - e^{2(x+t)} - e^{x+t}$$

dengan nilai awal $u(0,t) = e^t$, $u_x(0,t) = e^t$

dan kondisi batas $u(x,0) = e^x$, $u_t(x,0) = e^x$ adalah $u(x,t) = e^{x+t}$

4.2 Saran

Bagi Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial lainnya dengan menggunakan metode transformasi laplace ganda.

DAFTAR RUJUKAN

Al-badrani, Hind, Sharefah Saleh, H.O. Bakodah, M. Al-Mazmumy (2016). Numerical Solution for Nonlinear Telegraph Equation by Modified Adomian Decomposition Method. *Nonlinear Analysis and Differential Equations.* 243-257

Al-Quran Terjemahan (2015).*Departemen Agama RI*.Bandung:CV Darus Sunnah

Debnath, Lokenath (2016). The Double Laplace Transforms and Their Properties with Applications to Functional, Integral and Partial Differential Equations. *Journal Applied Computational Mathematics.*223-241

Debnath, Lokenath, Dambaru Bhatta (2007). *Integral Transform and Their Applications (Second Edition*). USA:Taylor and Francis Group

Dhunde, R. Ranjit, G.L. Waghmare (2016). Analytical Solution of the Nonlinear Klein-Gordon Equation using Double Laplace Transfrom and Iterative Method. *American Journal of Computational and Applied Mathematics.* 195-201

Eltayeb, Hasan dan Adem Kilicman (2013). A Note on Double Laplace Transform and Telegraphic Equations. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis.*1-2

Kreyszig, Erwin (2011). *Advanced Engineering Mathematics.* USA:PreMedia Global

Naphade, A. Rajashri, Mitali K. Tibdewal, Ujjvala Y. Gawarguru, Rahul M. Jethwani (2017). The Review of Introduction to Laplace Transform & Its Applications. *2nd National Conference Recent Innovations in Science and Engineering.* 12-15

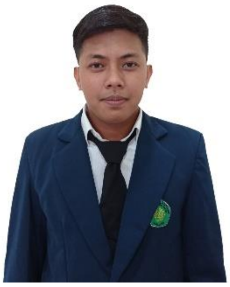
Septiadi, D., Hadi, S.,&Tjasyono, B. (2011). Karakteristik Petir dari Awan ke Bumi dan Hubungannya dengan Curah Hujan. *Jurnal Sains Dirgantara*, 129-138.

Shihab, Muhammad Quraish.(2002).*Tafsir Al-Mishbah*.Jakarta:Lentera Hati.

Lampiran

	$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
4.	t^n $(n = 0,1, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	t^a (a positif)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7.	$cos\, \omega\, t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8.	$sin\, \omega\, t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9.	$cosh\, a\, t$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10.	$sinh\, a\, t$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11.	$e^{at} \cos \omega\, t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
12.	$e^{at} \sin \omega\, t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

RIWAYAT HIDUP



Muhammad Rofiul Hamim lahir di Kota Gresik pada 21 Januari 1997. Memiliki nama panggilan Hamim. Ketika masih kecil tinggal bersama keluarganya di Desa Beton Kecamatan Menganti Kabupaten Gresik. Merupakan anak kedua dari Bapak Hambali dan Ibu Sutinah.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu TK Roudlotus Shibyan. Kemudian melanjutkan sekolahnya di MI Roudlotus Shibyan yang terletak di kampung halamannya sendiri. Saat beranjak dewasa, menempuh pendidikan jenjang selanjutnya di Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Bungah – Gresik, sekaligus menjadi santri di Pondok Pesantren Assyafi'iyah yang tidak jauh dari sekolahnya. Tepat tahun 2012 lulus SMP dan melanjutkan pendidikan tingkat SMA di Madrasah Aliyah Negeri 3 Jombang sekaligus menjadi santri di Pondok Pesantren Bahrul Ulum Tambakberas Jombang.

Awal masuk Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2015 dengan fokus di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Aktif mengikuti beberapa kegiatan organisasi serta komunitas intra maupun ekstra kampus. Pernah menempati posisi Koordinator divisi Penalaran di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika, posisi Koordinator Departemen Keagamaan di DEMA Fakultas Sains dan Teknologi dan pernah sebagai Sekretaris Komisariat mupun Cabang di Himpunan Mahasiswa Malang Alumni Bahrul Ulum