SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DAN KETAKSAMAAN MINKOWSKI DI PERUMUMAN RUANG MORREY

SKRIPSI

OLEH
NAHDLIYATUL UMMAH
NIM. 17610053

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DAN KETAKSAMAAN MINKOWSKI DI PERUMUMAN RUANG MORREY

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Nahdliyatul Ummah
NIM. 17610053

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DAN KETAKSAMAAN MINKOWSKI DI PERUMUMAN RUANG MORREY

SKRIPSI

Oleh
Nahdliyatul Ummah
NIM. 17610053

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 29 November 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Dewi Ismiarti, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIDT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DAN KETAKSAMAAN MINKOWSKI DI PERUMUMAN RUANG MORREY

SKRIPSI

Oleh
Nahdliyatul Ummah
NIM. 17610053

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Desember 2021

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Ketua Penguji	: Erna Herawati, M.Pd	....
Sekertaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nahdliyatul Ummah
NIM	: 17610053
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibukti kan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 November 2021
Yang membuat pernyataan,

Nahdliyatul Ummah
NIM. 17610053

MOTO

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

(Q.S. Al-Baqarah 286)

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak M.Toha Mahsun dan ibu Siti Khusnah tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, materi dan kasih sayang yang tak ternilai, serta Adik tercinta Lailiyul Mukarromah, serta keluarga yang selalu mengirimkan dukungan, semangat serta doa terbaik kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur kehadirat Allah swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah membimbing manusia dari zaman jahiliah menuju zaman islamiah.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak menerima bimbingan, masukan, dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu melalui halaman ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H.M. Zainudin, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan banyak ilmu, arahan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. Dewi Ismiarti, M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang banyak memberikan ilmu, arahan dan masukan kepada penulis.
6. Dr. Elly Susanti, M.Sc dan Erna Herawati, M.pd selaku Dosen Penguji yang banyak memberikan saran dan masukan kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama jajaran dosen, terima kasih atas pengalaman perkuliahan yang luar biasa.
8. Bapak dan Ibu yang selalu mengirimkan doa terbaik kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017.

10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah ikut serta membantu menyelesaikan penyusunan skripsi, baik dukungan moril maupun materil.

Penulis sadar tidak bisa memberikan apapun selain ucapan terima kasih dan doa semoga Allah membalas kebaikan jasa dengan balasan yang sebaik-baiknya. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat, baik bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 29 November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan Riil
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	: Himpunan bilangan Riil berdimensi n
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{K}$	: Himpunan bilangan kompak
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
$\boldsymbol{E}$	: Himpunan terukur
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$	: x anggota $\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	: Fungsi terhadap x
$\boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})$	: Invers fungsi atau balikan fungsi terhadap x
$\forall \boldsymbol{x}$	: Untuk setiap unsur x
$\exists \boldsymbol{x}$	: Terdapat unsur x
$(\boldsymbol{f})$	: Barisan fungsi f
$\{\boldsymbol{f}\mathbf{1}, \boldsymbol{f}\mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{f}\boldsymbol{n}\}$	: Himpunan yang terdiri atas unsur $f1, f2, \dots, fn$
$\boldsymbol{\chi}$	: Fungsi karakteristik
$\lVert \cdot \rVert$	: Norm
$\sim$	: Ekuivalen
$\bigcup_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}$	: Gabungan $a_1 \cup a_2 \cup \dots$
$\bigcap_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}$	: Irisan $a_1 \cap a_2 \cap \dots$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$	: Penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$B(a, r)$	: Bola buka dengan pusat a dan jari-jari r
sup	: Batas atas terkecil
inf	: Batas bawah terbesar
$l^p(\mathbb{R}^n)$	: Ruang Lebesgue pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$wl^p(\mathbb{R}^n)$	: Ruang Lebesgue lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$	: Ruang Morrey pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$	: Ruang Morrey lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$	: Perumuman ruang Morrey pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$w\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$	: Perumuman ruang Morrey lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n

ABSTRAK

Ummah, Nahdliyatul. 2021. **Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata kunci: Ketaksamaan Hölder, Ketaksamaan Minkowski, Perumuman Ruang Morrey, Syarat Cukup

Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu ketaksamaan dasar yang ada di analisis fungsional, sedangkan ketaksamaan Minkowski adalah ketaksamaan dasar yang dikembangkan dari ketaksamaan Hölder. Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk mengembangkan aplikasinya pada dua ruang fungsi yaitu perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah. Pembuktikan ini dilakukan dengan menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski pada masing-masing ruang sesuai dengan norm fungsi dan karakteristiknya. Karena akan ditunjukkan di perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah di mana merupakan ruang fungsi, maka ketaksamaan Hölder yang digunakan adalah ketaksamaan Hölder integral dan ketaksamaan Minkowski yang digunakan adalah ketaksamaan Minkowski integral.

ABSTRACT

Ummah, Nahdliyatul. 2021. **Sufficient Conditions of Hölder's Inequality and Minkowski's Inequality in Generalized Morrey Spaces**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: Generalized Morrey Spaces, Hölder's inequality, Minkowski's inequality, Sufficient condition

Hölder's inequality is one of fundamental inequalities in functional analysis, while Minkowski's inequality is one of fundamental inequality developed from Hölder's inequality. In this research, the author is interested in developing its application in two function spaces, namely generalized Morrey space and generalized weak Morrey space. This proof is done by showing the sufficient conditions for Hölder's inequality and Minkowski's inequality in each space according to the function norm and characteristics. Since in which generalized Morrey space and generalized weak Morrey space is function space, so Hölder's inequality integral and Minkowski's inequality integral is used.

مخلص

الأمة، نهضية. 2021. **الشروط الكافية لعدم المساواة هولدر** (*Hölder*) **وعدم المساواة مينكوفسكي** *(Minkowski)* **في تعميم فضاء موري**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف : (١) الدكتور. خير الرحمن، الماجستير (٢) المشرفة ديوي اسمارتي، الماجستير.

الكلمات الأساسية : عدم المساواة هولدر (Ketaksamaan Hölder)، عدم المساواة مينكوفسكي (Ketaksamaan Minkowski)، تعميم فضاء موري (Perumuman Ruang Morrey)، الشروط الكافية (Syarat Cukup)

إن عدم المساواة هولدر(*Hölder*) هو إحدى عدم المساواة الأساسية في التحليل الوظيفي، وأما المساواة مينكوفسكي *(Minkowski)* هو عدم المساواة الأساسية المتطورة من عدم المساواة المثلثية. وفي هذه الدراسة، تهتم المؤلفة بتطوير تطبيق فضائين وظيفيتين، وهما تعميم فضاء موري وتعميم فضاء موري الضعيف. ويتم هذا الدليل بإظهار الشروط الكافية لعدم المساواة هولدر (*Hölder*) وعدم المساواة مينكوفسكي *(Minkowski)* في كل فضاء وفقًا لمعيار وظيفتها وخصائصها. لأنه سيظهر في تعميم فضاء موري وتعميم فضاء موري الضعيف الذي هو فضاء وظيفي، فإن عدم المساواة هولدر (*Hölder*) المستخدمة هي عدم المساواة هولدر (*Hölder*) متكاملة وعدم المساواة مينكوفسكي *(Minkowski)* المستخدمة هي عدم المساواة مينكوفسكي *(Minkowski)* متكاملة.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di dalam matematika terdapat cabang ilmu matematika, analisis fungsional merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sudah berkembang sejak 80 tahun yang lalu. Analisis fungsional tidak hanya memusatkan perhatian pada ruang yang berdimensi dua, tetapi juga dimensi tiga, empat sampai tak hingga. Hingga saat ini, perannya sangat penting dalam berbagai bidang dalam matematika (Kreyzig, 1978).

Dalam cabang analisis fungsional terdapat banyak ruang fungsi, salah satu fungsi yang sering dibahas adalah ruang L^p atau dikenal dengan ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue adalah ruang bernorma dengan $1 \leq p < \infty$ Ruang Lebesgue memiliki peranan dalam pengembangan teori ukuran, analisis fungsional, teori peluang, serta disiplin ilmu yang lain. Setelah ditemukannya ruang Lebesgue, kemudian ditemukan juga pengembangan dari ruang Lebesgue yaitu ruang Lebesgue lemah yang dinotasikan dengan wL^p (Royden, 2010).

Pada tahun 1938, C. B. Morrey memperkenalkan ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q < \infty$ yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue. Selain ruang Morrey, terdapat juga perumuman dari ruang Lebesgue lemah yaitu ruang Morrey lemah yang dinotasikan dengan $w\mathcal{M}_q^p$. Ruang Morrey lemah bukanlah ruang bernorma melainkan ruang quasi-norm sama seperti ruang Lebesgue lemah karena terdapat beberapa kriteria ruang bernorma yang tidak berlaku pada ruang quasi-norm. Kemudian pada tahun 1994 Nakai memperkenalkan ruang Morrey yang diperumum atau dikenal sebagai perumuman ruang Morrey yang dinotasikan dengan $\mathcal{M}_{\phi}^{p}$ yang merupakan salah satu perumuman dari ruang lebesgue untuk $1 \leq p < \infty$, dengan ϕ sebagai fungsi. Selain perumuman ruang Morrey, terdapat juga perumuman dari ruang Morrey lemah yaitu perumuman ruang Morrey lemah yang dinotasikan dengan $w\mathcal{M}_{q}^{p}$(Grafakos, 2008).

Selain ruang fungsi, topik pembahasan yang banyak dibahas dalam penelitian adalah ketaksamaan. Matematika memiliki banyak sekali ketaksamaan. Ketaksamaan Hölder sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 (Li dkk, 2018). Seperti yang dilakukan oleh Ifronika dkk. pada tahun 2018, penelitian berjudul "*Generalized Hölder's Inequality in Morrey Space*" ini menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu perumuman ketaksamaan Hölder di ruang Morrey. Dari penelitian tersebut dapat diketahui bahwa ketaksamaan Hölder dapat diaplikasikan di ruang fungsi dengan asumsi bahwa ruang fungsi yang digunakan adalah ruang Bernorma.

Sedangkan ketaksaman Minkowski merupakan pengembangan dari ketaksamaan Hölder yang pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman pada tahun 1907 (Hardy, 1934). Seiring berjalannya waktu banyak penelitian yang memodifikasi ketaksamaan tersebut menjadi penemuan-penemuan baru yang lebih beragam. Sebagaimana yang dilakukan Wang dan Wu untuk membuktikan beberapa ketaksamaan pada ruang Herz-Morrey anisotropik dengan dua variabel eksponen (Wu, 2016).

Dalam surat Hud ayat 114 yang berbunyi: Artinya: *Dan laksanakanlah salat pada kedua ujung siang (pagi dan petang) dan pada bagian permulaan malam. Perbuatan-perbuatan baik itu menghapus kesalahan-kesalahan. Itulah peringatan bagi orang-orang yang selalu mengingat (Allah).*

Dalam surat tersebut menjelaskan bahwa perbuatan baik dapat menghapuskan kesalahan (Ghoffar, 2003). Untuk membuktikan suatu kebenaran dari penemuan-penemuan baru, tentu perlu dilakukan kajian-kajian tentang perkembangan dalam ilmu matematika. Berdasarkan pemaparan tersebut, penulis ingin melakukan penelitian yang mengaplikasikan ketaksamaan H*ö*lder dan Minkowski pada Perumuman Ruang Morrey sesuai dengan definisinya masing-masing. Pada penelitian ini akan ditunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian berdasarkan rumusan masalah tersebut adalah untuk mengetahui syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai ilmu baru dan bahan kajian baru bagi peneliti selanjutnya yang berkaitan dengan ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey.

1.5 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembaca dalam memahami isi dari penelitian ini, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bagian yang meliputi:

BAB I PENDAHULUAN

Pada Bab I Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada Bab II berisi kajian pustaka yang membahas tentang kajian teori-teori pendukung untuk menjawab rumusan masalah yang meliputi: Ketakamaan Hölder, Ketaksamaan Minkowski, Ruang Vektor, Ruang Bernorma, Ruang Lebesgue, Ruang Lebesgue Lemah, Ruang Morrey, Ruang Morrey Lemah, Perumuman Ruang Morrey Dan Perumuman Ruang Morrey Lemah, serta Kajian Keislaman yang terkait dengan penelitian.

BAB III PEMBAHASAN

Bab III merupakan pemaparan dari pembahasan yang merupakan jawaban dari rumusan masalah. Pembahasan yang dimaksud adalah ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski pada perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah.

BAB IV PENUTUP

Bab IV merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran bagi pembaca dan peneliti selanjutnya.

1.6 Batasan Masalah

Berdasarkan uraian masalah yang disebutkan, penulis merasa perlu untuk membatasi masalah agar pembahasan tidak menyimpang dan meluas. Adapun batasan masalahnya adalah ketaksamaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah ketaksamaan Hölder integral dan ketaksamaan Minkowski integral.

1.7 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode studi kepustakaan yaitu dengan mengumpulkan rujukan dan informasi melalui buku-buku serta jurnal yang berkaitan dengan penelitian untuk membuktikan ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah adalah ruang Bernorma.

2. Membuktikan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah menggunakan definisi norm.
3. Menarik kesimpulan atas hasil pembuktian.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ketaksamaan Hölder

Sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu terkait bilangan konjugat.

Definisi 2.1 (Royden, 2010*) Konjugat dari suatu bilangan* $p \in (1, \infty)$ *adalah* $q = \frac{p}{p-1}$*, di mana untuk* $q \in (1, \infty)$ *berlaku*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Konjugat dari 1 *didefinisikan* ∞ *dan konjugat dari* ∞ *didefinisikan* 1.

Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu ketaksamaan mendasar di analisis fungsional, utamanya di ruang L^p. Pada dasarnya, ketaksamaan Hölder memiliki beragam kondisi, namun dalam penelitian ini digunakan ketaksamaan Hölder integral. Ketaksamaan Hölder sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 (Li dkk., 2018).

Proposisi 2.2 (Kantorovich, 1982) *Misalkan* $f(x)$ *dan* $g(x)$ *merupakan fungsi terukur pada himpunan terukur* (X, μ). *Maka diperoleh ketaksamaan*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

di mana $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Bukti . Pertama, asumsikan bahwa

$$0 < \alpha^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu < \infty, \quad 0 < \beta^q = \int_X |g(x)|^q \, d\mu < \infty,$$

karena ketaksamaan tersebut akan terbukti trivial jika salah satu dari integral tersebut bernilai nol atau tak hingga. Kemudian misalkan

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\alpha} \quad \text{dan} \quad g'(x) = \frac{g(x)}{\beta}.$$

Untuk setiap $x \in X$ diperoleh $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (bilangan konjugat), dan diperoleh

$$|f'(x)g'(x)| \leq \frac{|f'(x)|^p}{p} + \frac{|g'(x)|^q}{q},$$

di mana ketika diintegralkan diperoleh

$$\int_X |f'(x)g'(x)| d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X |f'(x)|^p \, d\mu + \frac{1}{q}\int_X |g'(x)|^q \, d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

sehingga

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu \leq \alpha\beta.$$

2.2 Ketaksamaan Minkowski

Ketaksaman Minkowski merupakan pengembangan dari ketaksamaan Hölder yang pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman Minkowski pada tahun 1907 (Hardy, 1934).

Definisi 2.3 (Hutnik, 2000) *Ketaksamaan Minkowski klasik (integral) didefinisikan sebagai berikut. Diberikan* $u > 1$ *dengan* a_i, b_i

$$\left(\int_a^b |f(t)g(t)|^u dt\right)^{\frac{1}{u}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^u dt\right)^{\frac{1}{u}} + \left(\int_a^b |g(t)|^u dt\right)^{\frac{1}{u}}$$

untuk fungsi kontinu f dan g pada $[a, b]$.

Lemma 2.4 *untuk* $1 \leq p < \infty$ *dan setiap* $a, b > 0$

$$\inf_{0<t<1}[t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p] = (a+b)^p$$

(Maligranda, 1995)

Bukti . Misalkan, untuk $0 < t < 1$, fungsi g didefinisikan dengan

$$g(t) = t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$$

Maka, turunan dari f' memenuhi

$$g'^{(t)} = (1-p)t^{-p}a^p - (1-p)(1-t)^{-p}b^p = 0$$

Hanya ketika $t = t_1 = \frac{a}{a+b}$. Jika

$$g''^{(t)} = (1-p)(-p)t_1^{-p-1}a^p - (1-p)(-p)(1-t_1)^{-p-1}b^p > 0$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa g memiliki lokal minimumnya karena g kontinu pada (0,1) dan $\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 1^-} g(t) = +\infty$

Proposisi 2.5 *ketaksamaan minkowsi klasik dinyatakan dengan:*

Misalkan $1 \leq p < \infty$. *Jika* $x, y \in L^p(\mu)$ *maka* $x + y \in L^p$ *dan*

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

(Maligranda, 1995)

Bukti . Dengan menggunakan Lemma yang kita miliki, yaitu ketaksamaan

$$(a + b^p) \leq t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$$

Kita menemukan untuk setiap $t, 0 < t < 1$,

$$\begin{aligned}
||x+y||_p^p &= \int_\Omega |x(s)+y(s)|^p \, d\mu(s) \\
&\le \int_\Omega [|x(s)|+|y(s)|]^p \, d\mu(s) \\
&\le \int_\Omega [t^{1-p}|x(s)|^p + (1-t)^{1-p}|y(s)|^p] \, d\mu(s) \\
&= t^{1-p}\int_\Omega |x(s)|^p + (1-t)^{1-p}\int_\Omega |y(s)|^p \, d\mu(s) \\
&= t^{1-p}||x||_p + (1-t)^{1-p}||y||_p
\end{aligned}$$

Dengan infimum atas $0 < t < 1$ dengan menggunakan lemma diatas, kita memperoleh

$$||x+y|| \le \left(||x||_p + ||y||_p\right)^p.$$

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.6 (Anton, 2014) *Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sembarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Operasi penjumlahan dapat dipahami sebagai suatu aturan yang mengaitkan setiap pasangan objek u dan v pada V dengan suatu objek $u+v$ yang disebut jumlah u dan v. Operasi perkalian skalar, dapat dipahami sebagai aturan yang mengaitkan setiap skalar k dan setiap objek u pada V dengan suatu objek ku, yang disebut kelipatan scalar dari u dengan k. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek u, v, w pada V dan semua skalar k dan 1, maka V disebut sebagai ruang vektor dan menyebut objek-objek pada V sebagai vektor.*

1. *Jika* u *dan* v *adalah objek-objek pada* V*, maka* $u + v$ *berada pada* V.
2. $u + v = v + u$.
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$.
4. *Didalam* V *terdapat suatu objek* 0*, yang disebut vektor nol terhdap* V*, sedemikian hingga* $0 + u = u + 0$ *untuk semua* u *pada* V.
5. *Untuk setiap* u *pada* V*, terdapat suatu objek* $-u$ *pada* V*, yang disebut sebagai negatif dari* u*, sedemikian rupa sehingga* $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. *Jika* k *adalah skalar sebarang dan* u *adalah objek sebarang pada* V*, maka* u *terdapat pada* V.
7. $k(u + v) = ku + kv$.
8. $(k + l)u = ku + lu$.
9. $K(lu) = (kl)(u)$.
10. $1u = u$.

2.4 Ruang Bernorma

Definisi 2.7 (Zakir, 2015) *Misalkan* X *adalah ruang vektor riil. Norm pada* X *didefinisikan sebagai suatu pemetaan* $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ *di mana untuk setiap* $x, y \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *memenuhi:*

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$
3. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Selanjutnya, pasangan $(X, ||\cdot||)$ *disebut ruang bernorma.*

Definisi 2.8 (Kalton, 2003) *Quasi-norm* $||\cdot||$ *pada ruang vektor* X *atas lapangan* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *atau* $\mathbb{C}$ *merupakan suatu pemetaan* $||\cdot||: X \to [0, \infty)$ *dengan* $x, y \in X$ *dan* α *sembarang skalar di* $\mathbb{K}$ *yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. $||x|| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$
3. *Terdapat konstanta* $z \geq 1$. *Sedemikian sehingga*

$$||x + y|| \leq z(||x|| + ||y||).$$

2.5 Ruang Lebesgue

Definisi 2.9 (Limanta, 2014) *Ruang Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *termasuk ruang fungsi, misalkan* $\mathbb{R}^n$ *adalah himpunan terukur dan ada sebarang nilai* $1 \leq p < \infty$ *yang dilengkapi dengan norm*$||\cdot||_{L^p}$ *merupakan ruang bernorma, dengan*

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Kemudian didefinisikan ruang Lebesgue lokal sebagai berikut

Definisi 2.10 *(Mu'tazili, 2019) Ruang Lebesgue lokal* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai semua fungsi terukur* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *yang memenuhi*

$$\int_K |f(x)|^p \, dx < \infty$$

Untuk setiap subhimpunan Kompak $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

2.6 Ruang Lebesgue Lemah

Definisi 2.11 (Mu'tazili, 2019) *Ruang Lebesgue lemah $wL^p(\mathbb{R}^n)$ adalah himpunan semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Misalkan $1 \leq p < \infty$, sehingga*

$$||f||_{wL^p} = \sup_{\gamma > 0} \gamma |x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Dengan $|x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari $x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma$.

2.7 Ruang Morrey

Ruang Morrey merupakan bentuk perumuman dari ruang Lebesgue.

Definisi 2.12 (Mu'tazili, 2019) *Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan semua fungsi $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ sedemikian sehingga,*

$$||f||_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{a \in \mathbb{R}, r > 0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$|B(a,r)|$ menyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di a dan berjari-jari di r. Jika $p = q$, maka $\mathcal{M}_q^p = L^p$.

$$\begin{aligned} ||f||_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a \in \mathbb{R}, r > 0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}, r > 0} |B(a,r)|^{0} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||f||_{L^p} \end{aligned}$$

$$||f||_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\gamma > 0} ||\gamma_{\chi |f| > \gamma}||_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\gamma > 0} ||\gamma_{\chi(\gamma, \infty)}(|f|)||_{\mathcal{M}_q^p}$$

2.8 Ruang Morrey Lemah

Definisi 2.13 (mu'tazili, 2019) *Untuk* $1 \leq p \leq q < \infty$ *ruang Morrey lemah* $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *merupakan himpunan fungsi terukur* f *di* $\mathbb{R}^n$ *untuk* $\left||f|\right|_{w\mathcal{M}_q^p} < \infty$ *yang memenuhi:*

$$\left||f|\right|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R},\ \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma|\, x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

di mana $B(a,r)$ *merupakan bola buka yang berpusat di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *dan berjarak* $r > 0$ *dengan* $|x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma|$ *menyatakan ukuran Lebesgue dari* $|x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma|$. *Sama halnya pada ruang Morrey, jika* $p = q$ *maka* $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) = wL^p(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\left||f|\right|_{w\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a\in\mathbb{R},\ \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gamma|\, x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}} < \infty \\
&= \sup_{a\in\mathbb{R},\ \gamma>0} |B(a,r)|^{0}\gamma|\, x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}} < \infty \\
&= \sup_{a\in\mathbb{R},\ \gamma>0} \gamma|\, x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}} < \infty \\
&= \left||f|\right|_{wL^p}
\end{aligned}$$

Selain itu, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
|x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma| &= \int_{B(a,r)} \chi^{x} \in \mathbb{R}^n: |f(x)| > \gamma(x)dx \\
&= \int_{B(a,r)} \chi^{(\gamma,\infty)}(|f(x)|)dx
\end{aligned}$$

merupakan quasi norm di ruang Morrey lemah yang juga dapat dinyatakan sebagai

2.9 Perumuman Ruang Morrey

Perumuman ruang Morrey yang dinotasikan $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$. Sebelumnya, terlebih dahulu kita misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $\mathcal{G}_p$ himpunan semua fungsi $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sedemikian sehingga ϕ hampir menurun (yaitu terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\phi(r) \geq C\phi(s)$ untuk setiap $0 < r < s < \infty$) dan $r^{\frac{n}{p}}\phi(r)$ hampir naik (yaitu terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $r^{\frac{n}{p}}\phi(r) \leq Cs^{\frac{n}{p}}\phi(s)$ untuk setiap $0 < r < s < \infty$). Perhatikan jika $\phi \in \mathcal{G}_p$, maka ϕ memenuhi *doubling condition*, yang berarti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\frac{1}{c} \leq \frac{\phi(r)}{\phi(s)} \leq C$ ketika $1 \leq \frac{r}{s} \leq 2$.

Definisi 2.14 (Ifronika, 2018) *Misalkan* $1 \leq p < \infty$ *dan* $\phi \in \mathcal{G}_p$, , *perumuman ruang Morrey* $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur* $f \in \mathbb{R}^n$ *yang memenuhi*

$$||f||\mathcal{M}_{\phi}^{p} = \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Perumuman ruang Morrey $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$ merupakan pengembangan dari ruang Morrey $\mathcal{M}_{q}^{p}(\mathbb{R}^n)$ untuk $\phi(r) = r^{-\frac{d}{q}}, 1 \leq p \leq q < \infty$.

2.10 Perumuman Ruang Morrey Lemah

Seperti halnya perumuman ruang Morrey, menuliskan definisi perumuman ruang Morrey lemah sebagai berikut.

Definisi 2.15 *Misalkan* $\phi \in \mathcal{G}_p$ *, perumuman ruang Morrey lemah* $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur* f *di* $\mathbb{R}^n$ *sedemikian sehingga*

$$||f||_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}} (|\{x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}) < \infty$$

2.11 Kajian Keislaman

Alla SWT. Berfirman "*Dan laksanakanlah salat pada kedua ujung siang (pagi dan petang) dan pada bagian permulaan malam. Perbuatan-perbuatan baik itu menghapus kesalahan-kesalahan. Itulah peringatan bagi orang-orang yang selalu mengingat (Allah)"* (Q.S Hud : 114).

Dalam tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa 'Ali bin Abi Thalhah berkata dari Ibnu 'Abbas "Dan dirikanlah shalat itu pada kedua tepi siang (pagi dan petang), " ia berkata: "Yakni shubuh dan maghrib, " begitu juga yang dikatakan oleh al-Hasan dan 'Abdur Rahman bin Zaid bin Aslam. Al-Hasan berkata dalam riwayat Qatadah, adh-Dhahhak dan lain-lainnya: "Ia adalah shubuh dan ashar." Dan Mujahid berkata: "Ia adalah shubuh pada awal siang dan selanjutnya zhuhur dan ashar."

"Dan pada bahagian permulaan daripada malam. " Ibnu 'Abbas, Mujahid, al-Hasan dan lain-lainnya berkata: "Yaitu shalat isya." 'Al-Hasan berkata dalam riwayat Ibnul Mubarak, dari Mubarak bin Fadhalah, darinya, "Dan pada bahagian permulaan dari pada malam, " yakni maghrib dan isya'. Kemungkinan ayat ini turun sebelum diwajibkannya shalat lima waktu pada malam Isra' , karena sesungguhnya shalat yang diwajibkan hanyalah dua, yaitu shalat sebelum terbit matahari dan shalat setelah terbenamnya matahari. Pada pertengahan malam, wajib atasnya dan juga umatnya melaksanakan shalat qiyamul lail, lalu dihapuskan kewajiban tersebut dari umatnya, akan tetapi tetap kewajiban itu untuk beliau, juga ada yang berpendapat, dihapuskan pula kewajiban itu atas beliau setelah itu. Wallahu a'lam. Firman-Nya, "Sesungguhnya perbuatan-perbuatan yang baik menghapuskan (dosa) perbuatan-perbuatan yang buruk. " Allah berfirman: "Sesungguhnya melakukan kebaikan adalah menghapus dosa-dosa yang telah lewat."

Ayat ini diturunkan berkenan dengan seorang sahabat yang mencium perempuan bukan muhrimnya. Kemudian sahabat itu menceritakannya kepada Nabi Saw.

Maka Nabi Saw. Bersabda sampai dengan perkataan berikutnya berikut ini: *“(hal ini) berlaku bagi umatku seluruhnya”*

hadist ini diriwayatkan oleh Imam Bukhari (itulah peringatan bagi orang-orang yang ingat) sebagai pelajaran bagi orang-orang yang mau mengambil pelajaran.

Sebagaimana dalam hadits yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dan ahli hadits dari Amirul Mukminin 'Ali bin Abi Thalib, ia berkata: "Dulu, jika aku mendengar suatu hadits dari Rasululah maka Allah memberiku manfaat darinya dengan sebaik-baik manfaat, jika seseorang membicarakan hadits kepadaku, aku meminta ia untuk bersumpah. Dan jika ia telah bersumpah, aku mempercayainya.” Abu Bakar membicarakan hadits kepadaku dan ia adalah seorang yang jujur, bahwasanya ia telah mendengar

Rasulullah bersabda: *"Tidak ada seorang muslim yang melakukan dosa, kemudian ia berwudhu dan shalat dua rakaat, melainkan ia diampuni. "*

Dari Amirul Mukminin 'Utsman bin 'Affan, bahwasanya dia berwudhu seperti wudhunya Rasulullah di hadapan para sahabat, kemudian dia berkata:

"Beginilah aku melihat Rasulullah berwudhu dan beliau bersabda: *'Barangsiapa berwudhu seperti wudhuku, kemudian ia shalat dua rakaat yang ia tidak membicarakan dirinya dalam shalatnya, maka diampuni dosanya yang telah lewat."* hadist ini diriwayatkan oleh Imam Bukhari.

pada bembahsan diatas menjelaskan bahwa perbuatan baik menghapuskan kesalahan. pada ilmu matematika norm memiiki arti jarak pada vektor, yang mana jarak tersebut selalu memiliki nilai positif (Ghoffar, 2003).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey

Penelitian yang dilakukan adalah menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di ruang Perumuman Ruang Morrey $\mathcal{M}_{\phi}^{p}$ dan Perumuman Ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}$.

Sebelum menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski diperumuman ruang Morrey, kita tunjukkan terlebih dahulu ketaksamaan Hölder diruang Morrey yang ditulis oleh Ifronika pada tahun 2018.

Teorema 3.1 *Misalkan* $1 \leq p \leq q < \infty,\ 1 < p, p_1, p_2 < \infty,$ *dan* $1 < q, q_1, q_2 < \infty$. *maka pernyataan berikut equivalent:*

(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

(2) $\left\|fg\right\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq \left\|f\right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} \left\|g\right\|_{\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in \mathcal{M}_{q_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in \mathcal{M}_{q_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Selanjutnya akan dicari syarat cukup untuk perumuman ruang Morrey. Diketahui bahwa $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{q}^{p}(\mathbb{R}^n)$ untuk $\phi(r) = r^{-\frac{n}{q}}$,

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} \qquad \text{(diketahui)}$$

$$-n\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\right) = -\frac{n}{q} \qquad \text{(kedua ruas dikali } -n\text{)}$$

$$\frac{-n}{q_1} + \left(\frac{-n}{q_2}\right) = -\frac{n}{q} \qquad \text{(sifat distributif)}$$

$$r^{\frac{-n}{q_1}+\left(\frac{-n}{q_2}\right)} = r^{-\frac{n}{q}} \qquad (r > 0)$$

$$r^{\frac{-n}{q_1}} \times r^{\frac{-n}{q_2}} = r^{-\frac{n}{q}} \qquad \text{(sifat distributif)}$$

$$\phi_1(r) \times \phi_2(r) = \phi(r) \qquad (\text{diketahui } \phi(r) = r^{-\frac{n}{q}})$$

$$\phi_1 \times \phi_2 = \phi \qquad (\text{membagi kedua ruas dengan } (r))$$

Maka diketahui bahwa syarat cukup untuk perumuman ruang Morrey adalah

$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

3.1.1 Perumuman Ruang Morrey

Pada dasarnya, ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Lebesgue, dan perumuman ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Morrey. Berdasarkan teorema 3.1 didapatkan teorema berikut yang menunjukkan ketaksamaan Hölder di perumuman ruang Morrey.

Teorema 3.2 *Misalkan* $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ *dan* $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, *maka pernyataan berikut equivalent:*

(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

(2) $\|fg\|_{\mathcal{M}_{\phi}^{p}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} \|g\|_{\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in \mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in \mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

***Bukti* .** Ambil f dan g fungsi kontinu di $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$

Dari teorema 3.1 Diketahui $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|fg\|_{\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh:

$$||fg||_{\mathcal{M}p,\phi} = \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(definisi perumuman ruang Morrey)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1}|g(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat perkalian mutlak dan diketahui bahwa $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}$)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1}|g(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(diketahui bahwa $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} dx \times \int_{B(a,r)} |g(x)|^{p_2} dx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat integral taktentu)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} dx \times \frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |g(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat distributif)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi_1(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} dx\right)$$

$$\times \frac{1}{\phi_2(r)} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |g(x)|^{p_2} dx \right)$$

(sifat distributif)

$$= \left| |f| \right|_{\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} \left| |g| \right|_{\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$$

(definisi)

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa Pernyataan (2) terbukti berlaku di perumuman ruang Morrey . Sehingga syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di perumuman ruang Morrey $\mathcal{M}_{\phi}^{p}$ adalah $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

Berdasarkan teorema 3.1 didapatkan teorema berikut yang menunjukkan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey.

Teorema 3.3 *Misalkan* $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ *dan* $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, *maka pernyataan berikut equivalent:*

(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

(2) $\left| |f+g| \right|_{\mathcal{M}_{\phi}^{p}} \leq \left| |f| \right|_{\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} + \left| |g| \right|_{\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in \mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in \mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti . Ambil f dan g fungsi kontinu di $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$

Dari teorema 3.1 diketahui $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|f+g\|_{\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh

$$||f+g||_{\mathcal{M}_{\phi}^{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)+g(x)|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(definisi perumuman ruang Morrey)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} + |g(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat pejumlahan mutlak dan diketahui bahwa $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} + |g(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(diketahui bahwa $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} dx + \int_{B(a,r)} |g(x)|^{p_2} dx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat integral taktentu)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} dx + \frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |g(x)|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat distributif)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi_1(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1}dx\right)$$

$$+\frac{1}{\phi_2(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |g(x)|^{p_2}dx\right)$$

(sifat distributif)

$$= \left||f|\right|_{\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} + \left||g|\right|_{\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$$

(definisi)

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa Pernyataan (2) terbukti berlaku di Perumuman Ruang Morrey. Sehingga syarat cukup dari ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey $\mathcal{M}_{\phi}^{p}$ adalah $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

3.1.2 Perumuman Ruang Morrey Lemah

Pada dasarnya, ruang Morrey lemah merupakan perluasan dari ruang Lebesgue lemah, dan perumuman ruang Morrey lemah merupakan perluasan dari ruang Morrey lemah. Berdasarkan teorema 3.1 didapatkan teorema berikut yang menunjukkan ketaksamaan Hölder di perumuman ruang Morrey lemah.

Teorema 3.4 *Misalkan* $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ *dan* $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, *maka pernyataan berikut equivalent:*

(1) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

(2) $\left||fg|\right|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}} \leq \left||f|\right|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}}\left||g|\right|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti . Ambil f dan g fungsi kontinu di $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$

Dari teorema 3.1 diketahui $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ dan $\phi_1\times\phi_2=\phi$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|fg\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh:

$$\left|\left|fg\right|\right|_{w\mathcal{M}_{p,\phi}} = \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}\frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,b)|^{\frac{1}{p}}}\left(|\{x\in B(a,r):|f(x)g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(definisi perumuman ruang Morrey lemah)

$$= \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}\frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}}\left(|\{x\in B(a,r):|f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat perkalian mutlak)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}\frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)\times\phi_2(r)\right)\left(|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}\times|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}\left(|\{x\in B(a,r):|f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(diketahui bahwa $\phi_1\times\phi_2=\phi$ dan $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}\frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}\right)\left(\phi_2(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}\left(|\{x\in B(a,r):|f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat asosiatif)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}\frac{\gamma}{\phi_1(r)|B(a,b)|^{\frac{1}{p_1}}}\left(|\{x\in B(a,r):|f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_1}}\right)$$
$$\times \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}\frac{\gamma}{\phi_2(r)|B(a,b)|^{\frac{1}{p_2}}}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r) : |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}}\right)$$

(sifat distributif)

$$= \|f\|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} \|g\|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$$

(definisi)

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa Pernyataan (2) terbukti berlaku di Perumuman Ruang Morrey lemah. Sehingga syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di Perumuman Ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}$ adalah $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

Berdasarkan teorema 3.1 didapatkan teorema berikut yang menunjukkan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey lemah.

Teorema 3.5 *Misalkan* $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ *dan* $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, *maka pernyataan berikut equivalent:*

(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

(2) $\|f + g\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}} \leq \|f\|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} + \|g\|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti . Ambil f dan g fungsi kontinu di $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$

Dari teorema 3.1 diketahui $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|f + g\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh:

$$\left|\left|f+g\right|\right|_{w\mathcal{M}p,\phi} = \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(definisi perumuman ruang Morrey lemah)

$$= \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r): |f(x)| + |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat penjumlahan mutlak)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)+\phi_2(r)\right)\left(|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}} + |B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(diketahui bahwa $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$ dan $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}\right)\left(\phi_2(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat asosiatif)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r\,,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi_1(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_1}}\right)$$

$$+ \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi_2(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}}$$

$$\left(|\{x \in B(a,r): |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}}\right)$$

(sifat distributif)

$$= \left||f|\right|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} + \left||g|\right|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$$

(definisi)

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa Pernyataan (2) terbukti berlaku di Perumuman Ruang Morrey lemah. Sehingga syarat cukup dari ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}$ adalah $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 = \phi$.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dibahas pada bab sebelumnya, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey $\mathcal{M}_\phi^p$ dan Perumuman Ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_\phi^p$ adalah $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ dan $\phi_1\times\phi_2=\phi$, dengan $1<p,p_1,p_2<\infty$ dan $\phi,\phi_1,\phi_2\in\mathcal{G}p$.

4.2. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, Penulis menyarankan penggunaan ruang fungsi yang lain. Selain itu juga bisa dilakukan penelitian untuk syarat perlu ketaksamaan Holder dan ketaksamaan Minkowski di ruang perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah sehingga dapat diketahui nilai ekuivalen dari kedua syarat tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur’an Terjemah. 2015. *Departemen Agama RI.* Bandung: CV Darus Sunnah.

Anton,H. dan Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra 11th Edition*, Anton-Textbooks, Inc., United States of America.

Grafakos, L. 2008. *Classical Fourier Analysis Second Edition.* New York: Springer.

Ghoffar,M.Abdul. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4,* Bogor: PUSTAKA IMAM ASY-SYAFI’I.

Hardy, J. E. 1934. *Inequalities.* London: Cambridge University Press.

Hutnik, O. 2000. *Some integral inequalities of Holder and Minkowski.* Mathematics Subject Classication, 17-32.

Ifronika, Idris, Masta, dan Gunawan. 2018. *Generalized Hölder’s Inequality in Morrey Spaces*. *Matematički Vesnik*, 70 (4): 326-337.

Kalton, Nigel. 2003. *Quasi-Banach Spaces. In: Handbook of The Geometry of Banach Spaces, Vol.2,* Elsevier Science B. V.

Kantorovich, L. V. dan Akilov, G. P. 1982. *Functional Analysis (Second Edition): Normed Spaces*. Pergamon.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications,* JohnWiley Sons, New York.

Li, Y., Gu, X., dan Zhao, J. 2018. *The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality is Equivalent to the Hölder’s Inequality*. Symmetry, 10.

Limanta, Kevin mandira. 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*, Program Studi Sarjana Matematika.FMIPA, Institusi Teknologi Bandung.

Maligranda, L. 1995. A Simple Proof of the Holder and the Minkowski Inequality. *Mathematical Association of America*, 256-259.

Mu'tazili, A. 2019. *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang Morrey Kecil*. Tesis Program Magister. Institut Teknologi Bandung.

Muhammad bin Ismail al-Bukhari, A. 2002. *Shohih al-Bukhari*. Damaskus: Dar Ibn al-kathir.

Royden,H. L. dan Fitzpatrick, P. M. 2010. *Real Analysis Fourth Edition*, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press, Republic of China.

Wu, H. W. 2016. *Anisotropic Herz-Morrey Spaces with Variable Exponents*. Khayyam Journal of Mathematics, 177-187

Zakir, Muhammad. 2015. *Sifat-sifat Ruang Banach Hom (U,V)*, jurnal matematika, statistika dan komputsi, 11(2), 115–121.

RIWAYAT HIDUP

Nahdliyatul Ummah, lahir di pasuruan pada tanggal 28 november 1998. Putri pertama dari Bapak Toha Mahsun dan Ibu Siti Khusnah. Ia dilahirkan dan dibesarkan di rumah sederhana yang terletak Dusun Sukun Desa Bakalan Kecamatan Purwosari Kabupaten Pasuruan.

Perempuan dengan sapaan Nadya ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Miftahul Ulum yang lulus pada tahun 2005, dilanjutkan dengan pendidikan dasar di MI Miftahul Ulum lulus pada tahun 2011. Semasa menempuh pendidikan dasar, dia juga menempuh pendidikan non-formal 6 tahun di Madrasah Diniah Miftahul Ulum dan TPQ Darus Salam 3. Kemudian dia menempuh jenjang menengah pertama di SMPN 2 Kraton dan lulus pada tahun 2014. Selanjutnya menempuh pendidikan di MAN Kraton Al-yasini dan lulus pada tahun 2017, yang juga pada periode yang sama menempuh pendidikan non-formal 6 tahun di Pondok Pesanten Miftahul Ulum Al-yasini. Pada tahun yang sama juga tercatat sebagai mahasiswa di program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTRIAN RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Nahdliyatul Ummah
NIM	: 17610053
Fakultas/ Program Studi	: Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi	: Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II	: Dewi Ismiarti, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 April 2021	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	25 April 2021	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	03 Mei 2021	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4.	14 Juni 2021	Konsultasi Agama Bab II	4.
5.	15 Juni 2021	ACC Bab I dan Bab II	5.
6.	15 September 2021	Konsultasi Bab III	6.
7.	10 Oktober 2021	Konsultasi Integrasi Keislaman	7.
8.	20 Oktober 2021	Konsultasi Bab IV dan Abstrak	8.
9.	05 November 2021	ACC Bab III, IV dan Abstrak	9.
10.	05 November 2021	ACC Agama Keseluruhan	10.
11.	05 November 2021	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 21 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005