RUANG ℓ^p PADA NORM-2 LENGKAP

SKRIPSI

OLEH
SRI UTAMI
NIM. 17610060

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

RUANG ℓ^p PADA NORM-2 LENGKAP

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Sri Utami
NIM. 17610060

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

RUANG ℓ^p PADA NORM-2 LENGKAP

SKRIPSI

Oleh
Sri Utami
NIM. 17610060

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 19 November 2021

Pembimbing I,

Dr. Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Pembimbing II,

Dewi Ismiarti, M.Si
NIDT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

RUANG ℓ^p PADA NORM-2 LENGKAP

SKRIPSI

Oleh
Sri Utami
NIM. 17610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Desember 2021

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Ketua Penguji	: Erna Herawati, M.Pd	....
Sekertaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sri Utami

NIM : 17610060

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ruang ℓ^p pada Norm-2 Lengkap

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, keduali dengan mencantumkan sumber cuplikan atau daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Desember 2021
Yang membuat pernyataan,

Sri Utami
NIM. 17610060

MOTO

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

QS Al Baqarah: 286

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:
Orang tua tersayang Bapak Sumali dan Ibu Enik Ernawati yang telah mendidik dan membimbing dengan sabar hingga saya bisa menjalasani kehidupan saat ini. Dan kedua saudaraku Kakak Fathimatuz Zahroh dan Adik Dewi Retno Wati yang telah memberikan motivasi dan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur atas kehadirat dan rahmat Allah Swt. yang telah melimpahkan hidayah-Nya sehingga penulis bisa menyelsaikan penulisan skripsi dengan judul "Ruang ℓ^p pada Norm-2 Lengkap". Skripsi ini dibuat untuk memenuhi syarat dalam menempuh program sarjana pada Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penyusunan skripsi ini, penulis ucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah terlibat dan sudi memberikan ilmunya serta bimbingannya. Oleh sebab itu, penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M. Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah membimbing serta memberikan ilmunya kepada penulis.
5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan arahan, nasehat dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Si, selaku Dosen Wali yang telah memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama dosen yang telah memberikan ilmunya selama proses perkuliahan.
8. Orang tua dan keluarga penulis yang telah memberikan semangat, materi, dukungan, do'a, kasih sayang dan motivasi kepada penulis.
9. Seluruh pihak yang telah ikut terlibat dalam membantu menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat dan memberikan inspirasi kepada pembaca *Amin Ya Robbal Alamin*. Penulis menyadari skripsi ini jauh dari kata sempurna, oleh sebab itu penulis menerima saran dan kritik yang bersifat membangun.

Wassalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh

Malang, 20 Desember 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR SIMBOL xiii
ABSTRAK xiv
ABSTRACT xv
مخلص
.... **Er**
ror! Bookmark not defined.

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 5

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Barisan Bilangan Riil 7
2.1.1 Limit Barisan 8
2.1.2 Barisan Cauchy 10
2.2 Ruang Vektor 11
2.2.1 Bebas Linier dan Membangun 17
2.2.2 Basis dan Dimensi 18
2.3 Ruang Hasil Kali Dalam 19
2.4 Ruang Norm 23

2.5 Ruang Barisan 25
2.6 Ruang Norm-2 31
2.7 Konsep Ikhtiar, Do’a dan Tawakal 37

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Ruang ℓ^p pada Norm-2 Lengkap 41
3.2 Integrasi Penelitian dengan Konsep Ikhtiar, Doa dan Tawakal 67

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 69
4.2 Saran 69

DAFTAR PUSTAKA

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Proyeksi Ortogonal 22
Gambar 2.2 Jajar Genjang 33

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna sebagai berikut:

ϵ	: Elemen himpunan
$<$	: Kurang dari
$>$	: Lebih dari
$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	: Lebih dari atau sama dengan
$\forall$	: Untuk setiap atau untuk semua
$\exists$	: Terdapat
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan Asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan Riil
(x_n)	: Barisan
$\boldsymbol{m}$	: Vektor m
ε	: Epsilon
α	: Alfa
β	: Beta
$\sum$	: Sigma
$\lvert x \rvert$	: Nilai mutlak x
$\lVert \cdot \rVert$	: Norm
$\lVert \cdot \rVert_1$	: Norm pada ℓ^1
$\lVert \cdot,\cdot \rVert$	: Norm-2
$\lVert \cdot,\cdot \rVert_p$	: Norm-2 pada ℓ^p
$\langle \cdot,\cdot \rangle$	: Hasil kali dalam

ABSTRAK

Utami, Sri. 2021. **Ruang ℓ^p pada Norm-2 Lengkap.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M. Si, (2) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata Kunci: Ruang ℓ^p, Ruang Norm-2, Ruang Banach.

Ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan barisan bilangan Riil yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$. Fungsi pada ruang vektor X yang bernilai Riil yang memenuhi sifat-sifat norm-2 dinotasikan dengan $\|\cdot,\cdot\|$ dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norm-2. Ruang norm-2 dikatakan lengkap atau disebut ruang Banach-2 jika setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang tersebut. Penelitian ini dilakukan untuk membuktikan ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap. Langkah pertama untuk membuktikan kelengkapan tersebut adalah dengan membuktikan norm yang terdapat pada ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ memenuhi sifat-sifat norm-2. Selanjutnya membuktikan norm yang diturunkan dari norm-2 ekuivalen dengan norm pada ℓ^p. Selanjutnya menunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam ruang ℓ^p konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang ℓ^p. Berdasarkan pembuktian tersebut diperoleh bahwa $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap.

ABSTRACT

Utami, Sri. 2021. **On The ℓ^p Space on 2-Norm is Complete.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M. Si, (2) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: Space ℓ^p, 2-Normed Space, Banach Space.

The ℓ^p space with $1 \leq p < \infty$ is the set of Real numbers that satisfy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. The function in the vector space X which has Real value which fulfills the 2-norm properties is denoted by $\|\cdot,\cdot\|$ and the pair $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ is called the 2-normed space. A 2-normed space is said to be complete or called a 2-Banach space if every Cauchy sequence in the space converges to an element in that space. This research was conducted to prove the ℓ^p space on 2-norm is complete. The first step to prove the completeness is to prove that the norm contained in ℓ^p with $1 \leq p < \infty$ satisfies the properties of 2-norm. Next, prove that the norm derived from 2-norm is equivalent to the norm in ℓ^p. Next shows that every Cauchy sequence in ℓ^pspace converges to an element in ℓ^p space. Based on this proof, it is found that $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ is a complete 2-norm space.

مخلص

أوتامي، سري. ٢٠٢١. على اكتمال الفضاء ℓ^p **في الفضاء المحمر**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف : (١) الدكتور. خير الرحمن، الماجستير (٢) المشرفة ديوي اسمارتي، الماجستير.

الكلمات الأساسية : الفضاء ℓ^p (Ruang ℓ^p)، الفضاء المحمر-٢ (Ruang Norm-2)، الفضاء باناتش (Ruang Banach) .

الفضاء ℓ^p مع $1 \leq p < \infty$ هو مجموعة سلسلات العدد الحقيقي التي ترضي $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$. الوظيفة في فضاء متجه X الذي يتمتع بقيمة حقيقية يفي بخصائص المحمر-٢ يشير إليه $\|\cdot,\cdot\|$. ويطلق على زوج $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ اسم الفضاء المحمر-٢. ويقال إن الفضاء المحمر-٢ كامل أو يسمى الفضاء باناتش-٢ إذا تقارب كل تسلسل كوشي في الفضاء إلى عنصر في ذلك الفضاء. و قد اجريت هذه البحوث لإثبات الفضاء ℓ^p في المحمر-٢ كامل. الخطوة الأولى لإثبات الاكتمال هي إثبات أن المحمر الوارد في ℓ^p مع $1 \leq p < \infty$ يفي بخصائص المحمر-٢. بعد ذلك، إثبات أن المحمر المستمدة من المحمر-٢ تعادل مع المحمر في ℓ^p. التالي يبين أن كل تسلسل كوشي في الفضاء ℓ^p تقارب إلى عنصر في الفضاء ℓ^p. واستناداً إلى هذا الدليل، وجد أن $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ هو فضاء المحمر-٢ كامل.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep ruang norm pertama kali diperkenalkan oleh S. Banach, H. Hahn dan N. Wiener pada tahun 1922, kemudian teorinya dikembangkan oleh S. Banach pada tahun 1932. Ruang norm adalah ruang yang dibangun dari ruang vektor dengan norm yang didefinisikan di dalamnya. Fungsi pada ruang vektor X yang bernilai Riil yang memenuhi sifat-sifat norm dinotasikan dengan $\|\cdot\|$ dan pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang norm (Kreyzig, 1978).

Konsep ruang norm-2 diperkenalkan oleh Gahler pada tahun 1960-an, yakni suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norm-2. Pada hal ini, norm-2 adalah suatu fungsi Riil dari dua buah vektor dengan sifat-sifat yang serupa dengan sifat-sifat norm. Oleh sebab itu, konsep norm-2 dapat dilihat sebagai bentuk perkembangan dari konsep norm. Norm-2 dinotasikan dengan $\|\cdot,\cdot\|$ dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norm-2.

Pada ruang norm-2 dipelajari tentang kekonvergenan dan barisan Cauchy. Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ di ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan konvergen ke $\boldsymbol{x}$ di X jika untuk setiap ε positif terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon$. Suatu barisan $(\boldsymbol{x_k})$ di ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap ε positif terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K(\varepsilon)$ dengan $k, m \in \mathbb{N}$ berlaku $\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\| < \varepsilon$. Ruang norm-2 dikatakan lengkap atau disebut ruang Banach-2 jika setiap barisan Cauchy $(\boldsymbol{x_k})$ di X konvergen ke suatu $\boldsymbol{x} \in X$ (Schnaubelt, 2019).

Terdapat beberapa contoh ruang norm yang dilengkapi dengan masing-masing karakteristiknya, salah satunya adalah ruang ℓ^p. Menurut Alsina, dkk (2010) ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan barisan bilangan Riil $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Lebih lanjut, diketahui bahwa $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ adalah suatu ruang Banach (Marciszewski & Pol, 2009). Selain itu, ℓ^p dapat dipandang pula sebagai ruang norm-2. Norm-2 pada ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ terdapat dua versi yaitu versi Gahler dan versi Gunawan. Versi Gahler didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p^* = \sup_{\substack{f,g \in (\ell^p)' \\ \|f\|, \|g\| \leq 1}} \left\{ \left| \begin{matrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{matrix} \right| \right\}$$

(Muttaqin & Gunawan, 2010) dengan $(\ell^p)'$ adalah ruang dual dari ℓ^p yaitu himpunan semua fungsional linier terbatas pada ℓ^p. Gahler memperkenalkan norm-2 $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p^*$ pada tahun 1969. Pada saat itu masih belum banyak sifat yang diketahui tentang norm-2 $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p^*$. Selanjutnya, norm-2 pada ℓ^p versi Gunawan diperkenalkan oleh Hendra Gunawan pada tahun 2001, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Muttaqin & Gunawan, 2010). Definisi norm-2 pada ℓ^p versi Gunawan terinspirasi dari observasi terhadap norm-2 standar pada ℓ^2, yaitu

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_s = \left(\left[\det \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{bmatrix} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Definisi ini dapat dilakukan karena ℓ^2 adalah ruang Hilbert atau ruang hasil kali dalam yang lengkap. Sedangkan, ℓ^p dengan $p \neq 2$ tidak memiliki hasil kali dalam sehingga norm-2 tidak dapat didefinisikan seperti (1.1).

Pada tahun 2001, Hendra Gunawan dan M. Mashadi mengkaji hubungan antara ruang Banach-2 dengan ruang Banach, yang dibuktikan dengan kekonvergenan norm-2 ekuivalen dengan norm yang diturunkan dari norm-2. Terkait dengan hal tersebut, maka terdapat ide mengenai ekuivalensi di ruang norm. Oleh karena itu, perlu untuk mengkaji tentang ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.

Pada penelitian sebelumnya, Sukran Konca, dkk (2016) dalam tulisannya "*A New 2-Inner Product on the Space of p-Summable Sequences*" membahas tentang hasil kali dalam-2 dan norm-2 pada ℓ^p yang memenuhi hukum jajargenjang. Selain itu, pada penelitian tersebut juga membuktikan ruang $(\ell_v^2, \|\cdot,\cdot\|_{2,v,w})$ merupakan ruang Banach-2 yang dibuktikan dengan sebarang barisan Cauchy di $(\ell_v^2, \|\cdot,\cdot\|_{2,v,w})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell_v^2$. Begitu juga ruang $(\ell_v^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{2,v,w})$ merupakan ruang Hilbert-2.

Selanjutnya, penulis terinspirasi untuk meneliti ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap. Langkah yang dilakukan penulis yaitu mendefinisikan norm baru pada ℓ^p. Kemudian, menunjukkan ekuivalensi norm tersebut dengan norm pada ℓ^p.

Ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap dapat dianalogikan dengan konsep ikhtiar, doa dan tawakal dalam Islam. Allah Swt. berfirman dalam Q.S Ar-Ra'd ayat 11 yang artinya:

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri".

Pada ayat tersebut Allah Swt. memerintahkan manusia untuk berikhtiar karena Allah tidak akan merubah keadaan menjadi lebih baik sebelum manusia berikhtiar. Ikhtiar harus dilakukan pada jalan yang benar dan dilakukan dengan bersungguh-sungguh. Ikhtiar dari manusia harus disertai dengan ketrampilan yang memadai agar tidak terjadi kegagalan.

Ikhtiar pada manusia harus dilengkapi dengan berdo’a dan bertawakal kepada Allah Swt. Manusia yang berdo’a artinya memohon pertolongan kepada Allah Swt. Alasan manusia harus berdo’a karena Allah yang memiliki izin atas kehendak setiap mahluk-Nya. Jika manusia telah berusaha dan berdo’a, maka ia harus bertawakal kepada Allah Swt. Bertawakal artinya menyerahkan segala usaha dan do’a yang telah dilakukan kepada Allah Swt.

Konsep ikhtiar, do’a dan tawakal merupakan langkah yang lengkap untuk melakukan perubahan pada diri manusia. Pada hal ini, sama halnya dengan ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap yang membutuhkan beberapa langkah untuk membuktikan bahwa norm-2 pada ℓ^p merupakan ruang norm-2 yang lengkap.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pembahasan dari latar belakang tersebut, didapatkan rumusan masalah yaitu bagaimana ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, diperoleh tujuan penelitian yaitu untuk membuktikan ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai pengetahuan baru di bidang analisis fungsional khususnya tentang ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis hanya membatasi peneltian ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang dimanfaatkan penulis untuk melakukan penelitian ini adalah metode studi literatur atau kajian pustaka. Penelitian ini dilakukan dengan mempelajari dari berbagai literatur antara lain e-book, buku cetak dan jurnal ilmiah. Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan ruang norm-2.
2. Mendefinisikan kekonvergenan barisan pada ruang norm-2.
3. Mendefinisikan norm-2 pada ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$.
4. Menunjukkan norm-2 pada ℓ^p memenuhi sifat-sifat norm-2.
5. Membuktikan ekuivalensi norm baru pada ℓ^p dengan norm pada ℓ^p.
6. Menunjukkan ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.
7. Membuat kesimpulan dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini adalah:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan pustaka, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka berisi tentang materi yang berkaitan dengan topik pembahasan yaitu barisan bilangan Riil, ruang vektor, ruang norm, ruang norm-2 dan ruang barisan. Selain itu, terdapat konsep ikhtiar, do'a dan tawakal.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang teorema ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap, serta hasil integrasi penelitian dengan konsep ikhtiar, do'a dan tawakal.

Bab IV Penutup

Penutup berisi tentang kesimpulan dari penelitian dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Barisan Bilangan Riil

Barisan dikenalkan sebagai kumpulan bilangan. Kumpulan bilangan tersebut membentuk sebuah pola, contohnya pola barisan geometrik dan barisan aritmatika. Pada pembahasan ini akan dibahas barisan dari sudut pandang analisis berdasarkan definisi dari (Bartle & Sherbet, 2000).

Definisi 2.1. *Barisan bilangan Riil adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan Asli ke himpunan bilangan Riil.*

Jadi, barisan adalah fungsi $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ nilai fungsi $X(k)$ biasanya ditulis sebagai

$$X(k) = x_k$$

dan disebut suku ke-k dari barisan bilangan Riil X. Notasi barisan yang sering digunakan adalah (x_k) atau $\{x_k\}$ atau $(x_k): k \in \mathbb{N}$.

Cara Penulisan Barisan

Berikut ini beberapa contoh barisan dan penulisannya:

a. $X = (4,6,8, \dots)$ merupakan barisan bilangan genap, bisa ditulis sebagai $X = (2k: k \in \mathbb{N})$.

b. $Y = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ bisa ditulis $Y = (\frac{1}{k}: k \in \mathbb{N})$.

c. Barisan Fibonacci, barisan yang berbentuk $F = (1,1,2,3,5,8, \dots)$. Barisan ini bisa ditulis sebagai berikut:

$F = (x_k: k \in \mathbb{N})$ dengan $x_1 = 1, x_2 = 1, x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$ untuk $k \geq 3$.

2.1.1 Limit Barisan

Definisi 2.2. *Misalkan* (x_k) *barisan bilangan Riil. Bilangan Riil* a *dikatakan limit barisan* (x_k) *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $k \geq K(\varepsilon)$ *dengan* $k \in \mathbb{N}$ *berlaku* $|x_k - a| < \varepsilon$.

Jika bilangan Riil a adalah limit dari barisan (x_k), maka barisan (x_k) dikatakan konvergen ke a, ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{k\to\infty}(x_k) = a \text{ atau } \lim(x_k) = a \text{ atau } x_k \to a.$$

Jika (x_k) tidak konvergen, maka (x_k) dikatakan divergen.

Teorema 2.3. *Barisan bilangan Riil hanya mempunyai satu limit. Artinya, jika suatu barisan konvergen maka limitnya tunggal.*

Bukti: Andaikan barisan (x_k) mempunyai limit lebih dari satu yaitu a dan b dengan $a \neq b$. Karena $\lim(x_k) = a$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall k \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya, $\lim(x_k) = b$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ terdapat $K_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall k \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$|x_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sekarang pilih $M = \text{maks}\{K(\varepsilon), K_1(\varepsilon)\}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq M$ berlaku

$$\begin{aligned}
|a - b| &= |a - x_k + x_k - b| \\
&\leq |a - x_k| + |x_k - b| \qquad \text{(Ketaksamaan Segitiga)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $|a-b| < \varepsilon$. Karena $|a-b| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, akibatnya

$|a-b| = 0$

$\Leftrightarrow a-b = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = b.$

Hal ini kontradiksi dengan $a \neq b$.

Jadi, terbukti bahwa suatu barisan yang konvergen maka limitnya tunggal.

Contoh 2.1. Menggunakan definisi limit, buktikan bahwa

$$\lim\left(\frac{3k+1}{2k+5}\right) = \frac{3}{2}.$$

Bukti: Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dengan $K(\varepsilon) > \frac{13}{4\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} \geq \frac{1}{k}$ berlaku

$$\left|x_k - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3k+1}{2k+5} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{-13}{4k+10}\right| = \left|\frac{13}{4k+10}\right| \leq \frac{13}{4K(\varepsilon)} < \varepsilon\,.$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim\left(\frac{3k+1}{2k+5}\right) = \frac{3}{2}$.

Selanjutnya, akan diberikan sifat-sifat barisan konvergen menurut Bartle dan Sherbet (2000).

Definisi 2.4. *Suatu barisan bilangan Riil* $X = (x_k)$ *dikatakan terbatas jika terdapat bilangan Riil* $M > 0$ *sehingga* $|x_k| \leq M$, *untuk setiap* $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5. *Jika barisan* (x_k) *konvergen, maka barisan* (x_k) *terbatas.*

Bukti: Pilih $\varepsilon = 1$ maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_k - x| < 1$.

Karena $|x_k| = |x_k - x + x|$

$\leq |x_k - x| + |x|$ (Ketaksamaan Segitiga)

$\leq 1 + |x|$.

Sehingga diperoleh $|x_k| \leq 1 + |x|$.

Misalkan himpunan $S = \text{maks}\{x_1, x_2, x_3, \dots, |x_{K(\varepsilon)-1}|, |x| + 1\}$, sehingga diperoleh $|x_k| \leq S$, untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Jadi, terbukti bahwa barisan (x_k) terbatas.

2.1.2 Barisan Cauchy

Berikut ini akan diberikan definisi barisan Cauchy dan Lemma barisan Cauchy yang bersumber dari buku (Bartle & Sherbet, 2000)

Definisi 2.6. *Suatu barisan bilangan Riil $X = (x_k)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, k \geq K(\varepsilon)$ maka berlaku*

$$|x_k - x_m| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Contoh 2.2. Barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Bukti: Pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ maka terdapat bilangan Asli $K(\varepsilon)$ dengan $K(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, k \geq K(\varepsilon)$ dengan $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga berlaku

$$|x_k - x_m| = \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{k}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} + \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Jadi, terbukti barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.7. *Jika $X = (x_k)$ adalah barisan konvergen pada bilangan Riil, maka X barisan Cauchy.*

Bukti: Diketahui (x_k) barisan konvergen, misalkan barisan (x_k) konvergen ke x. Pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ dengan $k \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, k \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|x_k - x_m| &= |x_k - x + x - x_m| \\
&\leq |x_k - x| + |x - x_m| && \text{(Ketaksamaan Segitiga)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa jika X barisan yang konvergen, maka X barisan Cauchy.

Lemma 2.8. *Barisan Cauchy pada bilangan Riil selalu terbatas.*

Bukti: Diketahui barisan (x_k) adalah barisan bilangan rill yang Cauchy. Pilih $\varepsilon = 1$ maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, k \geq K(\varepsilon)$ berlaku

$$
\begin{aligned}
& |x_k - x_m| < 1 \\
\Leftrightarrow\ & |x_k| - |x_m| < 1 && \text{(Ketaksamaan Segitiga)} \\
\Leftrightarrow\ & |x_k| < |x_m| + 1\ .
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $|x_k|$ terbatas pada M. Pilih $M = \text{maks}\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x|_{K(\varepsilon)-1}, |x_m| + 1\}$ sehingga diperoleh $|x_k| \leq M$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Jadi, terbukti bahwa barisan Cauchy pada bilangan Riil selalu terbatas.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.9. (Anton & Rorres, 2005) *Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan* *skalar. Jika X memenuhi sifat-sifat berikut dengan objek $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p} \in X$ dan setiap skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka X dikatakan ruang vektor Riil.*

a. $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \in X$. *(Sifat tertutup pada penjumlahan)*

b. $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$. *(Sifat komutatif pada penjumlahan)*

c. $\boldsymbol{m} + (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{p}$. *(Sifat asosiatif pada penjumlahan)*

d. Terdapat objek $\mathbf{0} \in X$ disebut vekor nol di X, sehingga $\mathbf{0} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} + \mathbf{0} = \boldsymbol{m}$.

(Identitas pada penjumlahan)

e. Untuk setiap $\boldsymbol{m} \in X$ terdapat $(-\boldsymbol{m})$ sehingga $\boldsymbol{m} + (-\boldsymbol{m}) = (-\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{m} = \mathbf{0}$.

(Invers pada penjumlahan)

f. $\alpha\boldsymbol{m} \in X$.

g. $\alpha(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}) = \alpha\boldsymbol{m} + \alpha\boldsymbol{n}$.

(Distribusi kiri perkalian skalar pada penjumlahan vektor)

h. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{m} = \alpha\boldsymbol{m} + \alpha\boldsymbol{m}$.

(Distribusi kanan perkalian vektor pada perkalian skalar)

i. $\alpha(\beta\boldsymbol{m}) = (\alpha\beta)(\boldsymbol{m})$. *(Asosiatif pada perkalian)*

j. $1\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}$. *(Identitas pada perkalian)*

Ruang vektor disebut juga dengan ruang linier. Sifat 1-5 adalah operasi penjumlahan vektor X dinotasikan $(X, +)$ dan sifat 6-10 adalah operasi perkalian vektor dengan skalar dinotasikan dengan $(X, \cdot)$.

Contoh 2.3. Ruang ℓ^2 merupakan himpunan barisan bilangan Riil yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Ruang ℓ^2 merupakan ruang vektor karena memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^2$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ dan $\boldsymbol{y} = (y_n) = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$.

Akan ditunjukkan bahwa X adalah ruang vektor Riil.

a. Akan dibuktikan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell^2$.

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_n) + (y_n)$ (Definisi)

$= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)$

$= (x_1, x_2, x_3, \dots + y_1, y_2, y_3, \dots)$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$ (Operasi Penjumlahan)

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, \dots)$ (Sifat Komutatif)

$= (y_1, y_2, y_3, \dots + x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Sifat Komutatif)

$= ((y_1, y_2, y_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$= (y_n) + (x_n)$

$= \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$. (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\ell^2}$.

b. Akan dibuktikan $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$. (Definisi)

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_n) + (y_n)$ (Definisi)

$= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)$ (Definisi)

$= (x_1, x_2, x_3, \dots + y_1, y_2, y_3, \dots)$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$ (Operasi Penjumlahan)

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, \dots)$

$= (y_1, y_2, y_3, \dots + x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Pengelompokkan)

$= (y_1, y_2, y_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Sifat Komutatif)

$= (y_n) + (x_n)$ (Definisi)

$= \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$. (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

c. Akan dibuktikan $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.

$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (x_n) + (y_n + z_n)$

$= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots + z_1, z_2, z_3, \dots)$

$= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3, \dots)$

$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3, \dots)$

$= (x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3, \dots$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) + (z_1, z_2, z_3, \dots)$

$= (x_n + y_n) + (z_n)$

$= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.

d. Terdapat $\mathbf{0}$ di ℓ^2 sehingga $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.

$\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \mathbf{0} + (x_n)$

$= (0,0,0, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$= (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3, \dots)$ (Operasi Penjumlahan)

$= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0, \dots)$ (Sifat Komutatif)

$= (x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Operasi Penjumlahan)

$= (x_n) = \boldsymbol{x}$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.

e. Terdapat $-\boldsymbol{x} \in \ell^2$ sehingga $-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 0$.

$-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = (-x_n) + (x_n)$

$= (-x_1, -x_2, -x_3, \dots) + (x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Definisi)

$= (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2, -x_3 + x_3, \dots)$ (Operasi Penjumlahan)

$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3, \dots) = 0$ (Sifat Komutatif)

Jadi, terbukti bahwa terdapat $-\boldsymbol{x} \in \ell^2$ sehingga $-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 0$.

f. Akan dibuktikan $\alpha\boldsymbol{x} \in \ell^2$.

$\alpha(\boldsymbol{x}) = \alpha(x_n)$

$= \alpha(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Definisi)

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots)$ (Operasi Perkalian)

$= \alpha(x_n)$

$= \alpha\boldsymbol{x}.$ (Definisi)

Karena $\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$, maka $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots) = \alpha(x_n) = \alpha\boldsymbol{x} \in \ell^2$. Jadi, terbukti bahwa $\alpha\boldsymbol{x} \in \ell^2$.

g. Akan dibuktikan $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

$\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha(x_1, x_2, x_3, \dots + y_1, y_2, y_3, \dots)$

$= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$ (Sifat Komutatif)

$= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \alpha(x_3 + y_3), \dots)$ (Sifat Distributif)

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3, \dots)$ (Operasi Perkalian)

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots + \alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3, \dots)$ (Pengelompokkan)

$= (\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots) + \alpha(y_1, y_2, y_3, \dots)$

$= \alpha(x_n) + \alpha(y_n)$

$= \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}.$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

h. Akan dibuktikan $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$.

$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = (\alpha + \beta)(x_n)$

$= (\alpha + \beta)(x_1, x_2, x_3, \dots)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3, \dots)$ (Sifat Distributif)

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots) + (\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3, \dots)$ (Pengelompokkan)

$= \big(\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) + (\beta(x_1, x_2, x_3, \dots))$

$= \alpha(x_n) + \beta(x_n)$

$= \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}.$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$.

i. Akan dibuktikan $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

$\alpha(\beta\boldsymbol{m}) = \alpha(\beta(x_n))$

$= \alpha(\beta(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Definisi)

$= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3, \dots)$ (Operasi Perkalian)

$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \alpha\beta x_3, \dots)$ (Operasi Perkalian)

$= (\alpha\beta)(x_1, x_2, x_3, \dots)$

$= (\alpha\beta)(x_n)$ (Definisi)

$= (\alpha\beta)\boldsymbol{x}.$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

j. Akan dibuktikan $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

$1\boldsymbol{x} = 1(x_n)$

$= 1(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Definisi)

$= (1x_1, 1x_2, 1x_3, \dots)$ (Operasi Perkalian)

$= (x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Hasil Perkalian)

$= (x_n)$ (Definisi)

$= \boldsymbol{x}.$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Karena ruang ℓ^2 memenuhi sifat-sifat ruang vektor, maka ℓ^2 adalah ruang vektor.

2.2.1 Bebas Linier dan Membangun

Definisi 2.10 (Anton & Rorres, 2005) *Misalkan* $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ *adalah himpunan vektor di ruang vektor* V*. Himpuan S dikatakan himpunan tak bebas linier (bergantung linier), jika*

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$$

mengakibatkan ada nilai $k_1, k_2, \dots, k_n$ *yang tak nol. Jika persamaan vektor*

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$$

hanya memiliki solusi $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$, *maka S dikatakan himpunan bebas linier (tidak bergantung linier).*

Definisi 2.11. (Anton & Rorres, 2005) *Jika* n *adalah bilangan bulat positif, maka vektor* $\boldsymbol{u}$ *di* R^n *didefinisikan sebagai* n*-tupel bilangan Riil* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$*. Himpunan semua* n*-tupel bilangan Riil dinamakan ruang-n dan dinotasikan dengan* R^n*.*

Contoh 2.4. Diberikan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ di R^2 dengan $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$, tentukan apakah S bebas linier?

Bukti: Akan ditunjukkan S bebas linier

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} \ = \mathbf{0}.$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \ k_1(5,0) + k_2(0,6) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \ (5k_1, 0) + (0, 6k_2) = (0,0).$$

Diperoleh $k_1 = k_2 = 0$, sehingga $\boldsymbol{v_1}$ dan $\boldsymbol{v_2}$ bebas linier.

Definisi 2.12. (Anton & Rorres, 2005) *Misalkan* V *ruang vektor dan* $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ *merupakan himpunan bagian dari ruang vektor* V, S *disebut* *membangun V jika untuk setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S.*

Contoh 2.5. Diberikan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ di R^2 dengan $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, maka S membangun R^2.

Bukti: Akan ditunjukkan S membangun R^2.

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{u}.$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1(5,0) + k_2(0,6) = (u_1, u_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (5k_1, 0) + (0, 6k_2) = (u_1, u_2).$$

Diperoleh nilai $k_1 = \frac{1}{5}u_1$ dan $k_2 = \frac{1}{6}u_2$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{u}$ adalah kombinasi linier dari $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ sehingga S membangun R^2.

2.2.2 Basis dan Dimensi

Definisi 2.13. (Anton & Rorres, 2005) *Misalkan V ruang vektor dan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor-vektor di V, maka S dikatakan basis untuk V jika memenuhi syarat berikut:*

a. S bebas linier.

b. S membangun V.

Definisi 2.14. (Anton & Rorres, 2005) *Dimensi adalah banyaknya vektor dalam suatu basis. Ruang vektor tak kosong V dikatakan berdimensi berhingga jika V berisi himpunan vektor berhingga yaitu $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ yang merupakan basis. Jika himpunan vektor V tidak berhingga, maka V dikatakan berdimensi tak hingga.*

Dimensi dari suatu vektor V yang berdimensi berhingga dinotasikan dengan $\dim(V)$*, didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada suatu basis* V*.*

2.3 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.15. (Anton & Rorres, 2005) *Jika* $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$ *adalah vektor-vektor di ruang berdimensi-2 atau ruang berdimensi-3 dan* θ *adalah sudut di antara* $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$*, maka hasil kali titik atau (dot product) atau hasil kali dalam Euclid (Euclidean inner product) dinotasikan dengan* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ *dan didefinisikan sebagai berikut:*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{cases} \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta \text{ jika } \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \text{ dan } \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}. \\ 0 \text{ jika } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ atau } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Definisi 2.16. (Anton & Rorres, 2005) Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor di R^n, maka *hasil kali dalam Euclid (Euclidean inner product) atau* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ *didefinisikan dengan*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \cdots + u_nv_n.$$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ *dinotasikan juga dengan* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

Definisi 2.17. (Royden & Fitzpatrick, 2010) *Misalkan* X *ruang vektor atas lapangan* F*, dimana* $F = \mathbb{R}$ *atau* $F = \mathbb{C}$*. Hasil kali dalam atau ruang pre Hilbert dinotasikan dengan* $\langle \cdot,\cdot \rangle$*. Hasil kali dalam pada* X *adalah suatu fungsi* $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *memenuhi sifat-sifat berikut:*

a. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ *dan* $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. *(Sifat Tak Negatif)*

b. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}} \rangle$. *(Sifat Simetris)*

c. $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. *(Sifat Homogenitas)*

d. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$. *(Sifat Aditivitas)*

Pasangan $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ *disebut ruang hasil kali dalam.*

Definisi 2.18. (Kreyzig, 1978) *Misalkan X suatu ruang hasil kali dalam atau ruang pre Hilbert, maka norma atau panjang sebuah vektor* $\boldsymbol{x}$ *di X dinotasikan dengan* $\|\boldsymbol{x}\|$ *dan didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 2.19. (Ketaksamaan Segitiga)

(Royden & Fitzpatrick, 2010) *Jika X suatu ruang pre Hilbert, maka untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *berlaku sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Bukti: Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle && \text{(Sifat Distributif)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle && \text{(Sifat Distributif)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \overline{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle && \text{(Sifat Simetris)} \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2Re\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&\leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + 2|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\| + 2\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \\
&= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2. && \text{(Definisi)}
\end{aligned}$$

Dengan kata lain $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Definisi 2.20. (Royden & Fitzpatrick, 2010) *Dua buah vektor* $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$ *di dalam ruang hasil kali dalam X dikatakan ortogonal jika* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Vektor $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$ *yang ortogonal dinotasikan* $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Suatu himpunan vektor-vektor di sebuah perkalian dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda di dalam himpunan tersebut ortogonal.

Contoh 2.6. Diberikan $\boldsymbol{v_1} = (-2,0,2)$, $\boldsymbol{v_2} = (0,3,0)$, $\boldsymbol{v_3} = (1,0,1)$ di R^3. Apakah himpunan vektor $V = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ merupakan himpunan ortogonal?

Bukti: Akan ditunjukkan S himpunan ortogonal.

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle &= \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} \\
&= (-2,0,2) \cdot (0,3,0) \\
&= (-2)(0) + (0)(3) + (2)(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3} \rangle &= \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_3} \\
&= (-2,0,2) \cdot (1,0,1) \\
&= (-2)(1) + (0)(0) + (2)(1) \\
&= -2 + 2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle &= \boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_3} \\
&= (0,3,0) \cdot (1,0,1) \\
&= (0)(1) + (3)(0) + (0)(1) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle = \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3} \rangle = \langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle = 0$.

Jadi, himpunan vektor V merupakan himpunan ortogonal.

Definisi 2.21. (Royden & Fitzpatrick, 2010) *Himpunan bagian* $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *di ruang hasil kali dalam* X *dikatakan ortonormal jika* S *ortogonal dan tiap vektor pada* S *mempunyai panjang* 1 *atau* $\|\boldsymbol{v_i}\| = 1$ *dengan* $i = 1,2, \ldots, n$.

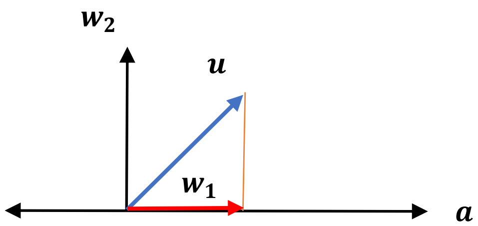
Definisi 2.22. (Royden & Fitzpatrick, 2010) *Misalkan W adalah subruang dari ruang hasil kali dalam X.*

a. *Suatu vektor $\boldsymbol{x} \in X$ dikatakan ortogonal terhadap W jika $\boldsymbol{x}$ ortogonal terhadap semua vektor di W.*

b. *Himpunan semua vektor di X yang ortogonal terhadap W dinamakan komplemen ortogonal dari W, dinotasikan*

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in X : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \rangle = 0, \forall \boldsymbol{w} \in W\}.$$

Definisi 2.23. (Anton & Rorres, 2005) *Proyeksi ortogonal adalah gambar proyeksi yang bidang proyeksinya mempunyai sudut tegak lurus terhadap proyektornya. Proyektor adalah garis-garis yang memproyeksikan benda terhadap bidang proyeksi.*



Gambar 2. 1 Proyeksi Ortogonal

Misalkan:

$\boldsymbol{w_1}$ adalah vektor proyeksi $\boldsymbol{u}$ terhadap $\boldsymbol{a}$ atau $\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{w_2}$ adalah komponen vektor $\boldsymbol{u}$ yang ortogonal terhadap $\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{w_1} = \text{proj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{u} = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}.$

$\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{u} - \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}.$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2}.$

2.4 Ruang Norm

Definisi 2.24. (Kreyzig, 1978) *Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan F. Norm dinotasikan dengan $\|\cdot\|$. Norm pada X adalah suatu fungsi bernilai Riil $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat sebagai berikut:*

a. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$; *(Sifat Tak Negatif)*

$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

b. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$. *(Sifat Homogenitas)*

c. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. *(Ketaksamaan Segitiga)*

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ dinamakan ruang norm.

Definisi 2.25. (Raflesia, 2007) *Misalkan X adalah ruang vektor berdimensi $d, 1 \leq d < \infty$ dan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in X$. Norm $\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_2, \|\boldsymbol{x}\|_p$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ atas X didefinisikan sebagai berikut:*

a. $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|$.

b. $\|\boldsymbol{x}\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{\frac{1}{2}}$.

c. $\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{N}$ *dengan* $1 \leq p < \infty$.

d. $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \text{maks}\{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|\}$.

Teorema 2.26. (Royden & Fitzpatrick, 2010) *Jika ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang hasil kali dalam maka $\|\cdot\|$ memenuhi hukum jajar genjang.*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2).$$

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle + \langle -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle\end{aligned}$$

(Sifat Distributif)

$$= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$

(Sifat Komutatif)

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$ (Sifat Distributif)

$$= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$

$$= 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + 2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$$ (Operasi Penjumlahan)

$$= 2\|\boldsymbol{x}\|^{\boldsymbol{2}} + 2\|\boldsymbol{y}\|^2$$ (Definisi)

$$= 2(\|\boldsymbol{x}\|^{\boldsymbol{2}} + \|\boldsymbol{y}\|^{\boldsymbol{2}})$$ (Sifat Ditributif)

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^{\boldsymbol{2}} + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\boldsymbol{2}} = 2(\|\boldsymbol{x}\|^{\boldsymbol{2}} + \|\boldsymbol{y}\|^{\boldsymbol{2}})$.

Dari **Teorema 2.26.** diperoleh bahwa norma yang berasal dari hasil kali dalam X memenuhi hukum jajar genjang. Apabila hukum jajar genjang berlaku di ruang bernorma, maka ruang tersebut ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.27. (Akcoglu, Bartha, & Ha, 2009) *Misalkan* $(X, \|\cdot\|)$ *adalah ruang norm. Barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *di* X *dikatakan barisan terbatas jika terdapat* $M \in \mathbb{R}$ *dan* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $\|\boldsymbol{x_k}\| \leq M$ *untuk setiap* $k \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.28. (Akcoglu, Bartha, & Ha, 2009) *Misalkan* $(X, \|\cdot\|)$ *adalah ruang norm. Suatu barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *di* X *dikatakan konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in X$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $k \geq K(\varepsilon)$ *berlaku*

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Definisi 2.29. (Akcoglu, Bartha, & Ha, 2009) *Misalkan* $(X, \|\cdot\|)$ *adalah ruang norm. Suatu barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *di* X *dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $m, k \geq K(\varepsilon)$ *berlaku*

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Definisi 2.30. (Kreyzig, 1978) *Misalkan* $(X, \|\cdot\|)$ *adalah ruang norm,* X *dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy* $(\boldsymbol{x_k})$ *dalam* X *konvergen ke suatu* $\boldsymbol{x} \in X$. *Ruang norm yang lengkap disebut ruang Banach.*

Teorema 2.31. (Rumlawang, 2020) *Jika* $(\boldsymbol{x_k})$ *barisan konvergen di* $(X, \|\cdot\|)$, *maka* $(\boldsymbol{x_k})$ *barisan Cauchy di* $(X, \|\cdot\|)$.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$. Pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ dengan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\| &= \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_m}\| \\ &\leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_m}\| && \text{(Ketaksamaan Segitiga)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan konvergen di ruang norm $(X, \|\cdot\|)$, maka $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(X, \|\cdot\|)$.

2.5 Ruang Barisan

Definisi 2.32. (Alsina, Sikorska, & Tomas, 2010) *Ruang* ℓ^p *dengan* $(1 \leq p < \infty)$ *adalah himpunan barisan bilangan Riil yang elemennya dinotasikan dengan* $\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *sedemikian sehingga* $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ *konvergen sehingga memenuhi* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

Untuk setiap bilangan Riil p *dengan* $1 \leq p < \infty$ *didefinisikan*

$$\ell^p = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Ruang ℓ^p *adalah ruang norm dengan fungsi norm* $\|\cdot\|_p: \ell^p \to \mathbb{R}$, *yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_n)$ (Kreyzig, 1978).

Definisi 2.33. (Alsina, Sikorska, & Tomas, 2010) *Ruang* ℓ^1 *adalah himpunan barisan bilangan Riil yang elemennya dinotasikan dengan* $\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ *sedemikian sehingga* $|x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots$ *konvergen sehingga* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

Untuk setiap bilangan Riil $p = 1$ *didefinisikan*

$$\ell^1 = \left\{\boldsymbol{x} = (x_n) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^1 < \infty\right\}.$$

Ruang ℓ^1 *adalah ruang norm dengan fungsi norm* $\|\cdot\|_1: \ell^1 \to \mathbb{R}$ *didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^1, \quad \textit{untuk setiap } \boldsymbol{x} = (x_n). \tag{2.5}$$

Definisi 2.34. (Kobin, 2014) *Ruang* ℓ^2 *adalah himpunan barisan bilangan Riil yang elemennya dinotasikan dengan* $\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ *sedemikian sehingga* $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots$ *konvergen sehingga* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.

Ruang ℓ^2 *adalah ruang norm dengan fungsi norm* $\|\cdot\|_2: \ell^2 \to \mathbb{R}$, *yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_n)$.

Definisi 2.35. (Conway, 1990) *Ruang ℓ^2 yang dilengkapi dengan hasil kali dalam didefinisikan sebagai berikut:*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \,.$$

untuk $\boldsymbol{x} = (x_n), \boldsymbol{y} = (y_n)$ di ℓ^2.

Definisi 2.36. (Kreyzig, 1978) *Ruang ℓ^∞ adalah himpunan dari semua barisan bilangan riil yang terbatas.*

Ruang ℓ^∞ adalah ruang norm dengan fungsi norm $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_n)$ dan $x_n \in \mathbb{C}$ atau $\mathbb{R}$.

Secara umum, elemen dari ℓ^∞ditulis dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots)$ atau $\boldsymbol{x} = (x_n)$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $x_n \in \mathbb{C}$ atau $\mathbb{R}$. Suatu barisan $\boldsymbol{x} = (x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.7. Ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ yang didefinisikan dengan $\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang norm karena memenuhi sifat-sifat norm.

Bukti: Akan dibuktikan ruang ℓ^p memenuhi sifat-sifat norm. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.

Berdasarkan definisi nilai mutlak $|x_n|$ bernilai tak negatif, maka $x_n \geq 0$ sehingga $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$ akan dibuktikan $\boldsymbol{x} = 0$.

Berdasarkan fakta,

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{2.6}$$

Karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka dari (2.6) didapatkan $x_n = 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya, $\boldsymbol{x} = 0$.

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = 0$ akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{x} = 0$ berarti $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Akibatnya, $|x_n| = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.

b. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p$.

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Definisi Norm pada } \ell^p\text{)}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha||x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Sifat Nilai Mutlak pada } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= |\alpha|\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Sifat Komutatif)}$$

$= |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|_p.$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha \boldsymbol{x}\|_p = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|_p$.

c. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$.

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Definisi Norm pada Ruang } \ell^p\text{)}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Ketaksamaan Minkowski)}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p. \quad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$.

Ruang ℓ^p terbukti memenuhi sifat - sifat norm, maka $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ adalah ruang norm.

Contoh 2.8. Ruang ℓ^∞ didefinisikan dengan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ merupakan ruang norm karena memenuhi sifat-sifat norm.

Bukti. Akan dibuktikan ruang ℓ^∞ memenuhi sifat-sifat norm.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^\infty$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.

Berdasarkan definisi nilai mutlak $|x_n|$ bernilai tak negatif, maka $x_n \geq 0$ sehingga $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \geq 0$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \geq 0$.

($\Longrightarrow$)Jika $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0$ akan dibuktikan $\boldsymbol{x} = 0$.

Berdasarkan fakta,

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = 0. \tag{2.7}$$

Karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka dari (2.7) didapatkan $x_n = 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya, $\boldsymbol{x} = 0$.

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = 0$ akan dibuktikan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{x} = 0$ berarti $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = \sup\{|x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots\} = \sup\{0\} = 0$

Jadi, terbukti $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.

b. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}}|\alpha x_n| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}|\alpha||x_n| && \text{(Perkalian nilai mutlak)} \\
&= |\alpha| \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| && \text{(Komutatif pada perkalian)} \\
&= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty. && \text{(Definisi)}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

c. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n + y_n| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n| && \text{(Ketaksamaan Segitiga)} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty. && \text{(Definisi)}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$.

Ruang ℓ^∞ terbukti memenuhi sifat - sifat norm, maka $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ adalah ruang norm.

2.6 Ruang Norm-2

Definisi 2.37. (Manuhutu, Lesnusa, & H, 2014) *Misalkan* X *ruang vektor Riil dengan* $\dim(X) \geq 2$. *Norm-2 pada* X *adalah suatu pemetaan* $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *memenuhi sifat-sifat berikut:*

a. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$; *(Sifat Tak negatif)*

$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x}$ *dan* $\boldsymbol{y}$ *bergantung linier.*

b. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$. *(Sifat Simetris)*

c. $\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$. *(Sifat Homogenitas)*

d. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$. *(Ketaksamaan Segitiga)*

Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *disebut ruang norm-2.*

Definisi 2.38. (Ghazali, 2012) *Misalkan* X *ruang hasil kali dalam dengan dimensi* $d \geq 2$. *Ruang vektor* X *yang dilengkapi dengan norm-2 standar didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\|_s = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_1} \rangle & \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \rangle \\ \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1} \rangle & \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_2} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Ruang ℓ^2 dapat dilengkapi norm-2 standar, sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \left[\det \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Berdasarkan sifat determinan, berlaku

$$\det \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 \end{pmatrix} = \sum_i x_i \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ \sum_j x_j y_j & \sum_j y_j^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama diperoleh,

$$\det \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 \end{pmatrix} = \sum_i y_i \det \begin{pmatrix} \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j y_j \\ x_i & y_i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \sum_j y_i x_j \det \begin{pmatrix} x_j & y_j \\ x_i & y_i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \sum_j -x_j y_i \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu diperoleh,

$$2 \det \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 \end{pmatrix} = \sum_i \sum_j (x_i y_j - x_j y_i) \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \sum_j \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right|^2.$$

Sehingga diperoleh norm-2 pada ℓ^2 sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_2 = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

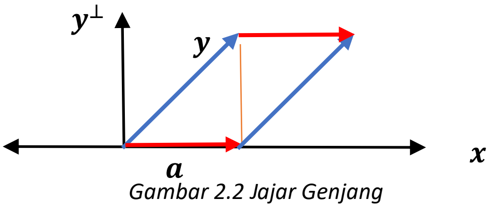
Teorema 2.39. (Ketaksamaan Hadamard)

(Gunawan, 2017) *Misalkan* $(X, \|\cdot,\cdot\|_s)$ *adalah ruang norm-2 standar untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, *maka berlaku ketaksamaan* $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_s \leq \|\boldsymbol{x}\|_s \| \boldsymbol{y}\|_s$.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_s$ menyatakan luas jajar genjang yang direntang oleh $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.2 Jajar Genjang

Misalkan:

$\boldsymbol{x}$ sebagai alas jajar genjang.

$\boldsymbol{y}$ sebagai panjang jajar genjang.

$\boldsymbol{a}$ sebagai proyeksi ortogonal $\boldsymbol{y}$ terhadap $\boldsymbol{x}$.

$\boldsymbol{y}^\perp$ sebagai komplemen ortogonal.

Berdasarkan **Definisi 2.23**, sehingga $\boldsymbol{y}^\perp = \boldsymbol{y} - \frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}^\perp$. Oleh karena itu panjang vektor $\boldsymbol{y}^\perp$ lebih kecil dari panjang vektor $\boldsymbol{y}$. Menggunakan sifat-sifat determinan dan sifat ruang hasil kali dalam diperoleh:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_s = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}^\perp, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}^\perp, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^\perp \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}^\perp, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}^\perp, \boldsymbol{y}^\perp \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \boldsymbol{y}^\perp, \boldsymbol{y}^\perp \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \qquad (\boldsymbol{x} \text{ dan } \boldsymbol{y}^\perp \text{ saling ortogonal})$$

$$= |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}^\perp, \boldsymbol{y}^\perp \rangle|^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{Sifat Determinan})$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_s \|\boldsymbol{y}^\perp\|_s$$

$$\leq \|\boldsymbol{x}\|_s \|\boldsymbol{y}\|_s. \qquad \text{(Panjang vektor } \boldsymbol{y}^{\perp} \leq \boldsymbol{y}\text{)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_s \leq \|\boldsymbol{x}\|_s \|\boldsymbol{y}\|_s$.

Definisi 2.40. (Raflesia, 2007) *Misalkan* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang norm-2. Suatu barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *di* X *dikatakan konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in X$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $k \geq K(\varepsilon)$ *dengan* $k \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0, \textit{ untuk setiap } \boldsymbol{y} \in X. \tag{2.9}$$

Definisi 2.41. (Raflesia, 2007) *Misalkan* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang norm-2. Suatu barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *di* X *dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $m, k \geq K(\varepsilon)$ *berlaku*

$$\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\| = 0 \textit{ untuk setiap } \boldsymbol{y} \in X. \tag{2.10}$$

Definisi 2.42. *Misalkan* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang norm-2,* X *dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy* $(\boldsymbol{x_k})$ *dalam* X *konvergen ke suatu* $\boldsymbol{x} \in X$. *Ruang norm-2 yang lengkap dinamakan ruang Banach-2.*

Teorema 2.43. (Ketaksamaan Holder untuk Deret)

(Kreyzig, 1978) *Misalkan* p *dan* q *bilangan Riil yang memenuhi* $p > 1$ *dan* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Jika* $\boldsymbol{x} = (\xi_j) \in \ell^p$ dan $\boldsymbol{y} = (\eta_j) \in \ell^q$ *maka*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bukti: Misalkan $p > 1$ dan didefinisikan q sebagai berikut:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.11}$$

p dan q disebut eksponen konjugat. Dari (2.11) diperoleh

$$1 = \frac{p+q}{pq}, \qquad pq = p + q, \quad (p-1)(q-1) = 1. \tag{2.12}$$

Karena $\frac{1}{(p-1)} = q - 1$, sehingga $u = t^{p-1}$ mengakibatkan $t = u^{q-1}$.

Selanjutnya, misalkan α dan β adalah sebarang bilangan positif dan $\alpha\beta$ luas daerah persegi panjang sehingga diperoleh

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t^{p-1} + \int_0^\beta u^{q-1} du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{2.13}$$

Misalkan $(\xi_j) \in \ell^p \; dan \; (\eta_j) \in \ell^q$ yang memenuhi

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p = 1, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q = 1. \tag{2.14}$$

Selanjutnya, misalkan $\alpha = |\xi_j|$ dan $\beta = |\eta_j|$, dari ketaksamaan (2.13) didapatkan

$$|\bar{\xi}_j \bar{\eta}_j| \leq \frac{1}{p} |\bar{\xi}_j|^p + \frac{1}{q} |\bar{\eta}_j|^q .$$

Dengan menjumlahkan terhadap j dan menggunakan (2.14) dan (2.11) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{\xi}_j \bar{\eta}_j| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.15}$$

Selanjutnya, ambil sebarang $\boldsymbol{x} = (\xi_j) \in \ell^p$ dan $\boldsymbol{y} = (\eta_j) \in \ell^q$ dan bentuk

$$\bar{\xi}_j = \frac{\xi_j}{(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad \bar{\eta}_j = \frac{\eta_j}{(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q)^{\frac{1}{q}}} \tag{2.16}$$

yang memenuhi (2.14). Kemudian, substitusikan (2.16) ke (2.15) didapatkan

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.44. (Ketaksamaan Minkowski untuk Deret)

(Kreyzig, 1978) *Misalkan p bilangan Riil yang memenuhi $p \leq 1$. Jika $\boldsymbol{x} = (\xi_j) \in \ell^p$ dan $\boldsymbol{y} = (\eta_j) \in \ell^p$ maka*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bukti: Untuk $p = 1$ ketaksamaan di atas didapatkan dari ketaksamaan Segitiga untuk bilangan Riil. Misalkan $p > 1$ dan $\xi_j + \eta_j = \omega_j$. Dari ketaksamaan Segitiga untuk bilangan Riil didapatkan

$$\left|\omega_j\right|^p = \left|\xi_j+\eta_j\right|\left|\omega_j\right|^{p-1} \le \left(\left|\xi_j\right| + \left|\eta_j\right|\right)\left|\omega_j\right|^{p-1}.$$

Dengan menjumlahkan j dari 1 sampai bilangan Asli m yang tetap, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\omega_j\right|^p \le \sum_{j=1}^{m}\left|\xi_j\right|\left|\omega_j\right|^{p-1} + \sum_{j=1}^{m}\left|\eta_j\right|\left|\omega_j\right|^{p-1}. \tag{2.17}$$

Mengggunakan ketaksamaan Holder pada suku pertama penjumlahan dari (2.17) didapatkan,

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\xi_j\right|\left|\omega_j\right|^{p-1} \le \left[\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{m}(|\omega_n|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Dari (2.12), diperoleh $(p-1)q = p$.

Pada (2.17) menggunakan ketaksamaan Holder, suku kedua di ruas kanan pada penjumlahan didapatkan

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\eta_j\right|\left|\omega_j\right|^{p-1} \le \left[\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{m}|\omega_n|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Sehingga diperoleh,

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\omega_j\right|^p \le \left\{\left[\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\sum_{n=1}^{m}|\omega_n|^p\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.18}$$

Membagi kedua ruas dengan $[\sum_{n=1}^{m}|\omega_n|^p]^{\frac{1}{q}}$ pada (2.18) sehingga didapatkan

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.19)$$

Karena $\boldsymbol{x} = (\xi_j), \boldsymbol{y} = (\eta_j) \in \ell^p$ maka ruas kanan (2.19) konvergen. Sehingga ruas kiri juga konvergen dan berlaku

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.7 Konsep Ikhtiar, Do'a dan Tawakal

Pada ruang norm menarik untuk dikaji karena penerapannya sangat banyak dalam kehidupan sehari-hari maupun pada disiplin ilmu lainnya. Ruang norm telah banyak dikembangkan salah satunya adalah kelengkapan ruang ℓ^p.

Allah Swt. berfirman dalam Q.S Ar-Ra'd ayat 11 yang artinya:

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri".

Menurut Nasrudin (2019) ayat di atas terdapat dua jenis perubahan dengan dua pelaku. Perubahan pertama adalah perubahan manusia yang pelakunya adalah Allah. Perubahan yang dibuat oleh Allah pasti terjadi melalui hukum-hukum sosial yang Dia tetapkan dan hukum-hukum ini tidak membedakan satu masyarakat dengan masyarakat lainnya. Perubahan kedua adalah perubahan keadaan diri manusia yang pelakunya adalah manusia. Perubahan yang kedua bisa dipahami dari kata *ma bi anfusihim* dari ayat tersebut yang diartikan dengan apa yang ada pada diri mereka.

Menurut Syamaun (2019) perubahan keadaan diri manusia yang pelakunya adalah manusia dipahami dari kata *ma bi anfusihim* yang terdiri dari dua unsur pokok. Unsur tersebut adalah nilai yang dihayati dan kemauan (kehendak) manusia. Pada kedua unsur tersebut dapat menciptakan dorongan pada diri manusia untuk melakukan perubahan.

Pada ayat di atas Allah Swt. memerintahkan manusia untuk berikhtiar, karena Allah Swt. tidak akan merubah keadaan manusia jika manusia tidak berikhtiar. Ikhtiar merupakan salah satu bentuk ibadah kepada Allah Swt. apabila ikhtiar yang dilakukan manusia berada pada jalan yang benar. Setiap ikhtiar hendaknya dilandasi dengan hati yang ikhlas untuk mendapatkan ridha Allah. Untuk mempercepat perubahan keadaan diri manusia, maka ikhtiar harus dilakukan dengan bersungguh-sungguh dan semaksimal mungkin sesuai dengan kemampuan yang dimilikinya. Terkadang ikhtiar dari manusia sering mengalami kegagalan. Kegagalan yang terjadi terkadang karena adanya keterbatasan dan kekurangan pada diri manusia. Setiap manusia yang mengalami kegagalan dianjurkan untuk bersabar agar tidak berkeluh kesah dan berputus asa.

Pada ajaran Islam menempatkan ikhtiar beriringan dengan do'a. Setiap do'a yang dipanjatkan kepada Allah Swt. untuk memulai ikhtiar akan bernilai ibadah. Do'a artinya permintaan dari seorang hamba kepada Tuhan dengan menggunakan lafal yang dikehendaki dan dengan memenuhi ketentuan yang telah ditetapkan (Dahlan, 2001). Do'a merupakan penyadaran diri dari seorang manusia yang tidak ada daya dan upaya kecuali pertolongan dari Allah Swt. Dalil Al Quran yang memerintahkan berdo'a kepada Allah Swt. terkandung dalam Q.S. Al-Mu'min ayat 60 yang artinya:

Dan Tuhanmu berfirman "Berdo'alah kepada-Ku, niscaya akan Aku perkenankan bagimu. Sesungguhnya orang-orang yang sombong tidak mau menyembah-Ku akan masuk neraka jahanam dalam keadaan hina dina".

Maksud ayat di atas Allah memerintahkan hamba-Nya untuk berdo'a dan Allah akan mengabulkan permintaan terhadap hamba-Nya yang berdo'a. Berdo'a kepada Allah Swt. menandakan bahwa manusia adalah mahluk dhaif di hadapan Allah Swt. Do'a dilakukan dengan lisan atau hati dan menggunakan kalimat yang telah diajarkan dalam Al Quran dan Rosulullah Saw. Dengan berdoa seorang hamba akan semakin dekat dengan Sang Pencipta, sehingga setiap permintaan akan diridhoi oleh Allah Swt.

Manusia yang telah berikhtiar dan berdo'a maka langkah terakhirnya adalah bertawakal. Menurut M.Quraish Shihab, tawakal bukan berarti penyerahan mutlak kepada Allah, tetapi penyerahan tersebut harus didahului dengan usaha manusiawi (Ghoni, 2016). Selanjutnya, seorang muslim diharuskan untuk berikhtiar, tetapi pada keadaan yang sama, dia diharuskan pula untuk berserah diri kepada Allah Swt. Manusia diharuskan melakukan kewajibannya, kemudian menunggu hasilnya sebagaimana kehendak dan ketetapan Allah Swt. Pendapat M.Quraish Shihab tersebut menunjukkan bahwa tawakal adalah menyerahkan segala sesuatu kepada Allah dan yakin kepada kehendak Allah dengan sepenuh hati. Tawakal dalam pengertian ini setidaknya terdiri dari dua unsur yakni ikhtiar, apabila ikhtiar dari seorang manusia sudah mencapai batas maksimal maka langkah terakhirnya adalah bertawakal kepada Allah Swt., inilah tawakal yang sebenarnya.

Salah satu dalil Al Quran yang memerintahkan bertawakal kepada Allah Swt. terdapat dalam Q.S. At-Talaq ayat 3 yang artinya:

"….Dan barang siapa bertawakal kepada Allah, niscaya Allah akan mencukupkan keperluannya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusannya. Sungguh, Allah telah mengadakan ketentuan bagi setiap sesuatu".

Pada ayat tersebut Allah memerintahkan manusia untuk bertawakal. Manusia yang bertawakal hatinya akan menjadi damai, karena ia percaya pada keadilan dan rahmat Allah. Manusia yang bertawakal akan lebih sabar menerima setiap hasil yang baik maupun yang kurang baik, karena ia percaya keputusan tersebut merupakan keputusan dan ketetapan dari Allah Swt. Oleh karena itu, Islam menetapkan setiap manusia yang berikhtiar dan berdo'a, maka harus diikuti dengan bertawakal.

Berdasarkan penjelasan di atas setiap ikhtiar harus dilengkapi dengan do'a dan tawakal kepada Allah Swt. Sebagai seorang peneliti dalam bidang matematika dapat menerapkan ilmu tersebut, seperti yang dilakukan oleh Konca, dkk (2016) yang membuktikan ruang $(\ell_v^2, \|\cdot,\cdot\|_{2,v,w})$ adalah ruang Banach-2 dan ruang $(\ell_v^2, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle_{2,v,w})$ adalah ruang Hilbert-2.

BAB III

PEMBAHASAN

Berdasarkan definisi ruang norm, ruang norm-2 dan ruang barisan yang telah dijelaskan pada bab 2, maka pada bagian ini akan ditunjukkan ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.

3.1 Ruang $\boldsymbol{\ell^p}$ pada Norm-2 Lengkap

Terinspirasi dari rumusan norm-2 pada ℓ^2, sehingga didefinisikan norm-2 pada ℓ^p sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \ell^p$ dan $\boldsymbol{y} = (y_i) \in \ell^p$.

Teorema 3.1. *Fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1}$$

merupakan norm-2 pada ℓ^p.

Bukti: Akan dibuktikan ruang ℓ^p yang didefinisikan pada (3.2) memenuhi sifat-sifat norm-2.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \ell^p$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Definisi norm-2 pada } \ell^p\text{)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_i y_j - x_j y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

Berdasarkan definisi nilai mutlak $\left|x_i y_j - x_j y_i\right| \geq 0$ sehingga

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_i y_j - x_j y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

untuk setiap $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = 0$ maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi norm-2 pada ℓ^p)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_i y_j - (x_j y_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$$= 0. \tag{3.2}$$

Karena berlaku (3.2) dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ adalah sebarang elemen di ℓ^p, maka ada kemungkinan (x_i) bukan kelipatan (x_j). Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, misalkan

$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$

$\begin{pmatrix} x_i \\ x_j\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} y_i \\ y_j\end{pmatrix}$

atau $(x_i) = k(y_i)$ dan $x_j = k(y_j)$ dengan k adalah suatu skalar.

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$(\Longleftarrow)$ Jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{x} = (x_i) = (x_1, x_2, x_3, \dots), \boldsymbol{y} = (y_i) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ bergantung linier sehingga terdapat suatu konstatnta $k_i \neq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{\infty} k_i x_i = 0$. Misalkan

$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$

$\binom{x_i}{x_j} = k\binom{y_i}{y_j}$

atau $(x_i) = k(y_i)$ dan $x_j = k(y_j)$ dengan k adalah suatu skalar.

Sehingga diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Definisi norm-2 pada } \ell^p\text{)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} ky_i & ky_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x_j, y_j \text{ bergantung linier})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|ky_iy_j - ky_jy_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\text{Definisi } \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|\right)$$

$$= 0.$$

Terbukti bahwa, jika $\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i)$ bergantung linier maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

b. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|_p$.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (Definisi norm-2 pada ℓ^p)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_i y_j - x_j y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_i x_j - y_j x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (Sifat Komutatif)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} y_i & y_j \\ x_i & x_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$$= \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|_p.$$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|_p$.

c. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p$.

$$\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} \alpha x_i & \alpha x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (Definisi norm-2 pada ℓ^p)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(|\alpha|\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Sifat Nilai Mutlak pada ℝ)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha|^p \left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Sifat Bilangan Berpangkat)

$$= (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Sifat Komutatif)}$$

$$= |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p. \quad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_p$.

d. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|_p \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|_p + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|_p$.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i + y_i & x_j + y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|(x_i + y_i)\, z_j - (x_j + y_j)z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|(x_i z_j + y_i z_j) - (x_j z_i + y_j z_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Sifat Distributif)

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_i z_j + y_i z_j - x_j z_i - y_j z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Sifat Distributif)

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_i z_j - x_j z_i + y_i z_j \ - y_j z_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Sifat Komutatif)

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Definisi Determinan Matriks)

$$\leq \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Ketaksamaan Minkowski)

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_{\boldsymbol{p}} + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_{\boldsymbol{p}}. \qquad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_p + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_p$.

Karena fungsi yang didefinisikan pada (3.1) memenuhi sifat-sifat norm-2, maka

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

merupakan norm-2 pada ℓ^p.

Secara umum, misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ruang norm-2, dapat dipilih $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di X, sehingga dapat didefinisikan $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ di X sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} \text{ dengan } 1 \leq p < \infty. \qquad (3.3)$$

Sehingga, norm $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ di $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.4)$$

Teorema 3.2. *Misalkan* $(\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *himpunan bebas linier di* ℓ^p, *maka fungsi*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \boldsymbol{x} \in \ell^p$$

mendefinisikan norm di ℓ^p.

Bukti: Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ memenuhi sifat-sifat norm.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p = \left(\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)}\end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \qquad \text{(Definisi)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)}\end{pmatrix}\right|^p \qquad \text{(Sifat Bilangan Berpangkat)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_i a_j^2 - (x_j a_i^2)\right|^p.$$

$$\left(\text{Definisi } \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right| = |ad - bc|\right)$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak $\left|x_i a_j^2 - (x_j a_i^2)\right| \geq 0$. Begitu pula dengan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \geq 0$, sehingga $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq 0$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ akan ditunjukan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Karena $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$. Karena $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ maka $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{a_1}$ bergantung linier, sehingga diperoleh $\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{a_1}$. Dengan mensubstitusikan $\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{a_1}$ maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = \|\beta\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p = |\beta|\,\|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$.

Karena $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ bebas linier, maka $\|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p \neq 0$. Persamaan $|\beta|\,\|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ hanya dapat terpenuhi jika $\beta = 0$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ akan ditunjukan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$.

Karena $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ artinya $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\|0, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|0, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

b. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p^* = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p^*$.

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Definisi)}$$

$$= \left[|\alpha|^p(\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p)\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Nilai mutlak pada } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= [|\alpha|^p]^{\frac{1}{p}}\left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Sifat Bilangan Berpangkat)}$$

$$= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p^* . \qquad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p^* = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p^*$.

c. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^* \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^* + \|\boldsymbol{y}\|_p^*$.

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^* = [\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\|^p + \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|^p]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq [(\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\|)^p + (\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|)^p]^{\frac{1}{p}}$$

(Ketaksamaan Segitiga)

$$= [(\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|)^p]^{\frac{1}{p}} + [(\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|)^p]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Definisi)}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_p^* + \|\boldsymbol{y}\|_p^*.$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^* \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^* + \|\boldsymbol{y}\|_p^*$.

Karena $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ memenuhi sifat-sifat norm maka $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ mendefinisikan norm pada ℓ^p.

Lemma 3.3. *Jika barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ *dalam norm-2* $\|\cdot,\cdot\|_p$, maka *berlaku* $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ *dan* $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ *dengan* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *himpunan bebas linier di* ℓ^p. *Jika barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *Cauchy di ruang norm-2*

$(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ *maka berlaku* $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ *dan* $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ *dengan* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *himpunan bebas linier di* ℓ^p.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in \ell^p$.

a. Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^{\mathrm{p}}$ dalam norm-2, untuk setiap $\boldsymbol{y} \in \ell^p$ maka berlaku $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = 0.$ Karena $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p, akibatnya diperoleh $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0.$

b. Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$, untuk setiap $\boldsymbol{y} \in \ell^p$ maka berlaku $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\|_p = 0$. Karena $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p, akibatnya diperoleh

$$\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0 \text{ dan } \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0.$$

Jadi, terbukti bahwa jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$, maka berlaku $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^{p}. Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^{\mathrm{p}}, \|\cdot,\cdot\|_{\mathrm{p}})$ maka berlaku $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p.

Definisi 3.4. (Akcoglu, Bartha, & Ha, 2009) *Misalkan X adalah ruang vektor dan terdapat dua norm di X yang dinotasikan* $\|\cdot\|$ *dan* $\|\cdot\|^*$. *Norm* $\|\cdot\|$ *dan* $\|\cdot\|^*$ *ekuivalen jika terdapat* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *berlaku*

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|^* \leq \beta\|\boldsymbol{x}\|.$$

Teorema 3.5. *Misalkan* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *himpunan bebas linier di* ℓ^p, *maka norm* $\|\cdot\|_p^*$ *ekuivalen dengan norm* $\|\cdot\|_p$.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in \ell^p$. Tanpa mengurangi keumuman, $\boldsymbol{a_1} = a_j^{(1)} = (1,0,0,\dots)$ dan $\boldsymbol{a_2} = a_j^{(2)} = (0,1,0,\dots)$ dengan $i,j \in \mathbb{N}$.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p = \left(\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(1)} & a_j^{(1)} \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(1)} & a_j^{(1)} \end{pmatrix}\right|^p \qquad \text{(Sifat Bilangan Berpangkat)}$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\Bigg(\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ a_1^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ a_1^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}^p$$

$$+ \cdots\Bigg)$$

$$+ \Bigg(\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ a_2^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_2 & x_2 \\ a_2^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}^p$$

$$+ \cdots\Bigg)$$

$$+ \Bigg(\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ a_3^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_3 & x_3 \\ a_3^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}^p$$

$$+ \cdots\Bigg)$$

$$+ \Bigg(\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ a_4^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ a_4^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_4 & x_3 \\ a_4^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_4 & x_4 \\ a_4^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}^p$$

$$+ \cdots\Bigg) + \cdots\Bigg)$$

$$= \frac{1}{2}(|x_2|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots + |x_2|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots)$$

$$= \frac{1}{2}\big(2(|x_2|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots)\big) \qquad \text{(Operasi Penjumlahan)}$$

$$= |x_2|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots$$ (Operasi Perkalian)

$$= \sum_{j\neq 1}^{\infty} |x_j|^p.$$ (Definisi)

Sehingga diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p = \sum_{j\neq 1}^{\infty} |x_j|^p$.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p = \left(\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)}\end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$ (Definisi)

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)}\end{pmatrix}\right|^p$$ (Sifat Bilangan Berpangkat)

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ a_1^{(2)} & a_1^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ a_1^{(2)} & a_4^{(2)}\end{vmatrix}\right.\right.$$

$$\left. + \cdots\right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ a_2^{(2)} & a_1^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_2 & x_2 \\ a_2^{(2)} & a_2^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2^{(2)} & a_3^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ a_2^{(2)} & a_4^{(2)}\end{vmatrix}^p\right.$$

$$\left. + \cdots\right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ a_3^{(2)} & a_2^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_3 & x_3 \\ a_3^{(2)} & a_3^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ a_3^{(2)} & a_4^{(2)}\end{vmatrix}^p\right.$$

$$\left. + \cdots\right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ a_4^{(2)} & a_1^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ a_4^{(2)} & a_2^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_4 & x_3 \\ a_4^{(2)} & a_3^{(2)}\end{vmatrix}^p + \begin{vmatrix} x_4 & x_4 \\ a_4^{(2)} & a_4^{(2)}\end{vmatrix}^p\right.$$

$$\left.\left. + \cdots\right) + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x_1|^p + |x_1|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2(|x_1|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots)\right)$$ (Operasi Penjumlahan)

$$= |x_1|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \cdots$$ (Operasi Perkalian)

$$= \sum_{j \neq 2}^{\infty} |x_j|^p.$$ (Definisi)

Sehingga diperoleh, $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p = \sum_{j\neq 2}^{\infty} |x_j|^p$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{j \neq 1}^{\infty} |x_j|^p + \sum_{j \neq 2}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[|x_1|^p + |x_2|^p + 2\sum_{j \geq 3}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^*$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[|x_1|^p + |x_2|^p + 2\sum_{j \geq 3}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{j \neq 1}^{\infty} |x_j|^p + \sum_{j \neq 2}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_p^* .$$ (Definisi)

Sehingga diperoleh bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^*$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{j\neq 1}^{\infty} |x_j|^p + \sum_{j\neq 2}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[|x_1|^p + |x_2|^p + 2\sum_{j\geq 3}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2^{\frac{1}{p}} \|\boldsymbol{x}\|_p \, . \qquad \text{(Definisi)}$$

Sehingga diperoleh bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\boldsymbol{x}\|_p$.

Karena $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^*$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\boldsymbol{x}\|_p$, maka dapat disimpulkan bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^* \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\boldsymbol{x}\|_p$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ ekuivalen dengan norm $\|\boldsymbol{x}\|_p$.

Berdasarkan **Lemma 3.3.** dan **Teorema 3.5.** diperoleh **Teorema 3.6.** sebagai berikut:

Teorema 3.6. *Misalkan* (x_k) *barisan di* ℓ^p. *Barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ *dalam norm-2* $\|\cdot,\cdot\|_p$ *jika dan hanya jika barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ *dalam norm* $\|\cdot\|_p$. *Begitu pula dengan* $(\boldsymbol{x_k})$ *barisan Cauchy di ruang norm-2* $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ *jika dan hanya jika* $(\boldsymbol{x_k})$ *barisan Cauchy di ruang norm* $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan barisan $(\boldsymbol{x_k}), (\boldsymbol{x_m}) \in \ell^p$.

a. ($\Longrightarrow$) Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$ akan ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm $\|\cdot\|_p$.

Dari **Lemma 3.3.** diperoleh $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ sehingga,

$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p^* = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p + \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0 + 0 = 0.$

Karena $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ artinya bahwa barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm $\|\cdot\|_p^*$. Berdasarkan **Teorema 3.5.** maka $(\boldsymbol{x_k})$ juga konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm $\|\cdot\|_p$.

($\Longleftarrow$) Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm $\|\cdot\|_p$ akan ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$.

Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ dengan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p < \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}.$$

Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p &\leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_p \qquad \text{(Ketaksamaan Hadamard)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p} \|\boldsymbol{y}\|_p \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

b. ($\Longrightarrow$) Jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ akan dibuktikan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

Dari **Lemma 3.3.** diperoleh $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ sehingga,

$$\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p^* = \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p + \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

Karena $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p^* = 0$ artinya bahwa $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy terhadap norm $\|\cdot\|_p^*$. Berdasarkan **Teorema 3.5.** maka $(\boldsymbol{x_k})$ juga barisan Cauchy terhadap norm $\|\cdot\|_p$.

$(\Longleftarrow)$ Jika $(\boldsymbol{x_k}) \in \ell^p$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ akan dibuktikan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$.

Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in \ell^p$. Pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K(\varepsilon)$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p < \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}.$$

Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_p \qquad \text{(Ketaksamaan Hadamard)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p} \|\boldsymbol{y}\|_p$$

$$= \varepsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$ jika dan hanya jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm $\|\cdot\|_p$. Begitu pula dengan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

Akibat 3.7. *Ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ merupakan ruang Banach-2.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan barisan $(\boldsymbol{x_k}) \in \ell^p$.

Misalkan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$. Berdasarkan **Teorema 3.6.** diperoleh $(\boldsymbol{x_k})$ juga barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$. Karena ℓ^p

terhadap norm $\|\cdot\|_p$ merupakan ruang norm yang lengkap, akibatnya $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm $\|\cdot\|_p$. Berdasarkan **Teorema 3.6.** diperoleh $(\boldsymbol{x_k})$ juga konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$. Sehingga diperoleh bahwa $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap atau disebut dengan ruang Banach-2.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa norm-2 pada ℓ^∞ merupakan ruang norm-2 yang lengkap. Fungsi $\|\cdot,\cdot\|_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right|$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \ell^\infty$ dan $\boldsymbol{y} = (y_i) \in \ell^\infty$.

Teorema 3.8. *Fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right| \tag{3.5}$$

merupakan norm-2 pada ℓ^∞.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa fungsi yang didefinisikan pada (3.5) memenuhi sifat-sifat norm-2.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \ell^\infty$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right| \qquad \text{(Definisi Norm-2 pada } \ell^\infty\text{)}$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| x_i y_j - x_j y_i \right| \qquad \left(\text{Definisi } \left|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|\right)$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak $\left|x_i y_j - x_j y_i\right| \geq 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|x_i y_j + x_j y_i\right| \geq 0$ untuk setiap $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = 0$ akan ditunjukkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right| \quad \text{(Definisi Norm-2 pada } \ell^\infty\text{)}$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| x_i y_j - (y_i x_j) \right| \quad \text{(Determinan Matriks)}$$

$$= 0. \tag{3.6}$$

Karena berlaku (3.6) dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ adalah sebarang elemen di ℓ^∞, maka ada kemungkinan (x_i) bukan kelipatan (x_j). Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, misalkan

$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$

$\begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \end{pmatrix}$

atau $(x_i) = k(y_i)$ dan $x_j = k(y_j)$ dengan k adalah suatu skalar.

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = 0$.

Diketahui $\boldsymbol{x} = (x_i) = (x_1, x_2, x_3, \dots), \boldsymbol{y} = (y_i) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ bergantung linier, sehingga terdapat suatu konstatnta $k_i \neq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{\infty} k_i x_i = 0$. Misalkan

$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$

$\begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \end{pmatrix}$

atau $(x_i) = k(y_i)$ dan $x_j = k(y_j)$ dengan k adalah suatu skalar.

Sehingga diperoleh,

$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|$ (Definisi Norm-2 pada ℓ^∞)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix}ky_i & ky_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|$ (x_j,y_j Bergantung Linier)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|ky_iy_j - ky_jy_i\right|$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$= 0.$ (Karena $x_ik(y_i) = y_ik(x_i)$)

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ bergantung linier.

b. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|_\infty$.

$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|$ (Definisi Norm-2 pada ℓ^∞)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|x_iy_j - x_jy_i\right|$ (Definisi $\left|\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|y_ix_j - y_jx_i\right|$ (Sifat Komutatif)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix}y_i & y_j\\ x_i & x_j\end{pmatrix}\right|$ (Definisi Determinan Matriks)

$= \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|_\infty.$ (Definisi)

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|_\infty$.

c. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty$.

$\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix}\alpha x_i & \alpha x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|$ (Sifat Nilai Mutlak pada $\mathbb{R}$)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\alpha x_i(y_j) - \alpha x_j(y_i)\right|$

(Definisi $\left|\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$)

$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\alpha(x_iy_j - x_jy_i)\right|$ (Sifat Distributif)

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |\alpha| |x_i y_j - x_j y_i| \quad \text{(Perkalian Nilai Mutlak)}$$

$$= |\alpha| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_i y_j - x_j y_i| \quad \text{(Sifat Komutatif)}$$

$$= |\alpha| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right| \quad \text{(Definisi Determinan Matriks)}$$

$$= |\alpha| \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty. \quad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = |\alpha| \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty$.

d. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_\infty$.

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \det \begin{pmatrix} x_i + y_i & x_j + y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|$$

(Sifat Nilai Mutlak pada $\mathbb{R}$)

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |(x_i + y_i)(z_j) - (x_j + y_j) z_i|$$

(Definisi $\left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |ad - bc|$)

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |(x_i z_j + y_i z_j) - (z_i x_j + z_i y_j)| \quad \text{(Sifat Distributif)}$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_i z_j + y_i z_j - z_i x_j - z_i y_j| \quad \text{(Sifat Distributif)}$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_i z_j - z_i x_j + y_i z_j - z_i y_j| \quad \text{(Sifat Komutatif)}$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right| \quad \text{(Determinan Matriks)}$$

$$\leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right| + \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \det \begin{pmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|$$

(Ketaksamaan Segitiga)

$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_\infty. \quad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_\infty$.

Karena fungsi yang didefinisikan pada (3.5) memenuhi sifat-sifat norm-2, maka

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|$$

merupakan norm-2 pada ℓ^∞.

Selanjutnya, dari (3.4) apabila $p=\infty$ norm $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^*$ di $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \sup\{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_\infty\}\,, \tag{3.6}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dan $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ adalah himpunan bebas linier di ℓ^∞.

Teorema 3.9. *Misalkan $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ adalah himpunan bebas linier di ℓ^∞, maka fungsi*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \sup\{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_\infty\}\,, \qquad \boldsymbol{x}\in\ell^\infty$$

mendefinisikan norm di ℓ^∞.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\ell^\infty$ dan $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(1)} & a_j^{(1)}\end{pmatrix}\right| \qquad \text{(Definisi)}$$

$$= \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|x_i a_j^{(1)} - x_j a_i^{(1)}\right|.$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak $\left|x_i a_j^{(1)} - x_j a_i^{(1)}\right| \geq 0$ sehingga $\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|x_i a_j^{(1)} - x_j a_i^{(1)}\right| \geq 0$. Begitu pula dengan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_\infty \geq 0$, sehingga $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \sup\{\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_\infty\}$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = 0$ akan ditunjukan $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Karena $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = 0$ diperoleh $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_\infty = \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$. Karena $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ maka $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{a_1}$ bergantung linier, sehingga diperoleh $\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{a_1}$.

Dengan mensubstitusikan $\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{a_1}$ maka $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_\infty = \|\beta\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\|_\infty = |\beta|\|\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\|_2 = 0$. Karena $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ bebas linier, maka $\|\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\|_2 \neq 0$.

Persamaan $|\beta|\|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_2 = 0$ hanya dapat terpenuhi jika $\beta = 0$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ akan ditunjukan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = 0$.

Karena $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ artinya $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* &= \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \\
&= \sup\{\|0, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|0, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \\
&= \sup\{0\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

b. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty^* = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty^*$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty^* &= \sup\{\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \\
&= \sup\{|\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\}
\end{aligned}$$

(Sifat Nilai Mutlak pada $\mathbb{R}$)

$$= |\alpha| \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \quad \text{(Sifat Distributif)}$$

$$= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty^*. \quad \text{(Definisi)}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty^* = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty^*$.

c. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty^* \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty^* + \|\boldsymbol{y}\|_\infty^*$.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty^* &= \sup\{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \\
&\leq \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\}
\end{aligned}$$

(Ketaksamaan Segitiga)

$$\begin{aligned}
&= \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \\
&= \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} + \sup\{\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_\infty^* + \|\boldsymbol{y}\|_\infty^*. \quad \text{(Definisi)}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty^* \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty^* + \|\boldsymbol{y}\|_\infty^*$.

Dengan demikian, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\}$ mendefinisikan norm pada ℓ^∞.

Lemma 3.10. *Jika barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ *dalam norm-2* $\|\cdot,\cdot\|_\infty$, maka *berlaku* $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ *dan* $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$ *dengan* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *himpunan bebas linier di* ℓ^∞. *Jika barisan* $(\boldsymbol{x_k})$ *Cauchy di ruang norm-2* $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ *maka berlaku* $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ *dan* $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$ *dengan* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *himpunan bebas linier di* ℓ^∞.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$.

a. Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x}$ di ℓ^∞, untuk setiap $\boldsymbol{y} \in \ell^\infty$ maka berlaku

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = 0.$$

Karena $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^∞, akibatnya diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0 \text{ dan } \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0.$$

b. Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$, untuk setiap $\boldsymbol{y} \in \ell^\infty$ maka berlaku

$$\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\|_\infty = 0.$$

Karena $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^∞, akibatnya diperoleh

$$\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0 \text{ dan } \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0.$$

Jadi, terbukti bahwa jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_\infty$, maka berlaku $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ dan $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^∞. Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ maka berlaku $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ dan $\mathit{lim}_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^∞.

Teorema 3.11. *Norm $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^*$ ekuivalen dengan norm $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ pada ℓ^∞.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ adalah himpunan bebas linier di ℓ^∞. Tanpa mengurangi keumuman, $\boldsymbol{a_1} = \left(a_j^{(1)}\right)_j = (1,0,0,0 \dots)$ dan $\boldsymbol{a_2} = \left(a_j^{(2)}\right)_j = (0,1,0,0 \dots)$ dengan $j \in \mathbb{N}$.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(1)} & a_j^{(1)} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sup\left\{\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ a_1^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ a_1^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}, \dots\right),\right.$$

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ a_2^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_2 \\ a_2^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ a_2^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}, \dots\right),$$

$$\left(\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ a_3^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_3 \\ a_3^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}, \dots\right),$$

$$\left.\left(\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ a_4^{(1)} & a_1^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ a_4^{(1)} & a_2^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_3 \\ a_4^{(1)} & a_3^{(1)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_4 \\ a_4^{(1)} & a_4^{(1)} \end{vmatrix}, \dots\right), \dots\right\}$$

$$= \sup\{|x_2|, |x_3|, |x_4|, \dots\}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}/\{1\}} |x_n|.$$

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sup\left\{\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ a_1^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ a_1^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ a_1^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix}, \dots\right),\right.$$

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ a_2^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_2 \\ a_2^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ a_2^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix}, \dots\right),$$

$$\left(\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ a_3^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_3 \\ a_3^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix}, \dots\right),$$

$$\left.\left(\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ a_4^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ a_4^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_3 \\ a_4^{(2)} & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_4 \\ a_4^{(2)} & a_4^{(2)} \end{vmatrix}, \dots\right), \dots\right\}$$

$$= \sup\{|x_1|, |x_3|, |x_4|, \dots\}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}/\{2\}} |x_n|.$$

Sehingga diperoleh, $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}/\{1\}} |x_n|$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}/\{2\}} |x_n|$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\}$$

$$= \sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}/\{1\}} |x_n|, \sup_{n\in\mathbb{N}/\{2\}} |x_n|\right\}$$

$$= \sup\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots\}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_\infty. \qquad \text{(Definisi norm pada } \ell^\infty\text{)}$$

Diperoleh bahwa, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

Berdasarkan **Lemma 3.10.** dan **Teorema 3.11.** diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.12. *Misalkan (x_k) adalah barisan di ℓ^p. Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_\infty$ jika dan hanya jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm $\|\cdot\|_\infty$. Begitu pula dengan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^\infty$ dan barisan $(\boldsymbol{x_k}), (\boldsymbol{x_m}) \in \ell^\infty$.

a. $(\Longrightarrow)$ Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_\infty$, akan dibuktikan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm $\|\cdot\|_\infty$.

   Dari **Lemma 3.10.** diperoleh $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ dan $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$ sehingga,

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_\infty^* = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty + \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0 + 0 = 0.$$

Karena $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_\infty^* = 0$ artinya $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ terhadap norm $\|\cdot\|_\infty^*$. Berdasarkan **Teorema 3.11.** maka $(\boldsymbol{x_k})$ juga konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ terhadap norm $\|\cdot\|_\infty$.

$(\Longleftarrow)$ Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm $\|\cdot\|_\infty$, akan ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_\infty$.

Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in \ell^\infty$ dan pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|y\|_\infty}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ dengan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}.$$

Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty &\leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_\infty \qquad \text{(Ketaksamaan Hadamard)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \|\boldsymbol{y}\|_\infty \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

b. $(\Longrightarrow)$ Jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$, akan dibuktikan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Dari **Lemma 3.10.** diperoleh $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty = 0$ dan $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty = 0$ sehingga,

$$\begin{aligned} \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_\infty^* &= \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty + \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_\infty^* = 0$ artinya $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy terhadap norm $\|\cdot\|_\infty^*$. Berdasarkan **Teorema 3.11.** maka $(\boldsymbol{x_k})$ juga barisan Cauchy terhadap norm $\|\cdot\|_\infty$

($\Leftarrow$) Jika $(\boldsymbol{x_k}) \in \ell^\infty$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, akan dibuktikan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$.

Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in \ell^\infty$ dan pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|y\|_\infty}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k, m \geq K(\varepsilon)$ dengan $k, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}.$$

Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_\infty \qquad \text{(Ketaksamaan Hadamard)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

$$= \varepsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_\infty$ jika dan hanya jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ dalam norm $\|\cdot\|_\infty$. Begitu pula dengan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Akibat 3.13. *Ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ merupakan ruang Banach-2.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^\infty$.

Misalkan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$.

Berdasarkan **Teorema 3.12.** diperoleh $(\boldsymbol{x_k})$ juga barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Karena ℓ^∞ terhadap norm $\|\cdot\|_\infty$ merupakan ruang norm yang lengkap, akibatnya $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ terhadap norm $\|\cdot\|_\infty$. Berdasarkan **Teorema 3.12.** diperoleh $(\boldsymbol{x_k})$ juga konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^\infty$ terhadap norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_\infty$. Sehingga diperoleh bahwa $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap atau disebut dengan ruang Banach-2.

3.2 Integrasi Penelitian dengan Konsep Ikhtiar, Doa dan Tawakal

Pada bab sebelumnya bagian (2.7) telah dijelaskan konsep ikhtiar, doa dan tawakal. Kelengkapan ruang ℓ^p dapat dianalogikan dengan konsep tersebut. Ruang ℓ^p dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy di ℓ^p konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$. Konsep ikhtiar, do'a dan tawakal adalah langkah yang lengkap untuk melakukan perubahan pada diri manusia.

Setiap manusia yang berikhtiar dan semakin mendekatkan diri kepada Allah Swt., maka manusia akan semakin dekat dengan keberhasilan. Ikhtiar harus dilakukan dengan sungguh-sungguh dan disertai ketrampilan yang memadai. Terkadang ikhtiar yang dilakukan manusia mengalami kegagalan. Kegagalan yang dialami manusia disebabkan oleh beberapa faktor, misalnya faktor kesehatan, faktor psikis, faktor ekonomi dan lain-lain yang menyebabkan hambatan untuk mencapai keberhasilan. Untuk mencegah hal-hal yang tidak diinginkan maka manusia harus berdo'a kepada Allah Swt. agar diberikan kemudahan dan kelancaran dalam berikhtiar.

Apabila telah ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ adalah sebarang barisan Cauchy di ℓ^p dan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x}$ serta $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ maka ℓ^p merupakan ruang norm yang lengkap. Setiap manusia yang ikhtiarnya disertai do'a kemudian bertawakal kepada Allah Swt. maka rangkaian proses tersebut sudah lengkap sesuai Q.S. Ar-Ra'd ayat 11, Q.S. Al-Mu'min ayat 60 dan Q.S. At-Talaq ayat 3. Manusia yang bertawakal kepada Allah Swt. akan menerima segala keputusan Allah Swt. baik hasil yang menyenangkan atau kurang menyenangkan. Dengan bertawakal mengajarkan manusia untuk bersabar. Apabila manusia sudah melakukan tiga hal tersebut maka bisa dikatakan langkah manusia telah lengkap untuk melakukan suatu perubahan pada dirinya. Akan tetapi Allah Swt. yang berkehendak memutuskan segala sesuatu atas mahluk-Nya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa fungsi $\|\cdot,\cdot\|$ pada ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ memenuhi sifat norm-2, sehingga $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norm-2. Selanjutnya, $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap dengan menunjukkan setiap barisan Cauchy dalam ruang ℓ^p konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang ℓ^p.

4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis meneliti ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap. Penulis berharap penelitian selanjutnya bisa dikembangkan lagi terutama yang berkaitan dengan ruang ℓ^p dan ruang norm-2.

DAFTAR PUSTAKA

Akcoglu, M. A., Bartha, P. F., & Ha, D. M. (2009). *Analysis in Vector Spaces.* New York: John Willey.

Al Quran Terjemah. (2015). *Departemen Agama RI.* Bandung: CV Darus Sunnah.

Alsina, C., Sikorska, J., & Tomas, M. S. (2010). *Norm Derivatives and Characterizations Of Inner Product Spaces.* World Scientific: Singapore.

Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra Ninth Edition.* Amerika: John Willey & Sons,Inc.

Bartle, R. G., & Sherbet, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis Fourth Edition.* New York: John Willey & Sons.

Conway, J. B. (1990). *A Course in Functional Analysis Second Edition.* New York: Springer.

Dahlan, A. R. (2001). *Ushul Fiqh.* Jakarta: Amzah.

Ghazali, S. M. (2012). *Fungsional-n Linear Terbatas dan Ortogonalitas di Ruang Norm-n.* Bandung: ITB.

Ghoni, A. (2016). Konsep Tawakal dan Relevansinya Dengan Tujuan Pendidikan Islam: Studi Komparasi mengenai Konsep Tawakal menurut M.Quraish Shihab dan Yunan Nasution. *Jurnal An Nuha*, 110-121.

Gunawan, H. (2017). Konsep Sudut Antara Dua Subruang dan Potensi Aplikasinya. *Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajaran II*, 1-13.

Gunawan, H., & Mashadi, M. (2001). On n-Normed Spaces. *IJMMS*, 631-639.

Kallang, A. (2018). Konteks Ibadah Menurut Al quran. *Jurnal Dakwah dan Sosial Keagamaan*, 1-13.

Kobin, A. (2014). *Analysis of Banach Spaces.* Spring.

Konca, S., Idris, M., & Gunawan, H. (2016). A new 2-inner product p-summable sequences. *Egyptian Mathematical Journal*, 244-249.

Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Appplications.* New York: John Willey & Sons.

Kumarasen, S. (2005). *Topology of Metric Spaces.* Mumbai: Alpha Science International Ltd.

Kundu, A., Bag, T., & Nazmul, S. (2019). On metrizability and normbility of 2-normed spaces. *Mathematical Sciences*, 69-77.

Luef, F. (2007). *Hilbert Spaces.* Norwegia: Norwegian University Of Science and Technology.

Manuhutu, J., Lesnusa, Y. A., & H, B. (2014). Ruang Norm-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam. *Jurnal Matematika Integratif*, 139-145.

Marciszewski, W., & Pol, R. (2009). On Banach Space whose norm open sets are Fsigma-sets in the weak topology. *Journal Mathematica Analysis and Applictaions*, 708-722.

Muttaqin, A., & Gunawan, H. (2010). Equivalence of n-norms on the space of p-summable sequences. *Mathematics Subject Classification*, 1-7.

Nasrudin. (2019). Manusia dan Perubahan Sosial dalam Perspektif Al Quran. *Universitas Islam Syekh Yusuf Tangerang*, 40-61.

Nur, M. (2012). Ruang Norm-n dan Ruang Hasil Kali Dalam-n. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 86-91.

Raflesia, U. (2007). Kekonvergenan Suatu Barisan Pada Ruang Norm-2. *Jurnal Gradien*, 333-336.

Royden, H. I., & Fitzpatrick, P. M. (2010). *Analysis Real Fourth Edition.* Republic of China: Pearson Educational Asia Limited and China Machine Press.

Rumlawang, F. Y. (2020). Fixed Point Theorem in 2-Normed Spaces. *Pure and Applied Mathematics Journal*, 41-46.

Schnaubelt, R. (2019). *Lecture Notes Functional Analysis.* Karlsruhe: Karlsruhe Institut.

Syamaun, S. (2019). Pengaruh Budaya Terhadap Sikap dan Perilaku Keberagamaan. *Jurnal At Taujih*, 81-95.

RIWAYAT HIDUP

Sri Utami, lahir di Kabupaten Blitar pada tanggal 13 Agustus 1998. Mahasiswi yang biasa dipanggil Tami tinggal di Desa Sukoanyar RT 04 / RW 01 Kec. Kesamben Kab. Blitar. Anak kedua dari tiga bersaudara terlahir dari pasangan Bapak Sumali dan Ibu Enik Ernawati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Sukoanyar 02 lulus pada tahun 2011. Selanjutnya, pendidikan di MTsN Selorejo lulus pada tahun 2014. Setelah lulus dari MTs Negeri Selorejo melanjutkan pendidikan di SMK Negeri 1 Blitar dengan mengambil jurusan Teknik Gambar Bangunan dan lulus tahun 2017. Setelah lulus, dia melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN dan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa dia berperan aktif pada organisasi intra kampus yaitu Al Farazi (Komunitas Tahfidz dan Bahasa Arab Jurusan Matematika) dan organisasi ekstra kampus yaitu organisasi daerah IKAMAHALITA (Ikatan Mahasiswa Blitar).

KEMENTRIAN RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sri Utami
NIM : 17610060
Fakultas/ Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Ruang ℓ^p pada Norm-2 Lengkap
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Dewi Ismiarti, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Maret 2021	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	25 Maret 2021	Konsutasi Agama Bab I	2.
3.	03 April 2021	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4.	15 April 2021	Konsultasi Agama Bab II	4.
5.	28 April 2021	ACC Bab I dan Bab II	5.
6.	15 September 2021	Konsultasi Bab III	6.
7.	10 Oktober 2021	Konsultasi Integrasi Keislaman	7.
8.	20 Oktober 2021	Konsultasi Bab IV dan Abstrak	8.
9.	07 November 2021	ACC Bab III, IV dan Abstrak	9.
10.	07 November 2021	ACC Agama Keseluruhan	10.
11.	07 November 2021	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 20 Desember 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005