

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA
DINAMIKA PEMINUM ALKOHOL**

SKRIPSI

**OLEH
FARADILLAH RAHMY SAVITRI
NIM. 17610043**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA
DINAMIKA PEMINUM ALKOHOL**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Faradillah Rahmy Savitri
NIM. 17610043**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA
DINAMIKA PEMINUM ALKOHOL**

SKRIPSI

**Oleh
Faradillah Rahmy Savitri
NIM. 17610043**

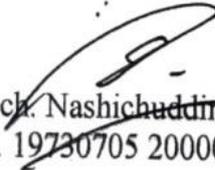
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 21 Oktober 2021

Pembimbing I,

Pembimbing II,



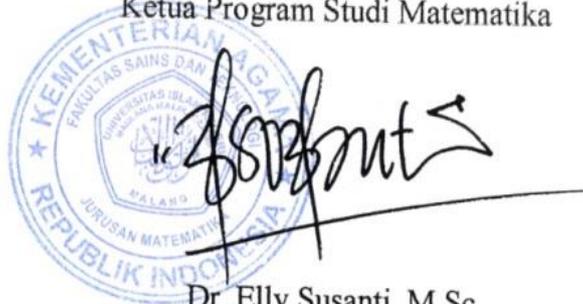
Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229



Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA
DINAMIKA PEMINUM ALKOHOL**

SKRIPSI

Oleh
Faradillah Rahmy Savitri
NIM. 17610043

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 25 November 2021

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Ketua Penguji : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika




Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Faradillah Rahmy Savitri

NIM : 17610043

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Peminum
Alkohol

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 11 Oktober 2021
Yang membuat pernyataan



Faradillah Rahmy Savitri
NIM. 17610043

MOTO

“Dan Dia mendapatimu sebagai seorang yang bingung, lalu Dia memberikan petunjuk” (QS. Al-Hadid: 4)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Sohib, Ibu Sunani, kakak Andivian Sandra Farit, kakak Ifan Mahesa, dan adik tercinta M. Adif Irmawan yang senantiasa mendoakan, memberikan semangat dan nasihat, serta kasih sayang yang tak ternilai.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakaatuh

Puji dan syukur bagi kehadiran Allah SWT atas rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana dalam bidang keilmuan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi , Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapat berbagai bimbingan serta arahan dari banyak pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih dan penghargaan yang tinggi penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, motivasi, nasihat, serta berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang juga telah memberikan arahan, serta ilmu dan pengalaman kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen penguji seminar proposal dan sidang skripsi yang telah memberikan saran dan kritikan yang bermanfaat bagi penulis.
7. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen penguji sidang skripsi yang telah memberikan kritikan beserta saran yang bermanfaat bagi penulis.
8. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan ilmunya.

9. Orang tua, saudara, dan seluruh keluarga yang senantiasa memberikan doa, semangat, motivasi, dan kasih sayang kepada penulis hingga sekarang.

Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita. Penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya serta terselesaikannya skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis ataupun pembaca.
Aamiin.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullah Wabarakaatuh

Malang, Oktober 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xvi
ABSTRAK.....	xvii
ABSTRACT.....	xviii
ملخص.....	xix

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	7

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial.....	9
2.1.1 Persamaan Diferensial Linear.....	9
2.1.2 Persamaan Diferensial Non-Linear.....	9
2.2 Teori Kontrol Optimal.....	10
2.2.1 Persamaan <i>State</i> dan Variabel Kontrol.....	10
2.2.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal.....	11
2.2.3 Hamiltonian.....	11
2.2.4 Prinsip Maksimum Pontryagin.....	12
2.3 Metode Runge Kutta Orde 4.....	13
2.4 Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol.....	14
2.4.1 Daerah Invariant.....	19
2.4.2 Titik Kesetimbangan Model.....	20

2.4.3	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	23
2.4.4	Analisis Sensitivitas	25
2.4.5	Analisis Kestabilan Model	27
2.4.6	Simulasi Numerik.....	35
2.5	Kajian tentang Hukum <i>Khamr</i> dalam Islam.....	40

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol	43
3.2	Tahapan Penyelesaian Model dengan Kontrol.....	48
3.3	Hasil Simulasi Numerik Model dengan Kontrol.....	51
3.4	Upaya Pencegahan dan Pengobatan dalam Perspektif Islam	60

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	61
4.2	Saran.....	62

DAFTAR PUSTAKA 63

LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Nilai Parameter pada Model PMHCQ	18
Tabel 2.2 Indeks Sensitivitas.....	27
Tabel 3.1 Deskripsi Variabel.....	44
Tabel 3.2 Deskripsi Parameter	45
Tabel 3.3 Nilai Awal Simulasi Numerik.....	52
Tabel 3.4 Nilai Parameter	54

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Model Dinamika Peminum Alkohol	15
Gambar 2.2 Model Tanpa Kontrol ketika $R_0 < 1$	36
Gambar 2.3 Model Tanpa Kontrol ketika $R_0 > 1$	37
Gambar 3.1 Dinamika Populasi Peminum Berat	55
Gambar 3.2 Dinamika Populasi Penderita Komplikasi Penyakit Hati.....	56
Gambar 3.3 Dinamika Populasi Peminum yang Sembuh dan Berhenti Minum...	57
Gambar 3.4 Simulasi Kontrol u_1, u_2, u_3	58

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$P(t)$: Populasi peminum potensial terhadap waktu t .
$M(t)$: Populasi peminum sedang terhadap waktu t .
$H(t)$: Populasi peminum berat terhadap waktu t .
$C(t)$: Populasi penderita komplikasi penyakit hati terhadap waktu t .
$Q(t)$: Populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum terhadap waktu t .
N	: Total Populasi.
δ_1	: Laju kematian disebabkan oleh kecanduan alkohol.
μ	: Kematian alami.
β_1	: Laju kontak efektif dengan peminum sedang.
β_2	: Laju peminum sedang menjadi peminum berat.
α_1	: Laju peminum berat menjadi peminum berat dengan komplikasi penyakit hati.
α_2	: Laju peminum berat menjadi sembuh dan berhenti minum.
δ_2	: Laju kematian disebabkan oleh komplikasi penyakit hati.
γ	: Jumlah individu yang berhenti minum dan sembuh dari komplikasi penyakit hati.
A_1	: Bobot yang berkorelasi dengan biaya program kesadaran.
A_2	: Bobot yang berkorelasi dengan biaya pengobatan peminum berat.
A_3	: Bobot yang berkorelasi dengan biaya pengobatan penderita komplikasi penyakit hati.
u_1	: Upaya program kesadaran.

- u_2 : Upaya pengobatan peminum berat.
- ϵu_2 : Peminum berat yang akan melakukan pengobatan dan kembali menjadi peminum sedang.
- $(1-\epsilon)u_2$: Peminum berat yang melakukan pengobatan dan berhenti minum.
- u_3 : Upaya pengobatan penderita komplikasi penyakit hati.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Script Code MATLAB Simulasi Model Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol.....	66
Lampiran 2	Proses Perhitungan Manual Persamaan State	75
Lampiran 3	Proses Perhitungan Manual Persamaan Co-State	79

ABSTRAK

Savitri, Faradillah Rahmy, 2021. **Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: peminum alkohol, dinamika, kontrol optimal, prinsip maksimum Pontryagin

Penelitian ini difokuskan pada analisis dinamik model dinamika peminum alkohol yang disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear orde satu. Model dinamika peminum alkohol terdiri dari lima subpopulasi, yaitu peminum potensial (P), peminum sedang (M), peminum berat (H), penderita komplikasi penyakit hati (C), dan peminum yang sembuh dan berhenti minum (Q). Model tersebut menggambarkan laju dinamika peminum alkohol yang memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas peminum dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas peminum stabil asimtotik lokal dan global ketika $R_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal dan global ketika $R_0 > 1$. Penelitian ini membahas model dinamika peminum alkohol dengan memberikan kontrol yaitu program kesadaran (u_1), pengobatan peminum berat (u_2), dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati (u_3). Program kesadaran diberikan pada peminum potensial, sedangkan pengobatan diberikan pada peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati. Penyelesaian kontrol optimal pada model dinamika peminum alkohol dilakukan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip ini diterapkan untuk memperoleh kondisi yang optimal dan juga memperoleh persamaan *state* dan *co-state*, yang kemudian disimulasikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 dapat meminimalkan jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati, serta dapat memaksimalkan jumlah populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum.

ABSTRACT

Savitri, Faradillah Rahmy, 2021. **Optimal Control of Alcohol Drinking Dynamics Mathematical Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: alcohol drinking, dynamics, optimal control, Pontryagin maximum principle

This research focuses on the dynamics analysis of the dynamics model of alcohol drinking which is presented in the form of a system of nonlinear ordinary differential equations of first order. The dynamics model of alcohol drinking consists of five subpopulations, namely potential drinkers (P), moderate drinkers (M), heavy drinkers (H), heavy drinkers with liver complication (C), and recovered and quitters of drinking (Q). The mathematical model can illustrate the rate of dynamics of alcohol drinkers which has two equilibrium points, namely drinking-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The drinking-free equilibrium point is locally and globally asymptotically stable when $R_0 < 1$. Meanwhile, the endemic equilibrium point is locally and globally asymptotically stable when $R_0 > 1$. This study discusses the dynamics model of alcohol drinking by giving controls, namely awareness program (u_1), treatment applied on the heavy drinkers (u_2), and treatment applied on the heavy drinkers with liver complication (u_3). An awareness program is given to potential drinkers, whereas a treatment is given to heavy drinkers and heavy drinkers with liver complication. The solution of the optimal control on the dynamics of alcohol drinking is derived using Pontryagin maximum principle. This principle is applied to obtain optimal conditions and also to get the state and co-state equations, which are then simulated using the Runge-Kutta method of fourth order. The numerical simulation result indicates that the implementation of controller u_1, u_2 , and u_3 can minimize the number of heavy drinkers and heavy drinkers with liver complication, and also can maximize recovered and quitters of drinking.

ملخص

سافطري، فاراديله رحمي، ٢٠٢١. المراقبة الأمثلية على نموذج الرياضية الديناميكية لشارب الكحول. البحث العلمي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) الدكتورة هيني ويداياني، المسريف، (٢) أحمد ناصح الدين الماجستير.

الكلمات الأساسية: شارب الكحول، الديناميكا، المراقبة الأمثلية، مبادئ بونترياغين
Pontryagin الفائقة

يركز هذا البحث على عملية التحليل الديناميكي على النموذج الديناميكي لشارب الكحول المعدة بصيغة نظام التشابه المميز العادي غير المعادل العهد الواحد. فالنموذج الديناميكي لشارب الكحول يتضمن على خمسة سكان وهي: شارب الاحتمالي (P)، الشارب المتوسط (M)، شارب الخطير (H)، المتألم بمضاعفات الداء (C)، الشارب المتعافي ويقف من الشرب (Q). فتلك النماذج تصور سريع ديناميكا شارب الكحول مما تمتلك نقطتي التوازن وهما نقطة التوازن حرا عن شارب الخمر ونقطة التوازن شارب المتوطن، فنقطة توازن الشارب الثابت أسمتوتيك الداخلي والإجمالي إذا كان $R_0 < 1$. وأما نقطة توازن المتوطن الثابت أسمتوتيك الداخلي والإجمالي إذا كان $R_0 > 1$. ثم يبحث هذا البحث في نموذج ديناميكا شارب الكحول بتقديم الضوابط وهي البرنامج الوعي (u_1)، علاج شارب الخمر (u_2)، علاج المتألم بمضاعفات الداء (u_3). فإن البرنامج الوعي مقدم على الشارب الاحتمالي، غير أن العلاج مقدم إلى الشارب الخطير والمتألم بمضاعفات الداء. فعملية تعميم الضوابط الأمثلية على نموذج الديناميكا لشارب الكحول أجري باستخدام مبادئ بونترياغين الفائقة. فهذه المبادئ مطبقة لتحصيل الأحوال الأمثلية وتحصيل تشابه $state$ و $co-state$. مما أجري باستخدام طريقة Runge-Kutta orde 4. فنتائج التظاهر بالرقم دلت على أن تقديم الضوابط u_1, u_2 و u_3 يستطيع أن يقلل عدد سكان الشارب الخطير والمتألم بمضاعفات الداء، ومع تقليق عدد سكان الشارب المتعافي ويقف من الشرب.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fenomena kecanduan minuman beralkohol merupakan fenomena yang mendapat perhatian dari ruang lingkup matematika untuk mengetahui penyebab di balik fenomena tersebut serta mengidentifikasi metode pencegahan dan pengobatan yang efektif untuk fenomena tersebut. Alkoholisme merupakan penyalahgunaan dan penggunaan alkohol secara berlebihan yang dapat menyebabkan kerusakan fisik seperti penumpukan lemak di hati, sirosis hati, penyakit hati alkoholik, hingga kanker hati (Darmawan, 2010). Sirosis hati merupakan penyakit hati yang paling kronis (Simanjutak, 2021). Menurut *American Liver Foundation*, antara 10 sampai 20 persen peminum alkohol akan mengalami sirosis hati. Seseorang yang mengalami sirosis hati terkadang tidak memiliki gejala yang jelas. Namun, gejala sirosis hati biasanya berkembang ketika seseorang berusia antara 25 sampai 34 tahun (Simanjutak, 2021).

Sebagaimana telah dijelaskan dalam Al-Qurán mengenai minuman beralkohol pada QS. Al-Baqarah ayat 219 (Al-Quran Terjemahan, 2015):

“Mereka menanyakan kepadamu (Muhammad) tentang khamr dan judi. Katakanlah, “Pada keduanya terdapat dosa besar dan beberapa manfaat bagi manusia. Tetapi dosanya lebih besar daripada manfaatnya.” Dan mereka menanyakan kepadamu (tentang) apa yang (harus) mereka infakkan. Katakanlah, “Kelebihan (dari apa yang diperlukan).” Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu agar kamu memikirkan.” (QS. Al-Baqarah:219).

Menurut M. Quraish Shihab dalam tafsir Al-Mishbah, ayat tersebut menjelaskan meskipun ada manfaatnya bagi seorang peminum *khamr* (minuman beralkohol), seperti hiburan dan kesenangan. Namun, bahayanya justru lebih besar

diantaranya dapat menghilangkan akal dan harta, menyebar kebencian, kebencian di antara sesama, dan dapat merusak kesehatan. Oleh karena itu, menurut Khajji dkk (2020b) terdapat langkah yang dapat dilakukan untuk mengurangi penggunaan alkohol dengan cara meningkatkan kesadaran kesehatan pada masyarakat terhadap dampak penggunaan alkohol dan mengumpulkan bukti efektivitas biaya dari sejumlah tindakan pengendalian dampak alkohol terhadap peminum dalam menurunkan konsumsi penggunaan alkohol.

Upaya secara matematik untuk memahami dinamika peminum alkohol adalah dengan pemodelan matematika. Pemodelan matematika yang terkait dengan peminum alkohol telah banyak dikembangkan. Khajji dkk (2020a) menggunakan model matematika $PMHT^pT^rQ$ untuk memahami dinamika peminum alkohol. Model tersebut terbagi menjadi enam subpopulasi yaitu peminum potensial (P), peminum sedang (M), peminum berat (H), peminum berat dengan finansial kurang baik yang bergabung dengan pusat pengobatan umum kecanduan alkohol (T^p), peminum berat dengan finansial baik yang bergabung dengan pusat pengobatan swasta kecanduan alkohol (T^r), dan peminum yang berhenti minum serta sembuh (Q). Kemudian digunakan tiga jenis kontrol optimal, yaitu upaya program kesadaran untuk peminum potensial, upaya untuk mendorong peminum berat agar bergabung dengan pusat pengobatan kecanduan alkohol, dan dukungan psikologis dengan tindak lanjut untuk individu yang berhenti minum yang bertujuan untuk meminimalkan jumlah peminum dan memaksimalkan jumlah peminum dengan finansial baik dan kurang baik yang bergabung di pusat pengobatan kecanduan alkohol.

Pada penelitian Khajji dkk (2020a) belum mengikutsertakan faktor kematian akibat penyakit hati pada pecandu alkohol. Oleh karena itu, penulis menggunakan model matematika *PMHCQ* untuk memahami dinamika peminum alkohol dengan komplikasi penyakit hati. Model tersebut terbagi menjadi lima subpopulasi, yaitu peminum potensial (P), peminum sedang (M), peminum berat (H), penderita komplikasi penyakit hati (C), dan peminum yang sembuh serta berhenti minum (Q). Kemudian, penelitian ini akan menentukan strategi yang optimal untuk meminimalkan jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati serta memaksimalkan jumlah populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum. Dalam mencapai tujuan tersebut, digunakan tiga jenis strategi kontrol optimal, yaitu program kesadaran untuk peminum potensial, pengobatan peminum berat, dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati. Oleh sebab itu, penulis mengangkat judul penelitian “Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis mengangkat beberapa rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol program kesadaran dan pengobatan peminum berat serta penderita komplikasi penyakit hati?
2. Bagaimana tahapan penyelesaian numerik model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol program kesadaran dan pengobatan

peminum berat serta penderita komplikasi penyakit hati dengan Prinsip Maksimum Pontryagin?

3. Bagaimana hasil simulasi numerik model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol program kesadaran dan pengobatan peminum berat serta penderita komplikasi penyakit hati?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol program kesadaran dan pengobatan peminum berat serta penderita komplikasi penyakit hati.
2. Untuk mengetahui tahapan penyelesaian numerik model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol program kesadaran dan pengobatan peminum berat serta penderita komplikasi penyakit hati dengan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Untuk mengetahui hasil simulasi numerik model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol program kesadaran dan pengobatan peminum berat serta penderita komplikasi penyakit hati.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi di bidang kesehatan untuk menekan penyebaran perilaku konsumsi alkohol sehingga dapat dijadikan sebagai rujukan dalam upaya mengurangi jumlah peminum alkohol.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini terarah dan tidak menimbulkan kesalahan yang dimaksud, maka peneliti membatasi penelitian sebagai berikut:

1. Semua bayi baru lahir termasuk ke dalam kelas potensial (P).
2. Interaksi dengan populasi potensial (P) hanya bisa dilakukan oleh peminum sedang (M). Peminum berat (H) tidak dapat berinteraksi atau mempengaruhi populasi potensial untuk menjadi peminum alkohol.
3. Tidak ada pembagian umur, sehingga setiap individu potensial (P) dapat berinteraksi dengan peminum sedang (M) dengan peluang yang sama.
4. Peminum sedang (M) dapat berubah menjadi peminum berat dengan peluang sebesar β_2 .
5. Populasi peminum berat (H) memiliki kemungkinan mengalami komplikasi penyakit hati dengan peluang α_1 atau berhenti minum α_2 .
6. Populasi penderita komplikasi penyakit hati memiliki peluang kematian akibat penyakit tersebut sebesar δ_2 atau peluang sembuh dan berhenti minum sebesar γ .
7. Model dan parameter dalam penelitian ini diambil dari jurnal (Khajji dkk, 2020b).

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan penulis adalah metode studi pustaka atau studi literatur dengan cara mempelajari beberapa jurnal, artikel, buku, atau referensi literatur lainnya yang berkaitan dengan penelitian. Adapun

langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dinamika peminum alkohol adalah sebagai berikut:

Sub bab 3.1 Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol Program Kesadaran dan Pengobatan Peminum Berat serta Penderita Komplikasi Penyakit Hati

Sub bab ini membahas mengenai pembentukan model matematika dinamika peminum alkohol dengan tiga kontrol yang diberikan. Pengontrolan dilakukan dengan menambahkan variabel kontrol berupa kontrol program kesadaran ($u_1(t)$), pengobatan peminum berat ($u_2(t)$), dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati ($u_3(t)$).

Sub bab 3.2 Tahapan Penyelesaian Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol Program Kesadaran dan Pengobatan Peminum Berat serta Penderita Komplikasi Penyakit Hati dengan Prinsip Maksimum Pontryagin

Sub bab ini membahas tahapan penyelesaian dari model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, yaitu:

1. Membentuk persamaan diferensial menjadi fungsi Hamiltonian.
2. Menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state*.
3. Meminimumkan fungsi Hamiltonian sehingga didapatkan fungsi kontrol optimal.
4. Menentukan bentuk dari fungsi Hamiltonian yang optimal.

5. Mensubstitusikan kontrol masukan optimal ke dalam sistem sehingga diperoleh bentuk sistem umpan balik keadaan yang optimal.

Sub bab 3.3 Hasil Simulasi Numerik Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol Program Kesadaran dan Pengobatan Peminum Berat serta Penderita Komplikasi Penyakit Hati

Sub bab ini membahas mengenai simulasi numerik dari model dinamika tanpa kontrol dan dengan kontrol. Berdasarkan pada subbab sebelumnya, persamaan *state* dan *co-state* diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, serta sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini berisi mengenai teori-teori yang mendasari bagian pembahasan. Teori tersebut digunakan sebagai acuan dalam melakukan penelitian. Teori dasar meliputi persamaan diferensial, persamaan diferensial linear dan non linear, teori kontrol optimal, persamaan *state* dan variabel kontrol, formulasi masalah kontrol optimal, Hamiltonian,

prinsip maksimum pontryagin, metode runge kutta orde 4, model dinamika peminum alkohol, dan kajian tentang hukum khamr dalam islam.

BAB III PEMBAHASAN

Bab pembahasan akan fokus membahas model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol, tahapan penyelesaian numerik dengan Prinsip Maksimum Pontryagin hingga simulasi numerik dari model matematika dinamika peminum alkohol dengan kontrol. Pembahasan ini juga membahas mengenai upaya pencegahan dan pengobatan dalam perspektif Islam.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab ini terdiri atas kesimpulan dari hasil penelitian dan saran yang bisa membantu baik pembaca atau peneliti dalam mengembangkan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Menurut Ross (1984), persamaan diferensial diartikan sebagai suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih peubah tak bebas terhadap satu atau lebih peubah bebas. Berdasarkan jumlah peubah bebasnya, persamaan diferensial terbagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa (PDB) didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih peubah tak bebas terhadap satu peubah bebas. Sedangkan persamaan diferensial parsial (PDP) didefinisikan sebagai suatu persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih peubah tak bebas terhadap lebih dari satu peubah bebas.

2.1.1 Persamaan Diferensial Linear

Secara umum, persamaan diferensial biasa linear orde satu memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \quad (2.1)$$

dimana a dan b adalah koefisien konstan (Boyce & DiPrima, 2009).

2.1.2 Persamaan Diferensial Non-Linear

Menurut Kartono (2012), sistem n persamaan diferensial biasa nonlinear orde pertama memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat dari persamaan umum tersebut. Sehingga, $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ adalah turunan dari fungsi x_n terhadap t .

2.2 Teori Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal adalah pengaruh variabel kontrol $u(t)$ membawa suatu persamaan dari *state* awal $x(0)$ saat waktu awal x_0 ke *state* akhir $x(T)$ pada waktu akhir x_T sehingga diperoleh nilai minimum ataupun nilai maksimum untuk fungsi tujuan. Adapun dasar-dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal diantaranya memodelkan situasi sebagai suatu sistem persamaan diferensial biasa, menentukan batas kontrol, merancang fungsi tujuan yang sesuai, menentukan kondisi yang dibutuhkan agar didapatkan penyelesaian yang optimal, dan simulasi numerik yang bertujuan untuk memperlihatkan pengaruh dari kontrol (Hidayah, 2012).

2.2.1 Persamaan *State* dan Variabel Kontrol

State sistem dinamik yaitu apabila $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ diberikan nilai pada waktu $t = t_0$, maka nilainya dapat ditentukan pada $t > t_0$.

State suatu sistem kontinu pada waktu t dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial $\dot{x} = g(t, x(t), u(t))$. Variabel kontrol $u(t)$ didefinisikan sebagai variabel yang mempengaruhi suatu *state* yang dapat dikendalikan, dengan $u(t) \in U$ untuk setiap $t \in [0, T]$ dengan $U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}$ (Hidayah, 2012).

2.2.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Misalkan masalah kontrol optimal diberikan sebagai berikut:

Minimumkan/maksimumkan $J(u) = \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt$

dengan fungsi kendala $\dot{x} = g(t, x(t), u(t))$

$X(0) = x_0$ dan $x(T) = x_T, u(t) \in U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}$ untuk setiap $t \in [0, T]$. $u^*(t)$ merupakan variabel kontrol $u(t)$ yang mencapai optimal. $u^*(t)$ disubstitusikan ke dalam persamaan *state* kendala, sehingga diperoleh *state* yang optimal $x^*(t)$ (Hidayah, 2012).

2.2.3 Hamiltonian

Bentuk fungsi dari Hamiltonian adalah kombinasi antara fungsi masalah $f(x, u, t)$ dan perkalian fungsi subjek $g(t, x, u)$ berbentuk persamaan diferensial dengan pengendali Lagrange $\gamma(t)$. Oleh karena itu, diperoleh bentuk fungsi hamiltonian dengan tiga variabel, yaitu t mempresentasikan waktu, x mempresentasikan vektor *state*, dan u mempresentasikan vektor kontrol yang didefinisikan sebagai berikut (Naidu, 2002):

$$H(t, x(t), \gamma(t)) = f(t, x(t), \gamma(t)) + \gamma(t)g(t, x(t), \gamma(t)) \quad (2.17)$$

dengan $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_s(t))^T$ merupakan s -vektor *state*.

2.2.4 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan prinsip yang penting dalam menyelaikan masalah kontrol optimal. Hal ini karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal dengan kontrol u yang dapat meminimumkan fungsi Hamiltonian (H) pada saat t . Selain memuat variabel kontrol u , Hamiltonian juga memuat variabel *state* x dan variabel *co-state* γ . Prinsip minimum menyatakan bahwa x dan γ akan berubah terhadap waktu t , baik melalui persamaan *state* maupun *co-state*. Berdasarkan persamaan fungsi Hamiltonian, persamaan *state* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \gamma} = g(t, x, u). \quad (2.18)$$

Persamaan *co-state* γ tidak terlihat pada persamaan *state*, tetapi variabel tersebut muncul sebagai bagian dari persamaan fungsi Hamiltonian yang berfungsi sebagai suatu kondisi optimasi. Persamaan *co-state* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Perhatikan bahwa dengan adanya dua turunan yaitu pada persamaan (2.18) dan (2.19), maka diperlukan dua kondisi batas untuk menentukan solusi optimal. Apabila diberikan nilai awal $x(0)$ dan nilai akhir $x(T)$, maka dapat langsung ditentukan $x(t)$ dan $\gamma(t)$. Namun, jika diberikan kondisi akhir, maka suatu kondisi yang disebut sebagai kondisi transversal yaitu $\gamma(T) = 0$ harus digunakan sebagai pengganti kondisi akhir.

Dengan demikian dapat diperoleh beberapa komponen dalam Prinsip Maksimum Pontryagin, yaitu sebagai berikut:

- (i) $H(t, x, u^*, \gamma) \leq H(t, x, u, \gamma)$ untuk setiap $t \in [0, T]$,
- (ii) $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \gamma}$ (Persamaan *state*),
- (iii) $\gamma = -\frac{\partial H}{\partial x}$ (Persamaan *co-state*),
- (iv) $\gamma(T) = 0$ (Kondisi transversal),

Kontrol optimal dari $u^*(t)$ dalam setiap waktu t harus ditentukan agar dapat meminimumkan fungsi Hamiltonian untuk setiap nilai yang memenuhi $u^*(t)$ yang dinyatakan dalam kondisi (i). Jika fungsi Hamiltonian dapat diturunkan terhadap u , maka kondisi (i) dapat diganti oleh

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (2.20)$$

Kondisi (ii) dan (iii) menunjukkan sistem Hamiltonian dalam Prinsip Maksimum Pontryagin. Sedangkan kondisi (iv) merupakan kondisi transversal digunakan apabila kondisi akhir tidak diberikan (Chiang, 2005).

2.3 Metode Runge Kutta Orde 4

Metode Runge Kutta merupakan metode yang dapat memberikan derajat ketelitian yang lebih tinggi tanpa harus mencari turunannya dengan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih di setiap selang langkah. Metode Runge Kutta terbagi menjadi empat, yaitu Runge Kutta orde satu, Runge Kutta orde dua, Runge Kutta orde tiga, dan Runge Kutta orde empat. Metode Runge Kutta yang sering digunakan adalah orde tiga dan orde empat. Hal ini dikarenakan kedua metode

tersebut memiliki tingkat ketelitian solusi lebih tinggi dibandingkan dengan metode sebelumnya. Metode Runge Kutta orde empat berbentuk sebagai berikut:

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right)$$

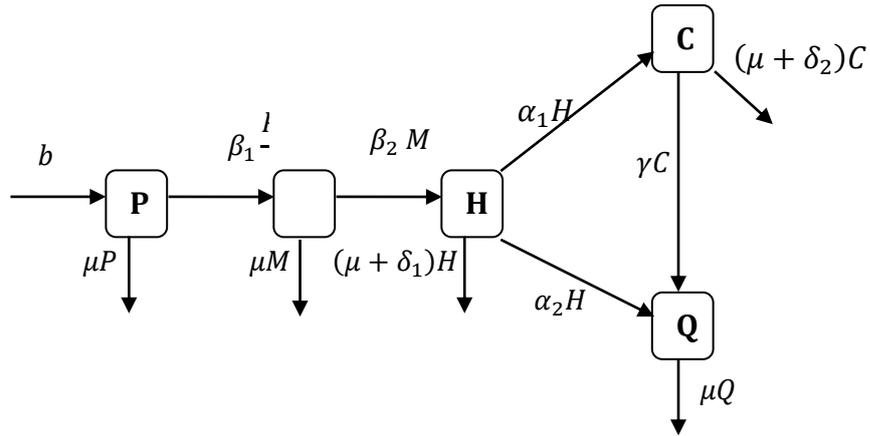
$$k_4 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_3\right)$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Galat perlangkah pada metode Runge Kutta orde empat adalah $O(h^3)$ dan longgokannya adalah $O(h^2)$ (Munir, 2010).

2.4 Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol

Khajji dkk (2020b) mengusulkan model PMHCQ untuk mendeskripsikan dinamika populasi peminum dan menganalisis interaksi antara kelas-kelas peminum. Populasi terbagi menjadi lima kompartemen, yaitu peminum potensial $P(t)$, peminum sedang $M(t)$, peminum berat $H(t)$, penderita komplikasi penyakit hati $C(t)$, dan sembuh serta berhenti minum $Q(t)$. Model matematika PMHCQ dapat dijelaskan melalui diagram berikut:



Gambar 2. 1 Model Dinamika Peminum Alkohol

Diagram di atas dapat dinyatakan dalam lima persamaan diferensial non linear berikut:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) \\ \frac{dM(t)}{dt} = \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

dengan kondisi awal $P(0) > 0$, $M(0) \geq 0$, $H(0) \geq 0$, $C(0) \geq 0$, dan $Q(0) \geq 0$.

Kompartemen P mempresentasikan individu yang rentan untuk meminum alkohol. Jumlah individu dalam kelas ini ditingkatkan dengan laju rekrutmen yang dinotasikan dengan b kemudian dikurangi dengan kontak efektif peminum sedang dengan laju β_1 dan kematian alami μ . Kontak efektif dengan peminum sedang terjadi dalam beberapa acara sosial seperti pernikahan, perayaan kelulusan, pesta akhir pekan, dan perayaan akhir tahun, sehingga calon peminum dapat memperoleh perilaku minum dan dapat menjadi peminum sedang. Persamaan untuk kompartemen P pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) \quad (2.22)$$

Kompartemen M mempresentasikan peminum sedang yang dapat mengontrol asupan alkohol selama beberapa acara dan kesempatan. Peminum kategori ini tidak menghadapi masalah atau konsekuensi negatif. Teman atau keluarga tidak mengeluh tentang konsumsi alkoholnya. Peminum sedang tidak terlalu sering berfikir untuk minum dan tidak rentan terhadap perubahan suasana hati yang ekstrem, ingin berkelahi, atau melakukan kekerasan. Kompartemen ini ditambah dengan peminum potensial yang berubah menjadi peminum sedang dengan laju β_1 dan menurun ketika peminum sedang menjadi peminum berat dengan laju β_2 serta kematian alami dengan laju μ . Persamaan untuk kompartemen M pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) \quad (2.23)$$

Kompartemen H mempresentasikan peminum berat yang kecanduan alkohol. Seorang pecandu alkohol mengalami kesulitan besar dalam mengontrol atau menetapkan batasan konsumsinya. Mayoritas pecandu alkohol mulai sebagai peminum potensial kemudian beralih menjadi peminum sedang. Alkohol dapat mengendalikan kehidupan pecandu alkohol. Pekerjaan, keluarga, lingkungan sosial, serta kesehatan pecandu alkohol terancam. Terlepas dari konsekuensi negatif tersebut, pecandu alkohol tidak dapat berhenti minum. Para pecandu alkohol menyangkal bahwa dirinya memiliki masalah. Penyangkalan ini dapat membuat pecandu alkohol semakin sulit mendapatkan bantuan. Pecandu alkohol biasanya perlu mendapatkan bantuan rehabilitasi untuk mengatasi kecanduannya. Kompartemen H ini meningkat dengan laju β_2 dan menurun dengan laju α_1 (α_1 merupakan laju peminum berat menjadi penderita komplikasi penyakit hati), laju

α_2 (α_2 merupakan laju individu peminum berat menjadi sembuh dan berhenti minum), δ_1 (δ_1 merupakan laju kematian yang disebabkan oleh H), serta kematian alami dengan laju μ . Persamaan untuk kompartemen H pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) \quad (2.24)$$

Kompartemen C mewakili penderita komplikasi penyakit hati yang terkait dengan konsumsi alkohol yang berkepanjangan dan berlebihan. Kompartemen ini meningkat dengan laju α_1 dan menurun dengan laju γ, δ_2 , dan μ . Notasi δ_2 merupakan laju kematian yang disebabkan oleh komplikasi penyakit hati akibat minum alkohol secara berlebihan dan γ merupakan jumlah individu yang berhenti minum serta sembuh dari komplikasi ini. Persamaan untuk kompartemen C pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) \quad (2.25)$$

Kompartemen $Q(t)$ mewakili individu yang sembuh dan berhenti minum. Kompartemen ini ditingkatkan dengan laju α_2 dan γ dan diturunkan dengan laju μ . Oleh karena itu, diperoleh persamaan untuk kompartemen Q pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) \quad (2.26)$$

Total populasi pada saat t dinotasikan dengan $N(t)$ dimana

$$N(t) = P(t) + M(t) + H(t) + C(t) + Q(t).$$

Berikut merupakan nilai parameter pada model PMHCQ:

Tabel 2. 1 Nilai Parameter pada Model PMHCQ

Parameter	Deskripsi	Nilai	Satuan
b	Laju rekrutmen	65	Orang Per hari
N	Total populasi	1000	Orang
δ_1	Laju kematian disebabkan oleh kecanduan alkohol	0.002	Orang Per hari
μ	Laju kematian alami	0.065	Orang Per hari
β_1	Laju kontak efektif dengan peminum sedang	0.2 dan 0.3	Orang Per hari
β_2	Laju peminum sedang menjadi peminum berat	0.14	Orang Per hari
α_1	Laju peminum berat menjadi peminum berat dengan komplikasi penyakit hati	0.02	Orang Per hari
α_2	Laju peminum berat menjadi sembuh dan berhenti minum	0.001	Orang Per hari
δ_2	Laju kematian disebabkan oleh komplikasi penyakit hati	0.002	Orang Per hari
γ	Laju individu yang berhenti minum dan sembuh dari komplikasi penyakit hati	0.001	Orang Per hari

2.4.1 Daerah Invariant

Lemma 1. [Daerah invariant] Solusi $P(t), M(t), H(t), C(t), Q(t)$

dari sistem persamaan (2.21) dibatasi oleh daerah (Khajji dkk, 2020b):

$$\Omega = \left\{ (P, M, H, C, Q) \in \mathbb{R}_+^5 : P + M + H + C + Q \leq \frac{b}{\mu} \right\}$$

Bukti. Akan ditunjukkan daerah invariant dari sistem persamaan (2.21).

Karena $N(t) = P(t) + M(t) + H(t) + C(t) + Q(t)$, maka

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{dP(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt} + \frac{dH(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt} \\ &= b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) + \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \beta_2 M(t) - \\ &\quad (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) + \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) + \alpha_2 H(t) \\ &\quad + \gamma C(t) - \mu Q(t) \\ &= b - \mu P(t) - \mu M(t) - \mu H(t) - \mu C(t) - \mu Q(t) - \delta_1 H(t) - \delta_2 C(t) \\ &= b - \mu N(t) - \delta_1 H(t) - \delta_2 C(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dengan tidak adanya kematian akibat kecanduan alkohol dan komplikasi penyakit hati, persamaan (2.27) menjadi

$$\frac{dN(t)}{dt} \leq b - \mu N(t) \quad (2.28)$$

kemudian pertidaksamaan (2.28) diintegrasikan terhadap N dan t , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{dN(t)}{b - \mu N(t)} &\leq \int dt \\ -\frac{1}{\mu} \ln|b - \mu N(t)| &\leq t + A, A \in \mathbb{R} \\ \ln|b - \mu N(t)| &\geq -\mu(t + A) \\ b - \mu N(t) &\geq e^{-\mu(t+A)} = e^{-\mu t} e^{-\mu A} \end{aligned}$$

dimana $e^{-\mu A} = C$

$$b - \mu N(t) \geq Ce^{-\mu t}$$

jika $N(t) = N(0) \Rightarrow t = 0$. Oleh karena itu,

$$b - \mu N(0) = C$$

$$(b - \mu N(t)) \geq (b - \mu N(0))e^{-\mu t}$$

$$\frac{b}{\mu} - N(t) \geq \frac{(b - \mu N(0))}{\mu} e^{-\mu t} \quad (2.29)$$

$$\frac{b}{\mu} - \frac{(b - \mu N(0))}{\mu} e^{-\mu t} \geq N(t) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{\mu} - \frac{(b - \mu N(0))}{\mu} e^{-\mu t} \right) = \frac{b}{\mu} \geq$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (N(t))$$

mengakibatkan bahwa

$$0 \leq N(t) \leq \frac{b}{\mu} \quad (2.30)$$

Oleh karena itu, untuk analisis dari model (2.21), diperoleh daerah yang diberikan oleh himpunan berikut:

$$\Omega = \left\{ (P, M, H, C, Q) \in \mathbb{R}_+^5 : P + M + H + C + Q \leq \frac{b}{\mu} \right\} \quad (2.31)$$

yang merupakan himpunan invariant positif untuk (2.21).

2.4.2 Titik Keseimbangan Model

Pada tiga persamaan pertama dalam sistem (2.21) tidak bergantung pada variabel C dan Q . Oleh karena itu, dinamika sistem persamaan (2.21) ekuivalen dengan dinamika dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = b - \beta_1 \frac{PM}{N} - \mu P \\ \frac{dM(t)}{dt} = \beta_1 \frac{PM}{N} - (\beta_2 + \mu)M \\ \frac{dH(t)}{dt} = \beta_2 M - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H \end{cases} \quad (2.32)$$

Dalam model tersebut, terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas peminum dan titik kesetimbangan endemik.

a. Titik Kesetimbangan Bebas Peminum

Untuk mencari titik kesetimbangan bebas peminum dari system persamaan (2.32), maka sisi kiri dari model (2.32) dibuat sama dengan nol (Edwards & Penney, 2000), sehingga diperoleh

$$0 = b - \beta_1 \frac{PM}{N} - \mu P \quad (2.33)$$

$$0 = \beta_1 \frac{PM}{N} - (\beta_2 + \mu)M \quad (2.34)$$

$$0 = \beta_2 M - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H \quad (2.35)$$

Misalkan $E_0 = (P_0, M_0, H_0)$ adalah titik kesetimbangan bebas peminum. Pada titik kesetimbangan E_0 diasumsikan bahwa tidak terdapat individu yang minum alkohol, sehingga $M_0 = H_0 = 0$. Dari persamaan (2.33) diperoleh P_0 ,

$$0 = b - \beta_1 \frac{PM}{N} - \mu P$$

$$\beta_1 \frac{PM}{N} + \mu P = b$$

$$\beta_1 \frac{P(0)}{N} + \mu P = b$$

$$P_0 = \frac{b}{\mu}$$

Diperoleh titik kesetimbangan bebas peminum sebagai berikut:

$$E_0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0 \right) \quad (2.36)$$

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik dinyatakan dengan notasi $E^* = (P^*, M^*, H^*)$. Untuk mencari titik kesetimbangan endemik dari sistem

persamaan (2.32), maka sisi kiri dari model (2.32) dibuat sama dengan nol (Edwards & Penney, 2000), sehingga diperoleh

$$0 = b - \beta_1 \frac{P^*M^*}{N} - \mu P^* \quad (2.37)$$

$$0 = \beta_1 \frac{P^*M^*}{N} - (\beta_2 + \mu)M^* \quad (2.38)$$

$$0 = \beta_2 M^* - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H^* \quad (2.39)$$

Titik kesetimbangan endemik diperoleh ketika terdapat peminum alkohol, sehingga $M^* \neq 0$ dan $H^* \neq 0$. Dari sistem persamaan (2.38) diperoleh

$$0 = \beta_1 \frac{P^*M^*}{N} - (\beta_2 + \mu)M^*$$

$$0 = \left(\beta_1 \frac{P^*}{N} - (\beta_2 + \mu) \right) M^*$$

$$M^* = 0 \quad \text{atau} \quad \beta_1 \frac{P^*}{N} - (\beta_2 + \mu) = 0$$

$$\beta_1 \frac{P^*}{N} = \beta_2 + \mu$$

$$P^* = \frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1} = \frac{b}{\mu R_0}$$

kemudian P^* disubstitusikan ke sistem persamaan (2.37), sehingga diperoleh

$$0 = b - \beta_1 \frac{P^*M^*}{N} - \mu P^*$$

$$0 = b - \beta_1 \frac{\left(\frac{\beta_2 + \mu}{\beta_1}\right)M^*}{N} - \mu \left(\frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1}\right)$$

$$0 = b - \frac{((\beta_2 + \mu)N)M^*}{N} - \mu \left(\frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1}\right)$$

$$((\beta_2 + \mu))M^* = b - \mu \left(\frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1}\right)$$

$$M^* = \frac{b - \mu \left(\frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1}\right)}{(\beta_2 + \mu)}$$

$$M^* = \frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)\beta_1} = \frac{b(R_0 - 1)}{\beta_1}$$

kemudian M^* disubstitusikan ke sistem persamaan (2.39), sehingga diperoleh

$$0 = \beta_2 M^* - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) H^*$$

$$(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) H^* = \beta_2 M^*$$

$$H^* = \frac{\beta_2 M^*}{(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)}$$

$$H^* = \frac{\beta_2 \left(\frac{b\beta_1 - \beta_2 \mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)\beta_1} \right)}{(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)}$$

$$H^* = \frac{\beta_2 (b\beta_1 - \beta_2 \mu N - \mu^2 N)}{\beta_1 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_2 \mu + \beta_2 \delta_1 + \beta_2 \mu + \delta_1 \mu + \mu^2)} = \frac{b\beta_2 (R_0 - 1)}{\beta_1 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)}$$

dipeoleh titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

$$E^* = \left(\frac{b}{\mu R_0}, \frac{b(R_0 - 1)}{\beta_1}, \frac{b\beta_2 (R_0 - 1)}{\beta_1 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)} \right) \quad (2.40)$$

2.4.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan matriks *next generation*. Misalkan $x = (M, H)^T$, sehingga persamaan (2.34) dan (2.35) dapat ditulis menjadi berikut (Driessche & Watmough, 2002):

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathcal{F} - \mathcal{V}, \text{ dengan } i = 1, 2$$

dimana

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x) \\ \mathcal{F}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \frac{PM}{N} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1(x) \\ \mathcal{V}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + \beta_2)M \\ -\beta_2 M + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(x)}{\partial M} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(x)}{\partial H} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2(x)}{\partial M} & \frac{\partial \mathcal{F}_2(x)}{\partial H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \frac{P}{N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1(x)}{\partial M} & \frac{\partial \mathcal{V}_1(x)}{\partial H} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2(x)}{\partial M} & \frac{\partial \mathcal{V}_2(x)}{\partial H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + \beta_2) & 0 \\ -\beta_2 & (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \end{pmatrix}$$

F adalah matriks tak negatif dengan ukuran 2×2 . Sedangkan V adalah matriks tak singular dengan ukuran 2×2 . Ukuran matriks tersebut diperoleh dari model dinamika peminum alkohol dimana terdapat dua populasi yang terinfeksi.

Untuk memperoleh matriks *next generation*, digunakan perkalian F dengan V^{-1} . Oleh karena itu, perlu untuk mencari nilai invers dari matriks V .

Invers dari matriks V adalah sebagai berikut:

$$V^{-1} = \frac{1}{(\mu + \beta_2)(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)} \begin{pmatrix} (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) & 0 \\ \beta_2 & (\mu + \beta_2) \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu + \beta_2)} & 0 \\ \frac{\beta_2}{(\mu + \beta_2)(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)} & \frac{1}{(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)} \end{pmatrix}$$

Matriks *next generation* didefinisikan sebagai berikut:

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \frac{P}{N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu + \beta_2)} & 0 \\ \frac{\beta_2}{(\beta_2 + \mu)(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)} & \frac{1}{(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 P}{(\mu + \beta_2)N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kemudian mensubstitusikan persamaan (3.26) agar diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut:

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

$$R_0 = \rho \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 P}{(\mu + \beta_2)N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \rho \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dimana $P = \frac{b}{\mu} = N$, sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah

$$R_0 = \frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)} \quad (2.41)$$

2.4.4 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk menentukan kontribusi masing-masing parameter terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar yang telah diperoleh adalah sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)}$$

Indeks sensitivitas dari parameter model diberikan sebagai berikut:

$$\partial_X^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial X} \times \frac{X}{R_0}$$

dimana X merupakan suatu parameter (Hurint, Ndi, & Lobo, 2017).

Untuk parameter β_1 diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \partial_{\beta_1}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \beta_1} \times \frac{\beta_1}{R_0} \\ &= \frac{1}{(\mu + \beta_2)} \times \frac{\beta_1}{\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)}} \\ &= \frac{1}{(\mu + \beta_2)} \times \frac{\beta_1(\mu + \beta_2)}{\beta_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

untuk parameter β_2 diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \partial_{\beta_2}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \beta_2} \times \frac{\beta_2}{R_0} \\ &= -\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)^2} \times \frac{\beta_2}{\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)}} \\ &= -\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)^2} \times \frac{\beta_2(\mu + \beta_2)}{\beta_1} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\beta_2}{(\mu + \beta_2)}$$

untuk parameter μ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \mu} \times \frac{\mu}{R_0} \\ &= -\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)^2} \times \frac{\mu}{\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)}} \\ &= -\frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)^2} \times \frac{\mu(\mu + \beta_2)}{\beta_1} \\ &= -\frac{\mu}{(\mu + \beta_2)} \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, dapat disimpulkan bahwa bilangan reproduksi dasar (R_0) paling sensitif terhadap perubahan β_1 . Jika β_1 meningkat maka R_0 juga akan meningkat dengan proporsi yang sama dan jika β_1 menurun maka R_0 juga akan menurun dengan proporsi yang sama. Sedangkan μ dan β_2 memiliki hubungan berbanding terbalik dengan R_0 , sehingga peningkatan salah satu dari μ atau β_2 akan menyebabkan penurunan pada R_0 . Mengingat sensitivitas R_0 terhadap β_1 , maka perlu untuk memfokuskan upaya pengurangan β_1 . Dengan kata lain, analisis sensitivitas ini memberitahukan bahwa mencegah lebih baik daripada mengobati. Upaya peningkatan pencegahan lebih efektif dalam mengendalikan dinamika penyebaran kebiasaan minum alkohol dibandingkan dengan upaya peningkatan jumlah individu yang mengakses pengobatan.

Berikut adalah indeks sensitivitas dari semua parameter model R_0 yang disusun dari yang paling sensitif hingga yang paling tidak sensitif:

Tabel 2. 2 Indeks Sensitivitas

Parameter	Deskripsi	Indeks Sensitivitas
β_1	Laju kontak efektif	+1
μ	Laju kematian alami	-0.32
β_2	Koefisien transmisi M pada H	-0.68

2.4.5 Analisis Kestabilan Model

2.4.5.1 Analisis Kestabilan Lokal

Dalam menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, digunakan matriks Jacobian yang bertujuan untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobian diperoleh dari persamaan (2.32) yang dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= b - \beta_1 \frac{PM}{N} - \mu P \\
 f_2 &= \beta_1 \frac{PM}{N} - (\beta_2 + \mu)M \\
 f_3 &= 0 = \beta_2 M - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Kemudian sistem persamaan (2.42) diturunkan terhadap P, M , dan H menggunakan matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J(P, M, H) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial P} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial H} \\ \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial H} \\ \frac{\partial f_3}{\partial P} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial H} \end{bmatrix}.$$

sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J(P, M, H) = \begin{bmatrix} -\beta_1 \frac{M}{N} - \mu & -\beta_1 \frac{P}{N} & 0 \\ \beta_1 \frac{M}{N} & \beta_1 \frac{P}{N} - (\beta_2 + \mu) & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

a. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Peminum

Teorema 3. [Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas peminum]

Titik kesetimbangan bebas peminum $E_0 \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0 \right)$ dari sistem (2.1) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil apabila $R_0 > 1$ (Khajji dkk, 2020b).

Bukti. Kestabilan lokal diperoleh dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas peminum ke matriks (2.43), dimana titik kesetimbangan bebas peminum telah diperoleh sebelumnya yaitu $E_0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0 \right)$, sehingga diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 - (\beta_2 + \mu) & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

dimana $P = \frac{b}{\mu} = N$

Berdasarkan matriks Jacobian (2.44), maka dapat ditentukan persamaan karakteristik yaitu sebagai berikut:

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 - (\beta_2 + \mu) & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk menentukan nilai determinan, digunakan metode Sarrus sebagai berikut:

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 - (\beta_2 + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta_1 \\ 0 & \beta_1 - (\beta_2 + \mu) - \lambda \\ 0 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= (-\mu - \lambda)(\beta_1 - (\beta_2 + \mu) - \lambda)(-(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda) - 0$$

$$= (-\mu - \lambda)(\beta_1 - (\beta_2 + \mu) - \lambda)(-(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda)$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \beta_1 - (\beta_2 + \mu) = -(\mu + \beta_2)(1 - R_0)$$

$$\lambda_3 = -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)$$

Oleh karena itu, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik jelas real dan negatif ketika $R_0 < 1$. Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas peminum stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan tidak stabil ketika $R_0 > 1$.

b. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Teorema 4. [Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik] Titik kesetimbangan endemik E^* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$, dan sebaliknya (Khajji dkk, 2020b).

Bukti. Kestabilan lokal diperoleh dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan endemik ke matriks (2.43), dimana titik kesetimbangan endemik telah diperoleh sebelumnya yaitu

$$E^* = \left(\frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1}, \frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)\beta_1}, \frac{\beta_2(b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N)}{\beta_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\mu + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\mu + \beta_2\delta_1 + \beta_2\mu + \delta_1\mu + \mu^2)} \right),$$

sehingga diperoleh

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)}\right)\frac{1}{N} - \mu & -(\beta_2 + \mu) & 0 \\ \left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)}\right)\frac{1}{N} & (\beta_2 + \mu) - (\beta_2 + \mu) & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut, dapat ditentukan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)}\right)\frac{1}{N} - \mu & -(\beta_2 + \mu) & 0 \\ \left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)}\right)\frac{1}{N} & (\beta_2 + \mu) - (\beta_2 + \mu) & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Dalam menentukan nilai determinan, digunakan metode Sarrus sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{-b\beta_1 + \beta_2\mu N + \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} - \mu - \lambda & -(\beta_2 + \mu) & 0 \\ \frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} & (\beta_2 + \mu) - (\beta_2 + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_2 & -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\frac{-b\beta_1 + \beta_2\mu N + \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} - \mu - \lambda \quad -(\beta_2 + \mu)$$

$$\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} \quad (\beta_2 + \mu) - (\beta_2 + \mu) - \lambda$$

$$0 \quad \beta_2 \quad -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda$$

$$|A| = \left[\left(\frac{-b\beta_1 + \beta_2\mu N + \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} - \mu - \lambda \right) \left((\beta_2 + \mu) - (\beta_2 + \mu) - \lambda \right) \left(-(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda \right) \right] - \left[\left(-(\beta_2 + \mu) \right) \left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} \right) \left(-(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda \right) \right]$$

$$|A| = \left(-(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) - \lambda \right) \left[\lambda^2 + \left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} + \mu \right) \lambda + \left(\frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{N} \right) \right]$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2.45)$$

dengan λ_2 dan λ_3 memenuhi persamaan karakteristik (2.45), dimana

$$a_1 = \frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)N} + \mu = \beta_1 M^* + \mu > 0$$

$$a_0 = \frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{N} = \beta_1^2 P^* M^* > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$. Oleh karena itu titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$.

2.4.5.2 Analisis Kestabilan Global

Untuk menunjukkan sistem persamaan (2.32) stabil asimtotik global, digunakan fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan bebas peminum dan titik kesetimbangan endemik.

a. Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Minum

Teorema 5. [Kestabilan global titik kesetimbangan bebas peminum] Titik kesetimbangan bebas peminum E_0 stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$, dan sebaliknya (Khajji dkk, 2020b).

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas peminum stabil asimtotik global. Titik kesetimbangan bebas peminum dapat dikatakan stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$.

Didefinisikan

$$\begin{aligned} V: \Gamma \subset \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R} \\ V(P, M, H, C, Q) &= M \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fungsi V dapat dikatakan sebagai fungsi Lyapunov karena memenuhi syarat-syarat berikut (Sundari & Apriliani, 2017):

1. Fungsi V kontinu dan turunan parsial pertama kontinu pada Γ .
2. Turunan pertama dari fungsi V terhadap waktu diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dM}{dt} \\ &= \left(\beta_1 \frac{P}{N} - (\mu + \beta_2) \right) M \\ &= (\mu + \beta_2) \left[\frac{\beta_1 P}{(\mu + \beta_2) N} - 1 \right] M \\ &= (\mu + \beta_2)(R_0 - 1)M \end{aligned}$$

Ketika $R_0 < 1$, mengakibatkan

$$\frac{dV}{dt} = (\mu + \beta_2)(R_0 - 1)M < 0$$

Oleh karena itu diperoleh $\frac{dV}{dt} < 0$ asalkan $R_0 < 1$.

3. $S = \left\{ M \in \Gamma \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} \Leftrightarrow S = \{ M \in \Gamma \mid M_0 = M \}$, himpunan S hanya memuat titik kesetimbangan E_0 .

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dM}{dt} \\ &= \left(\beta_1 \frac{P}{N} - (\mu + \beta_2) \right) M \\ &= (\mu + \beta_2) \left[\frac{\beta_1 P}{(\mu + \beta_2) N} - 1 \right] M \\ &= (\mu + \beta_2)(R_0 - 1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan prinsip invariant La Salle (Salle, 1976), titik kesetimbangan bebas peminum stabil asimtotik global.

b. Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Endemik

Teorema 6. [Kestabilan global titik kestimbangan endemik] Titik kesetimbangan endemik E^* stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$ (Khajji dkk, 2020b).

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global. Titik kesetimbangan endemik dapat dikatakan stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$.

Didefinisikan

$$V^*: \Gamma \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V^*(P, M) = c_1 \left[P - P^* \ln \left(\frac{P}{P^*} \right) \right] + c_2 \left[M - M^* \ln \left(\frac{M}{M^*} \right) \right] \quad (2.47)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta positif dan $\Gamma = \{(P, M) \in \Gamma/P > 0, M > 0\}$. Fungsi V^* dapat dikatakan sebagai fungsi Lyapunov karena memenuhi syarat-syarat berikut (Sundari & Apriliani, 2017):

1. Fungsi V^* kontinu dan turunan parsial pertama kontinu pada Γ .
2. Turunan pertama dari fungsi V^* terhadap waktu diperoleh

$$\begin{aligned}
 V^*(P, M) &= c_1 \left[P - P^* \ln \left(\frac{P}{P^*} \right) \right] + c_2 \left[M - M^* \ln \left(\frac{M}{M^*} \right) \right] \\
 \frac{dV^*(P, M)}{dt} &= \frac{dV}{dP} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{dV}{dM} \cdot \frac{dM}{dt} \\
 &= c_1 \left[1 - \frac{P^*}{P} \right] \left[b - \frac{\beta_1 P M}{N} - \mu P \right] + c_2 \left[1 - \frac{M^*}{M} \right] \\
 &\quad \left[\frac{\beta_1 P M}{N} - \beta_2 M - \mu M \right] \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan sistem persamaan (2.37) dan (2.38), diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &= b - \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} - \mu P^* \\
 b - \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} &= \mu P^* \\
 \frac{b}{P^*} - \frac{\beta_1 M^*}{N} &= \mu \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} - \beta_2 M^* - \mu M^* \\
 \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} - \beta_2 M^* &= \mu M^* \\
 \frac{\beta_1 P^*}{N} - \beta_2 &= \mu \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Kemudian persamaan (2.49) dan (2.50) disubstitusikan ke turunan parsial (2.48), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dV^*}{dt} &= c_1 \left[1 - \frac{P^*}{P} \right] \left[b - \frac{\beta_1 P M}{N} - \left(\frac{b}{P^*} - \frac{\beta_1 M^*}{N} \right) P \right] + c_2 \left[1 - \frac{M^*}{M} \right] \\
 &\quad \left[\frac{\beta_1 P M}{N} - \beta_2 M - \left(\frac{\beta_1 P^*}{N} - \beta_2 \right) M \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 \left[1 - \frac{P^*}{P} \right] \left[b - \frac{bP}{P^*} - \frac{\beta_1 PM}{N} + \frac{\beta_1 PM^*}{N} \right] + c_2 \left[1 - \frac{M^*}{M} \right] \left[\frac{\beta_1 PM}{N} - \frac{\beta_1 P^* M}{N} \right] \\
&= c_1 \left[-b \left(-1 + \frac{P^*}{P} + \frac{P}{P^*} - 1 \right) - \frac{\beta_1 PM}{N} + \frac{\beta_1 P^* M}{N} + \frac{\beta_1 PM^*}{N} - \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} \right] \\
&\quad + c_2 \left[\frac{\beta_1 PM}{N} - \frac{\beta_1 PM^*}{N} - \frac{\beta_1 P^* M}{N} + \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} \right] \\
&= c_1 \left[-b \left(\frac{-PP^* + P^{*2} + P^2 - PP^*}{PP^*} \right) - \frac{\beta_1 PM}{N} + \frac{\beta_1 P^* M}{N} + \frac{\beta_1 PM^*}{N} - \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} \right] \\
&\quad + c_2 \left[\frac{\beta_1 PM}{N} - \frac{\beta_1 PM^*}{N} - \frac{\beta_1 P^* M}{N} + \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} \right] \\
&= c_1 \left[-b \frac{[P-P^*]^2}{PP^*} - \frac{\beta_1 PM}{N} + \frac{\beta_1 P^* M}{N} + \frac{\beta_1 PM^*}{N} - \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} \right] + c_2 \left[\frac{\beta_1 PM}{N} - \frac{\beta_1 PM^*}{N} - \frac{\beta_1 P^* M}{N} + \frac{\beta_1 P^* M^*}{N} \right] \\
&= -bc_1 \frac{[P-P^*]^2}{PP^*} + \frac{\beta_1}{N} (c_2 - c_1) [P - P^*] [M - M^*]
\end{aligned}$$

Untuk $c_1 = c_2 = 1$, diperoleh

$$\frac{dV^*(P,M)}{dt} = -b \frac{[P-P^*]^2}{PP^*} < 0.$$

$$3. \quad S = \left\{ P, M \in \Gamma \mid \frac{dV^*(P,M)}{dt} = 0 \right\} \Leftrightarrow S = \{ P \in \Gamma \mid P = P^* \}, \text{ himpunan}$$

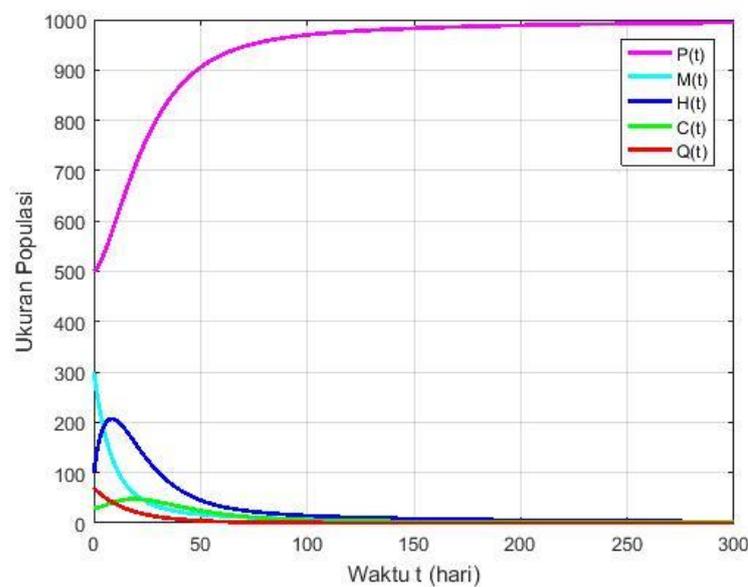
S hanya memuat titik kesetimbangan E^* .

Berdasarkan prinsip invariant La Salle (Salle, 1976), titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global.

2.4.6 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan diilustrasikan beberapa solusi numerik dari model (2.21) dengan nilai parameter yang berbeda-beda, sehingga diperoleh gambaran yang jelas mengenai model dinamika peminum alkohol tanpa kontrol. Berikut adalah beberapa parameter yang digunakan pada penelitian ini:

$b = 65, N = 1000, \delta_1 = 0.002, \mu = 0.065, \beta_2 = 0.14, \alpha_1 = 0.02, \alpha_2 = 0.001, \delta_2 = 0.002, t_f = 300$ hari, dan $\gamma = 0.001$ (Khajji, Koudere, Balatif, & Rachik, 2020b). Diberikan nilai $\beta_1 = 0.2$ ketika $R_0 < 1$ dan diberikan nilai $\beta_1 = 0.3$ ketika $R_0 > 1$. kemudian, diberikan nilai awal yaitu $P(0) = 500, M(0) = 300, H(0) = 100, C(0) = 30, Q(0) = 70$. Berikut adalah grafik dari hasil simulasi menggunakan *software* Matlab metode ODE45:



Gambar 2. 2 Model Tanpa Kontrol ketika $R_0 < 1$

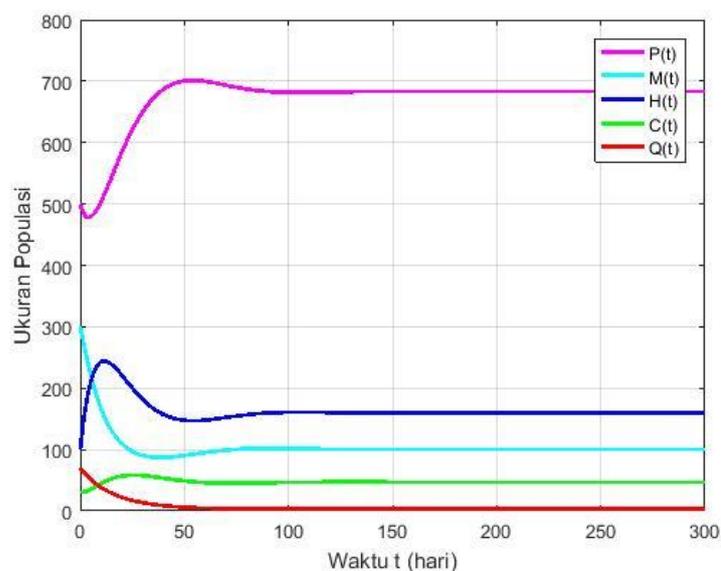
Gambar 2.2 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika peminum alkohol tanpa kontrol dengan nilai $R_0 < 1$. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari substitusi nilai parameter yaitu sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)} = \frac{0.2}{(0.065 + 0.14)} = 0.976 < 1.$$

Gambar 2.2 menunjukkan bahwa populasi peminum potensial akan meningkat dan mendekati total populasi. Grafik tersebut menggambarkan adanya perbedaan yang cukup signifikan pada banyaknya populasi peminum potensial dengan populasi lainnya. Peningkatan populasi peminum potensial

disebabkan karena adanya penurunan populasi peminum sedang, peminum berat, peminum berat dengan komplikasi penyakit hati, dan peminum yang sembuh serta berhenti minum. Jumlah populasi peminum sedang, peminum berat dengan komplikasi penyakit hati, dan peminum yang sembuh serta berhenti minum menurun hingga nol. Sedangkan populasi peminum berat awalnya mengalami peningkatan kemudian menurun hingga nol.

Berdasarkan grafik 2.2, dapat disimpulkan bahwa kurva solusi cenderung menuju ke titik kesetimbangan bebas peminum E_0 ketika $R_0 < 1$. Oleh karena itu, sistem persamaan (2.21) stabil asimtotik global di E_0 . Selain itu, kondisi $R_0 < 1$ menunjukkan bahwa tidak adanya penyebaran perilaku minum sehingga jumlah populasi peminum potensial merupakan jumlah total populasi. Sedangkan populasi peminum sedang, peminum berat, peminum berat dengan komplikasi penyakit hati, dan peminum yang sembuh serta berhenti minum memiliki nilai nol. Populasi peminum alkohol memiliki nilai seperti titik kesetimbangan bebas peminum yaitu $(1000,0,0,0,0)$.



Gambar 2. 3 Model Tanpa Kontrol ketika $R_0 > 1$

Gambar 2.3 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika peminum alkohol tanpa kontrol dengan nilai $R_0 > 1$. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari substitusi nilai parameter yaitu sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1}{(\mu + \beta_2)} = \frac{0.3}{(\mu + \beta_2)} = 1.46 > 1.$$

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa populasi peminum potensial mengalami suatu peningkatan karena semakin banyak penerimaan orang-orang yang belum pernah minum alkohol yang berpotensi untuk minum alkohol pada populasi terbesar dan populasi tersebut mengalami penurunan karena terdapat laju kontak efektif populasi peminum potensial dengan peminum sedang dan terdapat kematian alami pada populasi tersebut. Populasi peminum potensial tersebut akan mengalami kestabilan secara asimtotik dengan populasi mencapai nilai P^* , yaitu:

$$P^* = \frac{(\beta_2 + \mu)N}{\beta_1} = \frac{(0.14 + 0.065)1000}{0.3} \approx 683$$

Populasi peminum potensial yang menjadi peminum sedang mengalami suatu penurunan karena terdapat laju peminum sedang menjadi peminum berat dan terdapat kematian alami pada populasi tersebut. Populasi peminum sedang akan mengalami kestabilan secara asimtotik dengan populasi mencapai nilai M^* , yaitu:

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N}{(\beta_2 + \mu)\beta_1} \\ &= \frac{65 \cdot 0.3 - 0.14 \cdot 0.065 \cdot 1000 - 0.065^2 \cdot 1000}{(0.14 + 0.065)0.3} \approx 100 \end{aligned}$$

Populasi peminum berat mengalami suatu peningkatan karena terdapat laju peminum sedang menjadi peminum berat. Kemudian populasi peminum berat menurun karena terdapat laju peminum berat menjadi penderita

komplikasi penyakit hati, sembuh dan berhenti minum, kematian disebabkan oleh kecanduan alkohol, dan kematian alami. Populasi peminum berat akan mengalami kestabilan secara asimtotik dengan populasi mencapai nilai H^* , yaitu:

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{\beta_2(b\beta_1 - \beta_2\mu N - \mu^2 N)}{\beta_1(\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)(\beta_2 + \mu)} \\ &= \frac{0.14(65 \cdot 0.3 - 0.14 \cdot 0.065 \cdot 1000 - 0.065^2 \cdot 1000)}{0.3(0.065 + 0.02 + 0.001 + 0.002)(0.14 + 0.065)} \approx 160 \end{aligned}$$

Populasi penderita komplikasi penyakit hati mengalami sedikit kenaikan karena terdapat laju peminum berat menjadi penderita komplikasi penyakit hati. Kemudian populasi tersebut mengalami sedikit penurunan karena terdapat peminum yang sembuh dan berhenti minum, laju kematian disebabkan oleh komplikasi penyakit hati, dan terdapat kematian alami. Populasi peminum berat dengan komplikasi penyakit hati akan mengalami kestabilan secara asimtotik dengan populasi mencapai nilai C^* , yaitu:

$$C^* = \frac{\alpha_1 H^*}{(\mu + \gamma + \delta_2)} = \frac{0.02 \cdot 160}{(0.065 + 0.001 + 0.002)} \approx 47$$

Populasi yang sembuh dan berhenti minum mengalami suatu penurunan karena terdapat kematian alami. Populasi yang sembuh dan berhenti minum akan mengalami kestabilan secara asimtotik dengan populasi mencapai nilai Q^* , yaitu:

$$Q^* = \frac{\alpha_2 H + \gamma C}{\mu} = \frac{0.001 \cdot 160 + 0.001 \cdot 47}{0.065} \approx 3$$

Berdasarkan gambar 2.3, dapat disimpulkan bahwa kurva solusi cenderung menuju ke titik kesetimbangan E^* ketika $R_0 > 1$. Oleh karena itu, sistem persamaan (2.21) stabil asimtotik global di E^* . Kondisi E^* menunjukkan adanya penyebaran perilaku minum.

2.5 Kajian tentang Hukum *Khamr* dalam Islam

Khamr dikenal dengan sebutan minuman yang memabukkan, karena *khamr* diperoleh dari perasan anggur yang menghasilkan senyawa alkohol atau ethanol. Senyawa ethanol merupakan bahan psiko aktif yang dapat mengakibatkan konsumen mengalami penurunan kesadaran atau mabuk. Minuman beralkohol memiliki zat adiktif yang membuat konsumennya merasa ingin terus mengonsumsinya dan akhirnya merasa bergantung pada minuman beralkohol. Selain itu, minuman beralkohol juga mempengaruhi kerja otak karena alkohol menghambat masuknya oksigen, sehingga hal tersebut menyebabkan pengguna alkohol merasa pusing (Rori, 2015).

Syariat Islam telah mengharamkan *khamr* sejak empat belas abad yang lalu. Pengharaman *khamr* dapat dilihat dari beberapa ayat dan hadist yang menjelaskan dampak negatif dari *khamr*. Dalam Al-Qur'an, terdapat empat tahapan yang dilalui sampai terbentuknya label haram. Empat tahapan tersebut dapat diketahui melalui kajian dari *Asbab An-Nuzul* ayat-ayat yang berkaitan dengan *khamr*. Tahap pertama yaitu terdapat pada surat (An-Nahl/16:67), dimana ayat tersebut secara tidak langsung mulai menganjurkan menghindari *khamr* dengan menunjukkan bahwa terdapat unsur memabukkan. Pada ayat tersebut, Allah SWT sama sekali tidak menyinggung tentang dosa dan juga keharaman bagi peminum *khamr*, sehingga turun tahap kedua yaitu terdapat pada surat (Al-Baqarah/2:219). Menurut Munib Thahan, tahap kedua tersebut menumbuhkan kesadaran bahwa meninggalkan *khamr* itu lebih baik. Selain itu, ayat ini lebih fokus pada bahaya dan manfaat dari *khamr*. Kemudian, ketika masyarakat muslim siap dengan dosis berikutnya, maka turun tahap ketiga yaitu pembatasan yang

lebih besar. Tahap ketiga mengenai pembatasan konsumsi *khamr* terdapat pada surat (An-Nisa/4:43). Menurut Imam Al-Qurtubi dalam tafsirnya menyebutkan bahwa ayat tersebut dilatar belakangi oleh suatu kejadian dimana ada seorang laki-laki yang meminum *khamr*, kemudian maju untuk mengimami shalat. Karena *khamr* menyebabkan ia mabuk, maka bacaan yang dibaca ketika shalat menjadi keliru, sehingga Allah SWT menurunkan ayat tersebut untuk membatasi penggunaan *khamr*. Dari ketiga tahapan tersebut, masih belum ada larangan tegas tentang keharaman meminum *khamr*, sehingga turunlah tahap akhir dari larangan ini yaitu terdapat pada surat (Al-Maidah/5:90-91). Pada ayat tersebut menyebutkan bahwa meminum *khamr* merupakan salah satu perbuatan setan yang harus dijauhi, sehingga setelah ayat tersebut turun maka *khamr* menjadi haram.

Bagi mayoritas ulama, apapun yang diminum atau digunakan dalam kadar normal oleh seseorang yang normal kemudian memabukkan, ia adalah *khamr* dan ketika itu hukumnya haram, baik diminum dalam takaran sedikit ataupun banyak.

Hal ini berdasarkan sabda Rasulullah SAW (Akmaludin, 2013):

“Setiap yang memabukkan itu khamr, dan setiap khamr itu haram.” (HR. Muslim no. 2003 dari hadits Ibnu Umar, Bab Bayanu anna kulla muskirin khomr wa anna kulla khomr harom, Abu Daud, no. 3679).

Hadits di atas menjelaskan bahwa setiap yang memabukkan adalah *khamr* dan keharaman *khamr* dikarenakan dapat memabukkan. Selain itu, *khamr* juga dianggap sebagai induk dari hal-hal yang buruk. Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam hadits nabi, bahwa Rasulullah bersabda (Akmaludin, 2013):

“Nabi saw. bersabda, “Minuman keras merupakan induk dari hal-hal yang buruk, barang siapa yang meminumnya maka shalatnya tidak akan diterima selama empat puluh hari, jika ia meninggal sedangkan minuman keras berada di dalam perutnya, maka ia akan meninggal dunia dalam keadaan jahiliyyah.” (HR. Imam Ath-Thabarani dari Abdullah bin Amr bin ‘Ash r.a.).”

Hadits di atas menjelaskan bahwa minuman keras merupakan induk dari hal-hal yang buruk. Seorang muslim yang meminum *khamr* tidak akan diterima ibadahnya selama empat puluh hari dan akan meninggal dunia dalam keadaan jahiliyyah. Seseorang dalam pengaruh *khamr* juga mampu melakukan tindakan-tindakan yang tidak diinginkan seperti menyakiti orang lain ataupun melakukan tindakan-tindakan yang melanggar hukum (Sarwono, 2011). Selain itu, dampak yang ditimbulkan akibat konsumsi minuman beralkohol adalah kerusakan fisik. Kerusakan fisik yang ditimbulkan diantaranya yaitu gangguan fungsi hati dimana hati merupakan organ tubuh yang dapat memperbaiki dan meregenerasi sel baru ketika mengalami kerusakan. Kemampuan hati dalam melakukan regenerasi sel yang baru akan terganggu, sehingga menimbulkan kerusakan hati yang cukup parah. Gangguan-gangguan hati yang ditimbulkan seperti penumpukan lemak di hati, sirosis hati, penyakit hati alkoholik, hingga kanker hati (Darmawan, 2010).

Berdasarkan penjelasan tentang larangan meminum *khamr* baik dari ayat Al-Qur'an maupun hadist, maka dapat dikatakan bahwa motif dari keharaman *khamr* dikarenakan beberapa sebab, yaitu *khamr* merupakan perbuatan dosa (Al-Baqarah/2:219), *khamr* dapat merusak nalar (An-Nisa/4:43), *khamr* merupakan perbuatan setan (Al-Maidah/5:90-91), *khamr* merupakan minuman yang haram zatnya baik sedikit maupun banyak tetap haram, dan *khamr* merupakan induk dari hal-hal yang buruk. Aturan dalam syariat Islam pasti akan memberikan manfaat yang baik. Keharaman *khamr* adalah semata-mata untuk kebaikan manusia, yakni menjaga akal yang telah diberikan oleh Allah SWT. Selain itu, dengan menghindari *khamr*/minuman yang memabukkan, manusia akan terhindar dari

berbagai macam bahaya baik mengancam fisik, materi, non materi, maupun kehidupan sosial.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bagian ini membahas mengenai model dinamika peminum alkohol dengan kontrol beserta penyelesaiannya menggunakan prinsip maksimum Potryagin. Kemudian, model tersebut disimulasikan menggunakan metode numerik untuk mengetahui pengaruh adanya kontrol terhadap jumlah populasi peminum berat, penderita komplikasi penyakit hati, serta peminum yang sembuh dan berhenti minum.

3.1 Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol

Pada model (2.21) dikembangkan dengan menentukan strategi untuk meminimalkan jumlah peminum berat $H(t)$ dan penderita komplikasi penyakit hati $C(t)$, memaksimalkan jumlah peminum yang sembuh dan berhenti minum $Q(t)$ selama interval waktu $[t_0; t_f]$, serta meminimalkan biaya yang dikeluarkan pada program kesadaran dan pengobatan. Pada model (2.21) disertakan tiga kontrol sebagai berikut:

1. u_1 adalah upaya program kesadaran (pendidikan, program media, dll) yang diterapkan pada peminum potensial untuk melindungi mereka dari minum alkohol.
2. u_2 adalah upaya pengobatan yang diterapkan pada peminum berat. Fungsi kontrol ϵu_2 mewakili pecahan dari peminum berat yang akan dirawat dan kembali menjadi peminum sedang dan pecahan $(1 - \epsilon)u_2$ mewakili peminum berat yang akan dirawat dan berhenti minum.

3. u_3 adalah upaya pengobatan yang diberikan pada penderita komplikasi penyakit hati.

Sistem matematika terkontrol diberikan oleh sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &= b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) - u_1(t)P(t) \\ \frac{dM(t)}{dt} &= \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \epsilon u_2(t)H(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) - u_2(t)H(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) - u_3(t)C(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} &= \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) + u_1(t)P(t) + (1 - \epsilon)u_2(t)H + u_3(t)C(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

dimana $P(0) > 0, M(0) \geq 0, H(0) \geq 0, C(0) \geq 0, Q(0) \geq 0$.

Tabel 3. 1 Deskripsi Variabel

Notasi Variabel	Deskripsi Variabel
$\frac{dP(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi peminum potensial terhadap waktu t .
$\frac{dM(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi peminum sedang terhadap waktu t .
$\frac{dH(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi peminum berat terhadap waktu t .
$\frac{dC(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi peminum berat dengan komplikasi penyakit hati terhadap waktu t .
$\frac{dQ(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi peminum yang sembuh atau berhenti minum terhadap waktu t .
$P(t)$	Populasi peminum potensial terhadap waktu t .

$M(t)$	Populasi peminum sedang terhadap waktu t .
$H(t)$	Populasi peminum berat terhadap waktu t .
$C(t)$	Populasi peminum berat dengan komplikasi penyakit hati terhadap waktu t .
$Q(t)$	Populasi peminum sembuh atau berhenti minum terhadap waktu t .
$u_1(t)$	Kontrol upaya program kesadaran terhadap waktu t .
$u_2(t)$	Kontrol upaya pengobatan peminum berat terhadap waktu t .
$u_3(t)$	Kontrol upaya pengobatan peminum berat dengan komplikasi penyakit hati terhadap waktu t .

Tabel 3. 2 Deskripsi Parameter

Parameter	Deskripsi Parameter
b	Laju rekrutmen.
N	Total populasi.
δ_1	Laju kematian disebabkan oleh kecanduan alcohol.
μ	Laju kematian alami.
β_1	Laju kontak efektif dengan peminum sedang.
β_2	Laju peminum sedang menjadi peminum berat.
α_1	Laju peminum berat menjadi peminum berat dengan komplikasi penyakit hati.
α_2	Laju peminum berat menjadi sembuh dan berhenti minum.

δ_2	Laju kematian disebabkan oleh komplikasi penyakit hati.
γ	Laju individu yang berhenti minum dan sembuh dari komplikasi penyakit hati.
ϵu_2	Peminum berat yang akan dirawat dan kembali menjadi peminum sedang.
$(1 - \epsilon)u_2$	Peminum berat yang akan dirawat dan berhenti minum.
A_1	Bobot biaya untuk kontrol program kesadaran
A_2	Bobot biaya untuk kontrol pengobatan pada peminum berat
A_3	Bobot biaya untuk kontrol pengobatan pada peminum berat dengan komplikasi penyakit hati

Jika $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 1$, maka pemberian ketiga kontrol tersebut efektif. Sebaliknya apabila $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$, maka pemberian kontrol sama sekali tidak efektif dalam mengurangi jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati dan pemberian kontrol sama sekali tidak efektif dalam memaksimalkan jumlah populasi yang sembuh serta berhenti minum. Jadi, penelitian ini akan ditentukan bentuk dari $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ yang optimal yaitu $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, dan $u_3^*(t)$, sehingga upaya pemberian kontrol yang dilakukan dapat semaksimal mungkin dengan biaya yang minimum.

Berdasarkan tujuan pada masalah kontrol optimal, dimodelkan suatu fungsi tujuan yang menyatakan banyaknya populasi peminum berat ($H(t)$), populasi penderita komplikasi penyakit hati ($C(t)$), dan populasi sembuh dan

berhenti minum ($Q(t)$), serta biaya untuk program kesadaran, pengobatan untuk peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati. Kemudian hubungan antara biaya yang akan dikeluarkan untuk variabel kontrol ($u_i(t)$) dengan banyaknya peminum berat, penderita komplikasi penyakit hati, dan sembuh serta berhenti minum adalah hubungan yang tidak linear, sehingga fungsi biaya dibentuk ke dalam model nonlinear dan fungsi kuadrat ($u_i^2(t)$).

Berdasarkan uraian sebelumnya, dapat diformulasikan fungsi biaya yaitu $A_1 u_1^2(t)$, $A_2 u_2^2(t)$, dan $A_3 u_3^2(t)$ dimana A_1 , A_2 , dan A_3 merupakan bobot biaya untuk variabel-variabel kontrol. Fungsi tujuan yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2, u_3) = H_{t_f} + C_{t_f} - Q_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(H(t) + C(t) - Q(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) + \frac{A_3}{2} u_3^2(t) \right) dt \quad (3.2)$$

Fungsi tersebut merupakan fungsi tujuan bentuk Bolza. Fungsi Bolza merupakan kombinasi linear dari bentuk Mayer dan Lagrange. Fungsi Mayer pada fungsi tujuan tersebut, yaitu $H_{t_f} + C_{t_f} - Q_{t_f}$. Fungsi Mayer merupakan fungsi untuk mengoptimalkan waktu akhir, sehingga penurunan dari populasinya hanya dilihat pada waktu akhir. Sedangkan fungsi lainnya membentuk fungsi Lagrange, yaitu $\int_{t_0}^{t_f} \left(H(t) + C(t) - Q(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) + \frac{A_3}{2} u_3^2(t) \right) dt$. Fungsi Lagrange bertujuan untuk memaksimalkan jumlah peminum yang sembuh dan berhenti minum dan meminimalkan jumlah peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati dengan biaya kontrol seminimal mungkin pada interval waktu $[t_0, t_f]$. Selanjutnya, nilai $\frac{1}{2}$ pada fungsi Lagrange menunjukkan bahwa

bobot yang menyatakan kepentingan dari biaya-biaya yang bersangkutan adalah sama.

Selanjutnya akan ditentukan kontrol optimal u_1, u_2 , dan u_3 sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min_{(u_1, u_2, u_3) \in U_{ad}^3} J(u_1, u_2, u_3)$$

dimana U_{ad} adalah himpunan kontrol yang didefinisikan oleh:

$$U_{ad} = \{u_i(t): 0 \leq u_i \leq 1, \text{ untuk } i = 1, 2, 3 \text{ dan } t \in [t_0; t_f]\} \quad (3.3)$$

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi pada prinsip maksimum Pontryagin.

3.2 Tahapan Penyelesaian Model dengan Kontrol

Solusi optimal dari masalah kontrol optimal dapat diperoleh dengan menentukan Hamiltonian untuk masalah tersebut. Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, dapat dibentuk Hamiltonian dan mendapatkan sistem optimalitas berikut:

$$\hat{H} = f + \sum_{k=1}^5 \lambda_k g_k$$

$$\hat{H} = H(t) + C(t) - Q(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) + \frac{A_3}{2} u_3^2(t)$$

$$+ \lambda_1 \left\{ b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) - u_1(t)P(t) \right\}$$

$$+ \lambda_2 \left\{ \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \epsilon u_2(t)H(t) \right\}$$

$$+ \lambda_3 \{ \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) - u_2(t)H(t) \}$$

$$+ \lambda_4 \{ \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) - u_3(t)C(t) \}$$

$$+ \lambda_5 \{ \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) + u_1(t)P(t) + (1 - \epsilon)u_2(t)H(t) \}$$

$$+ u_3(t)C(t) \}$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, dan λ_5 merupakan fungsi adjoint yang terkait dengan persamaan untuk keadaan P, M, H, C , dan Q masing-masing.

Berdasarkan Hamiltonian yang telah diperoleh, dapat ditentukan persamaan *state* dan *co-state*. Persamaan *state* dari Hamiltonian tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_1} = b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) - u_1(t)P(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda_2} = \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \epsilon u_2(t)H(t) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) - u_2(t)H(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda_4} = \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) - u_3(t)C(t) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \lambda_5} &= \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) + u_1(t)P(t) + (1 - \epsilon)u_2(t)H(t) \\ &\quad + u_3(t)C(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kemudian diperoleh persamaan *co-state* sebagai berikut:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial P} = (\lambda_1 - \lambda_2)\beta_1 \frac{M(t)}{N} + (\lambda_1 - \lambda_5)u_1(t) + \mu\lambda_1 \quad (3.9)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial M} = (\lambda_1 - \lambda_2)\beta_1 \frac{P(t)}{N} + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu\lambda_2 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial H} = -1 + \{\lambda_3 - (1 - \epsilon)\lambda_5 - \epsilon\lambda_2\}u_2(t) - \alpha_1\lambda_4 - \alpha_2\lambda_5 \\ &\quad + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1)\lambda_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial C} = -1 + \lambda_4(\mu + \gamma + \delta_2) + (\lambda_4 - \lambda_5)u_3(t) - \gamma\lambda_5 \quad (3.12)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q} = 1 + \mu\lambda_5 \quad (3.13)$$

dengan kondisi transversal pada waktu t_f ,

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 1, \lambda_4(t_f) = 1, \text{ dan } \lambda_5(t_f) = -1.$$

Kontrol optimal $u_1^*(t), u_2^*(t)$, dan $u_3^*(t)$ dapat diselesaikan dari kondisi optimal sebagai berikut:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_2} = 0, \text{ dan } \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_3} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_1} = A_1 u_1(t) + (\lambda_1 - \lambda_5)P(t) = 0$$

$$u_1^*(t) = \frac{P(t)}{A_1} (\lambda_1 - \lambda_5). \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_2} = A_2 u_2(t) + \{\lambda_3 - \epsilon \lambda_2 - (1 - \epsilon)\lambda_5\}H(t) = 0$$

$$u_2^*(t) = \frac{H(t)}{A_2} \{\lambda_3 - \epsilon \lambda_2 - (1 - \epsilon)\lambda_5\} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_3} = A_3 u_3(t) + (\lambda_4 - \lambda_5)C(t) = 0$$

$$u_3^*(t) = \frac{C(t)}{A_3} (\lambda_4 - \lambda_5) \quad (3.17)$$

Untuk kontrol pertama, batas nilai u_1 adalah $0 \leq u_1 \leq 1$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} v, & \text{jika } 0 < v < 1 \\ 0, & \text{jika } v \leq 0 \\ 1, & \text{jika } v \geq 1 \end{cases}$$

dengan,

$$v = \frac{P(t)}{A_1} (\lambda_1 - \lambda_5).$$

Untuk kontrol kedua, batas nilai u_2 adalah $0 \leq u_2 \leq 1$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_2^*(t) = \begin{cases} w, & \text{jika } 0 < w < 1 \\ 0, & \text{jika } w \leq 0 \\ 1, & \text{jika } w \geq 1 \end{cases}$$

dengan,

$$w = \frac{H(t)}{A_2} \{\lambda_3 - \epsilon \lambda_2 - (1 - \epsilon)\lambda_5\}.$$

Untuk kontrol ketiga, batas nilai u_3 adalah $0 \leq u_3 \leq 1$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_3^*(t) = \begin{cases} z, & \text{jika } 0 < z < 1 \\ 0, & \text{jika } z \leq 0 \\ 1, & \text{jika } z \geq 1 \end{cases}$$

dengan,

$$z = \frac{C(t)}{A_3}(\lambda_4 - \lambda_5)$$

Kontrol optimal dari $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, dan $u_3^*(t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{1}{A_1}(\lambda_1 - \lambda_5)P(t)\right)\right) \quad (3.18)$$

$$u_2^*(t) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{1}{A_2}\{\lambda_3 - \epsilon\lambda_2 - (1 - \epsilon)\lambda_5\}H(t)\right)\right) \quad (3.19)$$

$$u_3^*(t) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{1}{A_3}(\lambda_4 - \lambda_5)C(t)\right)\right) \quad (3.20)$$

3.3 Hasil Simulasi Numerik Model dengan Kontrol

3.2.1 Algoritma *Sweep* Maju Mundur

Permasalahan kontrol optimal akan diselesaikan secara numerik menggunakan algoritma *sweep* maju mundur pada MATLAB dengan mendefinisikan pada M-File menggunakan parameter yang telah diberikan. Pada simulasi ini, model dinamika peminum alkohol dengan menggunakan tiga kontrol yang memiliki variabel-variabel yaitu $P, M, H, C, Q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, u_1, u_2$, dan u_3 yang dinyatakan dalam notasi berikut:

$$P(i), M(i), H(i), C(i), Q(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i), \lambda_3(i), \lambda_4(i), \lambda_5(i), u_1(i), u_2(i), u_3(i))$$

dengan $i = 0, 1, 2, \dots$. Langkah-langkah dari algoritma *sweep* maju mundur adalah sebagai berikut (Zulaikha dkk, 2017):

Langkah 1

Menentukan nilai awal yaitu $P(0), M(0), H(0), C(0), Q(0), \lambda_1(n) = \lambda_2(n) = 0$ dan $\lambda_3(n) = \lambda_4(n) = \lambda_5(n) = 0$ serta galat toleransi. Pada langkah ini diberikan nilai awal dari parameter model dinamika peminum alkohol $P(0), M(0), H(0), C(0), Q(0)$. Selain itu, pada langkah ini juga ditentukan ukuran langkah, yaitu $h = 0.1$.

Tabel 3. 3 Nilai Awal Simulasi Numerik

$P(0)$	$M(0)$	$H(0)$	$C(0)$	$Q(0)$
500	300	100	30	70

Langkah 2

Membuat tebakan awal u_1, u_2 , dan u_3 .

Langkah 3

Menghitung nilai $P(i + 1), M(i + 1), H(i + 1), C(i + 1), Q(i + 1)$ dengan nilai awal pada langkah 1. Perhitungan ini menggunakan metode Runge Kutta orde 4 langkah maju. Perhitungan manual untuk persamaan *state* dapat dilihat pada Lampiran 2.

Langkah 4

Menghitung nilai $\lambda_1(p - 1), \lambda_2(p - 1), \lambda_3(p - 1), \lambda_4(p - 1), \lambda_5(p - 1)$ dengan kondisi transversal, perhitungan ini menggunakan metode Runge Kutta orde empat langkah mundur. Perhitungan manual untuk persamaan *co-state* yang dapat dilihat pada lampiran 3.

Langkah 5

Menghitung nilai kontrol

$$u_1(n) = \min \left(1, \text{maks} \left(0, \frac{1}{A_1} (\lambda_1(n) - \lambda_5(n)) P(n) \right) \right)$$

$$u_2(n) = \min \left(1, \text{maks} \left(0, \frac{1}{A_2} \{ \lambda_3(n) - \epsilon \lambda_2(n) - (1 - \epsilon) \lambda_5(n) \} H(n) \right) \right)$$

$$u_3(n) = \min \left(1, \text{maks} \left(0, \frac{1}{A_3} (\lambda_4(n) - \lambda_5(n)) C(n) \right) \right)$$

Langkah 6

Menghitung nilai galat dari variabel $P, M, H, C, Q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, u_1, u_2$, dan u_3 berdasarkan nilai iterasi pada saat ini dan sebelumnya. Jika nilai galat lebih besar dari toleransi, maka kembali ke langkah 3.

Langkah 7

Print $P^* = P, M^* = M, H^* = H, C^* = C, Q^* = Q, u_1^* = u_1, u_2^* = u_2, u_3^* = u_3$.

3.2.2 Simulasi Numerik Model dengan Kontrol

Simulasi numerik ini akan diselesaikan menggunakan *software* Matlab dengan metode Runge Kutta orde empat. Nilai awal dan parameter berdasarkan pada simulasi sebelumnya. Simulasi numerik ini dilakukan untuk mengetahui jumlah populasi peminum berat, penderita komplikasi penyakit hati, dan peminum yang sembuh atau berhenti minum sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Kontrol program kesadaran berfungsi untuk mengontrol jumlah populasi peminum potensial, sehingga tidak akan berminat untuk memulai meminum alkohol. Kontrol pengobatan diberikan pada peminum berat untuk mengurangi jumlah populasinya. Akibatnya, jumlah peminum yang berhenti minum akan meningkat dan peminum berat dapat menjadi peminum sedang

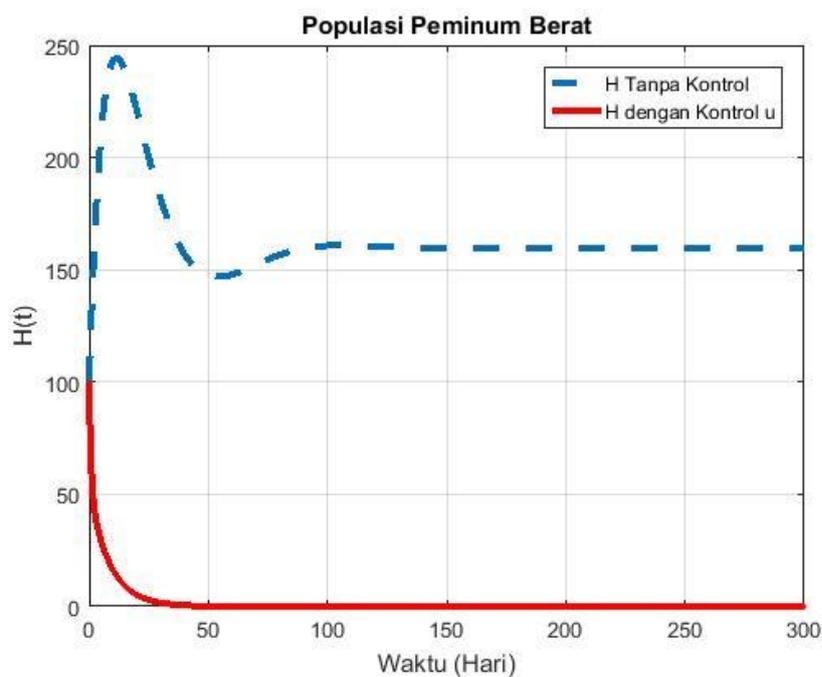
sehingga meningkatkan jumlah populasi peminum sedang. Kontrol pengobatan juga diberikan pada penderita komplikasi penyakit hati untuk mengurangi jumlah populasinya dan meningkatkan jumlah populasi yang sembuh dan berhenti minum. Nilai parameter yang digunakan yaitu sebagai berikut (Khajji dkk, 2020b):

Tabel 3. 4 Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Satuan
b	65	Orang Per hari
N	1000	Orang
δ_1	0.002	Orang Per hari
μ	0.065	Orang Per hari
β_1	0.3	Orang Per hari
β_2	0.14	Orang Per hari
α_1	0.02	Orang Per hari
α_2	0.001	Orang Per hari
δ_2	0.002	Orang Per hari
γ	0.001	Orang Per hari
ϵ	0.5	Orang Per hari
A_1	0.2	
A_2	0.3	
A_3	0.5	

Pada simulasi dengan kondisi tanpa kontrol ini berarti tidak ada pemberian tiga kontrol pada setiap populasi, sehingga ditandai dengan

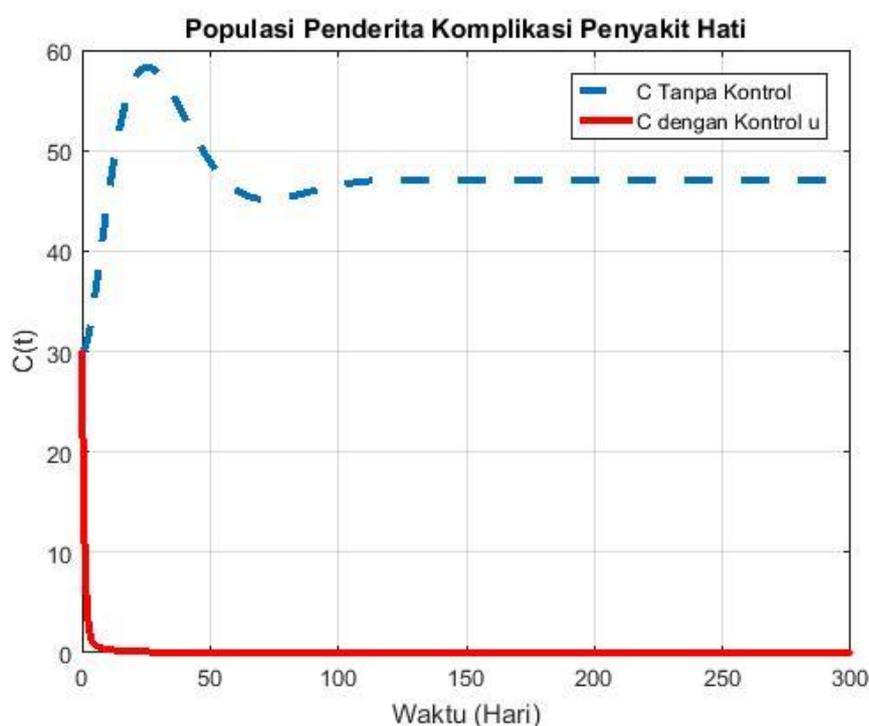
$u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$. Sedangkan kondisi dengan variabel kontrol yaitu $u_1(t) \neq u_2(t) \neq u_3(t) \neq 0$ berarti terdapat pemberian tiga kontrol. Berikut merupakan simulasi mengenai populasi peminum berat tanpa kontrol dan dengan kontrol.



Gambar 3. 1 Dinamika Populasi Peminum Berat

Gambar 3.1 merupakan hasil simulasi numerik yang menunjukkan peminum berat dengan dan tanpa kontrol. Berdasarkan hasil simulasi, peminum berat tanpa kontrol dengan kondisi awal populasi yaitu $H(0) = 100$ pada awalnya mengalami peningkatan secara signifikan hingga hari ke-11, kemudian mengalami penurunan secara drastis pada hari ke-53. Peningkatan kembali terjadi hingga hari ke-107 kemudian stabil dengan populasi sebesar 160. Perubahan yang tidak stabil ini menandakan adanya beberapa sebab yang mempengaruhi. Peningkatan terjadi karena terdapat laju peminum sedang menjadi peminum berat. Penurunan terjadi karena terdapat laju peminum berat menjadi penderita komplikasi penyakit hati, sembuh dan berhenti minum,

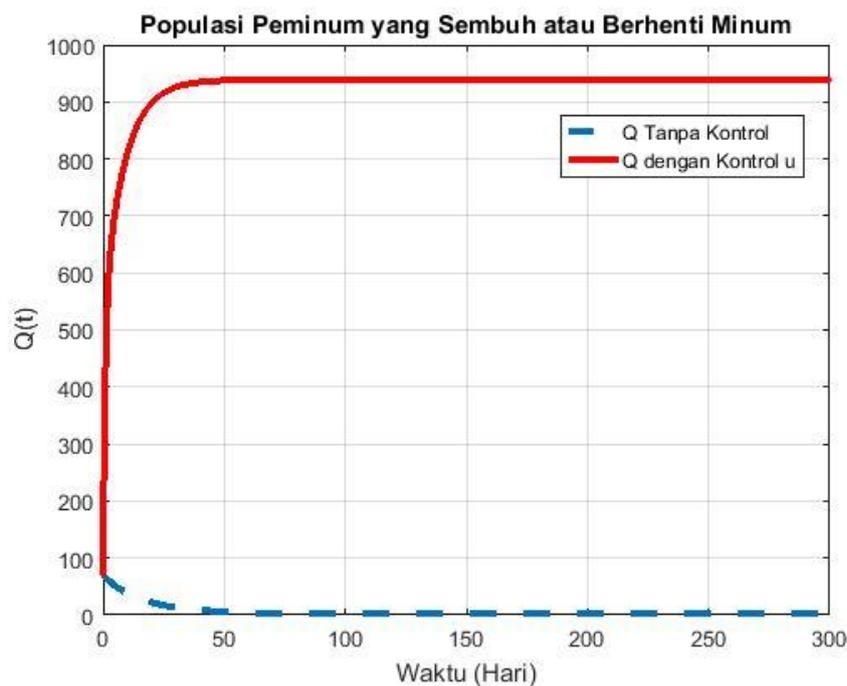
kematian disebabkan oleh kecanduan alkohol, dan kematian alami. Kemudian, setelah diberikan kontrol, jumlah populasi peminum berat mengalami penurunan secara terus menerus. Jika pada grafik tanpa kontrol pada hari ke-53 jumlah populasi sebesar 147, maka populasi peminum berat setelah diberikan kontrol pada hari ke-53 hampir mencapai nol. Hal ini menunjukkan adanya selisih yang sangat besar, sehingga kontrol yang diberikan dapat meminimalkan populasi peminum berat. Selanjutnya perbandingan dari dinamika populasi penderita komplikasi penyakit hati sebelum dan sesudah diberikan kontrol.



Gambar 3. 2 Dinamika Populasi Penderita Komplikasi Penyakit Hati

Gambar 3.2 merupakan hasil simulasi numerik yang menunjukkan penderita komplikasi hati sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Berdasarkan hasil simulasi, penderita komplikasi hati sebelum diberikan kontrol dengan kondisi awal populasi yaitu $C(0) = 30$ pada awalnya mengalami peningkatan

hingga hari ke-25. Kemudian mengalami penurunan hingga hari ke-72 kemudian stabil dengan populasi sebesar 47. Perubahan yang tidak stabil ini menandakan adanya beberapa sebab yang mempengaruhi. Peningkatan terjadi karena terdapat laju peminum berat menjadi penderita komplikasi penyakit hati. Sedangkan penurunan terjadi karena terdapat peminum yang sembuh dan berhenti minum, laju kematian disebabkan oleh komplikasi penyakit hati, dan terdapat kematian alami. Setelah diberikan kontrol, jumlah populasi penderita komplikasi penyakit hati mengalami penurunan secara terus-menerus. Jika pada grafik tanpa kontrol pada hari ke-72 jumlah populasi sebesar 45, maka populasi peminum berat dengan komplikasi hati setelah diberikan kontrol pada hari ke-73 hampir mencapai nol. Hal ini menunjukkan adanya selisih yang sangat besar, sehingga kontrol yang diberikan dapat meminimalkan populasi penderita komplikasi penyakit hati. Selanjutnya perbandingan dari dinamika populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum sebelum dan sesudah diberikan kontrol.



Gambar 3. 3 Dinamika Populasi Peminum yang Sembuh dan Berhenti Minum

Gambar 3.3 merupakan hasil simulasi numerik yang menunjukkan peminum yang sembuh atau berhenti minum dengan dan tanpa kontrol. Berdasarkan hasil simulasi, peminum yang sembuh atau berhenti minum sebelum diberikan kontrol dengan kondisi awal populasi yaitu $Q(0) = 70$ mengalami penurunan dari hari ke-1 dan stabil dengan jumlah populasi sebesar 3. Setelah diberikan kontrol, jumlah populasi peminum yang sembuh atau berhenti minum mengalami peningkatan secara signifikan dan stabil dengan populasi sebesar 939 pada hari ke-95. Populasi peminum yang sembuh atau berhenti minum ini merupakan hasil dari penambahan populasi peminum potensial, peminum sedang, peminum berat, dan penderita komplikasi penyakit hati. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian tiga kontrol memengaruhi banyaknya populasi peminum yang sembuh atau berhenti minum.

Untuk hasil simulasi numerik dari kontrol program kesadaran (u_1), pengobatan peminum berat (u_2), dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati (u_3) adalah sebagai berikut:



Gambar 3. 4 Simulasi Kontrol u_1, u_2, u_3

Gambar 3.4 merupakan hasil simulasi numerik dari kontrol program kesadaran, pengobatan peminum berat, dan pengobatan penderita penyakit hati. Berdasarkan hasil simulasi numerik tersebut, kurva kontrol program kesadaran (u_1) menunjukkan nilai maksimum yaitu 1 di hari pertama hingga hari terakhir yang artinya diberikan kontrol program kesadaran yang maksimum agar seseorang yang berpotensi mengetahui bahaya dari minuman beralkohol sehingga terhindar dari minuman beralkohol. Sedangkan kurva pengobatan peminum berat (u_2) dan penderita penyakit hati (u_3) menunjukkan nilai maksimum yaitu 1 di tahun-tahun pertama karena pada kondisi tersebut, jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati masih sangat tinggi sehingga harus diberikan kontrol yang maksimum. Kemudian laju

kurva tersebut akan mengalami penurunan menuju nilai minimumnya yaitu 0 di saat laju dinamika peminum alkohol serta jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati juga sudah mulai menurun, karena pemberian kontrol mengikuti kondisi dari dinamika peminum alkohol.

Berdasarkan uraian hasil yang telah diperoleh sebelumnya, dapat dinyatakan bahwa bentuk kontrol upaya program kesadaran, pengobatan peminum berat, dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati mampu mengurangi populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati serta memaksimalkan populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum. Keefektifan tiga kontrol ini selain dapat meminimumkan jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati dan dapat memaksimalkan populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum, tetapi juga dapat meminimumkan biaya dalam pemberian kontrol tersebut.

3.4 Upaya Pencegahan dan Pengobatan dalam Perspektif Islam

Berdasarkan QS. Al-Baqarah ayat 195, Allah SWT memerintahkan agar umatnya menghindari kebiasaan yang dapat merusak diri sendiri. Kebiasaan yang dapat merusak diri sendiri salah satunya yaitu kebiasaan mengonsumsi minuman beralkohol atau *khamr*. Larangan untuk mendekati *khamr* telah dijelaskan dalam QS. Al-Maidah ayat 90 dimana Allah SWT telah berfirman dalam memerintahkan umatnya untuk menjauhi *khamr* dikarenakan meminum *khamr* merupakan salah satu perbuatan keji dan termasuk perbuatan setan. Selain itu, *khamr* juga dapat menyebabkan seseorang tidak khusyu' dalam beribadah dan dapat menimbulkan beberapa penyakit berbahaya seperti kanker lambung, kanker mulut, kanker

tenggorokan, dan sirosis hati (Darmawan, 2010). Namun, ketika seseorang sudah kecanduan alkohol ataupun terkena penyakit akibat alkohol, maka seseorang tersebut dapat sembuh melalui pengobatan. Hal ini berdasarkan hadits shahih yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dimana Rasulullah SAW bersabda bahwa Allah SWT menurunkan suatu penyakit juga disertai dengan penawarnya yang berarti bahwa apabila manusia ingin mencari pengobatan, pasti akan menemukan. Hal tersebut sama halnya dengan kasus yang ditulis pada penelitian ini yang menggunakan model matematika dinamika peminum alkohol dengan diberikan strategi kontrol berupa upaya program kesadaran atau pencegahan dan pengobatan guna untuk meminimalkan jumlah populasi pecandu alkohol dan penderita komplikasi penyakit hati, serta memaksimalkan jumlah populasi peminum alkohol yang sembuh dan berhenti minum.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Model dinamika peminum alkohol dengan tiga strategi kontrol yakni program kesadaran (u_1), pengobatan peminum berat (u_2), dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati (u_3) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) - u_1(t)P(t)$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \epsilon u_2(t)H(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) - u_2(t)H(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) - u_3(t)C(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} = & \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) + u_1(t)P(t) + (1 - \epsilon)u_2(t)H + \\ & u_3(t)C(t) \end{aligned}$$

2. Bentuk kontrol yang paling optimal untuk setiap strategi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{1}{A_1} (\lambda_1 - \lambda_5) P(t) \right) \right)$$

$$u_2^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{1}{A_2} \{ \lambda_3 - \epsilon \lambda_2 - (1 - \epsilon) \lambda_5 \} H(t) \right) \right)$$

$$u_3^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{1}{A_3} (\lambda_4 - \lambda_5) C(t) \right) \right)$$

3. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa program kesadaran (u_1), pengobatan peminum berat (u_2), dan pengobatan penderita komplikasi penyakit hati (u_3) dapat meminimalkan jumlah populasi peminum berat dan penderita komplikasi penyakit hati, serta dapat memaksimalkan populasi peminum yang sembuh dan berhenti minum.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan parameter yang berbeda pada laju kematian alami dan kematian akibat kecanduan alkohol. Model ini diharapkan agar bisa disimulasikan menggunakan data-data empiris yang ada di suatu lokasi riil sehingga hasilnya efektif untuk menurunkan jumlah peminum alkohol di suatu lokasi tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- Akmaludin. (2013). *Analisis Terhadap Hadits Minum Khamr Tidak Diterima Shalat Selama 40 Hari*. Skripsi. Tidak Dipublikasikan. Fakultas Ushuluddin. UIN Sultan Syarif Kasim: Riau.
- Al-Quran Terjemahan. (2015). *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Son.
- Chiang, A. C. (2005). *Fundamental Method of Mathematical Economics Fourth Edition*. New York: The McGraw-Hill.
- Darmawan, S. (2010). *Pengertian Minuman Keras dan Dampaknya*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Driessche, P. V., & Watmogh, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1-2), 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6).
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2000). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems fourth edition*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Hidayah, E. R. (2012). *Kontrol Optimal Model Pertumbuhan Tumor dengan Imunoterapi*. Skripsi. Tidak dipublikasikan. Fakultas Sains dan Teknologi. UIN Maulana Malik Ibrahim: Malang.
- Hurint, R. U., Ndi, M., & Lobo, M. (2017). Analisis Sensitivitas Model Epidemi SEIR. *Online Journal of Nature Science*, Vol 6(1), 22-28.

- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Khajji, B., Abderrahim, L., Balatif, O., & Rachik, M. (2020a). A Discrete Mathematical Modeling of the Influence of Alcohol Treatment Centers on the Drinking dynamics Using Optimal Control. *International Journal of Mathematics and Mathematics Sciences*, Article ID 4903168.
- Khajji, B., Koudere, A., Balatif, O., & Rachik, M. (2020b). Mathematical Modeling, analysis and Optimal Control of an Alcohol Drinking Model with Liver Complication. *Commun. Math. Biol. Neurosci*, Article ID 32.
- Munir, R. (2010). *Metode Numerik (Revisi Ketiga)*. Bandung: INFORMATIKA.
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control System*. New York: CRC Press.
- Rori, P. L. (2015). Pengaruh Penggunaan Minuman Keras pada Kehidupan Remaja di Desa Kali Kecamatan Pineleng Kabupaten Minahasa. *Jurnal Holistik*.
- Ross, L. (1984). *Differential Equation. 3rd*. New York: Springer.
- Salle, J. P. (1976). The Stability of Dynamical Systems. *Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM*, vol. 25.
- Sarwono. (2011). *Psikologi Remaja. Edisi Revisi*. Jakarta: Rajawali Pers.
- Simanjutak, Sarah. (2021). *Kadar Fungsi Hati pada Penderita Sirosis Hati Kompensata dan Dekompensata: Telaah Sistematis*. Skripsi. Tidak Dipublikasikan. Fakultas Kedokteran. Universitas Sumatera Utara: Medan.

- Sundari, R., & Apriliani, E. (2017). Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, Vol. 6, No. 1, 28-32.
- Zulaikha, Trisilowati, & Fadhillah, I. (2017). Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. *Prosiding SI MaNIs*, I(1), 41-51.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Script Code MATLAB Simulasi Model Dinamika Peminum Alkohol dengan Kontrol

`%Persamaan State`

`function`

`dy=State(y,u1,u2,u3,b,beta1,beta2,miu,alpha1,alpha2,delta1,delta2,gamma,N,epsilon)`

`x(1)=b-((beta1*y(1)*y(2))/N)-miu*y(1)-u1*y(1);`

`x(2)=((beta1*y(1)*y(2))/N)-(beta2+miu)*y(2)+epsilon*u2*y(3);`

`x(3)=beta2*y(2)-(miu+alpha1+alpha2+delta1)*y(3)-u2*y(3);`

`x(4)=alpha1*y(3)-(miu+gamma+delta2)*y(4)-u3*y(4);`

`x(5)=alpha2*y(3)+gamma*y(4)-miu*y(5)+u1*y(1)+((1-epsilon)*u2)*y(3)+u3*y(4);`

`dy=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];`

`%Persamaan Co-State`

`function`

`dk=Costate(y,u1,u2,u3,P,M,beta1,miu,beta2,N,epsilon,alpha1,alpha2,gamma,delta1,delta2)`

`k1=y(1); k2=y(2); k3=y(3); k4=y(4); k5=y(5);`

`%lambda1=d1,lambda2=d2,lambda3=d3,lambda4=d4,lambda5=d5`

`x(1)=(k1-k2)*((beta1*M)/N)+(k1-k5)*u1+miu*k1;`

`x(2)=(k1-k2)*((beta1*P)/N)+beta2*(k2-k3)+miu*k2;`

`x(3)=-1+(k3-(1-epsilon)*k5-(epsilon*k2))*u2-alpha1*k4-alpha2*k5+(miu+alpha1+alpha2+delta1)*k3;`

`x(4)=-1+k4*(miu+gamma+delta2)+(k4-k5)*u3-gamma*k5;`

`x(5)=1+miu*k5;`

```
dk=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
end
clc;
clear all;
close all;
%Jumlah individu pada subpopulasi awal t=0
P0=500;
M0=300;
H0=100;
C0=30;
Q0=70;
%Parameter-parameter
b=65;
beta1=0.3;
beta2=0.14;
miu=0.065;
alpha1=0.02;
alpha2=0.001;
delta1=0.002;
delta2=0.002;
gamma=0.001;
N=1000;
epsilon=0.5;

A1=0.2;
A2=0.3;
A3=0.5;

u1max=1;
u2max=1;
u3max=1;

h=0.1; %h=1/N misal: h=1/10=0.1
```

```
t=0:h:300; %dari 0 sampai 100 dipartisi dengan jarak
h=0.1
Z=length(t); %banyaknya t
%membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1
kolom
u1=zeros(Z,1);
u1old=zeros(Z,1);
u2=zeros(Z,1);
u2old=zeros(Z,1);
u3=zeros(Z,1);
u3old=zeros(Z,1);
P=zeros(Z,1);
M=zeros(Z,1);
H=zeros(Z,1);
C=zeros(Z,1);
Q=zeros(Z,1);
Pold=zeros(Z,1);
Mold=zeros(Z,1);
Hold=zeros(Z,1);
Cold=zeros(Z,1);
Qold=zeros(Z,1);
%p1 adalah lambda_1 dsb
k1=zeros(Z,1);
k2=zeros(Z,1);
k3=zeros(Z,1);
k4=zeros(Z,1);
k5=zeros(Z,1);
k1old=zeros(Z,1);
k2old=zeros(Z,1);
k3old=zeros(Z,1);
k4old=zeros(Z,1);
k5old=zeros(Z,1);
%kontrol ada 2 pada u_1 dan u_1old
```

```

tes=1;
it=0;
while tes >1e-3
    u1old=u1;
    u2old=u2;
    u3old=u3;
    Pold=P; Mold=M; Hold=H; Cold=C; Qold=Q;
    k1old=k1; k2old=k2; k3old=k3; k4old=k4; k5old=k5;
    P(1)=P0; M(1)=M0; H(1)=H0; C(1)=C0; Q(1)=Q0;
    J(it+1)=0;

    for i=1:Z-1
        J(it+1)=J(it+1)+h*(H(1)+C(1)-
        Q(1)+0.5*A1*u1old(i)^2+0.5*A2*u2old(i)^2+0.5*A3*u3old(i)
        )^2+H(Z)+C(Z)-Q(Z));

        y=[P(i) M(i) H(i) C(i) Q(i)];
        %RungeKutta
        p1=h*State(y,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,beta1,beta2,m
        iu,alpha1,alpha2,delta1,delta2,gamma,N,epsilon);
        p2=h*State(y+0.5*p1,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,beta1,
        beta2,miu,alpha1,alpha2,delta1,delta2,gamma,N,epsilon);
        p3=h*State(y+0.5*p2,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,beta1,
        beta2,miu,alpha1,alpha2,delta1,delta2,gamma,N,epsilon);
        p4=h*State(y+p3,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,beta1,beta
        2,miu,alpha1,alpha2,delta1,delta2,gamma,N,epsilon);
        y=y+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);

        P(i+1)=y(1);
        M(i+1)=y(2);
        H(i+1)=y(3);
        C(i+1)=y(4);
        Q(i+1)=y(5);
    end
end

```

```

    end
    J(it+1)=J(it+1)+h*(H(Z)+C(Z)-
Q(Z)+0.5*A1*u1old(Z)^2+0.5*A2*u2old(Z)^2+0.5*A3*u3old(Z
)^2+H(Z)+C(Z)-Q(Z));
    %Plot populasi tanpa kontrol
    if it == 0
    figure(1)
    plot(t,P,'--','LineWidth',3);
    legend('Tanpa Kontrol');
    hold on;
    figure(2)
    plot(t,M,'--','LineWidth',3);
    hold on;
    figure(3)
    plot(t,H,'--','LineWidth',3);
    hold on;
    figure(4)
    plot(t,C,'--','LineWidth',3);
    hold on;
    figure(5)
    plot(t,Q,'--','LineWidth',3);
    hold on;
    end
    k1(Z)=0; k2(Z)=0; k3(Z)=0; k4(Z)=0; k5(Z)=0;

    for i=1:Z-1
        je=Z-i;

        y=[k1(je+1) k2(je+1) k3(je+1) k4(je+1) k5(je+1)];
        p1=h*Costate(y,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+1),P(je
+1),M(je+1),beta1,miu,beta2,N,epsilon,alpha1,alpha2,gam
ma,delta1,delta2);

```

```

p2=h*Costate(y+0.5*p1,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+
1),P(je+1),M(je+1),beta1,miu,beta2,N,epsilon,alpha1,alp
ha2,gamma,delta1,delta2);
p3=h*Costate(y+0.5*p2,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+
1),P(je+1),M(je+1),beta1,miu,beta2,N,epsilon,alpha1,alp
ha2,gamma,delta1,delta2);
p4=h*Costate(y+p3,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+1),P
(je+1),M(je+1),beta1,miu,beta2,N,epsilon,alpha1,alpha2,
gamma,delta1,delta2);
    y=y-(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
    k1(je)=y(1);
    k2(je)=y(2);
    k3(je)=y(3);
    k4(je)=y(4);
    k5(je)=y(5);
    temp2=min([(k1(je)-k5(je))*P(je)]/A1 u1max]);
    u1(je)=max([temp2 0]);
    temp4=min([(k3(je)-epsilon*k2(je)-(1-
epsilon)*k5(je))*H(je)]/A2 u2max]);
    u2(je)=max([temp4 0]);
    temp6=min([(k4(je)-k5(je))*C(je)]/A3 u3max]);
    u3(je)=max([temp6 0]);
end

eP=sum(abs(P-Pold));
eM=sum(abs(M-Mold));
eH=sum(abs(H-Hold));
eC=sum(abs(C-Cold));
eQ=sum(abs(Q-Qold));
ek1=sum(abs(k1-k1old));
ek2=sum(abs(k2-k2old));
ek3=sum(abs(k3-k3old));
ek4=sum(abs(k4-k4old));

```

```

ek5=sum(abs(k5-k5old));
eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
eu3=sum(abs(u3-u3old));
%error = sum dari error yang lama dengan yang baru

tes=eP+eM+eH+eC+eQ+ek1+ek2+ek3+ek4+ek5+eu1+eu2+eu3;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
u3=(0.5*u3+0.5*u3old);
end
% Langkah 8
%Plot populasi dengan kontrol
figure(1)
plot(t,P,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('P(t)');
grid on;
legend('P Tanpa Kontrol','P dengan Kontrol u');
title('Populasi Peminum Potensial');
hold on;
figure(2)
plot(t, M,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('M(t)');
grid on;
legend('M Tanpa Kontrol','M dengan Kontrol u');
title('Populasi Peminum Sedang');
hold on;
figure(3)
plot(t,H,'r.-','LineWidth',3);

```

```

xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('H(t)');
grid on;
legend('H Tanpa Kontrol','H dengan Kontrol u');
title('Populasi Peminum Berat');
hold on;
figure(4)
plot(t,C,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('C(t)');
grid on;
legend('C Tanpa Kontrol','C dengan Kontrol u');
title('Populasi Penderita Komplikasi Penyakit Hati');
hold on;
figure(5)
plot(t,Q,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Q(t)');
grid on;
legend('Q Tanpa Kontrol','Q dengan Kontrol u');
title('Populasi Peminum yang Sembuh atau Berhenti
Minum');
hold on;
figure(6)
plot(t,u1,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('u_1(t)');
grid on;
title('Kontrol Program Kesadaran');
hold on;

figure(6)
plot(t,u2,'b.-','LineWidth',3);

```

```
xlabel('Waktu (Hari)');  
ylabel('u_2(t)');  
grid on;  
title('Kontrol Pengobatan Peminum Berat');  
hold on;  
  
figure(6)  
plot(t,u3,'g.-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (Hari)');  
ylabel('u_3(t)');  
grid on;  
legend('Kontrol u1','Kontrol u2','Kontrol u3');  
title('Kontrol Pengobatan Peminum Berat dengan  
Komplikasi Hati');  
hold off;
```

Lampiran 2 Proses Perhitungan Manual Persamaan *State*

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_1} = b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) - u_1(t)P(t)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda_2} = \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \epsilon u_2(t)H(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) - u_2(t)H(t)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda_4} = \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) - u_3(t)C(t)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_5} = \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) + u_1(t)P(t) + (1 - \epsilon)u_2(t)H(t) + u_3(t)C(t)$$

Hasil diskritisasi menggunakan Runge Kutta langkah maju orde empat sebagai berikut:

$$P_{n+1} = P_n + \frac{h}{6}(p_{1,P} + 2p_{2,P} + 2p_{3,P} + p_{4,P})$$

$$M_{n+1} = M_n + \frac{h}{6}(p_{1,M} + 2p_{2,M} + 2p_{3,M} + p_{4,M})$$

$$H_{n+1} = H_n + \frac{h}{6}(p_{1,H} + 2p_{2,H} + 2p_{3,H} + p_{4,H})$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{h}{6}(p_{1,C} + 2p_{2,C} + 2p_{3,C} + p_{4,C})$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{h}{6}(p_{1,Q} + 2p_{2,Q} + 2p_{3,Q} + p_{4,Q})$$

dengan

$$p_{1,P} = f(t_n, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,P} = b - \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - \mu P(t) - \frac{P_n^2(t)}{A_1} (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{1,M} = g(t_n, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,M} = \beta_1 \frac{P(t)M(t)}{N} - (\beta_2 + \mu)M(t) + \frac{\epsilon H_n^2(t)}{A_2} \{\lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon)\lambda_{5,n}\}$$

$$p_{1,H} = j(t_n, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,H} = \beta_2 M(t) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1)H(t) - \frac{H_n^2(t)}{A_2} \{\lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon)\lambda_{5,n}\}$$

$$p_{1,C} = k(t_n, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,C} = \alpha_1 H(t) - (\mu + \gamma + \delta_2)C(t) - \frac{C_n^2(t)}{A_3} (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{1,Q} = l(t_n, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,Q} = \alpha_2 H(t) + \gamma C(t) - \mu Q(t) + \frac{P_n^2(t)}{A_1} (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) + (1 - \epsilon) \frac{H_n^2(t)}{A_2}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \right\} + \frac{c_n^2(t)}{A_3} (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \\ p_{2,P} = & f \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, M_n + \frac{p_{1,M}}{2}, H_n + \frac{p_{1,H}}{2}, C_n + \frac{p_{1,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{1,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + \right. \\ & \left. u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right) \\ p_{2,P} = & b - \beta_1 \left(P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right) \left(M_n(t) + \frac{p_{1,M}}{2} \right) \frac{1}{N} - \mu \left(P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right) - \frac{(P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2})^2}{A_1} \\ & (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) \\ p_{2,M} = & g \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, M_n + \frac{p_{1,M}}{2}, H_n + \frac{p_{1,H}}{2}, C_n + \frac{p_{1,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{1,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + \right. \\ & \left. u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right) \\ p_{2,M} = & \beta_1 \left(P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right) \left(M_n(t) + \frac{p_{1,M}}{2} \right) \frac{1}{N} - (\beta_2 + \mu) \left(M_n(t) + \frac{p_{1,M}}{2} \right) + \\ & \frac{\epsilon (H_n(t) + \frac{p_{1,H}}{2})^2}{A_2} \left\{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \right\} \\ p_{2,H} = & j \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, M_n + \frac{p_{1,M}}{2}, H_n + \frac{p_{1,H}}{2}, C_n + \frac{p_{1,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{1,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + \right. \\ & \left. u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right) \\ p_{2,H} = & \beta_2 \left(M_n(t) + \frac{p_{1,M}}{2} \right) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \left(H_n(t) + \frac{p_{1,H}}{2} \right) - \frac{(H_n(t) + \frac{p_{1,H}}{2})^2}{A_2} \\ & \left\{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \right\} \\ p_{2,C} = & k \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, M_n + \frac{p_{1,M}}{2}, H_n + \frac{p_{1,H}}{2}, C_n + \frac{p_{1,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{1,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + \right. \\ & \left. u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right) \\ p_{2,C} = & \alpha_1 \left(H_n(t) + \frac{p_{1,H}}{2} \right) - (\mu + \gamma + \delta_2) \left(C_n(t) + \frac{p_{1,C}}{2} \right) - \frac{(C_n(t) + \frac{p_{1,C}}{2})^2}{A_3} \\ & (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \\ p_{2,Q} = & l \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, M_n + \frac{p_{1,M}}{2}, H_n + \frac{p_{1,H}}{2}, C_n + \frac{p_{1,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{1,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + \right. \\ & \left. u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right) \end{aligned}$$

$$p_{2,Q} =$$

$$\alpha_2 \left(H_n(t) + \frac{p_{1,H}}{2} \right) + \gamma \left(C_n(t) + \frac{p_{1,C}}{2} \right) - \mu \left(Q_n(t) + \frac{p_{1,Q}}{2} \right) +$$

$$\frac{\left(P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right)^2}{A_1} (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) + (1 - \epsilon) \frac{\left(H_n(t) + \frac{p_{1,H}}{2} \right)^2}{A_2}$$

$$\left\{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \right\} + \frac{\left(C_n(t) + \frac{p_{1,C}}{2} \right)^2}{A_3} (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{3,P} = f \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, M_n + \frac{p_{2,M}}{2}, H_n + \frac{p_{2,H}}{2}, C_n + \frac{p_{2,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{2,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{3,P} = b - \beta_1 \left(P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right) \left(M_n(t) + \frac{p_{2,M}}{2} \right) \frac{1}{N} - \mu \left(P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right) - \frac{\left(P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right)^2}{A_1}$$

$$(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{3,M} = g \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, M_n + \frac{p_{2,M}}{2}, H_n + \frac{p_{2,H}}{2}, C_n + \frac{p_{2,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{2,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{3,M} = \beta_1 \left(P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right) \left(M_n(t) + \frac{p_{2,M}}{2} \right) \frac{1}{N} - (\beta_2 + \mu) \left(M_n(t) + \frac{p_{2,M}}{2} \right) +$$

$$\frac{\epsilon \left(H_n(t) + \frac{p_{2,H}}{2} \right)^2}{A_2} \left\{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \right\}$$

$$p_{3,H} = j \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, M_n + \frac{p_{2,M}}{2}, H_n + \frac{p_{2,H}}{2}, C_n + \frac{p_{2,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{2,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{3,H} = \beta_2 \left(M_n(t) + \frac{p_{2,M}}{2} \right) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) \left(H_n(t) + \frac{p_{2,H}}{2} \right) - \frac{\left(H_n(t) + \frac{p_{2,H}}{2} \right)^2}{A_2}$$

$$\left\{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \right\}$$

$$p_{3,C} = k \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, M_n + \frac{p_{2,M}}{2}, H_n + \frac{p_{2,H}}{2}, C_n + \frac{p_{2,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{2,Q}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{2,C} = \alpha_1 \left(H_n(t) + \frac{p_{2,H}}{2} \right) - (\mu + \gamma + \delta_2) \left(C_n(t) + \frac{p_{2,C}}{2} \right) - \frac{\left(C_n(t) + \frac{p_{2,C}}{2} \right)^2}{A_3}$$

$$(\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{3,Q} = l \left(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, M_n + \frac{p_{2,M}}{2}, H_n + \frac{p_{2,H}}{2}, C_n + \frac{p_{2,C}}{2}, Q_n + \frac{p_{2,Q}}{2}, \frac{1}{2}(u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{3,Q} =$$

$$\alpha_2 \left(H_n(t) + \frac{p_{2,H}}{2} \right) + \gamma \left(C_n(t) + \frac{p_{2,C}}{2} \right) - \left(Q_n(t) + \frac{p_{2,Q}}{2} \right) + \frac{\left(P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right)^2}{A_1} (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) + (1 - \epsilon) \frac{\left(H_n(t) + \frac{p_{2,H}}{2} \right)^2}{A_2}$$

$$p_{4,P} =$$

$$f \left(t_n + h, P_n + p_{3,P}, M_n + p_{3,M}, H_n + p_{3,H}, C_n + p_{3,C}, Q_n + p_{3,Q}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1} \right)$$

$$p_{4,P} = b - \beta_1 (P_n(t) + p_{3,P}) (M_n(t) + p_{3,M}) \frac{1}{N} - \mu (P_n(t) + p_{3,P}) - \frac{(P_n(t) + p_{3,P})^2}{A_1} (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{4,M} =$$

$$g \left(t_n + h, P_n + p_{3,P}, M_n + p_{3,M}, H_n + p_{3,H}, C_n + p_{3,C}, Q_n + p_{3,Q}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1} \right)$$

$$p_{4,M} = \beta_1 (P_n(t) + p_{3,P}) (M_n(t) + p_{3,M}) \frac{1}{N} - (\beta_2 + \mu) (M_n(t) + p_{3,M}) + \frac{\epsilon (H_n(t) + p_{3,H})^2}{A_2} \{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \}$$

$$p_{4,H} =$$

$$j \left(t_n + h, P_n + p_{3,P}, M_n + p_{3,M}, H_n + p_{3,H}, C_n + p_{3,C}, Q_n + p_{3,Q}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1} \right)$$

$$p_{4,H} = \beta_2 (M_n(t) + p_{3,M}) - (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1) (H_n(t) + p_{3,H}) - \frac{(H_n(t) + p_{3,H})^2}{A_2} \{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \}$$

$$p_{4,C} =$$

$$k \left(t_n + h, P_n + p_{3,P}, M_n + p_{3,M}, H_n + p_{3,H}, C_n + p_{3,C}, Q_n + p_{3,Q}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1} \right)$$

$$p_{4,C} = \alpha_1 (H_n(t) + p_{3,H}) - (\mu + \gamma + \delta_2) (C_n(t) + p_{3,C}) - \frac{(C_n(t) + p_{3,C})^2}{A_3} (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})$$

$$p_{4,Q} =$$

$$l(t_n + h, P_n + p_{3,P}, M_n + p_{3,M}, H_n + p_{3,H}, C_n + p_{3,C}, Q_n + p_{3,Q}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1})$$

$$p_{4,Q} =$$

$$\alpha_2(H_n(t) + p_{3,H}) + \gamma(C_n(t) + p_{3,C}) - \mu(Q_n(t) + p_{3,Q}) + \frac{(P_n(t) + p_{3,P})^2}{A_1} (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) + (1 - \epsilon) \frac{(H_n(t) + p_{3,H})^2}{A_2} \{ \lambda_{3,n} - \epsilon \lambda_{2,n} - (1 - \epsilon) \lambda_{5,n} \} + \frac{(C_n(t) + \frac{p_{1,C}}{2})^2}{A_3} (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})$$

Lampiran 3 Proses Perhitungan Manual Persamaan *Co-State*

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial P} = (\lambda_1 - \lambda_2)\beta_1 \frac{M(t)}{N} + (\lambda_1 - \lambda_5)u_1(t) + \mu\lambda_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial M} = (\lambda_1 - \lambda_2)\beta_1 \frac{P(t)}{N} + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu\lambda_2$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial H} = & -1 + \{\lambda_3 - (1 - \epsilon)\lambda_5 - \epsilon\lambda_2\}u_2(t) - \alpha_1\lambda_4 - \alpha_2\lambda_5 \\ & + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1)\lambda_3 \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial C} = -1 + \lambda_4(\mu + \gamma + \delta_2) + (\lambda_3 - \lambda_5)u_3(t) - \gamma\lambda_5$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q} = 1 + \mu\lambda_5$$

Hasil diskritisasi menggunakan metode Runge Kutta orde empat adalah sebagai berikut:

$$\lambda_{1,n-1} = \lambda_{1,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_1} + 2p_{2,\lambda_1} + 2p_{3,\lambda_1} + p_{4,\lambda_1})$$

$$\lambda_{2,n-1} = \lambda_{2,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_2} + 2p_{2,\lambda_2} + 2p_{3,\lambda_2} + p_{4,\lambda_2})$$

$$\lambda_{3,n-1} = \lambda_{3,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_3} + 2p_{2,\lambda_3} + 2p_{3,\lambda_3} + p_{4,\lambda_3})$$

$$\lambda_{4,n-1} = \lambda_{4,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_4} + 2p_{2,\lambda_4} + 2p_{3,\lambda_4} + p_{4,\lambda_4})$$

$$\lambda_{5,n-1} = \lambda_{5,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_5} + 2p_{2,\lambda_5} + 2p_{3,\lambda_5} + p_{4,\lambda_5})$$

dengan

$$p_{1,\lambda_1} = f(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,\lambda_1} = (\lambda_{1,n} - \lambda_{2,n})\beta_1 \frac{M_n(t)}{N} + (\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n})u_{1,n}(t) + \mu\lambda_{1,n}$$

$$p_{1,\lambda_2} = g(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,\lambda_2} = (\lambda_{1,n} - \lambda_{2,n})\beta_1 \frac{P_n(t)}{N} + \beta_2(\lambda_{2,n} - \lambda_{3,n}) + \mu\lambda_{2,n}$$

$$p_{1,\lambda_3} = j(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$\begin{aligned} p_{1,\lambda_3} = & -1 + \{\lambda_{3,n} - (1 - \epsilon)\lambda_{5,n} - \epsilon\lambda_{2,n}\}u_{2,n}(t) - \alpha_1\lambda_{4,n} - \alpha_2\lambda_{5,n} \\ & + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1)\lambda_{3,n} \end{aligned}$$

$$p_{1,\lambda_4} = k(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,\lambda_4} = -1 + \lambda_{4,n}(\mu + \gamma + \delta_2) + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})u_{3,n}(t) - \gamma\lambda_{5,n}$$

$$p_{1,\lambda_5} = l(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, M_n, H_n, C_n, Q_n, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,\lambda_5} = 1 + \mu\lambda_{5,n}$$

$$p_{2,\lambda_1} = f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1})\right)$$

$$p_{2,\lambda_1} = \left(\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}\right) - \left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}\right)\right)\beta_1 \frac{1}{2}(M_n(t) + M(t)_{n-1}) \frac{1}{N} + \left(\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}\right) - \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}\right)\right)\frac{1}{2}(u_{1,n}(t) + u_{1,n-1}(t)) + \mu\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}\right)$$

$$p_{2,\lambda_2} = g\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1})\right)$$

$$p_{2,\lambda_2} = \left(\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}\right) - \left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}\right)\right)\beta_1 \frac{1}{2}(P_n(t) + P(t)_{n-1}) \frac{1}{N} + \beta_2 \left(\left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}\right) - \left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}\right)\right) + \mu\left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}\right)$$

$$p_{2,\lambda_3} = j\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1})\right)$$

$$p_{2,\lambda_3} = -1 + \left\{\left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}\right) - (1 - \epsilon)\left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}\right) - \epsilon\left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}\right)\right\} \frac{1}{2}(u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t)) - \alpha_1\left(\lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}\right) - \alpha_2\left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}\right) + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1)\left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}\right)$$

$$p_{2,\lambda_4} = k\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1})\right)$$

$$p_{2,\lambda_4} = -1 + \left(\lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}\right)(\mu + \gamma + \delta_2) + \left(\left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}\right) - \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t) \right) - \gamma \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \\
p_{2,\lambda_5} = & l \left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \right. \\
& \left. \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + \right. \\
& \left. u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right) \\
p_{2,\lambda_5} = & 1 + \mu \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \\
p_{3,\lambda_1} = & f \left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \right. \\
& \left. \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + \right. \\
& \left. u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right) \\
p_{3,\lambda_1} = & \left(\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2} \right) - \left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \right) \beta_1 \frac{1}{2} (M_n(t) + M(t)_{n-1}) \frac{1}{N} + \\
& \left(\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2} \right) - \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \right) \frac{1}{2} (u_{1,n}(t) + u_{1,n-1}(t)) + \mu \left(\lambda_{1,n} - \right. \\
& \left. \frac{p_{2,\lambda_1}}{2} \right) \\
p_{3,\lambda_2} = & g \left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \right. \\
& \left. \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + \right. \\
& \left. u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right) \\
p_{3,\lambda_2} = & \left(\left(\lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2} \right) - \left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \right) \beta_1 \frac{1}{2} (P_n(t) + P(t)_{n-1}) \frac{1}{N} + \\
& \beta_2 \left(\left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) - \left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right) \right) + \mu \left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \\
p_{3,\lambda_3} = & j \left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \right. \\
& \left. \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + \right. \\
& \left. u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right) \\
p_{3,\lambda_3} = & -1 + \left\{ \left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right) - (1 - \epsilon) \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) - \epsilon \left(\lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \right\} - \\
& \alpha_1 \left(\lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2} \right) - \alpha_2 \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1) \left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3,\lambda_4} &= k \left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \right. \\
&\quad \left. \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + \right. \\
&\quad \left. u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right) \\
p_{3,\lambda_4} &= -1 + \left(\lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2} \right) (\mu + \gamma + \delta_2) + \left(\left(\lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right) - \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \right) \\
&\quad \frac{1}{2} \left(u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t) \right) - \gamma \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \\
p_{3,\lambda_5} &= l \left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} - \right. \\
&\quad \left. \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, M_n + M_{n-1}, H_n + H_{n-1}, C_n + C_{n-1}, u_{1,n} + \right. \\
&\quad \left. u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right) \\
p_{3,\lambda_5} &= 1 + \mu \left(\lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \\
p_{4,\lambda_1} &= f \left(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} - \right. \\
&\quad \left. p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, M_{n-1}, H_{n-1}, C_{n-1}, Q_{n-1}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1} \right) \\
p_{4,\lambda_1} &= \left((\lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}) - (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}) \right) \beta_1 \frac{M_{n-1}(t)}{N} + \left((\lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}) - \right. \\
&\quad \left. (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5}) \right) u_{1,n-1}(t) + \mu (\lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}) \\
p_{4,\lambda_2} &= g \left(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} - \right. \\
&\quad \left. p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, M_{n-1}, H_{n-1}, C_{n-1}, Q_{n-1}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1} \right) \\
p_{4,\lambda_2} &= \left((\lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}) - (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}) \right) \beta_1 \frac{P_{n-1}(t)}{N} + \beta_2 \left((\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}) - \right. \\
&\quad \left. (\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}) \right) + \mu (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}) \\
p_{4,\lambda_3} &= j \left(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} - \right. \\
&\quad \left. p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, M_{n-1}, H_{n-1}, C_{n-1}, Q_{n-1}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1} \right) \\
p_{4,\lambda_3} &= -1 + \{ (\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}) - (1 - \epsilon) (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5}) - \epsilon (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}) \} \\
&\quad u_{2,n-1}(t) - \alpha_1 (\lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}) - \alpha_2 (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5}) + (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \\
&\quad \gamma_1) (\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}) \\
p_{4,\lambda_4} &= k \left(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} - \right. \\
&\quad \left. p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, M_{n-1}, H_{n-1}, C_{n-1}, Q_{n-1}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1} \right) \\
p_{4,\lambda_4} &= -1 + (\lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}) (\mu + \gamma + \delta_2) + \left((\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}) - (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{3,n-1}(t) - \gamma(\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5}) \\
p_{4,\lambda_5} &= l(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} - \\
& \quad p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, M_{n-1}, H_{n-1}, C_{n-1}, Q_{n-1}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1}) \\
p_{4,\lambda_5} &= 1 + \mu(\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5})
\end{aligned}$$

RIWAYAT HIDUP



Faradillah Rahmy Savitri dilahirkan di Sidoarjo pada hari Minggu, tanggal 07 Maret 1999, biasa dipanggil Fara. Anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Sohib dan Ibu Sunani. Bertempat tinggal di Dusun Bedug Dowo, Desa Durung Bedug, Kecamatan Candi, Kabupaten Sidoarjo.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu pendidikan di TK Tunas Bangsa (2003-2005), sekolah dasar ditempuh di SDN Durung Bedug (2005-2011). Setelah itu, melanjutkan ke jenjang SMP yaitu di SMP Negeri 4 Sidoarjo (2011-2014). Kemudian, dilanjutkan ke jenjang SMA yaitu SMA Negeri 2 Sidoarjo (2014-2017). Pada tahun 2017, menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil bidang keilmuan Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Faradillah Rahmy Savitri
NIM : 17610043
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Peminum Alkohol
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	08 Maret 2021	Konsultasi Bab I	1.
2.	15 Maret 2021	Revisi Bab I	2.
3.	23 Maret 2021	Konsultasi Bab II	3.
4.	1 April 2021	Revisi Bab II	4.
5.	15 April 2021	Konsultasi Bab I dan Bab II	5.
6.	04 Mei 2021	Konsultasi Keagamaan	6.
7.	06 Mei 2021	Revisi Keagamaan	7.
8.	7 Mei 2021	ACC Draft Seminar Proposal	8.
9.	8 Mei 2021	ACC Draft Seminar Proposal	9.
10.	9 Juni 2021	Konsultasi Bab III	10.
11.	23 Juni 2021	Revisi Bab III	11.
11.	10 September 2021	Konsultasi dan Revisi Bab IV	12.
13.	08 Oktober 2021	Konsultasi Keagamaan	13.
14.	09 Oktober 2021	Revisi Keagamaan	14.
15.	11 Oktober 2021	ACC Keseluruhan	15.
16.	11 Oktober 2021	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 25 November 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005