

**ANALISIS PERILAKU MODEL PENYEBARAN CAMPAK SIR  
DENGAN STRUKTUR UMUR**

**SKRIPSI**

**OLEH  
OLIVIA KARININA  
NIM. 17610097**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**ANALISIS PERILAKU MODEL PENYEBARAN CAMPAK SIR  
DENGAN STRUKTUR UMUR**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Olivia Karinina  
NIM. 17610097**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**ANALISIS PERILAKU MODEL PENYEBARAN CAMPAK SIR  
DENGAN STRUKTUR UMUR**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Olivia Karinina**  
NIM. 17610097

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 17 November 2021

Pembimbing I,



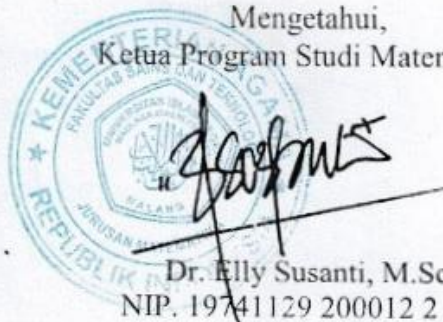
Juhari, M.Si  
NIDT. 19840209 20160801 1 055

Pembimbing II,



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS PERILAKU MODEL PENYEBARAN CAMPAK SIR  
DENGAN STRUKTUR UMUR**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Olivia Karinina  
NIM. 17610097**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 8 Desember 2021

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

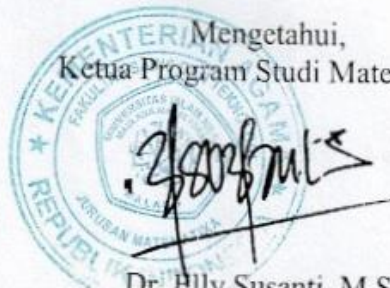
Ketua Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si

Sekretaris Penguji : Juhari, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005



## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Olivia Karinina

NIM : 17610097

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Perilaku Model Penyebaran Penyakit Campak SIR  
Dengan Struktur Umur

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Batu, 20 Oktober 2021

Yang membuat pernyataan,



Olivia Karinina  
NIM. 17610097

## **MOTTO**

*“Man Jadda Wa Jada”*

“Kalahkan rasa takut, terus mencoba dan belajar”

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Siswanto dan Siti Kharomah, adik penulis Navira, nenek dan saudara semuanya yang selalu mendoakan, memberikan semangat, nasihat dan kasih sayang yang tiada tara. Sehingga menjadikan alasan penulis untuk selalu semangat dalam berjuang.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Analisis Perilaku Model Penyebaran Campak SIR Dengan Struktur Umur”. Shalawat serta Salam selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak baik. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Juhari, S.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, arahan, nasihat, doa dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen penguji seminar proposal dan sidang skripsi yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis.
7. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen penguji sidang skripsi yang telah memberikan kritik dan saran yang bermanfaat bagi penulis.
8. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu yang diberikan dan atas segala bimbingannya.



9. Orang Tua, Adik, dan seluruh keluarga yang memberikan doa, semangat, motivasi, kasih sayang, serta pengorbanan materi dan waktu kepada penulis.
10. Seluruh sahabat dan teman-teman di Program Studi matematika 2017, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.

Penulis menyadari bahwa skripsi masih terdapat kekurangan-kekurangan. Dengan demikian, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan sehingga dapat lebih baik lagi. Selain itu, penulis juga mengharapkan semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan kepada para pembaca. Aamiin

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 10 Oktober 2021

Penyusun

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi

### **BAB I PENDAHULUAN**

1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat penelitian .....	5
1.5 Batasan Masalah .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6

### **BAB II KAJIAN PUSTAKA**

2.1 Model Epidemi SIR .....	8
2.2 Persamaan Diferensial .....	8
2.2.1 Persamaan Diferensial Linier .....	9
2.2.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier .....	9
2.3 Titik Keseimbangan (Ekuilibrium).....	10
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	10

2.5	<i>Matriks Next Generation</i> .....	11
2.6	Bilangan Reproduksi Dasar $R_0$ .....	11
2.7	Analisis Kestabilan Lokal.....	13
2.8	Kriteria Routh-Hurwitz.....	13
2.9	Model Penyebaran Campak.....	15
2.10	Kajian Islam Tentang Imunitas Tubuh Manusia.....	26

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Analisis Kestabilan Lokal.....	29
3.1.1	Titik Keseimbangan .....	29
3.1.2	Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ).....	43
3.1.3	Analisis Kestabilan Lokal .....	46
3.2	Simulasi Numerik.....	64
3.3	Upaya Pencegahan dalam Perspektif Islam.....	71

### **BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan.....	74
4.2	Saran .....	75

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	76
-----------------------------	----

### **LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Alur Epidemii SIR Dengan Umur .....	18
Gambar 3.1	Simulasi Titik Kesetimbangan $E_*^1$ .....	67
Gambar 3.2	Simulasi Titik Kesetimbangan $E_*^8$ .....	68
Gambar 3.3	Simulasi Titik Kesetimbangan $E_*^{16}$ .....	70

## DAFTAR SIMBOL

$S_k$	: Banyaknya individu yang rentan terkena infeksi pada umur $k$
$I_k$	: Banyaknya individu yang terinfeksi pada umur $k$
$R_k$	: Banyaknya individu yang telah sembuh dari infeksi pada umur $k$
$\Lambda$	: Banyaknya individu yang lahir pada umur $k$
$k$	: 1, 2, 3, 4
$\alpha$	: Tingkat penuaan suatu individu
$d$	: Laju kematian alami
$\beta$	: Laju infeksi
$\mu$	: Laju kematian alami akibat penyakit
$\gamma$	: Laju penyembuhan
$C$	: Kontak individu rentan dengan infeksi
$\theta$	: Proporsi populasi yang sudah divaksinasi
$\sigma$	: Efektivitas vaksinasi
$R_0$	: Bilangan reproduksi dasar
$\Lambda_k \theta_k \sigma_k$	: Individu kebal terhadap penyakit (Sudah melakukan vaksinasi)
$(1 - \theta_k \sigma_k) \Lambda_k$	: Individu yang rentan terhadap penyakit (Belum vaksinasi)

## ABSTRAK

Karinina, Olivia. 2021. **Analisis Perilaku Model Penyebaran Campak SIR Dengan Struktur Umur**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Juhari, M.Si, (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

**Kata Kunci:** Model Epidemi; SIR; Penyebaran Penyakit; Campak

Penelitian ini membahas mengenai model analisis perilaku epidemi *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR) penyebaran penyakit campak berdasarkan struktur umur. Total populasi penyebaran penyakit campak dikelompokkan menjadi empat kelompok umur yaitu kelompok umur pertama (0-4 tahun), kelompok umur kedua (5-9 tahun), kelompok umur ketiga (10-14 tahun) dan kelompok umur keempat ( $> 15$  tahun). Adapun langkah dalam melakukan analisis perilaku model dapat dilakukan dengan cara menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar serta melakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan. Pada model penyebaran penyakit campak dengan empat kelompok umur dimana setiap kelompok umur tidak ada interaksi dengan kelompok umur lainnya diperoleh enam belas titik keseimbangan yang merupakan kombinasi dari dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik secara terpisah. Sifat kestabilan dari setiap titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yang merupakan perkalian antara bilangan reproduksi dasar dari setiap kelompok umur. Penelitian ini memberikan kontribusi untuk memberikan informasi baik kepada pemerintah dan kalangan masyarakat.

## ABSTRACT

Karinina, Olivia. 2021. **On the Behavior Analysis of SIR Measles Spread Model with Age Structure**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang: (I) Juhari, M.Si. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Sc.

**Keyword:** epidemic model; SIR; spread of disease; measles

This study discusses the behavior analysis model of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic of the spread of measles based on age structure. The total population is grouped into four age groups, the first age group (0-4 years), the second age group (5-9 years), the third age group (10-14 years) and the fourth age group (> 15 years). The steps in analyzing the behavior of the model can be done by determining the equilibrium point, basic reproduction number and stability analysis at the equilibrium point. In the measles distribution model with four age groups where each age group has no interaction with other age groups, sixteen equilibrium points are obtained which are a combination of disease-free equilibrium and endemic equilibrium points separately. Stability properties of each equilibrium point can be determined by the value of the basic reproduction number ( $R_0$ ) which is the product of the basic reproduction number of each age group. This research contributes to providing information to both the government and the public.



## ملخص

كريننا أوليفيا. ٢٠٢١. التحليل السلوكي لنموذج توزيع الحصبة SIR مع الهيكل العمري. البحث العلمي ، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.المشرف : (١) جوهرى، الماجستير (٢): الدكتور عثمان فغالي، الماجستير

الكلمات الأساسية: النموذج الوبائي، SIR، إنتشار المرض، الحصبة

يناقش هذا البحث نموذج التحليل السلوكي للوباء المعرضين للإصابة بالعدوى والمتعافين (SIR) لانتشار الحصبة على أساس الهيكل العمري. أما تصنيف الإجمالي في انتشار الحصبة ينقسم إلى أربع فئات عمرية وهي الفئة العمرية الأولى (٠-٤ سنوات)، الفئة العمرية الثانية (٥-٩ سنوات)، الفئة العمرية الثالثة (١٠-١٤ سنوات)، الفئة العمرية الرابعة (< ١٥ سنوات). وكان إجراء خطوات تحليل سلوك النموذج بطريق تحديد نقطة التوازن ورقم التكاثر الأساسي وإجراء تحليل الاستقرار عند نقطة التوازن. في نموذج توزيع الحصبة مع أربع فئات عمرية حيث لا يوجد تفاعل لكل فئة عمرية مع الفئات العمرية الأخرى، ويتم الحصول على ست عشرة نقطة توازن والتي هي مزيج من نقطتي توازن، وهما نقطة التوازن الخالية من الأمراض ونقطة التوازن المتوطنة بشكل منفصل. أما تحديد خصائص الاستقرار لكل نقطة توازن يتعين من خلال قيمة رقم التكاثر الأساسي ( $R_0$ ) وهو نتيجة التكاثر الأساسي لكل فئة عمرية. ويساهم هذا البحث في توفير المعلومات لكل من الحكومة والمجتمع.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Campak merupakan infeksi virus yang sangat menular. Penyakit campak atau yang dikenal dengan *measles* berada dalam family *Paramyxovirus* genus *Morbillivirus*. Menurut Nurani (2012) virus campak ini dapat menyebar melalui udara yang terkontaminasi oleh sekret orang yang telah terinfeksi. Campak merupakan penyakit yang menyebabkan kematian utama di berbagai negara berkembang khususnya pada bayi dan anak-anak dibawah umur lima tahun. Vaksinasi adalah cara yang tepat dalam upaya pencegahan penyakit campak sehingga dapat mengurangi angka kematian.

Proses infeksi virus campak yang terjadi dalam penelitian ini dapat digambarkan dalam model epidemi *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR). Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kemack dan MacKendrick, model epidemi SIR (*Susceptible – Infected – Recovered*) digunakan dalam menjelaskan penyebaran penyakit, dengan individu yang telah sembuh dari penyakit tidak akan tertular kembali atau telah memiliki sistem kekebalan tubuh. Dalam model matematika ini memuat tiga subkelas individu dalam suatu sistem persamaan yang terdiri atas variabel *Susceptible* (*S*), *Infected* (*I*), *Recovered* (*R*). Dimana *Susceptible* merupakan subkelas jumlah individu rentan yang dapat terinfeksi atau tertular virus tersebut, individu tersebut dapat terinfeksi apabila adanya kontak langsung dengan individu yang telah terinfeksi campak sebelumnya, *Infected* merupakan subkelas jumlah individu yang terinfeksi virus karena adanya kontak

langsung dengan individu yang terinfeksi campak sebelumnya dimana individu yang terinfeksi dapat ditandai dengan gejala tertentu yaitu demam, batuk, pilek, dan munculnya ruam atau bintik-bintik merah di sekitar tubuh, *Recovered* merupakan subkelas jumlah individu sembuh dan tidak dapat terinfeksi kembali dimana individu yang sembuh tersebut dikarenakan adanya *treatment* yang sukses yaitu telah melakukan vaksinasi. Ketiga subkelas tersebut merupakan variabel yang digunakan dalam penelitian ini dimana setiap variabel akan dibagi menjadi empat kelompok umur. Pembagian kelompok umur dapat digunakan dalam memahami kompleksitas penyebaran virus tersebut, dimana individu dengan umur berbeda tentunya memiliki tingkat kekebalan tubuh yang berbeda. Dengan adanya perbedaan tersebut dapat mempengaruhi spesifik umur laju kematian dan laju pemulihan individu dari infeksi.

Model matematika penyebaran virus campak menjelaskan proses terjadinya infeksi suatu individu dikarenakan berinteraksi langsung dengan individu yang terjangkit virus campak yang kemudian akan diberikan pengobatan sehingga memiliki sistem kekebalan yang baik atau sembuh dalam suatu populasi. Parameter yang digunakan dalam model antara lain: efektivitas vaksinasi ( $\theta$ ), rata-rata cakupan vaksinasi ( $\sigma$ ), laju kelahiran ( $\Lambda$ ), laju kematian alami ( $d$ ), laju kematian dikarenakan penyakit ( $\mu$ ), serta laju perubahan individu yang rentan menjadi individu yang terinfeksi dikarenakan adanya interaksi terhadap individu yang telah terinfeksi sebelumnya dengan tingkat ( $\beta$ ), dan laju perubahan individu yang terinfeksi menjadi individu yang sembuh ( $\gamma$ ).

Penyebaran penyakit campak dan ditemukannya vaksin atau obat-obatan tersebut merupakan salah satu fenomena yang sudah diatur sebelumnya oleh Allah

SWT. Sesungguhnya Allah telah menciptakan segala sesuatu dengan sebaik-baiknya dan tidak ada yang sia-sia. Sebagaimana telah dituliskan dalam Al-Qur'an yakni Q.S Yunus ayat 57, yang artinya:

*“Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) di dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman.”*

Ayat diatas menunjukkan bahwa sesungguhnya telah datang nasihat yang bertujuan untuk memperingati semuanya dari siksaan Allah, nasihat-nasihat tersebut berada dalam Al-Qur'an. Selain itu di dalam Al-Qur'an terdapat obat bagi hati dari kebodohan, kesyirikan dan seluruh penyakit-penyakit. Dari ayat tersebut dijelaskan semua yang diberikan Allah maka akan diberikan petunjuk, dimana petunjuk tersebut berada pada Al-Qur'an. Begitu pula ketika Allah yang telah menurunkan suatu penyakit maka Allah SWT juga akan mengirimkan penawaran untuk mengatasi penyakit tersebut berupa obat atau lainnya.

Upaya secara matematik untuk memahami proses penyebaran penyakit campak dapat dikonstruksi menggunakan pemodelan matematika. Terdapat beberapa penelitian mengenai proses penyebaran penyakit campak. Misalnya, Mutmainah dkk (2019) membahas mengenai model dinamik penyebaran penyakit campak menggunakan tiga sub populasi yaitu populasi rentan, populasi terinfeksi, dan populasi sembuh, dengan mempertimbangkan pengaruh vaksinasi khususnya di Provinsi Nusa Tenggara Barat. Adapun pada 2017, Aisyah Noer Azizah melakukan penelitian dengan model yang digunakan adalah model epidemi SIR penyebaran penyakit campak. Pada model tersebut mempertimbangkan umur secara global serta faktor imunisasi. Selanjutnya, pada penelitian Zhou dkk (2019) membahas mengenai model epidemi SIR berdasarkan struktur umur, dalam

penelitiannya berfokus pada transmisi dinamis suatu penularan penyakit pada populasi inang dengan struktur umur.

Adapun penelitian dalam skripsi ini penulis akan mengembangkan model dinamik penyebaran campak berdasarkan umur dengan vaksinasi campak. Model dinamik terbagi menjadi tiga kompartemen yaitu populasi rentan ( $S$ ), populasi infeksi ( $I$ ), dan populasi pulih ( $R$ ), dalam ketiga kompartemen akan dibagi menjadi empat kelompok umur dimana selanjutnya akan dilakukan analisis perilaku dinamik model matematika penyebaran campak ditinjau berdasarkan kelompok umur dengan vaksinasi serta melakukan simulasi numerik menggunakan metode Ode45 untuk menunjukkan analisis dari parameter.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan diatas maka permasalahan yang dapat diajukan dalam penelitian ini adalah bagaimana analisis perilaku model epidemi SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) pada penyebaran penyakit campak ditinjau dari kelompok umur?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui analisis perilaku model penyebaran penyakit campak SIR (*Susceptible Infected Recovered*) dengan struktur umur.

#### **1.4 Manfaat penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah dengan memodelkan penyebaran penyakit campak berdasarkan umur, maka hasil dari penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan rujukan dalam pengembangan ilmu matematika yang diaplikasikan dalam dunia kesehatan serta dapat digunakan sebagai informasi penelitian selanjutnya.

#### **1.5 Batasan Masalah**

Agar penelitian ini terarah dan tidak menimbulkan kesalahan yang dimaksud, maka peneliti membatasi penelitian sebagai berikut:

1. Individu dibagi menjadi empat kelompok umur yaitu bayi (0-4 tahun), anak-anak (5-9 tahun), remaja (10-14 tahun), dewasa (diatas 15 tahun)
2. Parameter dalam penelitian ini merujuk pada artikel jurnal (Zhou dkk, 2019), terlampir pada Lampiran I
3. Proses penyebaran penyakit campak dapat dijelaskan dalam diagram alur model kompartemen yang telah dilakukan revisi terhadap model kompartemen pada jurnal Zhou dkk (2019).

#### **1.6 Metode Penelitian**

Dalam penelitian ini metode yang digunakan penulis adalah metode studi pustaka atau studi literatur dengan cara mempelajari dan menganalisis beberapa jurnal, buku, dan bahan-bahan literatur lainnya yang dapat mendukung penelitian ini. Secara umum, analisis perilaku dari model dinamik penyebaran campak dapat dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

1. Menentukan titik kesetimbangan pada model penyebaran penyakit campak pada masing-masing kelompok umur. Diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dapat diperoleh dengan mengasumsikan  $I = 0$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik diperoleh dengan mengasumsikan  $I \neq 0$ .
2. Menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dengan menggunakan metode matriks *next generation*
3. Menganalisis kestabilan lokal dari titik kesetimbangan model penyebaran penyakit campak berdasarkan umur pada vaksinasi campak. Analisis kestabilan dapat dilakukan dengan menentukan matriks Jacobian dengan melakukan linierisasi pada sistem persamaan diferensial sehingga diperoleh nilai eigen yang akan digunakan dalam menentukan kestabilan dari titik tetap pada sistem.
4. Simulasi Numerik menggunakan ODE45

### **1.7 Sistematika Penulisan**

Untuk mempermudah memahami penelitian ini, sistematika penulisan dalam penelitian dijelaskan secara umum sebagai berikut:

#### **BAB I Pendahuluan**

Pada bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, serta sistematika penelitian.



## BAB II Kajian Pustaka

Pada bab ini berisi tentang konsep teori yang dapat digunakan pada bagian pembahasan. Teori tersebut dapat digunakan sebagai acuan dalam melaksanakan penelitian. Konsep dasar meliputi sistem persamaan diferensial biasa, titik kesetimbangan dan sebagainya

## Bab III Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini meliputi hasil penelitian secara rinci dan jelas. Dalam bab ini dijelaskan meliputi titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan serta dilakukan simulasi numerik.

## BAB IV Penutup

Pada bab ini terdiri atas kesimpulan dari hasil penelitian dan saran-saran yang berkaitan mengenai penelitian ini.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Epidemi SIR

Pada tahun 1927 Kermack dan McKendrick pertama kali memperkenalkan model epidemi SIR. Model epidemik SIR (*Susceptible – Infected – Recovered*) ini digunakan untuk menjelaskan penyebaran penyakit, dengan individu yang telah sembuh dari penyakit tersebut dan tidak akan tertular kembali memiliki sistem kekebalan. Model epidemi SIR terdiri dari tiga sub populasi yaitu *Susceptible* dapat disimbolkan dengan (*S*) yang terdiri dari kelas individu sehat tetapi rentan terhadap penyakit, *Infected* yang disimbolkan dengan (*I*) yang memuat kelompok individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit pada populasi orang yang sehat, dan *Recovered* yang dapat disimbolkan dengan (*R*) yaitu kelompok individu yang terinfeksi dan sembuh. Populasi dari *susceptible*, *infected*, dan *recovered* pada waktu *t* dapat dituliskan seperti  $S(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $R(t)$ .

#### 2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial dapat didefinisikan sebagai suatu persamaan matematika yang memuat suatu fungsi peubah tak bebas dan turunannya dari satu atau lebih fungsi (Pamuntjak dan Santosa, 1990). Terdapat dua jenis persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa (PDB) merupakan persamaan yang memuat turunan dari variabel tak bebas dari satu variabel bebas (Zill dkk, 2013). Turunan dari persamaan diferensial dilambangkan dengan  $\frac{dy}{dx}$  atau  $f'$  atau  $y'$ .

Sedangkan persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan-turunan dari variabel tak bebas dengan dua atau lebih variabel bebas.

### 2.2.1 Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial linier orde satu secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \quad (2.1)$$

Dimana  $a$  dan  $b$  adalah koefisien konstan (Boyce & DiPrima, 2009)

### 2.2.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier

Menurut (Kartono, 2012) secara umum bentuk persamaan diferensial biasa nonlinier orde pertama dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dimana variabel bebas adalah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel terikat  $t$ . Diperoleh  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$  dengan  $\frac{dx_n}{dt}$  merupakan turunan fungsi  $x_n$  terhadap  $t$ . Menurut Ross (2004) sistem persamaan diferensial dapat dikatakan non linier apabila memenuhi ketentuan berikut:

1. Terdapat variabel bebas dan turunannya yang berpangkat lebih dari satu.
2. Memuat perkalian dari variabel tak bebas dengan turunannya.

3. Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunannya.

Jika, memenuhi ketentuan diatas maka sistem persamaan tersebut disebut sebagai sistem persamaan diferensial nonlinier.

### 2.3 Titik Keseimbangan (Ekuilibrium)

Titik keseimbangan (ekuilibrium) dapat disebut juga sebagai titik tetap. Titik tetap yang berarti nilai titik tersebut tidak akan berubah (konstan). Istilah lain yang biasa digunakan dalam menyatakan titik keseimbangan yaitu titik stasioner, titik singular, dan titik kritis (Chen, 2004).

**Definisi 2.3.1** Titik  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  merupakan titik tetap atau titik kritis dari suatu sistem persamaan  $\dot{x} = f(x)$  jika  $f(x_0) = 0$ . (Perko, 2001)

### 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan  $A$  adalah suatu matriks berukuran  $n \times n$ , dan suatu vektor  $x$  yang terdapat dalam  $\mathbb{R}^n$ . Maka  $x$  adalah vektor eigen dari  $A$  jika memenuhi kondisi

$$Ax = \lambda x \quad (2.3)$$

Dimana  $\lambda$  adalah nilai eigen yang merupakan suatu skalar dari matriks  $A$ .

Persamaan diatas dapat ditulis menjadi sebagai berikut

$$Ax - \lambda Ix = 0 \quad (2.4)$$

atau

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.5)$$

Dimana  $I$  merupakan matriks identitas

Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$ , maka dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})x = 0 \quad (2.6)$$

Jika  $\mathbf{A}$  matriks berukuran  $2 \times 2$ , diperoleh

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga didapatkan (Boyce, 2001)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})x = (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda) - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0. \quad (2.7)$$

## 2.5 *Matriks Next Generation*

Menurut Oktafiani dan Kusnanto (2013) matriks yang diperoleh dari perkalian suatu matriks  $F$  dengan invers matriks  $V$  disebut dengan matriks generasi selanjutnya (matriks next generation). Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1} \quad (2.8)$$

Dengan  $V^{-1}$  didefinisikan sebagai rata-rata lama waktu yang dibutuhkan individu selama hidup dan  $F$  adalah laju individu terinfeksi yang dapat menyebabkan suatu infeksi atau penularan baru pada individu yang lain. Oleh karena itu diperoleh  $R_0$  adalah:

$$R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1}) \quad (2.9)$$

Dimana  $\rho(K)$  adalah radius spektral terhadap matriks  $K$ .

## 2.6 *Bilangan Reproduksi Dasar $R_0$*

Bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan  $R_0$  berguna untuk mengukur jumlah rata-rata kasus individu rentan yang terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi yang masuk dalam suatu populasi rentan (Diekmann

& Heesterbeek, 2002). Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) digunakan untuk menghitung risiko terjadinya penyebaran penyakit yang mengakibatkan munculnya wabah penyakit. Jika  $R_0 < 1$ , maka tidak terdapat individu yang terinfeksi yang menandakan bahwa wabah penyakit telah menghilang. Apabila  $R_0 > 1$ , menunjukkan adanya kelompok individu yang terkena infeksi virus akan bertambah banyak dan penyakit akan menyebar dengan kata lain terdapat lebih dari satu individu yang terinfeksi sehingga penyakit dapat menyerang populasi (Perasso, 2018).

Untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dapat dilakukan dengan mencari nilai eigen dengan menggunakan metode Van Den Driessche dan Watmough dari suatu matriks Jacobi yang dihitung melalui titik kesetimbangan bebas penyakit (Driessche dan Watmough, 2002). Misalkan terdapat  $n$  –kompartemen penyakit dan  $m$  –kompartemen bukan penyakit, kemudian misalkan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $y \in \mathbb{R}^m$  merupakan suatu kelompok bagian dari setiap kompartemen. Dan  $\mathcal{F}_i$  didefinisikan sebagai laju munculnya infeksi baru pada kompartemen  $i$  dan  $\mathcal{V}_i$  adalah laju kematian, dan kesembuhan dari penyakit pada kompartemen  $i$ . Model kompartemen tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x'_i &= \mathcal{F}_i(x, y) - \mathcal{V}_i(x, y), & i = 1, \dots, n \\ y'_j &= g_j(x, y), & j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.10)$$

Kemudian, linearisasi persamaan kompartemen penyakit dituliskan sebagai berikut

$$x' = (F - V)x \quad (2.11)$$

Dimana  $F$  dan  $V$  adalah suatu matriks berukuran  $n \times n$ , yang memuat

$$F = \frac{\delta \varphi_i}{\delta \psi_j} (0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\delta \psi_i}{\delta \varphi_j} (0, y_0)$$

Dapat didefinisikan sebagai suatu matriks next generation  $K = FV^{-1}$ , sehingga diperoleh

$$R_0 = (FV^{-1}) \quad (2.12)$$

## 2.7 Analisis Kestabilan Lokal

Analisis kestabilan digunakan untuk mengetahui kestabilan suatu sistem persamaan diferensial pada model matematika. titik tetap dari sistem persamaan diferensial biasa nonlinier dapat ditentukan dengan melinearisasikan dahulu titik tetapnya. Dalam melinearisasikan suatu sistem persamaan dapat menggunakan metode deret Taylor. Kemudian nilai eigen yang diperoleh dapat digunakan untuk mengetahui kestabilan titik tetap dan jenisnya. Apabila nilai eigen dari matriks *Jacobian* bernilai negatif berarti titik kestabilan atau titik tetap persamaan tersebut stabil (Boyce dan DiPrima, 2001).

**Dalil 1.** Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dikatakan stabil asimtotik lokal apabila  $R_0 < 1$ , dan tidak stabil apabila  $R_0 > 1$ . Sedangkan titik kesetimbangan endemik dapat dikatakan stabil asimtotik lokal apabila  $R_0 > 1$  dan sebaliknya (Zhou, 2019).

## 2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Analisis kestabilan titik kesetimbangan atau titik ekulibrium dapat dilakukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Misalkan diberikan sistem karakteristik sebagai berikut:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.13)$$

Persamaan (2.11) dapat dibentuk menjadi sebuah tabel Roth sebagai berikut:



$$\begin{array}{c|cccc}
 \lambda^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 \lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\
 \lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & & \\
 \vdots & & & & & \\
 \lambda^1 & y_1 & y_2 & & & \\
 \lambda^0 & z_1 & & & & 
 \end{array}$$

Dimana

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

Dan seterusnya

Persamaan diatas dapat dikatakan stabil jika dan hanya jika kolom pertama tabel

Routh tidak terjadi perubahan tanda.

Analisis kestabilan juga dapat diperoleh menggunakan determinan Hurwitz, sebagai berikut

$$\det(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Analisis akan stabi jika

$$\Delta_k > 0, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, n$$

Dimana

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

Untuk  $k = n$ , maka  $\Delta_n = \det(\mathbf{H})$ .

## 2.9 Model Penyebaran Campak

Model epidemi SIR penyebaran penyakit campak yang ditinjau berdasarkan kelompok umur sebagai berikut:

1. Kelompok 1 : Bayi (0-4 tahun)
2. Kelompok 2 : Anak-anak (5-9 tahun)
3. Kelompok 3 : Remaja (10-14 tahun)
4. Kelompok 4 : Dewasa (diatas 15 tahun)

Dalam mengkonstruksi model matematika penyebaran campak memiliki beberapa asumsi:

1. Semua bayi yang lahir termasuk *Susceptible* (Rentan)
2. Tidak terjadi migrasi, yang berarti populasi penduduk bersifat tertutup, penambahan dan pengurangan jumlah penduduk berdasarkan kelahiran dan kematian
3. Penyakit dapat disembuhkan
4. Kematian dapat terjadi secara alami dan karena penyakit

5. Individu yang telah pulih (*recovered*) tidak dapat menularkan penyakit.
6. Interaksi dengan individu terinfeksi hanya terjadi pada kelompok umur yang sama. Dengan demikian, tidak ada kemungkinan individu terinfeksi menyebarkan penyakit ke individu rentan di kelompok umur lain.

Parameter yang digunakan dalam pembentukan model epidemi penyebaran penyakit campak yaitu:

1.  $S_k$  menyatakan populasi individu yang memiliki kekebalan tubuhnya rentan terhadap penyakit pada individu  $k$ , dengan  $k = 1,2,3,4$
2.  $I_k$  menyatakan populasi individu yang terinfeksi yang dapat menularkan penyakit melalui kontak langsung pada individu  $k$ , dengan  $k = 1,2,3,4$
3.  $R_k$  menyatakan populasi individu yang telah pulih sehingga tidak dapat terserang penyakit, dengan  $k = 1,2,3,4$
4.  $\Lambda$  menyatakan lahirnya individu
5.  $\beta_k$  menyatakan laju infeksi penyebaran penyakit campak pada individu  $k$ , dengan  $k = 1,2,3,4$
6.  $d_k$  menyatakan kematian alami, dengan  $k = 1,2,3,4$
7.  $\mu_k$  menyatakan tingkat kematian dikarenakan penyakit, dengan  $k = 1,2,3,4$
8.  $\gamma_k$  menyatakan laju penyembuhan, dengan  $k = 1,2,3,4$
9.  $\sigma_k$  menyatakan tingkat efisiensi vaksinasi pada individu  $k$ , dengan  $k = 1,2,3,4$
10.  $\theta_k$  menyatakan rata-rata vaksinasi, dengan  $k = 1,2,3,4$

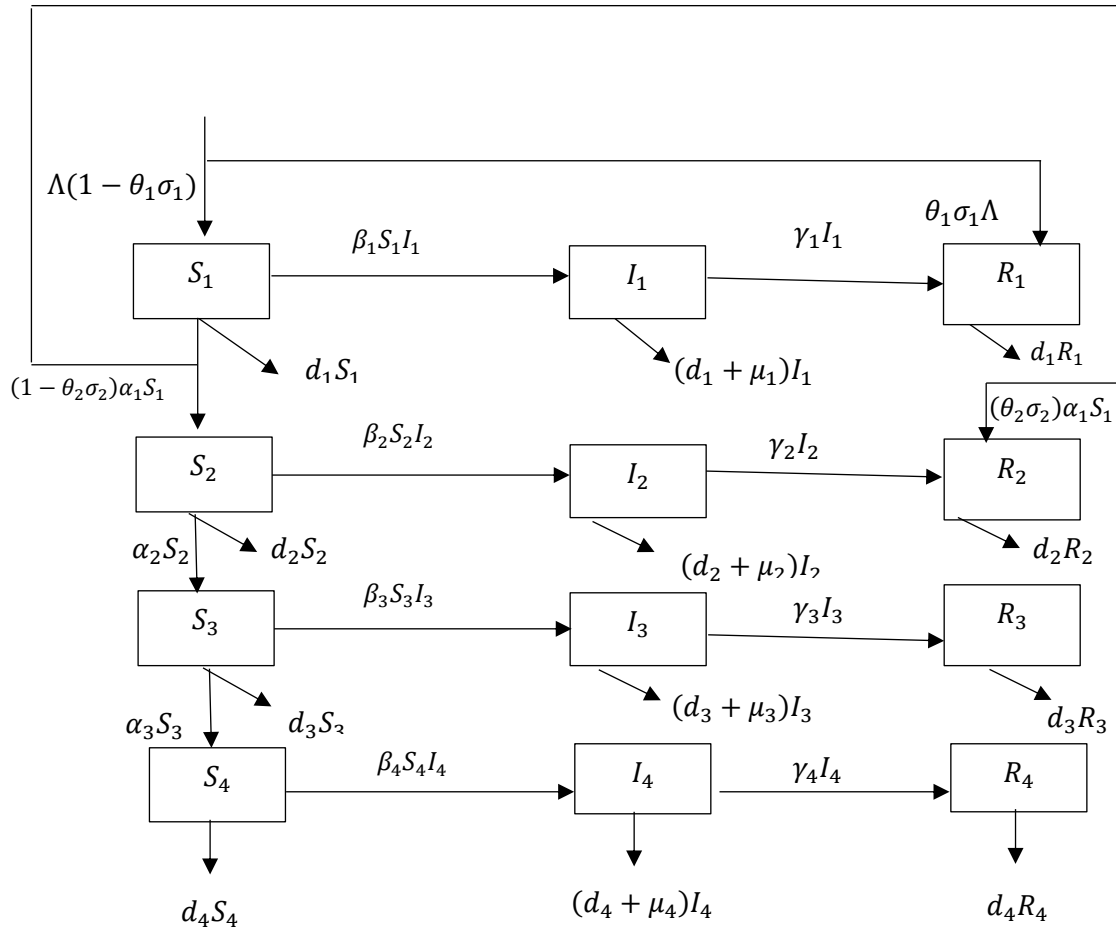
Dalam hal ini, vaksinasi diberikan pada individu yang baru lahir atau anak-anak dengan umur 0-9 tahun. Dimana individu yang telah melakukan vaksinasi tidak dapat menularkan penyakit dan memiliki sistem kekebalan yang kuat terhadap

penyakit, sehingga individu yang telah melakukan vaksinasi tergolong dalam kompartemen *recovered*.

Diasumsikan  $\sigma_1, \theta_1$  merupakan individu pada kelompok I (bayi 0-4 tahun) telah sukses melakukan vaksinasi. Dimana individu yang telah melakukan vaksinasi sebanding dengan laju kelahiran ( $\Lambda_1$ ), sehingga individu yang kebal terhadap penyakit dapat dinyatakan dengan  $\Lambda_1 \theta_1 \sigma_1$ , kemudian individu yang belum melakukan vaksinasi dapat dinyatakan dengan  $\Lambda_1 - \Lambda_1 \theta_1 \sigma_1 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda_1$ , individu yang belum melakukan vaksinasi ini dapat terinfeksi virus melalui kontak langsung terhadap individu yang terinfeksi pada kelompok umur I, sehingga tergolong dalam kompartemen *Susceptible* (Rentan) pada kelompok I.

Selanjutnya, Diasumsikan  $\sigma_2, \theta_2$  merupakan individu pada kelompok II (anak-anak 5-9 tahun) yang telah sukses melakukan vaksinasi. Dimana individu yang telah melakukan vaksinasi sebanding dengan laju penuaan pada kelompok sebelumnya sebesar  $\alpha_1 S_1$  sehingga individu yang kebal terhadap penyakit dapat dinyatakan dengan  $\alpha_1 S_1 \theta_2 \sigma_2$ , kemudian individu yang belum melakukan vaksinasi dapat dinyatakan dengan  $\alpha_1 S_1 - \alpha_1 S_1 \theta_2 \sigma_2 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1$ , individu yang belum melakukan vaksinasi ini dapat terinfeksi virus melalui kontak langsung terhadap individu yang terinfeksi pada kelompok umur tersebut, sehingga tergolong dalam kompartemen *Susceptible* (Rentan) pada kelompok II.

Dari gambar 2.1 diagram model penyebaran kelompok inang dibagi menjadi empat kelompok umur, setiap kelompok dibagi menjadi tiga kompartemen yaitu *susceptible* / rentan ( $S_k$ ), *Infective* / infeksi ( $I_k$ ), dan *Recovered*/pulih ( $R_k$ ). Sehingga model matematika epidemi SIR penyebaran penyakit campak berdasarkan umur pada vaksinasi dapat digambarkan dalam diagram alur berikut:



Gambar 2. 1 Diagram Alur Epidemi SIR Dengan Umur

Berdasarkan gambar 2.1 secara sistematis laju perubahan individu rentan pada kelompok pertama dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_1}{dt} = (1 - \theta_1\sigma_1)\Lambda - \beta_1S_1I_1 - d_1S_1 \quad (3.1)$$

Populasi individu rentan pada kelompok pertama akan meningkat dengan adanya penambahan individu baru lahir yang dinotasikan dengan  $(\Lambda)$  dan belum melakukan/memperoleh vaksinasi pertama yang dapat dinyatakan dengan  $(1 - \theta_1\sigma_1)$ , kemudian akan mengalami penurunan karena adanya perubahan individu rentan menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu rentan pada kelompok pertama telah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi dengan laju

penyebaran atau laju infeksi dinyatakan dengan  $\beta_1$ , selanjutnya, populasi individu rentan juga akan mengalami penurunan karena adanya individu rentan yang mengalami kematian alami  $d_1$ . Sehingga populasi individu rentan berkurang.

Kompartemen  $I_1$  merupakan banyaknya populasi individu yang terinfeksi pada kelompok pertama pada waktu  $t$ . Populasi individu terinfeksi akan mengalami penambahan dari individu yang rentan menjadi individu yang terinfeksi karena melakukan kontak langsung dengan individu yang terinfeksi dengan laju infeksi adalah  $\beta_1$ . Sehingga individu yang rentan tersebut masuk dalam populasi terinfeksi. Kemudian, populasi individu yang terinfeksi mengalami penurunan karena adanya perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau mempunyai sistem kekebalan yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_1$ . Selanjutnya, terdapat individu pada populasi terinfeksi yang mengalami kematian alami dengan laju  $d_1$  dan individu yang mengalami kematian akibat penyakit pada tingkat  $\mu_1$ . Laju perubahan individu yang terinfeksi pada kelompok umur pertama pada waktu ( $t$ ) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dI_1}{dt} = \beta_1 S_1 I_1 - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1 \quad (3.2)$$

Kompartemen  $R_1$  merupakan banyaknya populasi individu yang pulih pada kelompok pertama pada waktu ( $t$ ). Populasi dari individu pulih akan mengalami penambahan karena adanya individu yang baru lahir dan telah melakukan vaksinasi pada tingkat  $\Lambda\theta_1\mu_1$ , serta adanya perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau sudah mempunyai sistem imunitas yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_1$  sehingga populasi individu pulih akan bertambah. Selanjutnya, populasi individu yang pulih juga akan mengalami penurunan karena individu yang mengalami kematian alami dengan tingkat  $d_1$ . Hal tersebut mengakibatkan populasi

individu yang pulih akan berkurang. Laju perubahan individu yang pulih pada kelompok pertama dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dR_1}{dt} = \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 I_1 - d_1 R_1 \quad (3.3)$$

Kompartemen  $S_2$  menyatakan banyaknya populasi rentan pada kelompok kedua pada waktu ( $t$ ). Populasi individu rentan pada kelompok kedua akan meningkat dengan adanya penambahan individu baru yang telah mengalami proses penuaan pada populasi sebelumnya dan belum melakukan / memperoleh vaksinasi kedua yang dapat dinyatakan dengan  $(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_2 S_2$ . Kemudian akan mengalami penurunan karena adanya perubahan individu rentan menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu rentan pada kelompok kedua telah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi laju infeksi dinyatakan dengan  $\beta_2$ . Selanjutnya, populasi individu rentan juga akan mengalami penurunan karena adanya individu rentan pada kelompok umur kedua yang mengalami kematian alami  $d_2$ . Sehingga populasi individu rentan berkurang. Laju perubahan individu rentan pada kelompok kedua dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_2}{dt} = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2 I_2 - d_2 S_2 \quad (3.4)$$

Kompartemen  $I_2$  merupakan banyaknya populasi individu yang terinfeksi pada kelompok kedua pada waktu  $t$ . Populasi individu terinfeksi akan mengalami peningkatan dengan adanya penambahan dari individu yang rentan menjadi individu yang terinfeksi karena melakukan kontak langsung dengan individu yang terinfeksi dengan laju infeksi adalah  $\beta_2$ , sehingga individu yang rentan tersebut masuk dalam populasi terinfeksi. Kemudian, populasi individu yang terinfeksi mengalami penurunan karena adanya perubahan dari individu yang terinfeksi



menjadi sembuh atau mempunyai sistem kekebalan yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_2$ . Individu yang terinfeksi juga akan berkurang yang disebabkan adanya individu pada kelompok kedua yang mengalami kematian dengan laju kematian alami sebesar  $d_2$  dan individu yang mengalami kematian akibat penyakit pada tingkat  $\mu_2$ . Laju perubahan individu yang terinfeksi pada kelompok umur kedua pada waktu ( $t$ ) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dI_2}{dt} = \beta_2 S_2 I_2 - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2 \quad (3.5)$$

Kompartemen  $R_2$  merupakan banyaknya populasi individu yang pulih pada kelompok kedua pada waktu ( $t$ ). Populasi dari individu pulih akan mengalami penambahan karena adanya individu baru yang telah mengalami penambahan umur sehingga masuk dalam populasi selanjutnya dan telah melakukan vaksinasi pada tingkat  $(\theta_2 \mu_2) \alpha_1 S_1$ , serta populasi individu pulih juga meningkat dikarenakan perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau sudah mempunyai sistem imunitas yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_2$ . Selanjutnya, populasi individu yang pulih juga akan mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian alami dengan tingkat  $d_2$ . Laju perubahan individu yang pulih pada kelompok kedua dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dR_2}{dt} = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 I_2 - d_2 R_2 \quad (3.6)$$

Selanjutnya pada populasi kelompok ketiga, kompartemen  $S_3$  menyatakan banyaknya populasi rentan pada kelompok ketiga pada waktu ( $t$ ). Populasi individu rentan pada kelompok ketiga akan meningkat dengan adanya penambahan individu baru yang telah mengalami proses penuaan yang dapat dinyatakan dengan  $\alpha_2 S_2$ , kemudian akan mengalami penurunan karena adanya perubahan individu rentan

menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu rentan pada kelompok ketiga telah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi dengan laju penyebaran atau laju infeksi dinyatakan dengan  $\beta_3$ . Populasi individu rentan juga akan mengalami penurunan karena adanya individu rentan pada kelompok umur ketiga yang mengalami kematian alami  $d_3$ . Sehingga laju perubahan individu rentan pada kelompok ketiga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_3}{dt} = \alpha_2 S_2 - \beta_3 S_3 I_3 - d_3 S_3 \quad (3.7)$$

Kompartemen  $I_3$  merupakan banyaknya populasi individu yang terinfeksi pada kelompok ketiga pada waktu  $t$ . Populasi individu terinfeksi akan mengalami peningkatan dengan adanya penambahan dari individu yang rentan menjadi individu yang terinfeksi karena melakukan kontak langsung dengan individu yang terinfeksi dengan laju infeksi adalah  $\beta_3$ , sehingga individu yang rentan tersebut masuk dalam populasi terinfeksi. Kemudian, populasi individu yang terinfeksi mengalami penurunan karena adanya perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau mempunyai sistem kekebalan yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_3$ , dan individu yang terinfeksi juga akan berkurang yang disebabkan adanya individu pada populasi terinfeksi yang mengalami kematian alami dengan laju  $d_3$  dan individu yang mengalami kematian akibat penyakit pada tingkat  $\mu_3$ . Laju perubahan individu yang terinfeksi pada kelompok umur kedua pada waktu ( $t$ ) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dI_3}{dt} = \beta_3 S_3 I_3 - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3 \quad (3.8)$$

Kompartemen  $R_3$  merupakan banyaknya populasi individu yang pulih pada kelompok ketiga pada waktu ( $t$ ). Populasi dari individu pulih akan mengalami

peningkatan dikarenakan perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau mempunyai sistem imunitas yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_3$ . Selanjutnya, populasi individu yang pulih juga akan mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian alami dengan tingkat  $d_3$ . Laju perubahan individu yang pulih pada kelompok ketiga dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dR_3}{dt} = \gamma_3 I_3 - d_3 R_3 \quad (3.9)$$

Selanjutnya pada populasi kelompok keempat, kompartemen  $S_4$  menyatakan banyaknya populasi rentan pada kelompok keempat pada waktu ( $t$ ). Populasi individu rentan pada kelompok keempat akan meningkat dengan adanya penambahan individu baru yang telah mengalami proses penuaan pada kelompok sebelumnya sehingga dapat dinyatakan dengan  $\alpha_3 S_3$ , kemudian akan mengalami penurunan karena adanya perubahan individu rentan menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu rentan telah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi dengan laju penyebaran atau laju infeksi dinyatakan dengan  $\beta_4$ . Selanjutnya, populasi individu rentan juga akan mengalami penurunan karena adanya kematian alami  $d_4$ . Sehingga laju perubahan individu rentan pada kelompok keempat dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_4}{dt} = \alpha_4 S_4 - \beta_4 S_4 I_4 - d_4 S_4 \quad (3.10)$$

Kompartemen  $I_4$  merupakan banyaknya populasi individu yang terinfeksi pada kelompok keempat pada waktu  $t$ . Populasi individu terinfeksi akan mengalami peningkatan dengan adanya penambahan dari individu yang rentan menjadi individu yang terinfeksi karena melakukan kontak langsung dengan laju infeksi

adalah  $\beta_4$ , sehingga individu yang rentan tersebut masuk dalam populasi terinfeksi. Kemudian, populasi individu yang terinfeksi mengalami penurunan karena adanya perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau mempunyai sistem kekebalan yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_4$ . Dan individu yang terinfeksi juga akan berkurang disebabkan adanya individu pada kelompok keempat yang mengalami kematian alami dengan laju  $d_4$  dan individu yang mengalami kematian akibat penyakit pada tingkat  $\mu_4$ . Laju perubahan individu yang terinfeksi pada kelompok umur keempat pada waktu ( $t$ ) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dI_4}{dt} = \beta_4 S_4 I_4 - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4 \quad (3.11)$$

Kompartemen  $R_4$  merupakan banyaknya populasi individu yang pulih pada kelompok keempat pada waktu ( $t$ ). Populasi dari individu pulih akan mengalami penambahan karena adanya perubahan dari individu yang terinfeksi menjadi sembuh atau sudah mempunyai sistem imunitas yang baik dengan laju penyembuhan  $\gamma_4$ . Selanjutnya, populasi dari individu pulih akan berkurang karena adanya individu yang mengalami kematian alami dengan tingkat  $d_4$ . Laju perubahan individu yang pulih pada kelompok keempat dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dR_4}{dt} = \gamma_4 I_4 - d_4 R_4 \quad (3.12)$$

Sehingga, model epidemi SIR penyebaran penyakit campak berdasarkan umur pada vaksinasi campak adalah sebagai berikut:

Kelompok 1, kelompok bayi (0-4 tahun)

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= (1 - \theta_1\sigma_1)\Lambda - \beta_1S_1I_1 - d_1S_1 - \alpha_1S_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \beta_1S_1I_1 - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1 \\ \frac{dR_1}{dt} &= \theta_1\sigma_1\Lambda + \gamma_1I_1 - d_1R_1\end{aligned}\tag{3.13}$$

Kelompok 2, kelompok anak-anak (5-9 tahun)

$$\begin{aligned}\frac{dS_2}{dt} &= (1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1S_1 - \beta_2S_2I_2 - d_2S_2 - \alpha_2S_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta_2S_2I_2 - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2 \\ \frac{dR_2}{dt} &= (\theta_2\sigma_2)\alpha_1S_1 + \gamma_2I_2 - d_2R_2\end{aligned}\tag{3.14}$$

Kelompok 3, kelompok remaja (10-14 tahun)

$$\begin{aligned}\frac{dS_3}{dt} &= \alpha_2S_2 - \beta_3S_3I_3 - (d_3 + \alpha_3)S_3 \\ \frac{dI_3}{dt} &= \beta_3S_3I_3 - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3 \\ \frac{dR_3}{dt} &= \gamma_3I_3 - d_3R_3\end{aligned}\tag{3.15}$$

Kelompok 4, kelompok dewasa (diatas 15 tahun)

$$\begin{aligned}\frac{dS_4}{dt} &= \alpha_3S_3 - \beta_4S_4I_4 - d_4S_4 \\ \frac{dI_4}{dt} &= \beta_4S_4I_4 - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4 \\ \frac{dR_4}{dt} &= \gamma_4I_4 - d_4R_4\end{aligned}\tag{3.16}$$

## 2.10 Kajian Islam Tentang Imunitas Tubuh Manusia

Kesehatan merupakan faktor utama dalam menentukan kehidupan seseorang. Sehat dapat dikatakan bahwa kondisi dimana jiwa dan raga dalam keadaan sehat. Kesehatan adalah sesuatu yang sangat berharga. Badan yang sehat sangat berpengaruh untuk mendapatkan jiwa yang sehat, dan sebaliknya jiwa yang sehat memiliki pengaruh yang besar untuk mendapatkan badan yang kuat dan sehat (Mustofa, 2004). Menjaga kesehatan jasmani dan rohani adalah kewajiban utama bagi setiap umat. Terdapat berbagai cara dalam menjaga tubuh tetap sehat, salah satunya dengan pemeliharaan kesehatan dengan selalu menjaga kebersihan sehari-hari. Anjuran untuk menjaga kebersihan telah tercantum dalam Al-Qur'an Surat Al-Muddatsir ayat 4 yang berbunyi

*"Dan pakaianmu bersihkanlah" (QS. Al-Muddatsir/74:4)*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt menganjurkan umat manusia untuk selalu menjaga kebersihan salah satunya dalam hal kebersihan pakaian. Anjuran untuk selalu menjaga kebersihan juga telah diriwayatkan dalam Hadits Tirmidzi dalam jurnal Agustina (2001) yang berbunyi

*"Dari Rasulullah Shallallahu 'alaihi wa sallam: Sesungguhnya Allah SWT itu suci yang menyukai hal-hal yang suci, Dia Maha Bersih yang menyukai kebersihan, Dia Maha Mulia yang menyukai kemuliaan, Dia Maha Indah yang menyukai keindahan, karena itu bersihkanlah tempat-tempatmu." (HR. Tirmizi)*

Dalam hadits tersebut menjelaskan Allah SWT menyukai kebersihan dan meminta umat-Nya untuk selalu menjaga kebersihan diri, dan lingkungan sekitar. Anjuran untuk menjaga kebersihan harus dilaksanakan setiap umatnya, dengan menjaga kebersihan dapat melindungi tubuh agar tidak terserang penyakit yang disebabkan oleh virus atau penyakit lainnya. Artinya, menjaga kebersihan sangat berpengaruh terhadap kesehatan tubuh. Dimana kesehatan erat kaitannya dengan sistem

pertahanan tubuh. Dalam tubuh manusia terdapat sistem pertahanan tubuh yang secara alami berada dalam tubuh manusia, sistem ini berguna dalam memerangi benda-benda asing yang akan masuk kedalam tubuh manusia.

Manusia adalah makhluk ciptaan Allah yang paling sempurna. Salah satu bentuk penyempurnaan dalam bentuk fisik adalah adanya sistem imun yang berada dalam tubuh. Sistem imunitas merupakan suatu sistem yang menjadi benteng pertahanan yang kuat dalam melawan berbagai mikroorganisme berupa virus atau bakteri yang dapat menyebabkan penyakit (Harun,2002). Sistem imun yang diberikan oleh Allah Swt kepada manusia sebagai sistem kekebalan atau pertahanan alami yang berperan dalam melindungi tubuh dari virus atau bakteri. Dengan adanya sistem imun yang diberikan oleh Allah Swt dapat berperan sebagai penyeimbang dalam tubuh. Pada saat virus masuk kedalam tubuh, antigen atau molekul yang terletak pada dinding sel bakteri atau lapisan organisme merangsang sistem imunitas untuk menghasilkan antibodi sebagai bentuk perlawanan dalam melindungi tubuh sehingga keseimbangan tubuh akan terus terjaga dan tidak mudah sakit. Mekanisme keseimbangan ini diatur oleh sistem yang saling bekerja sama dalam mengendalikan tubuh. Seperti yang telah dijelaskan dalam firman Allah Swt dalam Surat Al-Infithaar ayat 7-8 yang berbunyi:

*“Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh) mu seimbang. Dalam bentuk apa saja yang Dia kehendaki. Dia menyusun tubuhmu.”*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt telah menciptakan tubuh secara seimbang dan sempurna lengkap dengan anggota-anggota tubuhmu serta memberikan bentuk yang seimbang yang berarti semua anggota tubuh disesuaikan-Nya, tidak ada tangan atau kaki yang lebih panjang atau lebih pendek. Dan Allah Swt telah menyusun tubuh sesuai dengan kehendak-Nya salah satunya dengan

diberikannya sistem imun pada setiap manusia untuk melindungi tubuh agar tidak terkena penyakit yang menyerang.

Selain itu ayat tersebut menjelaskan kata *fa'adalaka* berasal dari kata '*adl*' yang antara lain seimbang. Kata ini selain dapat berarti menjadikan anggota tubuh manusia seimbang, serasi, sehingga tampak harmonis, dapat juga diartikan sebagai menjadikanmu memiliki kecenderungan untuk bersikap adil. Sayyid Quthub menyatakan beberapa keistimewaan jasmani manusia. Tetapi organ-organ tubuh manusia yang demikian hebat itu boleh jadi dimiliki pula oleh binatang pada salah satu bentuk, namun manusia memiliki kekhususannya yang menjadikan manusia memiliki keistimewaan tersendiri yaitu manusia memiliki akal dan jiwanya yang merupakan anugrah-Nya (Shihab, 1998).

Kerja sistem imun yang ada di dalam tubuh manusia ini bekerja sedemikian rapi, tertata dan sempurna sehingga terciptalah suatu keseimbangan kerjasama yang luar biasa, dimana akan terjadi interaksi antara sistem imun benda asing yang ada di dalam tubuh, dapat menimbulkan respon dari sistem imun tersebut yang akan menghasilkan suatu antibodi. Hal tersebut berarti seseorang yang memiliki keseimbangan sistem imun yang baik apabila terdapat virus atau penyakit yang masuk ke dalam tubuh seperti virus campak akan langsung direspon oleh sistem imun sehingga tubuh orang tersebut tidak terserang penyakit. Sistem imun sangat dibutuhkan oleh setiap umat agar terhindar dari virus yang akan menyerang sehingga dapat mengurangi proses penyebaran suatu virus.



## **BAB III**

### **PEMBAHASAN**

Bab ini membahas mengenai analisis perilaku model epidemi SIR penyebaran penyakit campak ditinjau berdasarkan kelompok umur.

#### **3.1 Analisis Kestabilan Lokal**

Untuk menganalisis kestabilan sistem dari model matematika diatas, maka langkah pertama adalah dengan menentukan titik kesetimbangan model, dimana titik kesetimbangan akan dibagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya, dengan menggunakan matriks Jacobian dapat mengubah persamaan non linier menjadi linier kemudian substitusi titik kesetimbangan pada persamaan model dinamika penyebaran penyakit campak dengan struktur umur yang telah dilinierkan dapat menghasilkan persamaan karakteristik sehingga diperoleh nilai karakteristik. Nilai tersebut dapat digunakan untuk penentuan kestabilan dari sistem. Secara terperinci dapat dijelaskan sebagai berikut:

##### **3.1.1 Titik Kesetimbangan**

Model penyebaran campak berdasarkan struktur umur berupa persamaan diferensial biasa dengan 12 persamaan. Untuk mempermudah perhitungan titik kesetimbangan, akan dicari titik kesetimbangan setiap kelompok umur terlebih dahulu dikarenakan tidak ada interaksi antar setiap kelompok dengan kelompok lainnya yang dapat menularkan penyakit.

1. Titik Keseimbangan Kelompok I (0-4 tahun)

Model dinamika penyebaran penyakit campak kelompok I pada persamaan (3.13) akan mempunyai titik keseimbangan jika memenuhi  $\frac{dS_1(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{dR_1(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI_1(t)}{dt} = 0$ . Sehingga persamaan 3.13 dapat ditulis sebagai:

$$0 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 S_1^0 I_1^0 - d_1 S_1^0 - \alpha_1 S_1^0 \quad (3.17)$$

$$0 = \beta_1 S_1^0 I_1^0 - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1^0 \quad (3.18)$$

$$0 = \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 I_1^0 - d_1 R_1^0 \quad (3.19)$$

Dalam model tersebut terdapat dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik.

a. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Pada titik keseimbangan bebas penyakit dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur I dapat diperoleh dengan mengasumsikan  $I_1(t) = 0$  yang berarti tidak terdapat individu yang dapat menularkan penyakit. Sehingga didapatkan keadaan dengan semua individu akan masuk dalam populasi *susceptible* atau rentan serta masuk dalam populasi *recovered* atau sembuh dengan adanya pengaruh vaksinasi Titik keseimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dengan  $E_1^0 = (S_1^0, I_1^0, R_1^0)$  atau  $E_1^0 = (S_1^0, 0, R_1^0)$ . Berdasarkan persamaan (3.17) diperoleh

$$0 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 S_1^0 I_1^0 - d_1 S_1^0 - \alpha_1 S_1^0$$

$$0 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 S_1^0 0 - d_1 S_1^0 - \alpha_1 S_1^0$$

$$(d_1 + \alpha_1) S_1^0 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda$$

$$S_1 = \frac{\Lambda(1 - \theta_1 \sigma_1)}{(d_1 + \alpha_1)}$$

Kemudian, pada persamaan (3.19) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 I_1^0 - d_1 R_1^0 \\ 0 &= \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 0 - d_1 R_1^0 \\ d_1 R_1^0 &= \theta_1 \sigma_1 \Lambda \\ R_1^0 &= \frac{\theta_1 \sigma_1 \Lambda}{d_1} \quad 0 < \theta_1 \sigma_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_1^0 &= (S_1^0, I_1^0, R_1^0) \\ E_1^0 &= \left( \frac{\Lambda(1 - \theta_1 \sigma_1)}{(d_1 + \alpha_1)}, 0, \frac{\theta_1 \sigma_1 \Lambda}{d_1} \right), \quad 0 \leq \theta_1 \sigma_1 \leq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Pada titik kesetimbangan endemik dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur I dengan adanya pengaruh vaksinasi diperoleh dengan cara  $I(t) \neq 0$  dan  $S(t) \neq 0$  yang berarti bahwa terdapat populasi yang dapat menularkan penyakit. Titik kesetimbangan endemik ini dapat dinyatakan dengan  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  atau  $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*)$ . Untuk mencari titik kesetimbangan endemik sisi kiri pada model persamaan (3.13) dibuat sama dengan nol, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$0 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 S_1^* I_1^* - d_1 S_1^* - \alpha_1 S_1^* \quad (3.21)$$

$$0 = \beta_1 S_1^* I_1^* - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1^* \quad (3.22)$$

$$0 = \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 I_1^* - d_1 R_1^* \quad (3.23)$$

Dari sistem persamaan 3.22 diperoleh

$$0 = \beta_1 S_1^* I_1^* - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1^*$$

$$0 = (\beta_1 S_1^* - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)) I_1^*$$

$$I_1^* = 0$$

Atau

$$\begin{aligned}\beta_1 S_1^* &= (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \\ S_1^* &= \frac{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}{\beta_1}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Kemudian  $S_1^*$  disubstitusikan pada persamaan 3.21

$$\begin{aligned}0 &= (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 S_1^* I_1^* - d_1 S_1^* - \alpha_1 S_1^* \\ 0 &= (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 I_1^* \left( \frac{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}{\beta_1} \right) - (d_1 + \alpha_1) \left( \frac{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}{\beta_1} \right) \\ (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1^* &= (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - (d_1 + \alpha_1) \left( \frac{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}{\beta_1} \right) \\ (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1^* &= (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \left( \frac{d_1(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \alpha_1(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}{\beta_1} \right) \\ I_1^* &= \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \frac{d_1^2 - \mu_1 d_1 - \gamma_1 d_1 - \alpha_1 d_1 - \alpha_1 \mu_1 - \alpha_1 \gamma_1}{\beta_1}}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} \\ I_1^* &= \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - (d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1)}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1}\end{aligned}\quad (3.25)$$

Selanjutnya,  $I_1^*$  disubstitusikan pada persamaan 3.22

$$\begin{aligned}0 &= \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 I_1^* - d_1 R_1^* \\ 0 &= \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - (d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1)}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1} \right) - d_1 R_1^* \\ d_1 R_1^* &= \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 \gamma_1 - \gamma_1 (d_1^2 - \mu_1 d_1 - \gamma_1 d_1 - \alpha_1 d_1 - \alpha_1 \mu_1 - \alpha_1 \gamma_1)}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1} \right) \\ d_1 R_1^* &= \frac{(\theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1) (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \gamma_1 (d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1)}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1} \\ R_1^* &= \frac{\theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1 d_1 + \theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1 \mu_1 + \Lambda \beta_1 \gamma_1 - \gamma_1 (d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1)}{(d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1) \beta_1} \\ R_1^* &= \frac{\theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1 d_1 + \theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1 \mu_1 + \Lambda \beta_1 \gamma_1 - \gamma_1 (d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1)}{(d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1) \beta_1}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Sehingga, diperoleh titik kesetimbangan endemik pada kelompok pertama berbentuk  $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*)$  dapat dinyatakan dalam persamaan (3.27) berikut

Misalkan  $\varphi_1 = d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1$

$$S_1^* = \frac{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}{\beta_1}$$

$$I_1^* = \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1}, \quad (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1 > 0 \quad (3.27)$$

$$R_1^* = \frac{\theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1 (d_1 + \mu_1) + \gamma_1 (\Lambda \beta_1 - \varphi_1)}{(d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1) \beta_1}$$

## 2. Titik Kesetimbangan Kelompok II (5-9 tahun)

Model dinamika penyebaran penyakit campak kelompok kedua pada persamaan (3.14) akan mempunyai titik kesetimbangan jika memenuhi  $\frac{dS_2(t)}{dt} = 0, \frac{dR_2(t)}{dt} = 0, \frac{dI_2(t)}{dt} = 0$ . Sehingga persamaan 3.14 dapat ditulis sebagai:

$$0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2^0 I_2^0 - d_2 S_2^0 - \alpha_2 S_2^0 \quad (3.28)$$

$$0 = \beta_2 S_2^0 I_2^0 - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2^0 \quad (3.29)$$

$$0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1^0 + \gamma_2 I_2^0 - d_2 R_2^0 \quad (3.30)$$

Dalam model tersebut terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

### a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur II dapat diperoleh dengan mengasumsikan  $I(t) = 0$  yang berarti tidak terdapat individu yang dapat menularkan penyakit. Sehingga didapatkan keadaan dengan semua individu akan masuk dalam populasi *susceptible* atau rentan serta masuk dalam populasi *recovered* atau sembuh dengan adanya pengaruh vaksinasi Titik

kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dengan  $E_2^0 = (S_2^0, I_2^0, R_2^0)$  atau  $E_2^0 = (S_2^0, 0, R_2^0)$ . Berdasarkan persamaan (3.28) diperoleh

$$0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2^0 I_2^0 - d_2 S_2^0 - \alpha_2 S_2^0$$

$$0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2^0 \cdot 0 - d_2 S_2^0 - \alpha_2 S_2^0$$

$$(d_2 + \alpha_2) S_2^0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1$$

$$S_2^0 = \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1}{(d_2 + \alpha_2)}$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (3.30)

$$0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 I_2^0 - d_2 R_2^0$$

$$0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 \cdot 0 - d_2 R_2^0$$

$$d_2 R_2^0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1$$

$$R_2^0 = \frac{(\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1}{d_2}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$E_0^2 = (S_2^0, I_2^0, R_2^0)$$

$$E_0^2 = \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1}{(d_2 + \alpha_2)}, 0, \frac{(\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1}{d_2} \right), \quad 0 \leq \theta_1 \sigma_1 \leq 1 \quad (3.31)$$

#### b. Titik Kesetimbangan Endemik

Pada titik kesetimbangan endemik dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur II dengan adanya pengaruh vaksinasi diperoleh dengan cara  $I(t) \neq 0$  dan  $S(t) \neq 0$  yang berarti bahwa terdapat populasi yang dapat menularkan penyakit. Titik kesetimbangan endemik ini dapat dinyatakan dengan  $E^* = (S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ . Untuk mencari titik kesetimbangan endemik sisi kiri pada model persamaan (3.14) dibuat sama dengan nol, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2^* I_2^* - d_2 S_2^* - \alpha_2 S_2^* \quad (3.32)$$

$$0 = \beta_2 S_2^* I_2^* - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2^* \quad (3.33)$$

$$0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 I_2^* - d_2 R_2^* \quad (3.34)$$

Dari sistem persamaan 3.33 diperoleh

$$0 = \beta_2 S_2^* I_2^* - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2^*$$

$$0 = (\beta_2 S_2^* - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)) I_2^*$$

$$I_2^* = 0$$

Atau

$$\beta_2 S_2^* = d_2 + \mu_2 + \gamma_2 \quad (3.35)$$

$$S_2^* = \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2}$$

Kemudian  $S_2^*$  pada persamaan (3.35) disubstitusikan pada persamaan 3.32

$$0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2^* I_2^* - (d_2 + \alpha_2) S_2^*$$

$$0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 \left( \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2} \right) I_2^* - \left( (d_2 + \alpha_2) \left( \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2} \right) \right)$$

$$(d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2^* = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \frac{(d_2 + \alpha_2)(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)}{\beta_2}$$

$$I_2^* = \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \quad (3.36)$$

Selanjutnya,  $I_2^*$  pada persamaan (3.36) disubstitusikan pada persamaan 3.34

$$0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 I_2^* - d_2 R_2^*$$

$$0 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) - d_2 R_2^*$$

$$d_2 R_2^* = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right)$$

$$d_2 R_2^* = \frac{(\theta_2 \sigma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2)(d_2 + \mu_2 + \gamma_2) + (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 \gamma_2 - \gamma_2 (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)}$$

$$R_2^* = \frac{\theta_2 \sigma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 d_2 + \theta_2 \sigma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 \mu_2 + \gamma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 - \gamma_2 (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2)}$$

$$R_2^* = \frac{\theta_2 \sigma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 d_2 + \theta_2 \sigma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 \mu_2 + \gamma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 - \gamma_2 (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2)} \quad (3.37)$$

Sehingga, diperoleh titik kesetimbangan endemik pada kelompok kedua berbentuk  $E_2^* = (S_2^*, I_2^*, R_2^*)$  dapat dinyatakan dalam persamaan (3.38) berikut

Misalkan  $\varphi_2 = d_2^2 + d_2\mu_2 + d_2\gamma_2 + \alpha_2d_2 + \mu_2\alpha_2 + \gamma_2\alpha_2$

$$\begin{aligned} S_2^* &= \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2} \\ I_2^* &= \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1S_1\beta_2 - \varphi_2}{\beta_2(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \\ R_2^* &= \frac{\theta_2\sigma_2\alpha_1S_1\beta_2(d_2 + \mu_2) + \gamma_2(\alpha_1S_1\beta_2 - \varphi_2)}{\beta_2(d_2^2 + d_2\mu_2 + d_2\gamma_2)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3. Titik Kesetimbangan Kelompok III (10-14 tahun)

Model dinamika penyebaran penyakit campak kelompok bayi pada persamaan (3.15) akan mempunyai titik kesetimbangan jika memenuhi  $\frac{dS_3(t)}{dt} =$

$0, \frac{dR_3(t)}{dt} = 0, \frac{dI_3(t)}{dt} = 0$ . Sehingga persamaan 3.15 dapat ditulis sebagai

$$0 = \alpha_2S_2 - \beta_3S_3^0I_3^0 - (d_3 + \alpha_3)S_3^0 \quad (3.39)$$

$$0 = \beta_3S_3^0I_3^0 - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)I_3^0 \quad (3.40)$$

$$0 = \gamma_3I_3^0 - d_3R_3^0 \quad (3.41)$$

Dalam model tersebut terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

#### a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur III dapat diperoleh dengan mengasumsikan  $I(t) = 0$  yang berarti tidak terdapat individu yang dapat menularkan penyakit. Sehingga didapatkan keadaan dengan semua individu akan masuk dalam populasi *susceptible* atau rentan. Titik kesetimbangan



bebas penyakit pada kelompok umur III dapat dinyatakan dengan  $E_3^0 = (S_3^0, I_3^0, R_3^0)$  atau  $E_3^0 = (S_3^0, 0, R_3^0)$ . Berdasarkan persamaan (3.39) diperoleh

$$0 = \alpha_2 S_2 - \beta_3 S_3^0 I_3^0 - (d_3 + \alpha_3) S_3^0$$

$$0 = \alpha_2 S_2 - \beta_3 S_3^0 \cdot 0 - (d_3 + \alpha_3) S_3^0$$

$$(d_3 + \alpha_3) S_3^0 = \alpha_2 S_2$$

$$S_3^0 = \frac{\alpha_2 S_2}{(d_3 + \alpha_3)}$$

Kemudian, pada persamaan (3.41)

$$0 = \gamma_3 I_3^0 - d_3 R_3^0$$

$$0 = \gamma_3 \cdot 0 - d_3 R_3^0$$

$$d_3 R_3^0 = 0$$

$$R_3^0 = 0$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$E_0 = \left( \frac{\alpha_2 S_2}{(d_3 + \alpha_3)}, 0, 0 \right) \quad (3.42)$$

#### b. Titik Kesetimbangan Endemik

Pada titik kesetimbangan endemik dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur III dengan adanya pengaruh vaksinasi diperoleh dengan cara  $I(t) \neq 0$  dan  $S(t) \neq 0$  yang berarti bahwa terdapat populasi yang dapat menularkan penyakit. Titik kesetimbangan endemik ini dapat dinyatakan dengan  $E^* = (S_3^*, I_3^*, R_3^*)$ . Untuk mencari titik kesetimbangan endemik sisi kiri pada model persamaan (3.15) dibuat sama dengan nol, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$0 = \alpha_2 S_2 - \beta_3 S_3^* I_3^* - (d_3 + \alpha_3) S_3^* \quad (3.43)$$

$$0 = \beta_3 S_3^* I_3^* - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3^* \quad (3.44)$$

$$0 = \gamma_3 I_3^* - d_3 R_3^* \quad (3.45)$$

Dari sistem persamaan 3.44 diperoleh

$$0 = \beta_3 S_3^* I_3^* - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3^*$$

$$0 = (\beta_3 S_3^* I_3^* - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3^*)$$

$$I_3^* = 0 \text{ atau } (\beta_3 S_3^* I_3^* - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3^*) = 0 \quad (3.46)$$

$$\beta_3 S_3^* = d_3 + \mu_3 + \gamma_3$$

$$S_3^* = \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}$$

Kemudian  $S_3^*$  pada persamaan (3.46) disubstitusikan pada persamaan 3.43

$$0 = \alpha_2 S_2 - \beta_3 S_3^* I_3^* - (d_3 + \alpha_3) S_3^*$$

$$0 = \alpha_2 S_2 - \beta_3 \left( \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3} \right) I_3^* - (d_3 + \alpha_3) \left( \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3} \right)$$

$$(d_3 + \mu_3 + \gamma_3) \beta_3 = \alpha_2 S_2 - (d_3 + \alpha_3) \left( \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3} \right)$$

$$(d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3}$$

$$I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}$$

$$I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \quad (3.47)$$

Selanjutnya,  $I_3^*$  pada persamaan 3.47 disubstitusikan pada persamaan 3.45

$$0 = \gamma_3 I_3^* - d_3 R_3^*$$

$$0 = \gamma_3 \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \right) - d_3 R_3^*$$

$$d_3 R_3^* = \frac{\gamma_3 \alpha_2 S_2 \beta_3 - \gamma_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}$$

$$R_3^* = \frac{\gamma_3 \alpha_2 S_2 \beta_3 - \gamma_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3)}$$

$$R_3^* = \frac{\gamma_3 \alpha_2 S_2 \beta_3 - \gamma_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3)} \quad (3.48)$$

Sehingga, diperoleh titik kesetimbangan endemik pada kelompok kedua berbentuk  $E_3^* = (S_3^*, I_3^*, R_3^*)$  dapat dinyatakan dalam persamaan (3.49) berikut:

Misalkan  $\varphi_3 = d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2$

$$S_3^* = \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}$$

$$I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \quad (3.49)$$

$$R_3^* = \frac{\gamma_3 \alpha_2 S_2 \beta_3 - \gamma_3 \varphi_3}{\beta_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3)} = \frac{\gamma_3 (\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3)}{\beta_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3)}$$

#### 4. Titik Kesetimbangan Kelompok IV (10-14 tahun)

Model dinamika penyebaran penyakit campak kelompok bayi pada persamaan (3.16) akan mempunyai titik kesetimbangan jika memenuhi  $\frac{dS_4(t)}{dt} = 0, \frac{dR_4(t)}{dt} = 0, \frac{dI_4(t)}{dt} = 0$ . Sehingga persamaan 3.16 dapat ditulis sebagai:

$$0 = \alpha_3 S_3 - \beta_4 S_4^0 I_4^0 - d_4 S_4^0 \quad (3.50)$$

$$0 = \beta_4 S_4^0 I_4^0 - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4^0 \quad (3.51)$$

$$0 = \gamma_4 I_4^0 - d_4 R_4^0 \quad (3.52)$$

Dalam model tersebut terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

##### a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur IV dapat diperoleh dengan

mengasumsikan  $I(t) = 0$  yang berarti tidak terdapat individu yang dapat menularkan penyakit. Sehingga didapatkan keadaan dengan semua individu akan masuk dalam populasi *susceptible* atau rentan. Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dengan  $E_4^0 = (S_4^0, I_4^0, R_4^0)$  atau  $E_4^0 = (S_4^0, 0, R_4^0)$ . Berdasarkan persamaan (3.50) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3 S_3 - \beta_4 S_4^0 I_4^0 - d_4 S_4^0 \\ d_4 S_4^0 &= \alpha_3 S_3 \\ S_4^0 &= \frac{\alpha_3 S_3}{d_4} \end{aligned}$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (3.52)

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_4 I_4^0 - d_4 R_4^0 \\ d_4 R_4^0 &= \gamma_4 I_4^0 \\ R_4^0 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$E_4^0 = \left( \frac{\alpha_3 S_3}{d_4}, 0, 0 \right) \quad (3.53)$$

#### b. Titik Kesetimbangan Endemik

Pada titik kesetimbangan endemik dari model penyebaran penyakit campak pada kelompok umur IV diperoleh dengan cara  $I(t) \neq 0$  dan  $S(t) \neq 0$  yang berarti bahwa terdapat populasi yang dapat menularkan penyakit. Titik kesetimbangan endemik ini dapat dinyatakan dengan  $E^* = (S_4^*, I_4^*, R_4^*)$ . Untuk mencari titik kesetimbangan endemik sisi kiri pada model persamaan (3.16) dibuat sama dengan nol, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$0 = \alpha_3 S_3 - \beta_4 S_4^* I_4^* - d_4 S_4^* \quad (3.54)$$

$$0 = \beta_4 S_4^* I_4^* - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4^* \quad (3.55)$$

$$0 = \gamma_4 I_4^* - d_4 R_4^* \quad (3.56)$$

Dari sistem persamaan 3.55 diperoleh

$$0 = \beta_4 S_4^* I_4^* - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4^*$$

$$0 = (\beta_4 S_4^* - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)) I_4^*$$

$$I_4^* = 0 \text{ atau} \quad (3.57)$$

$$\beta_4 S_4^* = d_4 + \mu_4 + \gamma_4$$

$$S_4^* = \frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}$$

Kemudian  $S_4^*$  pada persamaan (3.57) disubstitusikan pada persamaan 3.54

$$0 = \alpha_3 S_3 - \beta_4 \left( \frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4} \right) I_4^* - d_4 \left( \frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4} \right)$$

$$(d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4^* = \alpha_3 S_3 - \left( \frac{d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4}{\beta_4} \right)$$

$$(d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4}$$

$$I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}$$

$$I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} \quad (3.58)$$

Selanjutnya,  $I_4^*$  pada persamaan (3.58) disubstitusikan pada persamaan 3.56

$$0 = \gamma_4 I_4^* - d_4 R_4^*$$

$$0 = \gamma_4 \left( \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} \right) - d_4 R_4^*$$

$$d_4 R_4^* = \frac{\gamma_4 \alpha_3 S_3 \beta_4 - \gamma_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}$$

$$R_4^* = \frac{\gamma_4 \alpha_3 S_3 \beta_4 - \gamma_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}$$

$$R_4^* = \frac{\gamma_4 \alpha_3 S_3 \beta_4 - \gamma_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)} \quad (3.59)$$

Sehingga, diperoleh titik kesetimbangan endemik pada kelompok kedua berbentuk  $E_4^* = (S_4^*, I_4^*, R_4^*)$  dapat dinyatakan dalam persamaan (3.49)

berikut. Misalkan  $\varphi_4 = d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4$

$$S_4^* = \frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}$$

$$I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} \quad (3.60)$$

$$R_4^* = \frac{\gamma_4 \alpha_3 S_3 \beta_4 - \gamma_4 \varphi_4}{\beta_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}$$

Berdasarkan perhitungan diatas setiap kelompok memiliki dua titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan sistem persamaan (3.13) – (3.16) diperoleh kondisi titik kesetimbangan sebagai berikut:

1.  $E_*^1 = (E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0)$
2.  $E_*^2 = (E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^*)$
3.  $E_*^3 = (E_1^0, E_2^0, E_3^*, E_4^0)$
4.  $E_*^4 = (E_1^0, E_2^*, E_3^0, E_4^0)$
5.  $E_*^5 = (E_1^*, E_2^0, E_3^0, E_4^0)$
6.  $E_*^6 = (E_1^*, E_2^*, E_3^0, E_4^0)$
7.  $E_*^7 = (E_1^0, E_2^*, E_3^*, E_4^0)$
8.  $E_*^8 = (E_1^0, E_2^0, E_3^*, E_4^*)$
9.  $E_*^9 = (E_1^0, E_2^*, E_3^0, E_4^*)$
10.  $E_*^{10} = (E_1^*, E_2^0, E_3^*, E_4^0)$
11.  $E_*^{11} = (E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*)$
12.  $E_*^{12} = (E_1^0, E_2^*, E_3^*, E_4^*)$
13.  $E_*^{13} = (E_1^*, E_2^0, E_3^*, E_4^*)$
14.  $E_*^{14} = (E_1^*, E_2^*, E_3^0, E_4^*)$
15.  $E_*^{15} = (E_1^*, E_2^*, E_3^0, E_4^*)$
16.  $E_*^{16} = (E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*)$

Dengan  $E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0$  berdasarkan persamaan (3.20), (3.31), (3.42), (3.53), sedangkan  $E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*$  sesuai dalam persamaan (3.27), (3.30), (3.49), (3.50).

### 3.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Bilangan reproduksi dasar pada suatu penyebaran penyakit campak berdasarkan umur merupakan rata-rata banyaknya individu baru yang terinfeksi pada suatu kelompok umur yang diakibatkan oleh individu yang terinfeksi sebelumnya yang berlangsung dalam populasi rentan. Berdasarkan (Driessche & Watmough, 2002) suatu bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan menggunakan matriks generasi selanjutnya atau *next generation matrix*. Untuk mengetahui nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) pada kelompok pertama, kedua, ketiga dan keempat dapat melakukan pelinieran terhadap subsistem terinfeksi pada titik kesetimbangan bebas penyakit, pada model subsistem terinfeksi adalah  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , yang dapat dipresentasikan dalam matriks Jacobi ( $J$ ) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dI_1} & \frac{dI_1}{dI_2} & \frac{dI_1}{dI_3} & \frac{dI_1}{dI_4} \\ \frac{dI_2}{dI_1} & \frac{dI_2}{dI_2} & \frac{dI_2}{dI_3} & \frac{dI_2}{dI_4} \\ \frac{dI_3}{dI_1} & \frac{dI_3}{dI_2} & \frac{dI_3}{dI_3} & \frac{dI_3}{dI_4} \\ \frac{dI_4}{dI_1} & \frac{dI_4}{dI_2} & \frac{dI_4}{dI_3} & \frac{dI_4}{dI_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 S_1 - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 S_2 - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 S_3 - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 S_4 - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) \end{bmatrix}$$

Kemudian, dekomposisi matriks Jacobi diatas menjadi  $J = \mathcal{F} - \mathcal{V}$  Dimana  $\mathcal{F}$  adalah matriks transmisi yang berisi laju infeksi individu baru karena interaksi populasi kelompok rentan dengan kelompok terinfeksi dan  $\mathcal{V}$  merupakan matriks

transisi yang terdiri dari laju transfer keluar masuk dari populasi yang terinfeksi sehingga:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 S_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} d_1 + \mu_1 + \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 + \mu_2 + \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 + \mu_3 + \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 + \mu_4 + \gamma_4 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh

$$\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1 + \mu_1 + \gamma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2 + \mu_2 + \gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3 + \mu_3 + \gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4} \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh matriks *next generation*, digunakan perkalian  $\mathcal{F}$  dengan  $\mathcal{V}^{-1}$ .

adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1 S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1 + \mu_1 + \gamma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2 + \mu_2 + \gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3 + \mu_3 + \gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 S_1}{d_1 + \mu_1 + \gamma_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 S_2}{d_2 + \mu_2 + \gamma_2} & \frac{\beta_2 S_2}{d_2 + \mu_2 + \gamma_2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3 S_3}{d_3 + \mu_3 + \gamma_3} & 0 & \frac{\beta_3 S_3}{d_3 + \mu_3 + \gamma_3} & 0 \\ \frac{\beta_4 S_4}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4} & 0 & 0 & \frac{\beta_4 S_4}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4} \end{bmatrix}$$



Nilai eigen yang dihasilkan adalah

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1 S_1}{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2 S_2}{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta_3 S_3}{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}$$

$$\lambda_4 = \frac{\beta_4 S_4}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}$$

Karena tidak ada nilai absolut yang dominan dari nilai eigen yang dihasilkan maka dilakukan perkalian antara  $|\lambda_1||\lambda_2||\lambda_3||\lambda_4|$ , sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= |\lambda_1||\lambda_2||\lambda_3||\lambda_4| \\ \mathcal{R}_0 &= \left( \frac{\beta_1 S_1}{d_1 + \mu_1 + \gamma_1} \right) \left( \frac{\beta_2 S_2}{d_2 + \mu_2 + \gamma_2} \right) \left( \frac{\beta_3 S_3}{d_3 + \mu_3 + \gamma_3} \right) \left( \frac{\beta_4 S_4}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4} \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Kemudian dapat mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit untuk kelompok umur I,II,III, dan IV pada persamaan (3.61), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \left( \frac{((1 - \theta_1 \sigma_1) \beta_1 \Lambda)}{d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1} \right) \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \beta_2 \alpha_1 S_1}{d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_2 \gamma_2} \right) \\ &\quad \left( \frac{\beta_3 \alpha_2 S_2}{d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3} \right) \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{(d_4^2 + \mu_4 d_4 + \gamma_4 d_4)} \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Berdasarkan perhitungan diatas bilangan reproduksi dasar dari kelompok I-IV merupakan perkalian antara bilangan reproduksi dasar setiap kelompok, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R_0 = \mathcal{R}_0^1 \times \mathcal{R}_0^2 \times \mathcal{R}_0^3 \times \mathcal{R}_0^4 \quad (3.63)$$

Dengan

$$\mathcal{R}_0^1 = \left( \frac{((1 - \theta_1 \sigma_1) \beta_1 \Lambda)}{d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1} \right) \quad (3.64)$$

$$\mathcal{R}_0^2 = \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \beta_2 \alpha_1 S_1}{d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_2 \gamma_2} \right)$$

$$\mathcal{R}_0^3 = \left( \frac{\beta_3 \alpha_2 S_2}{d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3} \right)$$

$$\mathcal{R}_0^4 = \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{(d_4^2 + \mu_4 d_4 + \gamma_4 d_4)} \right)$$

### 3.1.3 Analisis Kestabilan Lokal

Untuk mempermudah perhitungan analisis kestabilan, akan dicari analisis kestabilan setiap kelompok dikarenakan tidak adanya interaksi antar setiap kelompok dengan kelompok lainnya yang dapat menularkan penyakit.

#### 1. Analisis Kestabilan Lokal Kelompok I (0-4 Tahun)

Untuk menentukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat menggunakan matriks Jacobi yang bertujuan untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobi diperoleh dari persamaan (3.13) yang dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} f_1 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda - \beta_1 S_1 I_1 - (d_1 + \alpha_1) S_1 \\ f_2 = \beta_1 S_1 I_1 - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) I_1 \\ f_3 = \theta_1 \sigma_1 \Lambda + \gamma_1 I_1 - d_1 R_1 \end{cases} \quad (3.65)$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.65) diturunkan terhadap  $S, I,$  dan  $R$  menggunakan matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\beta_1 I_1 - \alpha_1 - d_1 & -\beta_1 S_1 & 0 \\ \beta_1 I_1 & \beta_1 S_1 - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

a. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_1^0$  dapat ditentukan dengan menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit pada tahap sebelumnya.

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada kelompok umur I yaitu  $E_1^0 =$

$\left(\frac{\Lambda(1-\theta_1\sigma_1)}{(d_1+\alpha_1)}, 0, \frac{\theta_1\sigma_1\Lambda}{d_1}\right)$ . Kemudian titik kesetimbangan bebas penyakit

disubstitusikan pada matriks (3.66), diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(d_1 + \alpha_1) & -\beta_1 \left(\frac{\Lambda(1 - \theta_1 \sigma_1)}{(d_1 + \alpha_1)}\right) & 0 \\ 0 & \beta_1 \left(\frac{\Lambda(1 - \theta_1 \sigma_1)}{(d_1 + \alpha_1)}\right) - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.67), maka dapat ditentukan persamaan karakteristik yaitu sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -(d_1 + \alpha_1) & -\frac{\beta_1 \Lambda (\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \Lambda (\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk menentukan nilai determinan dapat menggunakan metode Sarrus seperti berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = |A|$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -(d_1 + \alpha_1) - \lambda & -\frac{\beta_1 \Lambda(\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \Lambda(\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = (-(d_1 + \alpha_1) - \lambda) \left( -\frac{\beta_1 \Lambda(\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \lambda \right) (-d_1 - \lambda) - 0$$

$$|\mathbf{A}| = (-(d_1 + \alpha_1) - \lambda) \left( -\frac{\beta_1 \Lambda(\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \lambda \right) (-d_1 - \lambda)$$

Sehingga nilai eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(d_1 + \alpha_1)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\beta_1 \Lambda(\theta_1 \sigma_1 - 1)}{(d_1 + \alpha_1)} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)$$

$$\lambda_3 = -d_1$$

Oleh karena itu, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas merupakan bilangan real dan negatif jika  $R_0 < 1$ . Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil apabila  $R_0 > 1$ .

#### b. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_1^*$  pada kelompok umur I. Titik kesetimbangan endemik telah diperoleh pada perhitungan sebelumnya yaitu:

$$S_1^* = \frac{d_1 + \mu_1 + \gamma_1}{\beta_1}$$

$$I_1^* = \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1}$$

$$R_1^* = \frac{\theta_1 \sigma_1 \Lambda \beta_1 (d_1 + \mu_1) + \gamma_1 (\Lambda \beta_1 - \varphi_1)}{(d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1) \beta_1}$$

Titik kesetimbangan endemik tersebut kemudian disubstitusikan pada matriks (3.66), sehingga diperoleh

$$J(E_1^*) = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 & -d_1 - \mu_1 - \gamma_1 & 0 \\ \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} & \frac{\beta_1 (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}{\beta_1} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.68), dapat ditentukan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 & -d_1 - \mu_1 - \gamma_1 & 0 \\ \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} & \frac{\beta_1 (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}{\beta_1} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = |\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 - \lambda & -d_1 - \mu_1 - \gamma_1 & 0 \\ \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} & \frac{\beta_1 (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}{\beta_1} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -d_1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan determinan dapat menggunakan metode Sarrus

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Kemudian misalkan terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan sebagai berikut:

$$a_{11} = \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 - \lambda$$

$$a_{12} = -d_1 - \mu_1 - \gamma_1$$

$$a_{21} = \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}$$

$$a_{22} = \frac{\beta_1 (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}{\beta_1} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \lambda$$

$$a_{32} = \gamma_1$$

$$a_{33} = -d_1 - \lambda$$

Susun kembali menjadi suatu bentuk matriks sehingga diperoleh

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Sehingga

$$|\mathbf{A}| = \left[ \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 - \lambda \right) \left( \frac{\beta_1 (d_1 + \mu_1 + \gamma_1)}{\beta_1} - (d_1 + \mu_1 + \gamma_1) - \lambda \right) \right. \\ \left. - \lambda \right] (-d_1 - \lambda)$$

$$\left[ (-d_1 - \mu_1 - \gamma_1) \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 - \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} \right) (-d_1 - \lambda) \right]$$

$$|\mathbf{A}| = (-d_1 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 + \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 \right) \lambda + (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 + \varphi_1 \right]$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -d_1$$

Untuk mencari  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  dengan menggunakan persamaan karakteristik

dimana

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Sehingga,  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  memenuhi persamaan diatas, dimana

$$\alpha_1 = \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 + \varphi_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - \alpha_1 - d_1 = \frac{\varphi_1 (\mathcal{R}_0^1 - 1)}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1)} - (\alpha_1 + d_1) > 0$$

$$\alpha_0 = (1 - \theta_1 \sigma_1) \Lambda \beta_1 + \varphi_1 = \varphi_1 (\mathcal{R}_0^1 - 1) > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika  $\alpha_1 > 0$  dan  $\alpha_0 > 0$ . Oleh karena itu titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^1 > 1$ .

## 2. Analisis Kestabilan Lokal Kelompok II (0-4 Tahun)

Untuk menentukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat menggunakan matriks Jacobi yang bertujuan untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobi diperoleh dari persamaan (3.14) yang dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} f_1 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 - \beta_2 S_2 I_2 - d_2 S_2 - \alpha_2 S_2 \\ f_2 = \beta_2 S_2 I_2 - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) I_2 \\ f_3 = (\theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 + \gamma_2 I_2 - d_2 R_2 \end{cases} \quad (3.69)$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.69) diturunkan terhadap  $S, I$ , dan  $R$  menggunakan matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\beta_2 I_2 - (d_2 + \alpha_2) & \beta_2 S_2 & 0 \\ \beta_2 I_2 & \beta_2 S_2 - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -d_2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

a. Analisis Kestabilan Lokal Bebas Penyakit

Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_2^0$  dapat ditentukan dengan menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit pada tahap sebelumnya.

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada kelompok umur II adalah

$$E_0^2 = \left( \frac{(1-\theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1}{(d_2+\alpha_2)}, 0, \frac{(\theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1}{d_2} \right).$$

Kemudian titik kesetimbangan bebas penyakit tersebut disubstitusikan pada matriks (3.70), diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(d_2 + \alpha_2) & \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} & 0 \\ 0 & \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -d_2 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.71), maka dapat ditentukan persamaan karakteristik yaitu sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -(d_2 + \alpha_2) & \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} & 0 \\ 0 & \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -d_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk menentukan nilai determinan dapat menggunakan metode Sarrus seperti berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = |\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -(d_2 + \alpha_2) - \lambda & \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} & 0 \\ 0 & \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -d_2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = (-(d_2 + \alpha_2) - \lambda) \left( \frac{(1 - \theta_2\sigma_2)\alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - \lambda \right) (-d_2 - \lambda) - 0$$



$$|A| = -(d_2 + \alpha_2) - \lambda \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - \lambda \right) (-d_2 - \lambda)$$

Sehingga nilai eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(d_2 + \alpha_2)$$

$$\lambda_2 = - \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2}{(d_2 + \alpha_2)} - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)$$

$$\lambda_3 = -d_2$$

Oleh karena itu, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas merupakan bilangan real dan negatif jika  $R_0 < 1$ . Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal.

#### b. Analisis Kestabilan Lokal Endemik

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_2^*$  pada kelompok umur II. Titik kesetimbangan endemik telah diperoleh pada perhitungan sebelumnya yaitu:

$$S_2^* = \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2}$$

$$I_2^* = \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)}$$

$$R_2^* = \frac{\theta_2 \sigma_2 \alpha_1 S_1 \beta_2 (d_2 + \mu_2) + \gamma_2 (\alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2)}{\beta_2 (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2)}$$

Titik kesetimbangan endemik tersebut kemudian disubstitusikan pada matriks (3.70), sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\beta_2 \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) - (d_2 + \alpha_2) & \beta_2 \left( \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2} \right) & 0 \\ \beta_2 \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) & \beta_2 \left( \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2} \right) - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -d_2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.73), dapat ditentukan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -\beta_2 \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) - (d_2 + \alpha_2) - \lambda & d_2 + \mu_2 + \gamma_2 & 0 \\ \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) & \beta_2 \left( \frac{d_2 + \mu_2 + \gamma_2}{\beta_2} \right) - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -d_2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan determinan dapat menggunakan metode Sarrus

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Kemudian misalkan terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan sebagai berikut:

$$a_{11} = - \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) - (d_2 + \alpha_2) - \lambda$$

$$a_{12} = d_2 + \mu_2 + \gamma_2$$

$$a_{21} = \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right)$$

$$a_{22} = (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - \lambda$$

$$a_{32} = \gamma_1$$

$$a_{33} = -d_2 - \lambda$$

Susun kembali menjadi suatu bentuk matriks sehingga diperoleh

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sehingga

$$|\mathbf{A}| = \left( - \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) - (d_2 + \alpha_2) - \lambda \right) \left( (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) - \lambda \right) - \lambda (-d_2 - \lambda) - \left( (d_2 + \mu_2 + \gamma_2) \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} \right) \right) (-d_2 - \lambda)$$

$$|A| = (-d_2 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} - (d_2 + \alpha_2) \right) \lambda + (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2 \right]$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -d_2$$

Untuk mencari  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  dengan menggunakan persamaan karakteristik dimana

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Sehingga,  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  memenuhi persamaan diatas, dimana

$$a_1 = \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} - (d_2 + \alpha_2) \right) = \frac{\varphi_2 (\mathcal{R}_0^2 - 1)}{(d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} - (\alpha_2 + d_2) > 0$$

$$a_0 = (1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - \varphi_2 = \varphi_2 (\mathcal{R}_0^2 - 1) > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika  $a_1 > 0$  dan  $a_0 > 0$ . Oleh karena itu titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^2 > 1$ .

### 3. Analisis Kestabilan Lokal Kelompok Umur III (10-14 tahun)

Untuk menentukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat menggunakan matriks Jacobi yang bertujuan untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobi diperoleh dari persamaan (3.15) yang dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_2 S_2 - \beta_3 S_3 I_3 - (d_3 + \alpha_3) S_3 \\ f_2 = \beta_3 S_3 I_3 - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) I_3 \\ f_3 = \gamma_3 I_3 - d_3 R_3 \end{cases} \quad (3.74)$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.74) diturunkan terhadap  $S, I$ , dan  $R$  menggunakan matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\beta_3 I_3 - (d_3 + \alpha_3) & \beta_3 S_3 & 0 \\ \beta_3 I_3 & \beta_3 S_3 - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

a. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_3^0$  dapat ditentukan dengan menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit pada tahap sebelumnya.

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada kelompok umur III yaitu  $E_3^0 =$

$\left( \frac{\alpha_2 S_2}{(d_3 + \alpha_3)}, 0, 0 \right)$  Kemudian titik kesetimbangan bebas penyakit disubstitusikan

pada matriks (3.75), diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(d_3 + \alpha_3) & \beta_3 \left( \frac{\alpha_2 S_2}{(d_3 + \alpha_3)} \right) & 0 \\ 0 & \beta_3 \left( \frac{\alpha_2 S_2}{(d_3 + \alpha_3)} \right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.76), maka dapat ditentukan persamaan

karakteristik yaitu sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -(d_3 + \alpha_3) & \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk menentukan nilai determinan dapat menggunakan metode Sarrus seperti berikut:

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = |\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -(d_3 + \alpha_3) - \lambda & \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = (-(d_3 + \alpha_3) - \lambda) \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) - \lambda \right) (-d_3 - \lambda) - 0$$

$$|\mathbf{A}| = (-(d_3 + \alpha_3) - \lambda) \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) - \lambda \right) (-d_3 - \lambda)$$

Sehingga nilai eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(d_3 + \alpha_3)$$

$$\lambda_2 = \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3}{(d_3 + \alpha_3)} \right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)$$

$$\lambda_3 = -d_3$$

Oleh karena itu, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas merupakan bilangan real dan negatif jika  $R_0 < 1$ . Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal

#### b. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_3^*$  pada kelompok umur III. Titik kesetimbangan endemik telah diperoleh pada perhitungan sebelumnya yaitu:

$$S_3^* = \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}$$

$$I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}$$

$$R_3^* = \frac{\gamma_3 \alpha_2 S_2 \beta_3 - \gamma_3 (\varphi_3)}{\beta_3 (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3)}$$

Titik kesetimbangan endemik tersebut kemudian disubstitusikan pada matriks (3.75), sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) - (d_3 + \alpha_3) & \beta_3 \left(\frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}\right) & 0 \\ \beta_3 \left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) & \beta_3 \left(\frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}\right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.77), dapat ditentukan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) - (d_3 + \alpha_3) & \beta_3 \left(\frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}\right) & 0 \\ \beta_3 \left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) & \beta_3 \left(\frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}\right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = |\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) - (d_3 + \alpha_3) - \lambda & \beta_3 \left(\frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}\right) & 0 \\ \beta_3 \left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) & \beta_3 \left(\frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3}\right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_3 & -d_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan determinan dapat menggunakan metode Sarrus

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Kemudian misalkan terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan sebagai berikut:

$$a_{11} = -\left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right) - (d_3 + \alpha_3) - \lambda$$

$$a_{12} = d_3 + \mu_3 + \gamma_3$$

$$a_{21} = \left(\frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)}\right)$$

$$a_{22} = \beta_3 \left( \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3} \right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) - \lambda$$

$$a_{32} = \gamma_3$$

$$a_{33} = -d_3 - \lambda$$

Susun kembali menjadi suatu bentuk matriks sehingga diperoleh

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sehingga

$$|\mathbf{A}| = \left[ \left( - \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \right) - (d_3 + \alpha_3) - \lambda \right) \left( \beta_3 \left( \frac{d_3 + \mu_3 + \gamma_3}{\beta_3} \right) - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) - \lambda \right) (-d_3 - \lambda) \right] - (d_3 + \mu_3 + \gamma_3) \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \right) (-d_3 - \lambda)$$

$$|\mathbf{A}| = (-d_3 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \right) - (d_3 + \alpha_3) \right) \lambda + \alpha_2 S_2 \beta_3 - \gamma_3 \varphi_3 \right]$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -d_3$$

Untuk mencari  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  dengan menggunakan persamaan karakteristik dimana

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Sehingga,  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  memenuhi persamaan diatas, dimana

$$a_1 = \left( \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} \right) - (d_3 + \alpha_3) = \frac{\varphi_3 (\mathcal{R}_0^3 - 1)}{(d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} - (\alpha_2 + d_2) > 0$$

$$a_0 = \alpha_2 S_2 \beta_3 - \varphi_3 = \varphi_3 (\mathcal{R}_0^3 - 1) > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika  $a_1 > 0$  dan  $a_0 > 0$ . Oleh karena itu titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^3 > 1$ .

#### 4. Analisis Kestabilan Lokal Kelompok Umur IV (14 tahun)

Untuk menentukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat menggunakan matriks Jacobi yang bertujuan untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobi diperoleh dari persamaan (3.16) yang dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_3 S_3 - \beta_4 S_4 I_4 - d_4 S_4 \\ f_2 = \beta_4 S_4 I_4 - (d_4 + \mu_4 + \gamma_4) I_4 \\ f_3 = \gamma_4 I_4 - d_4 R_4 \end{cases} \quad (3.78)$$

Selanjutnya sistem persamaan (3.78) diturunkan terhadap  $S, I,$  dan  $R$  menggunakan matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\beta_4 I_4 - d_4 & -\beta_4 S_4 & 0 \\ \beta_4 I_4 & \beta_4 S_4 - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

##### a. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_4^0$  dapat ditentukan dengan menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit pada tahap sebelumnya. Titik kesetimbangan bebas penyakit pada kelompok umur IV yaitu  $E_4^0 = \left(\frac{\alpha_3 S_3}{d_4}, 0, 0\right)$ . Kemudian titik kesetimbangan bebas penyakit disubstitusikan pada matriks (3.79), diperoleh



$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -d_4 & \frac{-\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} & 0 \\ \beta_4 I_4 & \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Berdasarkan matriks Jacobian (3.80), maka dapat ditentukan persamaan karakteristik yaitu sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -d_4 & \frac{-\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} & 0 \\ \beta_4 I_4 & \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Untuk menentukan nilai determinan dapat menggunakan metode Sarrus seperti berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = |\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -d_4 - \lambda & \frac{-\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} & 0 \\ \beta_4 I_4 & \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = (-d_4 - \lambda) \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) - \lambda \right) (-d_4 - \lambda) - 0$$

$$|\mathbf{A}| = (-d_4 - \lambda) \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) - \lambda \right) (-d_4 - \lambda)$$

Sehingga nilai eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -d_4$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{d_4} - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) = -(d_4 + \mu_4 + \gamma_4) (1 - R_0)$$

$$\lambda_3 = -d_3$$

Oleh karena itu, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas merupakan bilangan real dan negatif jika  $R_0 < 1$ . Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil apabila  $R_0 > 1$ .

#### b. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan  $E_4^*$  pada kelompok umur IV. Titik kesetimbangan endemik telah diperoleh pada perhitungan sebelumnya yaitu:

$$S_4^* = \frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}$$

$$I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}$$

$$R_4^* = \frac{\gamma_4 \alpha_3 S_3 \beta_4 - \gamma_4 \varphi_4}{\beta_4 (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}$$

Titik kesetimbangan endemik tersebut kemudian disubstitusikan pada matriks (3.79), sehingga diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}\right) - d_4 & -d_4 - \mu_4 - \gamma_4 & 0 \\ \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} & \beta_4 \left(\frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}\right) - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut, dapat ditentukan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}\right) - d_4 & -d_4 - \mu_4 - \gamma_4 & 0 \\ \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} & \beta_4 \left(\frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}\right) - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}\right) - d_4 - \lambda & -d_4 - \mu_4 - \gamma_4 & 0 \\ \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} & \beta_4 \left(\frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}\right) - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_4 & -d_4 - \lambda \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan determinan dapat menggunakan metode Sarrus

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Kemudian misalkan terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan sebagai berikut:

$$a_{11} = -\left(\frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}\right) - d_4 - \lambda$$

$$a_{12} = -d_4 - \mu_4 - \gamma_4$$

$$a_{21} = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}$$

$$a_{22} = \beta_4 \left(\frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4}\right) - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) - \lambda \alpha_{32} = \gamma_4$$

$$a_{33} = -d_4 - \lambda$$

Susun kembali menjadi suatu bentuk matriks sehingga diperoleh

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{32} \end{matrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Sehingga

$$a_{11} a_{22} a_{33} = \left(-\left(\frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)}\right) - d_4 - \lambda\right)$$

$$\begin{aligned} & \left( \beta_4 \left( \frac{d_4 + \mu_4 + \gamma_4}{\beta_4} \right) - (d_4 + \gamma_4 + \mu_4) - \lambda \right) (-d_4 - \lambda) - \\ & (\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4) (-d_4 - \lambda) \\ |A| = & (-d_4 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \left( \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} \right) - d_4 \right) \lambda + (\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4) \right] \end{aligned}$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -d_4$$

Untuk mencari  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  dengan menggunakan persamaan karakteristik dimana

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Sehingga,  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  memenuhi persamaan diatas, dimana

$$a_1 = \left( \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4}{(d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} \right) - d_4 = \frac{\varphi_3 (\mathcal{R}_0^4 - 1)}{d_4 + \mu_4 + \gamma_4} - d_4 > 0$$

$$a_0 = \alpha_3 S_3 \beta_4 - \varphi_4 = \varphi_3 (\mathcal{R}_0^4 - 1) > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika  $a_1 > 0$  dan  $a_0 > 0$ . Oleh karena itu titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^4 > 1$ .

### 3.2 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan diilustrasikan simulasi titik kesetimbangan dari model (3.13), (3.14), (3.15), dan (3.16). Berdasarkan sistem persamaan (3.13)-(3.16) model penyebaran campak diperoleh 16 kondisi titik kesetimbangan sebagai berikut:

1.  $E_*^1 = (E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0)$

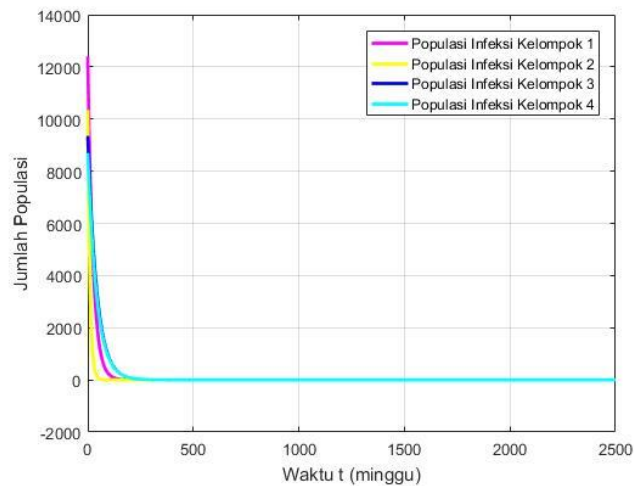
= Titik kesetimbangan  $E_*^1$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2,3,4} < 1$

2.  $E_*^2 = (E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^2$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2,3} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^4 > 1$
3.  $E_*^3 = (E_1^0, E_2^0, E_3^*, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^3$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2,4} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^3 > 1$
4.  $E_*^4 = (E_1^0, E_2^*, E_3^0, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^4$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,3,4} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^4 > 1$
5.  $E_*^5 = (E_1^*, E_2^0, E_3^0, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^5$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{2,3,4} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^1 > 1$
6.  $E_*^6 = (E_1^*, E_2^*, E_3^0, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^6$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{3,4} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^{1,2} > 1$
7.  $E_*^7 = (E_1^0, E_2^*, E_3^*, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^7$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,4} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^{2,3} > 1$
8.  $E_*^8 = (E_1^0, E_2^0, E_3^*, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^8$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^{3,4} > 1$

9.  $E_*^9 = (E_1^0, E_2^*, E_3^0, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^9$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,3} < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{2,4} > 1$
10.  $E_*^{10} = (E_1^*, E_2^0, E_3^*, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{10}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{2,4} < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{1,3} > 1$
11.  $E_*^{11} = (E_1^*, E_2^0, E_3^0, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{11}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{2,3} < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{1,4} > 1$
12.  $E_*^{12} = (E_1^0, E_2^*, E_3^*, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{12}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^1 < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{2,3,4} > 1$
13.  $E_*^{13} = (E_1^*, E_2^0, E_3^*, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{13}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^2 < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{1,3,4} > 1$
14.  $E_*^{14} = (E_1^*, E_2^*, E_3^0, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{14}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^3 < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{1,2,4} > 1$
15.  $E_*^{15} = (E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^0)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{15}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^4 < 1$  dan  
 $\mathcal{R}_0^{1,2,3} > 1$
16.  $E_*^{16} = (E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*)$   
 = Titik kesetimbangan  $E_*^{16}$  stabil asimtotik lokal ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2,3,4} > 1$

Dar 16 titik kesetimbangan diatas akan diilustrasikan tiga titik kesetimbangan dengan nilai parameter yang berbeda sesuai dalam lampiran I dengan  $t = 0$  minggu sampai  $t = 2500$  minggu. Sehingga mendapatkan gambaran yang jelas mengenai model SIR penyebaran penyakit campak berdasarkan struktur umur.

#### A. Simulasi Titik Kesetimbangan $E_*^1$



Gambar 3.1 Simulasi Titik Kesetimbangan  $E_*^1$

Berdasarkan gambar 3.1 memvisualisasikan grafik perbandingan kasus infeksi pada setiap kelompok umur. Grafik berwarna merah muda merupakan grafik populasi infeksi pada kelompok pertama dengan parameter vaksinasi sebesar 85% dan efektifitas vaksinasi sebesar 85% dengan laju infeksi sebesar  $\beta_1 = 0,167989 \times 10^{-8}$ . Grafik berwarna kuning merupakan grafik populasi infeksi pada kelompok kedua dengan parameter vaksinasi sebesar 95% dan efektifitas vaksinasi sebesar 80% dengan laju infeksi sebesar  $\beta_2 = 0,515425 \times 10^{-7}$ . Grafik berwarna biru menunjukkan grafik populasi infeksi pada kelompok ketiga dengan laju infeksi sebesar  $\beta_3 = 0,262981 \times 10^{-8}$ , sedangkan Grafik berwarna biru muda menunjukkan grafik populasi infeksi pada kelompok keempat dengan laju infeksi sebesar  $\beta_4 = 0,285701 \times 10^{-8}$ .

Gambar 3.1 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika penyebaran campak pada kelompok I, II, III, IV ketika  $\mathcal{R}_0^1 < 1$ . Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari substitusi nilai parameter sebagai berikut:

$$R_0 = \mathcal{R}_0^1 \times \mathcal{R}_0^2 \times \mathcal{R}_0^3 \times \mathcal{R}_0^4$$

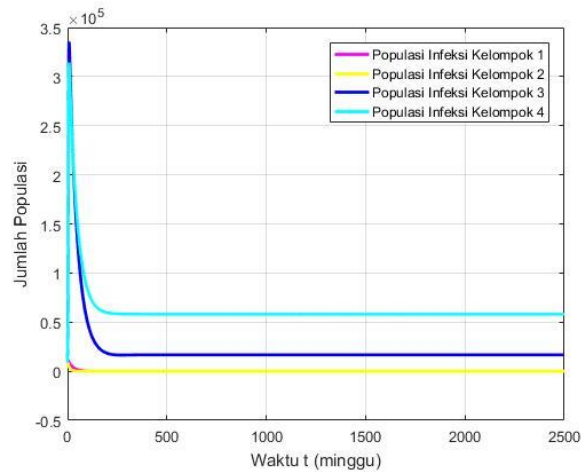
$$R_0 = \left( \frac{((1 - \theta_1 \sigma_1) \beta_1 \Lambda)}{d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1} \right) \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \beta_2 \alpha_1 S_1}{d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_2 \gamma_2} \right)$$

$$\left( \frac{\beta_3 \alpha_2 S_2}{d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3} \right) \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{(d_4^2 + \mu_4 d_4 + \gamma_4 d_4)} \right)$$

$$R_0 = (0.018002)(0.005272)(0.011594)(0.57) = 0.6272 \times 10^{-6} < 1$$

Berdasarkan gambar 3.1 dapat dijelaskan populasi terinfeksi di setiap kelompok umur bernilai nol. Artinya pada kondisi  $E_*^1$  atau  $\mathcal{R}_0^1 < 1$  tidak ada individu yang terinfeksi di umur berapapun.

#### B. Simulasi Titik Keseimbangan $E_*^8$



Gambar 3.2 Simulasi Titik Keseimbangan  $E_*^8$

Berdasarkan gambar 3.2 memvisualisasikan grafik perbandingan kasus infeksi pada setiap kelompok umur. Grafik berwarna merah muda merupakan grafik populasi infeksi pada kelompok pertama dengan parameter vaksinasi sebesar 85% dan efektifitas vaksinasi sebesar 85% dengan laju infeksi sebesar  $\beta_1 = 0,167989 \times 10^{-8}$ . Grafik berwarna kuning merupakan grafik populasi



infeksi pada kelompok kedua dengan parameter vaksinasi sebesar 95% dan efektifitas vaksinasi sebesar 80% dengan laju infeksi sebesar  $\beta_2 = 0,515425 \times 10^{-7}$ . Grafik berwarna biru menunjukkan grafik populasi infeksi pada kelompok ketika dengan laju infeksi sebesar  $\beta_3 = 0.262981 \times 10^{-5}$ , sedangkan Grafik berwarna biru muda menunjukkan grafik populasi infeksi pada kelompok ketika dengan laju infeksi sebesar  $\beta_4 = 0.285701 \times 10^{-5}$ .

Gambar 3.2 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika penyebaran campak pada kelompok I, II, III, IV ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2} < 1$  dan  $\mathcal{R}_0^{3,4} > 1$ . Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari substitusi nilai parameter sebagai berikut:

$$R_0 = \mathcal{R}_0^1 \times \mathcal{R}_0^2 \times \mathcal{R}_0^3 \times \mathcal{R}_0^4$$

$$R_0 = \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \beta_1 \Lambda}{d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1} \right) \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \beta_2 \alpha_1 S_1}{d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_2 \gamma_2} \right) \\ \left( \frac{\beta_3 \alpha_2 S_2}{d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3} \right) \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{(d_4^2 + \mu_4 d_4 + \gamma_4 d_4)} \right)$$

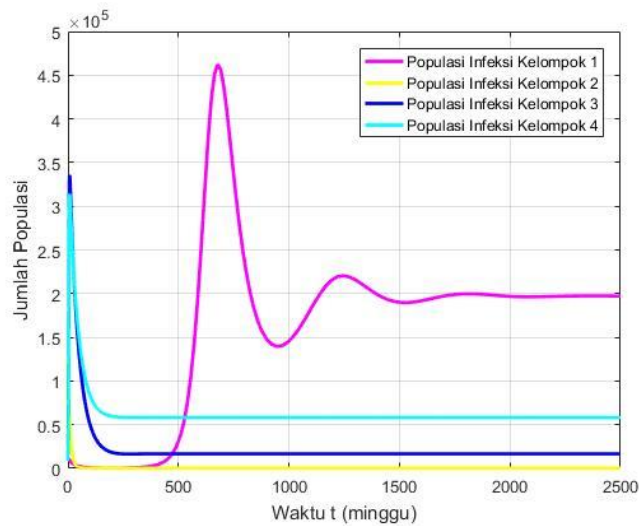
$$R_0 = (0.018002)(0.005272)(11.59422)(573.178) = 0.650 < 1$$

Berdasarkan gambar 3.2 dapat dijelaskan populasi terinfeksi di kelompok I dan II bernilai nol yang artinya pada kelompok I dan II tidak ada individu yang terinfeksi, sedangkan populasi terinfeksi di kelompok III dan IV menuju suatu titik yang artinya pada kelompok III dan IV telah terjadi penyebaran campak. Populasi terinfeksi pada kelompok III dan IV mengalami kestabilan asimtotik dengan populasi mencapai nilai:

$$I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} = 16678.03$$

$$I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} = 600270.4$$

### C. Simulasi Titik Keseimbangan $E_*^{16}$



Gambar 3.3 Simulasi Titik Keseimbangan  $E_*^{16}$

Berdasarkan gambar 3.3 memvisualisasikan grafik perbandingan kasus infeksi pada setiap kelompok umur. Grafik berwarna ungu merupakan grafik populasi infeksi pada kelompok pertama dengan parameter vaksinasi sebesar 85% dan efektifitas vaksinasi sebesar 85% dengan laju infeksi sebesar  $\beta_1 = 0,167989 \times 10^{-6}$ . Grafik berwarna kuning merupakan grafik populasi infeksi pada kelompok kedua dengan parameter vaksinasi sebesar 95% dan efektifitas vaksinasi sebesar 80% dengan laju infeksi sebesar  $\beta_2 = 0,515425 \times 10^{-3}$ . Grafik berwarna biru menunjukkan grafik populasi infeksi pada kelompok ketiga dengan laju infeksi sebesar  $\beta_3 = 0.262981 \times 10^{-5}$ , sedangkan Grafik berwarna biru muda menunjukkan grafik populasi infeksi pada kelompok keempat dengan laju infeksi sebesar  $\beta_4 = 0.285701 \times 10^{-5}$ .

Gambar 3.3 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika penyebaran campak pada kelompok I,II,III dan IV ketika  $\mathcal{R}_0^{1,2,3,4} > 1$ . Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari substitusi nilai parameter sebagai berikut:

$$R_0 = \mathcal{R}_0^1 \times \mathcal{R}_0^2 \times \mathcal{R}_0^3 \times \mathcal{R}_0^4$$

$$R_0 = \left( \frac{(1 - \theta_1 \sigma_1) \beta_1 \Lambda}{d_1^2 + d_1 \mu_1 + d_1 \gamma_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1} \right) \left( \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \beta_2 \alpha_1 S_1}{d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_2 \gamma_2} \right) \\ \left( \frac{\beta_3 \alpha_2 S_2}{d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3} \right) \left( \frac{\beta_4 \alpha_3 S_3}{(d_4^2 + \mu_4 d_4 + \gamma_4 d_4)} \right)$$

$$R_0 = (180.051)(52.72936)(11.59422)(573.178) = 63092696 > 1$$

Berdasarkan gambar 3.3 dapat dijelaskan bahwa populasi terinfeksi di kelompok I,II,III, dan IV cenderung menuju ke titik kesetimbangan endemik yang artinya pada kelompok I,II,III, dan IV telah terjadi penyebaran campak. Populasi terinfeksi pada setiap kelompok mengalami kestabilan asimtotik dengan populasi mencapai nilai, yaitu:

$$I_1^* = - \frac{\Lambda \beta_1 \theta_1 \sigma_1 - \Lambda \beta + d_1^2 + \mu_1 d_1 + \gamma_1 d_1 + \alpha_1 d_1 + \alpha_1 \mu_1 + \alpha_1 \gamma_1}{(d_1 + \mu_1 + \gamma_1) \beta_1} = 192193$$

$$I_2^* = \frac{(1 - \theta_2 \sigma_2) \alpha_1 S_1 \beta_2 - (d_2^2 + d_2 \mu_2 + d_2 \gamma_2 + \alpha_2 d_2 + \mu_2 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_2)}{\beta_2 (d_2 + \mu_2 + \gamma_2)} = 8217.082$$

$$I_3^* = \frac{\alpha_2 S_2 \beta_3 - (d_3^2 + d_3 \mu_3 + d_3 \gamma_3 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 \mu_3 + \alpha_3 \gamma_3)}{\beta_3 (d_3 + \mu_3 + \gamma_3)} = 16678.03$$

$$I_4^* = \frac{\alpha_3 S_3 \beta_4 - (d_4^2 + d_4 \mu_4 + d_4 \gamma_4)}{\beta_4 (d_4 + \mu_4 + \gamma_4)} = 600270.4$$

### 3.3 Upaya Pencegahan dalam Perspektif Islam

Dalam Islam memerintahkan umatnya untuk selalu menerapkan nilai-nilai yang diperintahkan, yaitu dengan selalu beribadah kepada-Nya, kapan dan dimanapun. Dalam menjaga agar dapat beribadah kepada-Nya diperlukan kekuatan fisik dan jasmani. Didunia kesehatan persoalan mengenai menjaga kesehatan diri dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan langkah pertama adalah tindakan

pencegahan, upaya pencegahan ini merupakan langkah yang dapat digunakan untuk tameng/benteng agar tidak terserang penyakit. Upaya pencegahan tersebut dapat meliputi menjaga kebersihan lingkungan, pencegahan penyakit yang menular, serta kebiasaan melakukan pola hidup sehat (Thawil, 2007).

Hal utama yang dianjurkan agama Islam adalah memerintahkan umatnya untuk selalu menjaga kebersihan diri. Pada penjelasan pada subbab 2.9 yang ada di pada Bab 2 Allah menganjurkan umatnya untuk selalu menjaga kebersihan diri. Untuk menjaga kebersihan diri dapat dilakukan dengan cara bersuci dengan berwudhu atau mandi, dan menjaga kebersihan pakaian. Menurut Mahmud (2008) berwudhu dapat melindungi tubuh akan penyakit yang berbahaya, seperti infeksi mata, influenza, infeksi amandel, sinus, batuk, serta penyakit-penyakit kulit lainnya. Terlihat jelas bahwa Islam sangat menganjurkan untuk pemeliharaan kebersihan diri sebelum datangnya penyakit yang dapat menimpa umatnya. Selain itu kebiasaan pola hidup sehat juga sangat dianjurkan dalam Islam. Kehadiran Islam bertujuan untuk memelihara agama, akal, jiwa, jasmani, harta dan keturunan umat manusia (Shihab, 1998). Hidup sehat merupakan kenikmatan yang telah diberikan Allah swt, salah satu kenikmatan yang telah diberikan Allah swt adalah sistem imunitas yang ada di tubuh setiap manusia. Dalam subbab 2.9 pada Bab 2 Allah telah menciptakan manusia dengan sempurna dan seimbang, setiap manusia diberikan sistem imunitas untuk menjaga diri dari penyakit yang akan menyerang. Dalam menjaga sistem imunitas tersebut diperlukan pola hidup yang sehat yaitu dengan selalu memakan makanan yang bergizi, berolahraga, dll.

Dalam hal ini kehidupan manusia sangat dipengaruhi oleh badan yang sehat dengan lingkungan yang bersih. Dengan menjaga pola hidup yang sehat akan

memberikan dampak yang positif bagi kesehatan setiap manusia salah satunya akan meningkatkan sistem imunitas tubuh. Dan sebaliknya, apabila kurangnya kesadaran akan memperhatikan kesehatan dan kebersihan lingkungan maka dapat menyebabkan adanya berbagai virus atau penyakit yang akan menyerang tubuh. Tindakan akan kepedulian terhadap kesehatan diri merupakan suatu kewajiban bagi setiap manusia. Dengan menjaga kebersihan diri dan menerapkan pola hidup sehat maka penyakit tidak akan menyerang tubuh setiap manusia. Sebagaimana sesuai dengan prinsip kaidah yang mengatakan

“Pencegahan lebih baik daripada pengobatan”.

Langkah kedua adalah tindakan pengobatan. Upaya tersebut merupakan suatu usaha pertolongan medis kepada individu yang telah terinfeksi suatu penyakit atau virus. Sesuai dalam prinsip diatas, dalam menjaga kesehatan tubuh berlaku prinsip pencegahan lebih baik dari pada pengobatan. Namun, apabila telah terinfeksi suatu penyakit maka pengobatan lebih penting. Berdasarkan penjelasan tersebut suatu masalah matematika, seperti permasalahan dalam model epidemi SIR penyebaran penyakit campak, proses penyebaran penyakit campak dapat menurun apabila dilakukan upaya pengobatan yaitu dengan melaksanakan vaksinasi, dan dilakukan upaya pencegahan. Tindakan akan kepedulian setiap individu akan penyebaran penyakit seperti menjaga kebersihan dan menerapkan pola hidup sehat akan menurunkan proses penyebaran penyakit pada suatu daerah yang terkena suatu wabah penyakit.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan yakni model penyebaran campak dengan empat kelompok umur dimana setiap kelompok umur tidak dapat berinteraksi dengan kelompok umur lainnya diperoleh 16 titik kesetimbangan yang merupakan kombinasi dari dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik ( $E^*$ ) dari setiap kelompok secara terpisah. Sifat kestabilan dari setiap titik kesetimbangan dapat ditentukan menggunakan nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dimana bilangan reproduksi dasar merupakan perkalian antara setiap bilangan reproduksi dasar dari setiap kelompok umur yang dapat dinyatakan dengan  $R_0 = \prod_{i=1}^4 \mathcal{R}_0^i$

Hasil analisa diilustrasikan pada simulasi numerik dimana ketika semua nilai  $R_0$  dari setiap kelompok bernilai kurang dari 1 maka populasi terinfeksi dari setiap kelompok akan menuju ke nol yang berarti tidak terdapat individu yang terinfeksi. Kemudian ketika semua nilai  $R_0$  dari setiap kelompok lebih dari 1 maka populasi terinfeksi dari setiap kelompok akan menuju suatu titik kestabilan yang berarti dalam kelompok tersebut telah terjadi penyebaran campak. Lebih lanjut lagi, ketika  $R_0$  pada kelompok I dan II kurang dari 1 dan  $R_0$  pada kelompok III dan IV lebih dari satu diperoleh bahwa kelompok umur I dan II bebas penyakit campak karena tidak terdapat individu yang terinfeksi, sedangkan pada kelompok III dan IV terdapat penyebaran penyakit campak.

## 4.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai analisis kestabilan lokal model epidemi SIR penyebaran penyakit campak yang ditinjau berdasarkan umur, namun tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global dari model epidemi SIR tersebut. Oleh karena itu, pada penelitian selanjutnya perlu dilakukan analisis kestabilan global pada epidemi SIR penyebaran penyakit campak serta dapat menambahkan variabel atau asumsi model dalam memodelkan penyebaran penyakit campak.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemah. (2007). *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Penerbit Diponegoro
- Azizah, Aisyah Noer. (2017). Model SIR Pada Epidemi Penyakit Campak Berdasarkan Umur Dengan Pengaruh Imunisasi. *Jurnal Ilmiah Matematika*. Vol. 3(6)
- Agustina, Anita. (2021). Perspektif Hadis Nabi SAW Mengenai Kebersihan Lingkungan. *Jurnal Penelitian Ilmu Ushuluddin*. Vol 1(2)
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Willey and Son.
- Boyce, William E. DiPrima, Richard C. (2001). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Seventh Edition. United State of America: John Willey & Sons, Inc.
- Chen, W.-K. (2004). *The Electrical Engineering Handbook*. USA: Elseiver Academic Press.
- Diekmann, O., dan Heesterbeek, J.A.P., (2002), *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*. United State of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Driessche, Van Den P. & Wattmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Model of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180(1-2): 29-48.
- Harun. (2002). *Sistem Kekebalan Tubuh dan Keajaiban di Dalamnya*. Bandung: Dzikra.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Pelabuhan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Mahmud, Mahir Hasan. (2008). *Terapi Air, Kemampuan Air dalam Mengatasi Aneka Penyakit Berdasarkan Wahyu dan Sains Cetakan III*. Jakarta: Qultum Media
- Mustofa, Agus. (2004). *Untuk Apa Berpuasa: Scientific Fasting*. Surabaya: Padma Press. P.104.
- Mutmainah dkk. (2019). Model Dinamika Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi dan Penerapannya di Provinsi Nusa Tenggara Barat. *Jurnal Matematika*. Vol. 8(2):112-121



- Nurani, G. P. (2012). Gambaran Epidemiologi Kasus Campak di Kota Cirebon tahun 2004-2011. *Jurnal Kesehatan Masyarakat*. 862-874.
- Oktafiani, A. dan Kusnanto. (2013). Bilangan Reproduksi Dasar Model West Nile Virus Menggunakan Matriks Next Generation. *JMA*. 862-874.
- Pamuntjak, R.J. dan Santoso, W. (1990). *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.
- Perasso, A. (2018). An Introduction to the Basic Reproduction Number in Mathematical Epidemiology. *Esaim: Proceedings and Surveys*. 62, 123-138
- Perko, L., (2001), *Differential Equations and Dynamical Systems Third Edition*. New York: Springer.
- Ross, C.C. (2004). *Differential Equation. Second Edition*. New York: Springer.
- Shihab, M Quraish. (1998) *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Maudu'I atas Berbagai Persoalan Umat*. Bandung: Mizan
- Thawil, Nabil. (2007). *Rahasia Sehat ala Rasulullah*. Jakarta Timur: Mirqat Media Grafika
- Zhou Linhua, Yan Wang, Yanyu Xiao, Michael Y.Li. (2019). Global Dynamics of a Discrete Age-Structured SIR Epidemic Model with Applications to Measles Vaccination Strategies. *Journal Mathematical Biosciences*. 308: 385-395. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2018.12.003>
- Zill, D., Wright., & Cullen, M. (2013). *Differential Equations with Boundary Value Problems* (8 ed.). New York: Cengage Learning

## LAMPIRAN

**Lampiran 1 : Nilai Parameter (Zhou, 2019)**

Parameter	Deskripsi	Nilai/minggu
$\Lambda$	Laju kelahiran	65000
$d_k$	Laju kematian alami	0.00029
$\alpha_k$	Tingkat penuaan pada kelompok $k$	0.00385
$\gamma_k$	Laju penyembuhan pada kelompok $k$	0.024368
$\mu_1$	Laju kematian akibat penyakit pada kelompok $I$	0.016
$\mu_2$	Laju kematian akibat penyakit pada kelompok $II$	0.08
$\mu_3$	Laju kematian akibat penyakit pada kelompok $III$	0
$\mu_4$	Laju kematian akibat penyakit pada kelompok $IV$	0
$\theta_1$	Rata-rata vaksinasi campak pada kelompok $I$	0.85
$\theta_2$	Rata-rata vaksinasi campak pada kelompok $II$	0.8
$\sigma_1$	Tingkat efisiensi vaksinasi	0.85

$\sigma_2$	Tingkat efisiensi vaksinasi	0.95
$\beta_1$	Laju infeksi endemik pada kelompok umur 1	$0.167989^{10^{-6}}$
$\beta_2$	Laju infeksi endemik pada kelompok umur 2	$0.515425^{10^{-3}}$
$\beta_3$	Laju infeksi endemik pada kelompok umur 3	$0.262981^{10^{-5}}$
$\beta_4$	Laju infeksi endemik pada kelompok umur 4	$0.285701^{10^{-5}}$
$\beta_1$	Laju infeksi bebas penyakit pada kelompok umur 1	$0.167989^{10^{-8}}$
$\beta_2$	Laju infeksi bebas penyakit pada kelompok umur 2	$0.515425^{10^{-7}}$
$\beta_3$	Laju infeksi bebas penyakit pada kelompok umur 3	$0.262981^{10^{-8}}$
$\beta_4$	Laju infeksi bebas penyakit pada kelompok umur 4	$0.285701^{10^{-8}}$
$S_1(0)$	Populasi rentan pada kelompok I	47972
$I_1(0)$	Populasi terinfeksi pada kelompok I	12396
$R_1(0)$	Populasi pulih pada kelompok I	87000

<b><math>S_2(0)</math></b>	Populasi rentan pada kelompok II	116900
<b><math>I_2(0)</math></b>	Populasi terinfeksi pada kelompok II	10350
<b><math>R_2(0)</math></b>	Populasi pulih pada kelompok II	69000
<b><math>S_3(0)</math></b>	Populasi rentan pada kelompok III	372623
<b><math>I_3(0)</math></b>	Populasi terinfeksi pada kelompok III	9350
<b><math>R_3(0)</math></b>	Populasi pulih pada kelompok III	100000
<b><math>S_4(0)</math></b>	Populasi rentan pada kelompok IV	336722
<b><math>I_4(0)</math></b>	Populasi terinfeksi pada kelompok IV	8700
<b><math>R_4(0)</math></b>	Populasi pulih pada kelompok IV	20000

## Lampiran 2: M-File untuk Menggambarkan Simulasi dari Model Epidemologi SIR pada Kondisi $E^1$ , $E^8$ dan $E^{16}$

```
function dydt=Model1(t,y)
global v1 s1 l b1 d1 a1 m1 g1
dy1=(1-(v1*s1))*l-b1*y(1)*y(2)-(d1+a1)*y(1);
dy2=b1*y(1)*y(2)-(d1+m1+g1)*y(2);
dy3=v1*s1*l+g1*y(2)-d1*y(3);
dydt=[dy1; dy2; dy3];
end

function dy1dt=Model2(t1,y1)
global v2 s2 a1 p1 b2 d2 a2 m2 g2
dy1=(1-(v2*s2))*(a1*p1)-b2*y1(1)*y1(2)-(d2+a2)*y1(1);
dy2=b2*y1(1)*y1(2)-(d2+m2+g2)*y1(2);
dy3=v2*s2*a1*p1+g2*y1(2)-d2*y1(3);
dy1dt=[dy1; dy2; dy3];
end

function dy2dt=Model3(t2,y2)
global p2 b3 d3 a2 a3 m3 g3
dy1=(a2*p2)-b3*y2(1)*y2(2)-(d3+a3)*y2(1);
dy2=b3*y2(1)*y2(2)-(d3+m3+g3)*y2(2);
dy3=g3*y2(2)-d3*y2(3);
dy2dt=[dy1; dy2; dy3];
end

function dy4dt=Model4(t4,y4)
global p3 b4 d4 a3 m4 g4
dy1=(a3*p3)-b4*y4(1)*y4(2)-d4*y4(1);
dy2=b4*y4(1)*y4(2)-(d4+m4+g4)*y4(2);
dy3=g4*y4(2)-d4*y4(3);
dy4dt=[dy1; dy2; dy3];
end

clc; clear all; close all;
global v1 s1 l b1 d1 a1 m1 g1 v2 s2 p1 b2 d2 a2 m2 g2 p2 b3 d3 a3
m3 g3 p3 b4 d4 m4 g4
v1=0.85; %Rata-rata cakupan vaksinasi di kelompok I
s1=0.85; %tingkat efektifitas vaksinasi dosis I
l=65000; %laju kelahiran per minggu
b1=0.00000000167989; %laju infeksi kelompok I
d1=0.00029; %laju kematian alami
a1=0.00385; %laju penuaan kelompok I
m1=0.016; %laju kematian akibat penyakit di kelompok I
g1=0.024368; %laju penyembuhan

v2=0.8; %Rata-rata cakupan vaksinasi di kelompok II
s2=0.95; %tingkat efektifitas vaksinasi dosis II
p1=47972; %populasi orang rentan pada kelompok I
b2=0.0000000515425; %laju infeksi kelompok II
d2=0.00029; %laju kematian alami
a1=0.00385; %laju penuaan kelompok II
a2=0.00385; %laju penuaan kelompok II
m2=0.08; %laju kematian akibat penyakit di kelompok II
g2=0.024368; %laju penyembuhan
```

```

p2=116900; %populasi orang rentan pada kelompok III
b3=0.00000000262981; %laju infeksi kelompok III
d3=0.00029; %laju kematian alami
a2=0.00385; %laju penuaan kelompok III
a3=0.00385; %laju penuaan kelompok III
m3=0; %laju kematian akibat penyakit di kelompok III
g3=0.024368; %laju penyembuhan

p3=372623; %populasi orang rentan pada kelompok IV
b4=0.00000000285701; %laju infeksi kelompok IV
d4=0.00029; %laju kematian alami
a3=0.00385; %laju penuaan kelompok IV
m4=0; %laju kematian akibat penyakit di kelompok IV
g4=0.024368; %laju penyembuhan

time=[0 2500];
NilaiAwal=[47972; 12396; 87000];
[t,y]=ode45(@(t,y)Model1(t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,2),'m-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal2=[116900; 10350; 69000];
[t1,y1]=ode45(@(t1,y1)Model2(t1,y1),time,NilaiAwal2);
plot(t1,y1(:,2),'y-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal3=[372623; 9350; 100000];
[t2,y2]=ode45(@(t2,y2)Model3(t2,y2),time,NilaiAwal3);
plot(t2,y2(:,2),'b-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal4=[336722; 8700; 20000];
[t4,y4]=ode45(@(t4,y4)Model4(t4,y4),time,NilaiAwal4);
plot(t4,y4(:,2),'c-', 'LineWidth',2)
hold all
xlabel('Waktu t (minggu)');ylabel('Jumlah Populasi');
legend('Populasi Infeksi Kelompok 1','Populasi Infeksi Kelompok
2','Populasi Infeksi Kelompok 3','Populasi Infeksi Kelompok
4');grid on;

clc; clear all; close all;
global v1 s1 l b1 d1 a1 m1 g1 v2 s2 p1 b2 d2 a2 m2 g2 p2 b3 d3 a3
m3 g3 p3 b4 d4 m4 g4
v1=0.85; %Rata-rata cakupan vaksinasi di kelompok I
s1=0.85; %tingkat efektifitas vaksinasi dosis I
l=65000; %laju kelahiran per minggu
b1=0.000000000167989; %laju infeksi kelompok I
d1=0.00029; %laju kematian alami
a1=0.00385; %laju penuaan kelompok I
m1=0.016; %laju kematian akibat penyakit di kelompok I
g1=0.024368; %laju penyembuhan

v2=0.8; %Rata-rata cakupan vaksinasi di kelompok II
s2=0.95; %tingkat efektifitas vaksinasi dosis II
p1=47972; %populasi orang rentan pada kelompok I
b2=0.515425; %laju infeksi kelompok II
d2=0.00029; %laju kematian alami

```

```

a1=0.00385; %laju penuaan kelompok II
a2=0.00385; %laju penuaan kelompok II
m2=0.08; %laju kematian akibat penyakit di kelompok II
g2=0.024368; %laju penyembuhan

p2=116900; %populasi orang rentan pada kelompok III
b3=0.00000262981; %laju infeksi kelompok III
d3=0.00029; %laju kematian alami
a2=0.00385; %laju penuaan kelompok III
a3=0.00385; %laju penuaan kelompok III
m3=0; %laju kematian akibat penyakit di kelompok III
g3=0.024368; %laju penyembuhan

p3=372623; %populasi orang rentan pada kelompok IV
b4=0.00000285701; %laju infeksi kelompok IV
d4=0.00029; %laju kematian alami
a3=0.00385; %laju penuaan kelompok IV
m4=0; %laju kematian akibat penyakit di kelompok IV
g4=0.024368; %laju penyembuhan

time=[0 250];
NilaiAwal=[47972; 12396; 87000];
[t,y]=ode45(@(t,y)Model1(t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,2),'m-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal2=[116900; 10350; 69000];
[t1,y1]=ode45(@(t1,y1)Model2(t1,y1),time,NilaiAwal2);
plot(t1,y1(:,2),'y-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal3=[372623; 9350; 100000];
[t2,y2]=ode45(@(t2,y2)Model3(t2,y2),time,NilaiAwal3);
plot(t2,y2(:,2),'b-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal4=[336722; 8700; 20000];
[t4,y4]=ode45(@(t4,y4)Model4(t4,y4),time,NilaiAwal4);
plot(t4,y4(:,2),'c-', 'LineWidth',2)
hold all
xlabel('Waktu t (minggu)');ylabel('Jumlah Populasi');
legend('Populasi Infeksi Kelompok 1','Populasi Infeksi Kelompok
2', 'Populasi Infeksi Kelompok 3', 'Populasi Infeksi Kelompok
4');grid on;

clc; clear all; close all;
global v1 s1 l b1 d1 a1 m1 g1 v2 s2 p1 b2 d2 a2 m2 g2 p2 b3 d3 a3
m3 g3 p3 b4 d4 m4 g4
v1=0.85; %Rata-rata cakupan vaksinasi di kelompok I
s1=0.85; %tingkat efektifitas vaksinasi dosis I
l=65000; %laju kelahiran per minggu
b1=0.000000000167989; %laju infeksi kelompok I
d1=0.00029; %laju kematian alami
a1=0.00385; %laju penuaan kelompok I
m1=0.016; %laju kematian akibat penyakit di kelompok I
g1=0.024368; %laju penyembuhan

v2=0.8; %Rata-rata cakupan vaksinasi di kelompok II

```

```

s2=0.95; %tingkat efektifitas vaksinasi dosis II
p1=47972; %populasi orang rentan pada kelompok I
b2=0.0000000515425; %laju infeksi kelompok II
d2=0.00029; %laju kematian alami
a1=0.00385; %laju penuaan kelompok II
a2=0.00385; %laju penuaan kelompok II
m2=0.08; %laju kematian akibat penyakit di kelompok II
g2=0.024368; %laju penyembuhan

p2=116900; %populasi orang rentan pada kelompok III
b3=0.00000262981; %laju infeksi kelompok III
d3=0.00029; %laju kematian alami
a2=0.00385; %laju penuaan kelompok III
a3=0.00385; %laju penuaan kelompok III
m3=0; %laju kematian akibat penyakit di kelompok III
g3=0.024368; %laju penyembuhan

p3=372623; %populasi orang rentan pada kelompok IV
b4=0.00000285701; %laju infeksi kelompok IV
d4=0.00029; %laju kematian alami
a3=0.00385; %laju penuaan kelompok IV
m4=0; %laju kematian akibat penyakit di kelompok IV
g4=0.024368; %laju penyembuhan

time=[0 2500];
NilaiAwal=[47972; 12396; 87000];
[t,y]=ode45(@(t,y)Model1(t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,2),'m-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal2=[116900; 10350; 69000];
[t1,y1]=ode45(@(t1,y1)Model2(t1,y1),time,NilaiAwal2);
plot(t1,y1(:,2),'y-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal3=[372623; 9350; 100000];
[t2,y2]=ode45(@(t2,y2)Model3(t2,y2),time,NilaiAwal3);
plot(t2,y2(:,2),'b-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
NilaiAwal4=[336722; 8700; 20000];
[t4,y4]=ode45(@(t4,y4)Model4(t4,y4),time,NilaiAwal4);
plot(t4,y4(:,2),'c-', 'LineWidth',2)
hold all
xlabel('Waktu t (minggu)');ylabel('Jumlah Populasi');
legend('Populasi Infeksi Kelompok 1','Populasi Infeksi Kelompok
2', 'Populasi Infeksi Kelompok 3', 'Populasi Infeksi Kelompok
4');grid on;

```



## RIWAYAT HIDUP



Olivia Karinina, lahir di Kota Malang-Batu pada tanggal 25 April 1998, bisa dipanggil Oliv, tinggal di Jl Ir Soekarno Gg Badot Rt 04 Rw 03 Desa Baji Kecamatan Junrejo Kota Batu. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Siswanto dan Ibu Siti Kharomah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Beji 01 dan lulus pada tahun 2010, kemudian melanjutkan ke SMP Negeri 03 Kota Batu dan lulus pada tahun 2013. Setelah itu dia melanjutkan Pendidikan ke SMA Negeri 01 Kota Batu dan lulus pada tahun 2016. Kemudian pada tahun 2017 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Program Studi Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Olivia Karinina  
NIM : 17610097  
Fakultas/Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Perilaku Model Penyebaran Campak SIR  
Dengan Struktur Umur  
Pembimbing I : Juhari, M.Si  
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 Maret 2021	Konsultasi BAB I	1. <i>JH</i>
2.	24 Maret 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan BAB I	2. <i>JH</i>
3.	07 April 2021	Revisi BAB I	3. <i>JH</i>
4.	12 April 2021	Revisi Agama BAB I	4. <i>JH</i>
5.	20 April 2021	Konsultasi BAB II	5. <i>JH</i>
6.	03 Mei 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan BAB II	6. <i>JH</i>
7.	07 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan	7. <i>JH</i>
8.	07 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan	8. <i>JH</i>
9.	08 Juni 2021	Konsultasi BAB III	9. <i>JH</i>
10.	18 Juni 2021	Konsultasi Agama BAB III	10. <i>JH</i>
11.	16 September 2021	Revisi BAB III & Konsultasi BAB IV	11. <i>JH</i>
12.	20 Oktober 2021	Konsultasi BAB IV dan Abstrak	12. <i>JH</i>
13.	26 Oktober 2021	ACC keseluruhan untuk disidangkan	13. <i>JH</i>
14.	26 Oktober 2021	ACC keseluruhan untuk disidangkan	14. <i>JH</i>

Malang, 26 November 2021  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



*Elly Susanti*  
Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005