

**STUDI PERSAMAAN DIFUSI GERAK BROWN DI SEKITAR  
BINTANG NEUTRON TIDAK BEROTASI DAN BEROTASI**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**NURIL QOMARIYAH**  
NIM. 17640001



**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**STUDI PERSAMAAN DIFUSI GERAK BROWN DI SEKITAR  
BINTANG NEUTRON TIDAK BEROTASI DAN BEROTASI**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:**

**Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:**

**Nuril Qomariyah  
NIM. 17640001**

**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

**STUDI PERSAMAAN DIFUSI GERAK BROWN DI SEKITAR  
BINTANG NEUTRON TIDAK BEROTASI DAN BEROTASI**

**SKRIPSI**

Oleh:

Nuril Qomariyah  
NIM. 17640001

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji


Pada tanggal: 30 November 2021

Dosen Pembimbing I



Drs. Abdul Basid, M. Si  
NIP. 19650504 199003 1 003

Dosen Pembimbing II



Arista Romadani, M.Sc  
NIP. 19900905 201903 1 018

Menyetujui,  
Ketua Jurusan Fisika



Dr. Imam Tazi, M. Si  
NIP. 197410730 200312 1 002

## HALAMAN PENGESAHAN





STUDI PERSAMAAN DIFUSI GERAK BROWN DI SEKITAR  
BINTANG NEUTRON TIDAK BEROTASI DAN BEROTASI

SKRIPSI

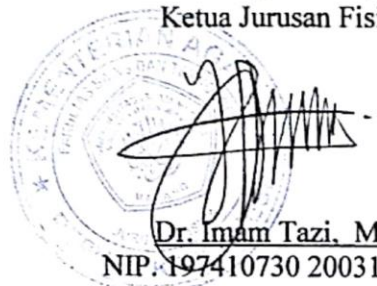
Oleh:

Nuril Qomariyah  
NIM.17640001

Telah Diperiksa di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana (S.Si)  
Tanggal 9 Desember 2021

Ketua	<u>Dr. Erna Hastuti, M.Si.</u> NIP. 19811119 200801 2 009	
Anggota I	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si.</u>	
Anggota II	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si.</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Anggota III	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Fisika

  
Dr. Imam Tazi, M. Si  
NIP. 197410730 200312 1 002

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nuril Qomariyah  
NIM : 17640001  
Jurusan : Fisika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Skripsi : Studi Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi dan Berotasi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-banar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 November 2021

Yang membuat pernyataan,



Nuril Qomariyah  
NIM. 17640001

## MOTTO

“Jika kamu bukan anak seorang raja, bukan pula anak seorang ulama besar, maka menulislah”

**Imam Al Ghazali**

“Menjadi baik itu mudah, dengan hanya diam maka yang tampak adalah kebaikan. Yang susah adalah membuat diri kita bermanfaat, karena itu butuh perjuangan”

**KH. Sahal Mahfudz**

“Reserve your right to think, for even to think wrongly is better than not to think at All”

**Hypatia**

“If we assume we’ve arrived we stop searching, we stop developing”

**Jocelyn Bell Burner**

“Berfikir dan kemudian menuliskannya adalah bagian dari perjuangan untuk memberikan kebermanfaatan bagi siapa saja, yang dampaknya tak lekang oleh ruang dan waktu.”

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Rasa syukur yang tiada henti saya panjatkan kepada Allah SWT, yang atas petunjuk dan limpahan rahmatNya selama ini. Telah memberikan kekuatan kepada saya untuk terus memiliki semangat serta keinginan mempelajari setiap ilmuNya. Dengan sebab ini Saya bisa menyelesaikan karya yang sedang anda baca. Shalawat serta Salam cinta semoga senantiasa terlimpahkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW.

Karya sederhana ini, saya persembahkan spesial kepada kedua orang tua saya yang tiada henti mendoakan kelancaran studi saya, yang tanpa doa mereka mungkin saya tidak akan bisa sampai di titik ini. Serta seluruh keluarga besar yang telah memberikan support dan dukungan saat saya belajar di tempat yang jauh dari rumah.

Karya sederhana ini, saya persembahkan untuk guru-guru saya. Mereka adalah orang-orang baik yang telah memberikan banyak pemebelajaran dalam hidup. Sebab ilmu dari mereka-mereka yang saya temui baik di bangku pendidikan ataupun di luar itu, menjadi bekal saya untuk terus melangkah.

Karya sederhana ini, saya persembahkan untuk teman, kolega, dan orang-orang baik yang tiada henti memberikan semangat, masukan, dan doa baiknya untuk kelancaran penulisan karya ini.

Terakhir, saya ucapkan terimakasih yang tak berhingga kepada DIRI saya yang telah setia membersamai hingga penulisan karya ini selesai. Yang tetap melangkah meski terkadang hilang arah. Yang tetap semangat walau terkadang menemukan kesulitan yang amat. Yang terus berjuang seperti apapun aral melintang. “Terimakasih Aku, untuk tidak bosan terus berjuang bersamaku”

Terimakasih untuk setiap orang baik yang telah Tuhan hadirkan selama proses pembelajaran panjang saya di Fisika UIN Malang dari tahun 2017 hingga saat ini saya selesai menuliskan karya ini.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah serta kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyusun skripsi yang berjudul “Studi Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi Dan Berotasi.” Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW beserta para keluarga, sahabat, dan seluruh pengikutnya hingga hari kiamat kelak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya dukungan dan bantuan dari pihak-pihak yang terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam kegiatan penyusunan skripsi ini.

Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis ucapkan kepada:

1. Dr. Imam Tazi, M.Si. selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Drs. Abdul Basid, M.Si., selaku Dosen Wali dan Pembimbing Skripsi yang telah banyak meluangkan waktu memberikan nasehat dan inspirasinya sehingga dapat melancarkan dalam proses studi di fisika Universitas Islam Negeri Malang hingga sampai selesai penulisan Skripsi.
3. Arista Romadani, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi dan Dosen Fisika Teori Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak meluangkan waktu dan pikirannya untuk memberikan bimbingan, bantuan serta pengarahan kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Erika Rani, M.Si., selaku Dosen Fisika Teori Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan ilmu dan membantu penulis dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.
5. Muhammad Taufiqi, M.Si. selaku Dosen Fisika Teori Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan ilmu dan membantu penulis dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.



6. Kedua orang tua Bapak Ahmad Mursyid dan Ibu Fatmawati dan seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan, restu, serta selalu mendoakan disetiap langkah penulis.
7. Segenap Dosen, Laboran dan Admin Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah bersedia mengajarkan ilmunya, membimbing dan memberikan pengarahan serta membantu selama proses perkuliahan.
8. Segenap ustad-ustadzah dari TK, MI, dan MTs At Taqwa serta MAN Bondowoso yang telah banyak memberikan ilmu pengetahuan serta doa barokah bagi penulis selama ini.
9. Program Bidikmisi yang dari pemeritahan yang telah membiayai proses studi saya mulai mahad hingga empat tahun pertama di Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Sahabat-sahabat penulis Dawim, Lala, Mba Aim, Mba Husna, Mba Nia dan Mba Mar'ah yang telah banyak memberikan support dan dukungan selama proses pengerjaan skripsi p enulis. Serta Keluarga Besar Fisika 17, khususnya teman-teman peminatan Teori; Risma, Rizka, Eko, Galih, dan Amin yang sudah banyak membantu penulis selama mengalami kesulitan mempelajari fisika Teori
11. Teman-teman organisasi mulai dari Gubuk Tulis, Perempuan Bergerak, Oase Coffee and Literacy, Rayon PMII 'Pencerahan' Galileo, dan WLC El Shavia terimakasih untuk pembelajaran berharga selama proses panjang pembelajaran di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dan memberikan support serta doa baiknya untuk penulis sehingga diberikan kelancaran dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat, tambahan ilmu dan dapat menjadikan inspirasi kepada para pembaca.

*Wassalamu 'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b> .....	v
<b>MOTTO</b> .....	vi
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xii
<b>DAFTAR LAMBANG</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	6
1.5 Batasan Penelitian .....	6
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	7
2.1 PorsesGerak Brown Klasik .....	7
2.1.1 PersamaanLangevin .....	12
2.1.2 Persamaan Fokker Planck .....	16
2.1.3 Gerak Brown dalam Pandangan Al Quran .....	21
2.2 Proses Terbentuknya Bintang Neutron .....	25
2.2.1 Bintang Neutron Tidak Berotasi .....	30
2.2.2 Bintang Neutron Berotasi .....	32
2.2.3 Proses Terbentuknya BintangNeutron dalam Al Quran.....	34
<b>BAB III PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK</b> .....	38
3.1 Persamaan Langevin Relativistik.....	38
3.2 Persamaan Fokker-Planck Relativistik .....	49
3.2.1 Pendekatan Ito .....	52
3.2.2 Pendekatan Stratonovich-Fisk.....	56
3.2.3 Pendekatan Hanggi-Klimontovich .....	57
<b>BAB IV PROSES DIFUSI GERAK BROWN DI SEKITAR BINTANG NEUTRON</b> .....	64
4.1 Perhitungan Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi .....	65
4.2 Perhitungan Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat .....	75
4.3 Dinamika dan Distribusi Partikel di Sekitar Bintang Neutron .....	97
<b>BAB V PENUTUP</b> .....	111
5.1 Kesimpulan .....	111
5.2 Saran .....	112
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	113
<b>LAMPIRAN</b> .....	116

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Gerak Partikel yang Mengalami Gerak Brown .....	7
Gambar 2.2 Komposisi dan Struktur Bintang Neutron .....	27
Gambar 2.3 Proses Evolusi Bintang Menjadi Bintang Neutron .....	29
Gambar 4.1 Grafik Gaya Gravitasi di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi .....	68
Gambar 4.2 Grafik Gaya Gravitasi di Sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat.....	81
Gambar 4.3 Grafik Gaya Gravitasi di Sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat untuk Komponen $F_{g1}$ dan $F_{g2}$ .....	81
Gambar 4.3 Grafik Gaya Gesek Relativistik pada Koordinat Hiperbolik .....	99

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A. Penurunan Persamaan Difusi Kramer Relativistik Umum .....	120
Lampiran B. Perhitungan Komponen Simbol Christoffel Bintang Neutron Berotasi Cepat.....	127
Lampiran C. Perhitungan Komponen Koefisien Hubungan Spin Bintang Neutron Berotasi Cepat.....	141
Lampiran D. Script Grafik Komponen Gaya Gravitasi Relativistik di Sekitar Bintang Neutron pada Koordinat Hiperbolik .....	148
Lampiran E. Script Grafik Komponen Gaya Gesek Relativistik pada Koordinat Hiperbolik.....	149
Lampiran F. Bukti Konsultasi Skripsi .....	150

## DAFTAR LAMBANG

$D$	:	Koefisien Difusi
$\phi$	:	Rapat Probabilitas
$g^{ij}$	:	Tensor metrik kontravarian
$g_{ij}$	:	Tensor metrik kovarian
$\lambda$	:	Panjang gelombang
$e_M^\mu$	:	Basis kovarian
$e_N^\nu$	:	Basis kontravarian
$\Omega_{\mu N}^M$	:	Koefisien hubungan spin
$\Gamma_{\mu\rho}^\nu$	:	Simbol Crishtoffel
$\kappa_a^i$	:	Tensor gesekan
$\Delta_u$	:	Operator Laplace-Beltrami
$\omega$	:	Frekuensi sudut
$\xi$	:	Gaya fluktuasi
$K_B$	:	Konstanta Blotzman
$\partial$	:	Diferensial parsial
$M$	:	Massa Bintang Neutron
$ds^2$	:	Elemen garis

## ABSTRAK

Qomariyah, Nuril. 2021. **Studi Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi dan Berotasi**. Skripsi. Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Arista Romadani, M.Sc.

---

**Kata Kunci** : Bintang Neutron, Gerak Brown, Proses Difusi, Relativitas Umum

Teori gerak Brown selalu menarik untuk dikaji khususnya untuk menggambarkan proses difusi di sekitar benda masif, yang dalam studi ini adalah bintang neutron. Dengan tujuan untuk mengetahui proses difusi gerak Brown di sekitar bintang neutron tidak berotasi dan berotasi. Analisis dalam studi ini dilakukan dengan menggunakan persamaan Langevin dan Fokker-Planck dalam kerangka relativistik umum, untuk mengetahui dinamika dan distribusi partikel di sekitar bintang neutron. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini menggambarkan bawa dinamika yang terjadi disekitar bintang neutron disebabkan adanya gaya eksternal total ( $F^\alpha, F^\beta, dan F^\phi$ ) yang merupakan penjumlahan dari gaya gravitasi ( $F_g^\alpha, F_g^\beta, dan F_g^\phi$ ) dengan gaya gesek ( $F_f^\alpha, F_f^\beta, dan F_f^\phi$ ) dalam kerangka relativistik dan koordinat hiperbolik, gaya gesek yang ditimbulkan di sini berasal dari adanya tumbukan partikel yang bergerak secara acak. Untuk distribusi partikel di sekitar bintang neutron bergantung pada nilai fungsi rapat probabilitas  $\phi(t, x, u)$  serta tensor kecepatan-4. Analisa lebih lanjut dilakukan karena persamaan difusi yang diperoleh berupa persamaan diferensial yang panjang, sehingga dilakukan analisis lanjutan secara asimtotik pada bintang neutron tidak berotasi dengan mengasumsikan nilai  $r \rightarrow \infty$  dan  $e^{\nu(r)} = e^{\lambda(r)} = 1$  dan diperoleh pada bintang neutron tidak berotasi distribusi partikel di sekitarnya tetap bergantung pada nilai kecepatan-4 namun untuk koordinatnya hanya bergantung pada koordinat radial saja. Sedangkan untuk bintang neutron berotasi cepat tidak dapat dilakukan pendekatan dengan kondisi asimtotik karena seluruh suku dari persamaan difusi yang diperoleh mengandung variabel  $r$ , sehingga analisis dilakukan pada persamaan akhir yang diperoleh dan didapatkan variabel baru yakni  $\theta, \varphi, dan a$ . Selain itu pada bintang neutron berotasi cepat distribusi partikel yang ada disekitarnya juga dipengaruhi oleh kelengkungan ruang-waktu serta frekuensi sudut  $\omega$  dan kecepatan-4.

## ABSTRACT

Qomariyah, Nuril. 2021. **Study Difusion Equations of Brownian Motion Around Non-Rotating and Rotating Neutron Stars**. Thesis. Physics Departement, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Arista Romadani, M.Sc.

---

---

**Keywords:** Brownian Motion, Diffusion Process, General Relativity, Neutron Star,

Brownian motion theory is always interesting to study, especially to describe the process of diffusion around a massive object, which in this study is a neutron star. With the aim of knowing the process of diffusion of Brownian motion around a non-rotating and rotating neutron star. The analysis in this study was carried out using the Langevin and Fokker-Planck equations in a general relativistic framework, to determine the dynamics and distribution of particles around the neutron star. The results obtained in this study illustrate that the dynamics that occur around the neutron star are caused by the total external force ( $F^\alpha, F^\beta, \text{and } F^\phi$ ) which is the sum of the gravitational forces ( $F_g^\alpha, F_g^\beta, \text{and } F_g^\phi$ ) with frictional forces ( $F_f^\alpha, F_f^\beta, \text{and } F_f^\phi$ ) in a relativistic framework and hyperbolic coordinates, the frictional force generated here comes from the collision of particles moving randomly. For the distribution of particles around the neutron star, it depends on the value of the probability density function ( $t, x, u$ ) and the 4-velocity tensor. Further analysis was carried out because the diffusion equation obtained was in the form of a long differential concurrent, so further analysis was carried out asymptotically on a non-rotating neutron star assuming the values of  $r \rightarrow \infty$  and  $e^\nu(r) = e^\lambda(r) = 1$  and obtained in a non-rotating neutron star, the distribution of particles around it still depends on the value of velocity-4 but the coordinate only depends on the radial coordinates. As for fast-rotating neutron stars, an asymptotic approach cannot be carried out because all terms of the obtained diffusion equation contain the variable  $r$ , so the analysis is carried out on the final equation obtained and new variables are obtained, namely  $\theta, \varphi, \text{and } a$ . In addition, in fast-rotating neutron stars, the distribution of the surrounding particles is also influenced by the curvature of space-time and the angular frequency  $\omega$  and velocity-4

## المخلص

القمرية، نوريل. 2021 . دراسة معادلات الانتشار ذات الحركة البنية حول نجوم نيوترون غير المتجذرة وتأصيلها . البحث الجامعي. قسم الفيزياء. كلية العلوم و التكنولوجيا في جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفة (ا) عبد الباسط، الماجستير، (ا) و أريستار مضاني، الماجستي الكلمات المفتاحية: النجم النيوتروني ، الحركة البراونية ، عملية الانتشار ، النسبية العام

دائمًا ما تكون نظرية الحركة البراونية مثيرة للاهتمام للدراسة ، خاصة لوصف عملية الانتشار حول جسم ضخم ، والذي في هذه الدراسة هو نجم نيوتروني. بهدف معرفة عملية انتشار الحركة البراونية حول نجم نيوتروني غير دوار ودوران. تم إجراء التحليل في هذه الدراسة باستخدام معادلات لانجفين وفوكر بلانك في إطار نسبي عام ، لتحديد ديناميكيات وتوزيع الجسيمات حول النجم النيوتروني. توضح النتائج التي تم الحصول عليها في هذه الدراسة أن الديناميكيات التي تحدث حول النجم النيوتروني ناتجة عن إجمالي القوة مع قوى الاحتكاك  $(F_g^\alpha, F_g^\beta, \text{ و } F_g^\phi)$  وهو مجموع قوى الجاذبية  $(F^\alpha, F^\beta, \text{ و } F^\phi)$  الخارجية في إطار نسبي وإحداثيات زائدية ، تأتي قوة الاحتكاك الناتجة هنا من اصطدام  $(F_f^\alpha, F_g^\beta, \text{ و } F_g^\phi)$  الجسيمات التي تتحرك بشكل عشوائي. لتوزيع الجسيمات حول النجم النيوتروني ، يعتمد ذلك على قيمة دالة وموتر 4 سرعات. تم إجراء مزيد من التحليل لأن معادلة الانتشار التي تم  $(t, x, u)$  كثافة الاحتمال الحصول عليها كانت في شكل متزامن تفاضلي طويل ، لذلك تم إجراء مزيد من التحليل بشكل مقارب على وتم الحصول عليها في  $e^\nu(r) = e^\lambda(r) = 1$  و  $r \rightarrow \infty$  نجم نيوتروني غير دوار بافتراض قيم ولكنه يعتمد فقط على speed-4 نجم نيوتروني غير دوار ، لا يزال توزيع الجسيمات حوله يعتمد على قيمة الإحداثيات الشعاعية. وفي الوقت نفسه ، بالنسبة للنجوم النيوترونية سريعة الدوران ، لا يمكن تنفيذ نهج ، لذلك يتم إجراء  $r$  مقارب لأن جميع شروط معادلة الانتشار التي تم الحصول عليها تحتوي على المتغير التحليل على المعادلة النهائية التي تم الحصول عليها والحصول على متغيرات جديدة ، بالإضافة إلى ذلك ، في النجوم النيوترونية سريعة الدوران ، يتأثر توزيع الجسيمات  $\theta, \varphi, \text{ dan } a$  وهي المحيطة أيضًا بانحناء الزمكان والتردد الزاوي والسرعة -4



# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Difusi secara umum diketahui sebagai proses perpindahan suatu zat atau partikel dari lingkungan berkonsentrasi tinggi ke konsentrasi lebih rendah. Proses difusi merupakan bagian *stochastic processes* yang terlihat berdasarkan dua sifat yakni properti Markovian dan kontinuitas lintasan. Hal ini kemudian yang menjadikan proses difusi menjadi solusi gerak mikro-partikel dalam material tertentu yang disebabkan oleh gerak acak dari masing-masing mikro-partikel tadi. Dalam Al Quran partikel diindikasikan sebagai objek yang sangat kecil dan tidak dapat dibagi lagi, yakni disebutkan dengan istilah *dzarrah* dalam surah Az Zalzalah [99] ayat 7-8

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ (v) وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ

*“Barangsiapa yang mengerjakan kebajikan seberat dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan) nya. Dan barang siapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula.”*

Beberapa tipe dari proses difusi yang terjadi pada partikel ini meliputi gerak brownian, gerak brownian pantulan, dan proses Ornstein-Unhelbeck, dari ketiga tipe ini gerak brownian merupakan proses difusi paling mendasar atau juga dikenal dengan proses Wiener (Andra, 2017).

Sebelum ditemukan gerak brown pada partikel, pada tahun 1822 Fourier melakukan pengamatan terkait distribusi panas pada material untuk merumuskan persamaan panas (Grattan, 2005). Lima tahun kemudian Robert Brown (1827) ahli botani dari Skotlandia melakukan pengamatan menggunakan mikroskop untuk mengamati gerak partikel serbuk sari yang dilarutkan dalam cairan.

Pengamatan ini memberikan kesimpulan bahwa, partikel bergerak secara acak (tidak teratur) dan terus menerus, gerak acak ini semakin cepat apabila suhu cairan dinaikkan atau semakin tinggi, ini yang dinamakan gerak Brown. Namun, hasil pengamatan Robert Brown belum bisa menjelaskan mengapa partikel tadi dapat bergerak secara acak (Powles,1978).

Gerak Brown diakui sebagai salah satu tipe dari proses difusi setelah pada tahun 1905 Einstein melakukan penelitian untuk mengetahui penyebab gerak acak pada partikel tersebut (Einstein, 1956). Dari hasil pengamatan Einstein diperoleh bahwa partikel dapat bergerak secara acak disebabkan adanya interaksi antara partikel dengan molekul yang menyusun fluida atau cairan yang memiliki perbedaan dari segi ukuran.

Ukuran molekul fluida yang jauh lebih kecil dan kuantitasnya lebih banyak dibandingkan partikel menyebabkan terjadi tumbukan secara kontinu. Hal ini menyebabkan terjadi ketidak-seimbangan gaya pada partikel yang membuat partikel terus bergerak ke segala arah secara acak (Palacios, 2004).

Hasil pengamatan Einstein ini menjadikan konsep gerak brown diminati oleh banyak peneliti dari berbagai bidang kajian keilmuan, untuk mengamati proses acak yang terjadi di alam semesta, termasuk dalam bidang Astrofisika. Menjadi menarik menerapkan konsep gerak brown pada benda langit mulai dari ruang plasma antar galaksi yang terdiri atas partikel bermuatan, gerak partikel di sekitar lubang hitam, hingga gerak partikel di sekitar bintang neutron. Namun karena adanya efek relativistik yang terjadi pada benda-benda langit tersebut maka konsep proses difusi ini perlu dikembangkan pada ranah relativistik, dengan mempertimbangkan kerangka acuan pengamat .

Terkait gerak brown dalam kerangka relativistik telah dilakukan beberapa pengamatan yang menjelaskan proses terjadinya gerak tersebut. Mulai dari Debbasch yang meneliti terkait difusi relativistik ruang Minkowski. Debbasch juga melakukan penelitian pada proses Ornstein-Uhlenbeck relativistik serta lipatan lengkung (Debbasch, 1997). Penelitian lanjutan terkait gerak brown relativistik di ruang minkowski dilakukan oleh Dunkel dan Hanggi di tahun 2005, mereka berdua mengajukan perihal perilaku asimtotik varian difusi. Dunkel dan Hanggi, melakukan penelitian pada gerak Brown relativistik kasus 1+1 dimensi dan ditahun yang sama pada kasus 3+1 dimensi (Dunkel, 2005).

Franchi dan Le pada tahun 2007 menganalisis difusi relativistik pada Manifold Lorentz. Ditahun yang sama Franchi bersama Angst menentukan teorema batas pusat untuk kelas difusi Minkowski baik pada proses Ornstein-Uhlenbeck dan difusi Dunkle Hanggi. Herrman dari tahun 2009-2010 melakukan penelitian proses difusi baik secara relativitas khusus maupun relativitas umum. Kemudian, di tahun 2011 Calogero mengajukan model baru untuk dinamika partikel yang mengalami difusi dalam kerangka relativitas umum, yang menunjukkan ketidakcocokan antara persamaan Fokker Planck dan persamaan medan Einstein (Andra, 2017).

Persamaan Fokker Planck mampu menggambarkan posisi sebuah partikel serta waktu evolusi dari fungsi kepadatan probabilitas, selain itu persamaan ini juga dapat mendeskripsikan statistik gerak Brown bahkan untuk dinamika banyak partikel pada fisika statistik (Kadanoff,2000).Pengaplikasian Gerak Brown di berbagai disiplin keilmuan sangat luas, terlebih untuk kasus-kasus astrofisika. Berbagai fenomena distribusi partikel pada benda langit dapat diketahui, serta

tidak menutup kemungkinan kedepannya dapat mengungkap kondisi dari alam semesta.

Salah satu objek astrofisika yang bisa dikaji melalui persamaan Fokker Planck ini adalah, proses difusi partikel di sekitar bintang neutron. Pengamatan yang dilakukan terlihat bahwa partikel-partikel gas yang bergerak menuju bintang kompak pergerakannya ditentukan oleh kelengkungan ruang-waktu, pergerakan partikel gas ini dapat dilihat sebagai proses difusi. Untuk memahami terkait pergerakan partikel ini, maka diperlukan kajian khusus pada proses difusi yang memenuhi teori relativitas Einstein (Andra, 2014).

Partikel-partikel gas yang bergerak menuju bintang-bintang kompak dikenal dengan piringan akresi. Dengan melakukan kajian pada teori relativitas Einstein, nantinya dapat diketahui pengaruh massa dan energi terhadap kelengkungan ruang waktu. Dimana di sini akan terlihat bahwa dengan kepadatan energi yang lebih tinggi akan mengakibatkan kelengkungan ruang-waktu yang lebih besar dan sebaliknya, sehingga kelengkungan ruang-waktu di sekitar bintang kompak menjadi sangat besar.

Mulanya bintang neutron diperkenalkan oleh William Baade dan Fritz Zwicky, pada tahun 1934. Proses supernova yang terjadi pada akhir masa dari suatu bintang merupakan proses transisi yang terjadi pada bintang biasa menuju objek baru yakni adalah bintang neutron. Dimana yang sebagian besar terdiri dari neutron, dan bintang seperti itu mungkin memiliki jari-jari yang sangat kecil serta kepadatan yang sangat tinggi (Adam, 2015). Penemuan berlanjut 30 tahun kemudian, pada tahun 1967 melalui penelitian seorang fisikawan perempuan, Jocelyn Bell. Yang menemukan adanya pulsar berupa sinyal radio yang berulang

secara periodik. Setahun berikutnya dikonfirmasi oleh Gold dan Pacini, bahwa pulsar tersebut merupakan bintang neutron yang berotasi (Gold, 1969).

Untuk itu, penelitian ini berfokus pada kajian analitik proses difusi relativistik yang terjadi pada partikel di sekitar bintang neutron tidak berotasi dan berotasi cepat. Dengan meninjau dinamika partikel di sekitar bintang neutron tersebut menggunakan Persamaan Langevin, serta distribusi partikel yang terjadi menggunakan Persamaan Fokker Planck. Sehingga dilakukanlah studi teoritis yang mengkaji secara analitik proses gerak brown pada bintang dua objek neutron di atas, dengan judul **Studi Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi dan Berotasi** yang nantinya pengaruh dinamika gravitasi terhadap partikel di sekitar bintang neutron dapat dianalisis dari hasil plot grafik yang telah didapatkan.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana dinamika partikel di sekitar bintang neutron yang tidak berotasi dan berotasi?
2. Bagaimana distribusi partikel di sekitar bintang neutron yang tidak berotasi dan berotasi?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui dinamika partikel di sekitar bintang neutron yang tidak berotasi dan berotasi

2. Untuk mengetahui distribusi partikel di sekitar bintang neutron yang tidak berotasi dan berotasi

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui proses difusi relativistik secara umum dan secara khusus penerapannya pada Bintang Neutron Tidak berotasi
2. Sebagai dasar untuk penelitian selanjutnya, khususnya dalam memahami proses difusi pada bintang neutron berotasi lambat dan berotasi cepat
3. Sebagai dasar untuk penelitian dalam memahami proses difusi yang terjadi pada inti bintang neutron.

#### **1.5 Batasan Penelitian**

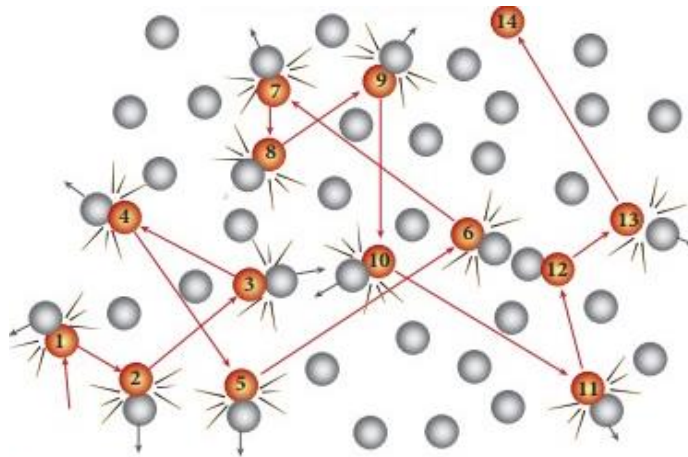
Batasan masalah yang perlu diperhatikan dalam penelitian ini meliputi:

1. Kerangka acuan yang digunakan berupa kerangka acuan inersia
2. Proses difusi gerak Brown ditinjau dalam kerangka relativistik umum
3. Proses difusi yang ditinjau adalah menggunakan persamaan Fokker Planck
4. Bintang neutron yang ditinjau adalah bintang neutron tidak berotasi dan berotasi cepat

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Porses Gerak Brown Klasik

Gerak Brown merupakan gerak terus-menerus (kontinu) secara acak dari partikel yang dimasukkan dalam fluida tertentu (gas atau cair). Pertama kali diamati oleh Robert Brown, botanis dari Skotlandia pada tahun 1827, melalui pengamatan pada gerak acak yang ditimbulkan dari partikel serbuk sari yang tersuspensi di dalam air. Brown meneliti dengan sangat sistematis gerak dari partikel serbuk sari ini yang tidak teratur dengan lintasan ke segala arah, dan akan meningkat kecepatannya jika suhu dari fluida tadi di naikkan. Gerak brown diilustrasikan seperti pada gambar di bawah ini (Palacios,2004)



**Gambar 2.1 Gerak Partikel yang Mengalami Gerak Brown**

(Sumber Gambar : <https://www.shutterstock.com/th/image-illustration/brownian-motion>)

Halliday dan Resnick menyampaikan bahwa tidak terdapat keterangan kuantitatif tentang peristiwa ini hingga dikembangkan teori kinetik. Nelson mengungkapkan bahwa penelitian terkait gerak Brown yang bisa didokumentasikan pada saat itu adalah eksperimen Gouy ( Nelson, 2001 ).

Kesimpulan dari penelitian Gouy dituangkan dalam tujuh poin utama berikut ( Nelson, 2001 ):

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung
2. Dua *dzarrah* nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibanding diameter mereka
3. Gerakan ini semakin cepat untuk zarah yang semakin kecil
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan *dzarrah*
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti

Berdasarkan kajian yang dilakukan oleh Gracia Palacios, menuliskan bahwa dari dua pengamatan di atas tidak ada yang menjelaskan terkait sebab terjadinya gerak Brown, sebatas sifat-sifat dari gerak Brown saja. Terkait penyebab munculnya gerak Brown ini Einstein melakukan pengamatan pertama kali, dengan mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari berasal dari gerak terus-menerus partikel yang terus bertumbukan dengan gerak yang tidak teratur dan hanya bisa dijelaskan dengan konsep probabilistik (Palacios, 2004).

Dibuat permisalan terdapat total  $n$  partikel yang tersuspensi dalam cairan. Dalam selang waktu  $\tau$ , koordinat  $X$  dari masing-masing partikel akan meningkat sebesar  $\Delta$ , dimana untuk setiap partikel  $\Delta$  memiliki nilai yang berbeda (positif atau negatif). Akan ada hukum frekuensi tertentu untuk  $\Delta$ ; bilangan  $dn$  partikel yang mengalami pergeseran  $\Delta$  dan  $\Delta + d\Delta$  dapat dituliskan dalam bentuk persamaan  $dn = n\phi(\Delta)d\Delta$ , dengan  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta=1$  dan  $\phi$  hanya berbeda dari nol untuk nilai  $\Delta$



yang sangat kecil, dan memenuhi syarat  $\phi(-\Delta) = \phi(\Delta)$  (Palacios, 2004).

Selanjutnya ditentukan bagaimana kemudian difusi bergantung pada nilai  $\phi$ . Dalam kasus ini dibatasi jumlah partikel per satuan volume hanya bergantung pada  $x$  dan  $t$ . Misalkan  $f(x,t)$  adalah banyaknya partikel pada waktu  $\tau + t$  dari distribusi pada waktu  $t$ . Dari definisi fungsi  $\phi(\Delta)$  mudah untuk mencari bilangan partikel yang pada waktu  $\tau + t$  ditemukan di antara dua bidang tegak lurus sumbu  $x$  dan melewati titik  $x$  dan  $x+dx$ . Sehingga diperoleh (Palacios, 2004):

$$f(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t)\phi(\Delta)d\Delta \quad (2.1)$$

karena nilai  $\tau$  di sini sangat kecil, sehingga dapat diatur

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.2)$$

selanjutnya dilakukan perluasan nilai  $f(x + \Delta, t)$  dalam  $\Delta$  dapat dituliskan

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots \quad (2.3)$$

dari deret di atas dapat digunakan integral, karena hanya nilai kecil  $\Delta$  yang berkontribusi pada persamaan ini, sehingga didapatkan

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = f \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta \quad (2.4)$$

Karena  $\phi(-\Delta) = \phi(\Delta)$ , suku kedua, keempat, dan lainnya di sisi kanan lenyap, sementara suku ke-1, ke-3, ke-5, dan lainnya, masing-masing sangat kecil dibandingkan dengan sebelumnya. Dari persamaan ini didapatkan, dengan mempertimbangkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1 \quad (2.5)$$

diatur agar

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta = D \quad (2.6)$$

dan hanya mempertahankan suku ke-1 dan ke-3 dari kanan

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

persamaan yang telah didapatkan di atas ini dikenal dengan persamaan diferensial difusi dan dapat dilihat bahwa  $D$  adalah koefisien difusi.

Berdasarkan persamaan (2.7) dapat dicari solusinya menggunakan transformasi Fourier. Dengan  $f(x, t)$  adalah transformasi Fourier memenuhi

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(x, t) \quad (2.8)$$

dengan invers dari transformasi di atas

$$F(x, t) = \int dx e^{ikx} f(x, t) \quad (2.9)$$

persamaan (2.8) ini disubstitusikan ke persamaan difusi (2.7) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \left[ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(x, t) \right]}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \left[ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(x, t) \right]}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} &= D \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= -Dk^2 F \end{aligned} \quad (2.10)$$

dari persamaan (2.10) kemudian diintegalkan untuk mendapatkan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{F} &= -Dk^2 \partial t \\ \int \frac{\partial F}{F} &= \int -Dk^2 \partial t \\ F &= e^{-Dk^2 t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

solusi persamaan (2.11) dimasukkan ke persamaan (2.8) sehingga didapatkan

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} e^{-Dk^2 t} \quad (2.12)$$

dengan

$$\begin{aligned} e^{ikx} e^{-Dk^2 t} &= \exp(ikx - Dk^2 t) \\ &= \exp\left(ikx - Dk^2 t + \frac{x^2}{4Dt} - \frac{x^2}{4Dt}\right) \\ &= \exp\left(Dt \left[\frac{ikx}{Dt} - k^2 + \frac{x^2}{4(Dt)^2}\right] - \frac{x^2}{4Dt}\right) \\ &= \exp\left(-Dt \left[k^2 - \frac{ikx}{2Dt} - \frac{ikx}{2Dt} + \left(\frac{x}{2Dt}\right)^2\right] - \frac{x^2}{4Dt}\right) \\ &= \exp\left(-Dt \left[k - \frac{ix}{2Dt}\right]^2 - \frac{x^2}{4Dt}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

persamaan (2.13) disubstitusikan ke persamaan (2.12) menjadi

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-Dt \left(k - \frac{ix}{2Dt}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \\ &= \frac{e^{-x^2/4Dt}}{2\pi} \int dk e^{-Dt \left(k - \frac{ix}{2Dt}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

bentuk integral pada persamaan di atas memiliki bentuk yang sama dengan integral Gaussian sebagai berikut

$$\int dk e^{-a(k-b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2.15)$$

sehingga persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{e^{-x^2/4Dt}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \\ &= \frac{e^{-x^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

persamaan (2.16) ini memiliki bentuk yang sama dengan distribusi Gauss

$$P\{x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma)^2}\right) \quad (2.17)$$

berdasarkan kesamaan bentuk dua persamaan di atas, nilai  $4Dt$  adalah koefisien difusi serta simpangan baku  $(\sigma)^2$  pada distribusi Gauss (2.17) memperlihatkan bagaimana sebaran partikel dalam suatu interval tertentu. Kondisi ini dapat dituliskan dalam bentuk perpindahan setiap partikel yang bergerak searah sumbu- $x$ , sebagai berikut

$$\lambda_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (2.18)$$

persamaan ini menunjukkan sifat dari gerak serta nilai koefisien difusi dengan beberapa asumsi, tapi tidak memperlihatkan teori dinamika dari gerak Brown.

### 2.1.1 Persamaan Langevin

Selang beberapa waktu setelah Einstein menerbitkan karyanya, Langevin mempresentasikan metode baru yang sangat berbeda dari sebelumnya. Dari mekanika statistik, diketahui bahwa energi kinetik rata-rata partikel Brown harus dalam kondisi kesetimbangan, mencapai nilai tertentu (Palacios, 2004).

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} K_B T \quad (2.19)$$

dengan  $K_B$  adalah konstanta Boltzman dan  $T$  adalah suhu partikel pada gas ideal.

Terdapat dua gaya yang mempengaruhi partikel bermassa  $m$ , yaitu (Palacios, 2004):

- a. Gaya kental, dengan asumsi bahwa ini diberikan dengan rumus yang sama seperti dalam hidrodinamika makroskopik, yakni  $-a \frac{dx}{dt}$ , dengan  $a$  adalah tetapan gaya hambat mengikuti gaya Stokes  $a = 6\pi\mu r$ , dimana nilai  $\mu$  adalah

viskositas dan  $r$  diameter partikel, sedangkan tanda negatif memperlihatkan gaya hambat yang berlawanan arah dengan kecepatan partikel.

b. Gaya berfluktuasi  $\xi(t)$ , yang menunjukkan dampak tak henti-hentinya gerakan molekul cairan pada partikel Brown. Semua hal tersebut merupakan kekuatan tarik menarik dan tolak menolak yang besarnya sedemikian rupa sehingga mempertahankan agitasi partikel, yang akan dihentikan oleh resistensi kental tanpanya.

Persamaan gerak untuk posisi partikel diberikan oleh hukum Newton sebagai berikut (Palacios, 2004):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \frac{dx}{dt} + \xi(t) \quad (2.20)$$

Persamaan Langevin adalah persamaan diferensial stokastik yang, menggambarkan distribusi kecepatan ketika partikel mengalami tumbukan maupun dinamika dari partikel itu sendiri ketika bergerak secara acak. Penggambaran ini dimaksudkan untuk mengembangkan analisis agar dapat mengetahui evolusi dari suatu rapat peluang lintasan dari gerak Brown saat bergerak di lintasan tertentu. Tiap ruas persamaan di atas dikalikan dengan  $x(t)$  *differentiable* sehingga (Palacios, 2004),

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} x = -a \frac{dx}{dt} x + \xi(t)x \quad (2.21)$$

dengan mengikuti aturan Leibniz sebagaimana berikut

$$\begin{aligned} xu &= x \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} \\ x \frac{du}{dt} &= x \frac{d(xu)}{dt} - u^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - u^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

sehingga didapatkan persamaan baru

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m \frac{d^2 x^2}{dt^2} - u^2 &= -a \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} + \xi(t)x \\ \frac{1}{2}m \frac{d^2}{dt^2}(x^2) - mv^2 &= -a \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2) + \xi(t)x\end{aligned}\quad (2.23)$$

fungsi  $\xi(t)$  adalah gaya fluktuatif yang muncul sebab adanya tumbukan secara terus menerus antara partikel dengan molekul-molekul fluida dari berbagai arah. Ini menyebabkan  $\xi(t)$  memiliki gerakan secara acak dengan ketidakteraturan lintasan yang sangat tinggi, sehingga persamaan (2.23) bukan lagi persamaan differensial biasa.

Dapat diasumsikan dari persamaan (2.23) adanya sekelompok partikel Brown dengan kondisi yang sama, sehingga dapat dituliskan bentuk umum rata-rata partikel sebagai berikut

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle mv^2 \rangle = -\frac{a}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle + \langle \xi(t)x \rangle \quad (2.24)$$

sebab ketidak-teraturan pada  $\xi(t)$  sehingga perkalian  $\langle \xi(t)x \rangle$  menuju ke 0.

Persamaan di atas dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle mv^2 \rangle = -\frac{a}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \quad (2.25)$$

meninjau kembali persamaan (2.19) maka didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle &= mv^2 \\ \frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle &= K_B T \\ m \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + a \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle &= 2K_B T\end{aligned}\quad (2.26)$$

persamaan (2.26) dicari solusinya dengan asumsi  $\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = A$  dan  $\langle x^2 \rangle = b$  maka

$$mA^2b + aAb = 2K_B T \quad (2.27)$$

persamaan (2.27) selanjutnya dikalikan dengan  $\frac{1}{m}$  didapatkan:

$$A^2b + \frac{a}{m}Ab = \frac{2K_B T}{m} \quad (2.28)$$

kemudian dibuat permisalan untuk  $\frac{a}{m} = Y$ , sehingga persamaan dapat dituliskan dalam bentuk persamaan differensial linear orde satu:

$$\begin{aligned} A^2b + YAb &= \frac{2K_B T}{m} \\ Ab(A + Y) &= \frac{2K_B T}{m} \end{aligned} \quad (2.29)$$

solusi untuk persamaan (2.29) adalah dengan metode faktor integral. Misalkan  $B = Ab$ ,  $P(t) = Y$ , dan  $Q(t) = \frac{2K_B T}{m}$  maka diperoleh penyelesaiannya sebagai berikut

$$\begin{aligned} B e^{\int P(t) dt} &= \int [Q(t) e^{\int P(t) dt}] dt + C \\ A b e^{\int Y dt} &= \int \left[ \frac{2K_B T}{m} e^{\int Y dt} \right] dt + C \\ A b e^{Yt} &= \int \left[ \frac{2K_B T}{m} e^{Yt} \right] dt + C \\ A b &= e^{-Yt} \int \left[ \frac{2K_B T}{m} e^{Yt} \right] dt + e^{-Yt} C \\ A b &= e^{-Yt} \frac{2K_B T}{mY} e^{Yt} + e^{-Yt} C \\ A b &= \frac{2K_B T}{mY} + C e^{-Yt} \end{aligned} \quad (2.30)$$

kembali pada permisalan awal dimana  $\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = A$ ,  $\langle x^2 \rangle = b$  dan  $\frac{a}{m} = Y$ , maka diperoleh

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2K_B T}{m \frac{a}{m}} + C e^{-Yt} \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = \frac{2K_B T}{a} + Ce^{-\gamma t}$$

dengan C adalah konstanta, ketika t sangat kecil dan mencapai nilai  $t = 10^{-8}$  maka nilai dari peluruhan  $Ce^{-\gamma t}$  akan mendekati nol, sehingga

$$\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = \frac{2K_B T}{a} \quad (2.32)$$

dari kedua ruas persamaan di atas kemudian diintegrasikan

$$\begin{aligned} d\langle x^2 \rangle &= \frac{2K_B T}{a} dt \\ \int_{x_0}^x d\langle x^2 \rangle &= \int_0^t \frac{2K_B T}{a} dt \\ x^2 - x_0^2 &= \frac{2K_B T}{a} t \end{aligned} \quad (2.33)$$

dalam menggunakan pendekatan Einstein pada persamaan (2.18) diperoleh nilai  $x^2 - x_0^2 = 2Dt$  sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} 2Dt &= \frac{2K_B T}{a} t \\ D &= \frac{K_B T}{a} \end{aligned} \quad (2.34)$$

sehingga diperoleh persamaan koefisien difusi untuk suatu partikel Brown adalah D, dengan  $K_B$  adalah konstanta Boltzman, dan T adalah temperatur partikel pada gas ideal dan  $a$  adalah gaya stokes.

### 2.1.2 Persamaan Fokker Planck

Persamaan Fokker Planck adalah bentuk persamaan difusi partikel yang saling berinteraksi, persamaan ini menggambarkan distribusi yang terjadi pada partikel pada suatu sistem dengan banyak partikel yang terus-menerus bertumbukan. Persamaan ini juga sering disebut dengan persamaan kolmogorov maju. Tumbukan yang terjadi secara terus-menerus pada partikel ini menyebabkan



abkan perubahan arah gerak partikel secara acak. Partikel yang bergerak secara acak dan kontinu ini merupakan partikel Brownian yang mengalami proses difusi dengan fungsi distribusi  $f(\vec{r}, v, t)$ . Karena mengikuti proses Markov, gerakan partikel ini tidak dipengaruhi oleh gerakan partikel sebelumnya (Palupi, 2010).

Jika partikel pada suatu waktu mengalami pergeseran  $X(t)$  dan fungsi distribusi  $f(\vec{r}, v, t)$  dinyatakan dalam probabilitas transisi posisi  $x_0$  pada saat menjadi  $x$  dengan waktu  $t$  adalah  $P(x, t)$  dengan nilai  $s, t$ . Maka fungsi distribusi atau rapat probabilitas transisi dapat dituliskan (Palupi, 2010):

$$p(x_0, s; x, t)dx = Pr\{x \leq X(t) < x + dx | X(t_0) = x\} \quad (2.35)$$

dengan

$$P(x_0, s; x, t) = Pr\{x \leq X(t) < x + dx | X(t_0) = x\} \quad (2.36)$$

Rapat probabilitas transisi ini hanya bergantung pada selang interval  $(t-s)$  untuk proses yang homogen. Sehingga dapat dinyatakan hanya dengan parameter  $x_0, x, (t-s)$  saja. Sehingga  $Pr\{x \leq X(t) < x + dx | X(t_0) = x\}$  dapat dinyatakan sebagai  $p(x_0, x; t)dx$  untuk sebarang  $t_0$ . Rapat probabilitas transisi berdasarkan persamaan Chapman-Kolmogorov dapat dituliskan sebagai berikut (Palupi, 2010):

$$p(x_0, s; x, t)dx = \int p(x_0, s; z, v)p(z, v; x, t)dz \quad (2.37)$$

Misal partikel Brownian mengalami perpindahan sejauh  $\Delta x$  dalam interval waktu yang singkat  $\Delta t$  maka total pergeseran dalam waktu  $t$  adalah  $X(t)$  setelah melakukan  $N$  langkah dapat dinyatakan dalam bentuk

$$X(t) = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.38)$$

Dimana  $Z_i$  di sini merupakan variabel random yang menyatakan jarak pada langkah ke- $i$ . Pada setiap langkah memerlukan waktu sekitar  $\Delta t$ , maka banyaknya langkah adalah  $N = (t/\Delta t)$ . Jarak pada saat partikel bergerak maju berupa  $+\Delta x$  atau  $-\Delta x$  saat bergerak mundur. Probabilitas jarak dari keduanya ini kemudian dimisalkan dengan  $p$  dan  $q$ , sehingga probabilitas total kedua gerakan ini adalah  $p + q = 1$ . Harga harap untuk pergeseran ke- $i$  dapat dituliskan sebagai (Palupi, 2010)

$$\begin{aligned} E &= (p - q)\Delta x, \text{ dan} \\ \text{var}(Z_i) &= 4pq(\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

sedangkan total harga harap untuk seluruh langkah adalah

$$E\{Z(t)\} = NE\{Z_i\} = \frac{t}{\Delta t} (p - q)\Delta x \quad (2.40)$$

dan

$$E\{X(t)\} \text{Var}(X(t)) = N \text{var}(Z_i) = \frac{t}{\Delta t} 4pq (\Delta x)^2 \quad (2.41)$$

Dengan memisalkan  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  sangat kecil infinitif mendekati 0, sehingga nilai  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$  mempunyai nilai tertentu dan nilai  $(p - q)$  mendekati kelipatan  $\Delta x$ . Misal dalam selang waktu  $t$ ,  $X(t)$  memiliki fungsi nilai rata-rata sebagai  $\mu t$  dan fungsi variannya sama dengan  $\sigma^2 t$  harga harap  $E\{X(t)\}$  persatuan waktu adalah

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &\rightarrow \mu, \text{ dan} \\ \text{var}\{X(t)\} &\rightarrow \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

persamaan (2.40) ini untuk nilai  $t = 1$  dan persamaan (2.42) memberikan

$$\frac{t}{\Delta t} (p - q)\Delta x \rightarrow \mu, \quad \frac{4pq (\Delta x)^2}{\Delta t} \rightarrow \sigma^2 \quad (2.43)$$

Hubungan antara persamaan (2.39) dan (2.42) akan terpenuhi ketika  $\Delta x = \sigma(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$  dan nilai  $p$  serta  $q$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu(\Delta t)^{\frac{1}{2}}}{\sigma} \right), \text{ dan} \\ q &= \left( 1 - \frac{\mu(\Delta t)^{\frac{1}{2}}}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Karena  $Z_i$  merupakan variabel random, maka penjumlahan  $\sum_{i=1}^N Z_i = X(t)$  untuk  $N$  besar mendekati distribusi dengan rata-rata  $\mu t$  dan variasi  $\sigma^2 t$ . Dengan  $t$  menyatakan panjang interval waktu selama pergeseran  $X(t) - X(0)$ . Sekarang didapatkan bahwa untuk  $0 < s < t$ ,  $X(t) - X(s)$  memiliki distribusi normal dengan rata-rata  $\mu(t - s)$  dan variasi  $\sigma^2(t - s)$ . Kenaikan  $X(s) - X(0)$  dan  $X(t) - X(s)$  saling tidak tergantung yang mengindikasikan  $X(t)$  merupakan proses Markov.

Rapat transisi di titik sekitar  $x \pm \Delta x$  dapat diekspansi dengan menggunakan deret Taylor:

$$\begin{aligned} p(x_0, x \pm \Delta x; t - \Delta t) &= p(x_0, x; t) - \Delta t \frac{\partial p}{\partial t} \\ &\quad \pm \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} (\pm \Delta x)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

mengingat

$$\begin{aligned} p(x_0, x; t) &= p p(x_0, x - \Delta x; t - \Delta t) \Delta x \\ &\quad + q p(x_0, x + \Delta x; t - \Delta t) \Delta x \end{aligned} \quad (2.46)$$

maka persamaan (2.45) dan persamaan (2.46) memberikan

$$p(x_0, x; t) = p(x_0, x, t) - \Delta t \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta x (p - q) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + O \quad (2.47)$$

dengan membagi kedua sisi persamaan (2.47), dan mengambil limit  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , maka diperoleh persamaan difusi untuk gerak Brownian berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x_0, x; t) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} p(x_0, x; t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x_0, x; t) + O \quad (2.48)$$

untuk  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil seperti pada persamaan (2.42). Kuantitas  $\mu$  dan  $\sigma$  dapat diinterpretasikan sebagai

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\{X(t + \Delta t) - X(t)\}}{\Delta t} = \mu \quad (2.49)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\{[X(t + \Delta t) - X(t)]^2\}}{\Delta t} = \sigma^2$$

Secara umum persamaan (2.49) jika  $x_0$  pada kondisi tertentu adalah fungsi waktu atau merupakan  $X(t)$  maka persamaan (2.49) menjadi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\{X(t + \Delta t) - X(t) | X(t) = x\}}{\Delta t} = a(t, x) \quad (2.50)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\{[X(t + \Delta t) - X(t)]^2 | X(t) = x\}}{\Delta t} = b(t, x)$$

$a(t, x)$  merupakan koefisien apung (*drift coefficient*) dan  $b(t, x)$  merupakan koefisien difusi. Sehingga diperoleh persamaan Fokker-Planck sebagai berikut

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (a(x)p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x)p) \quad (2.51)$$

Persamaan Fokker Planck yang menggambarkan distribusi evolusi karena tumbukan yang lemah sehingga terjadi pergeseran kecil dapat disajikan dalam ruang kecepatan. Jika  $f$  adalah fungsi distribusi yang tidak tergantung pada ruang  $f = (v, t)$  maka persamaan Fokker-Planck berbentuk

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial v} [a_\alpha f] + \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} [b_{\alpha\beta} f] \quad (2.52)$$

Koefisien  $a$  merupakan koefisien gesekan dinamis, partikel Brown mendapat gaya gesek yang berlawanan dengan gerakan dan koefisien  $b$  merupakan koefisien difusi yang merupakan rata-rata perubahan kecepatan.

Suku pertama persamaan Fokker–Planck (2.52) merupakan gesekan yang memperlambat partikel berkas dan menggerakkan partikel menuju kecepatan nol dalam ruang fasa, sedangkan bentuk kedua menyajikan difusi berkas partikel dalam ruang kecepatan tiga dimensi.

Nilai jangkauan  $x$  pada persamaan (2.51) harus kontinu, dan pada kondisi waktu saat ini maka nilainya  $(-\infty, +\infty)$ . Koefisien  $a(x)$  dan  $b(x)$  pada persamaan ini merupakan sembarang fungsi diferensial dengan batas  $b(x) > 0$ . Persamaan (2.51) kemudian dipecah untuk memperoleh persamaan kontinuitas untuk kepadatan probabilitas

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \quad (2.53)$$

dimana  $j(x, t)$  merupakan fluk probabilitas dan persamaan konstitutif.

$$j(x, t) = a(x)p - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} b(x)p \quad (2.54)$$

Dimisalkan  $p(x, t|x_1, t_1)$  untuk  $t \geq t_1$  adalah solusi persamaan (2.51) yang ketika  $t_1$  direduksi menjadi  $\delta(x - x_1)$ . Selanjutnya dapat diformulasikan proses Markov yang probabilitas transisinya  $p(x_2, t_2|x_1, t_1)$  dengan yang terdistribusi satu kali  $p(x_1, t_1)$  masih dapat dipilih dengan arbitrer dengan waktu mula-mula  $t_0$ , sehingga didapatkan  $p_1$  sebagai solusi stasioner untuk persamaan (2.51) adalah

$$p^s(x) = \frac{\text{konstanta}}{b(x)} \exp \left[ 2 \int_0^x \frac{a(x')}{b(x')} dx' \right] \quad (2.55)$$

solusi proses Markov yang diperoleh adalah stasioner. Hal ini memungkinkan ketika nilai  $P^s$  terintegrasi, sehingga dapat dilakukan normalisasi yang mewakili distribusi probabilitas.

### 2.1.3 Gerak Brown dalam Pandangan Al Quran

Persamaan Langevin dan Fokker-Planck yang telah dibahas sebelumnya merupakan bentuk umum yang digunakan untuk menganslisi gerak brown secara klasik. Gerak Borwn merupakan proses gerak yang terjadi pada suatu partikel secara acak. Jadi keberadaan partikel merupakan acuan utama untuk melakukan analisis gerak Brown ini baik secara klasik atau nantinya dikembangkan pada kerangka relativistik.

Partikel secara umum dapat dipahami sebagai entitas terkecil yang ada di semesta. Al Quran secara implisit menjelaskan keberadaan benda terkecil dalam beberapa ayat salah satunya dalam Surah Yunus [10] ayat 61, yakni

وَمَا تَكُونُ فِي شَأْنٍ وَمَا تَتْلُوا مِنْهُ مِنْ قُرْآنٍ وَلَا تَعْمَلُونَ مِنْ عَمَلٍ إِلَّا كُنَّا عَلَيْكُمْ شُهُودًا إِذْ تُفِيضُونَ فِيهِ وَمَا يَعْرُبُ عَنْ رَبِّكَ مِنْ مِّثْقَالِ ذَرَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا فِي السَّمَاءِ وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

*“Dan tidakkah engkau (Muhammad) berada dalam suatu urusan, dan tidak membaca suatu ayat Al-Qur'an serta tidak pula kamu melakukan suatu pekerjaan, melainkan Kami menjadi saksi atasmu ketika kamu melakukannya. Tidak lengah sedikit pun dari pengetahuan Tuhanmu biarpun sebesar dzarrah, baik di bumi ataupun di langit. Tidak ada sesuatu yang lebih kecil dan yang lebih besar daripada itu, melainkan semua tercatat dalam Kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh).”*

Istilah *dzarrah* erat kaitannya dengan benda bermassa yang disebutkan dengan kalimat “seberat *dzarrah*” yang memiliki ukuran sangat kecil yang dijelaskan dalam kalimat, “sebesar *dzarrah*, baik di bumi ataupun di langit. Tidak ada sesuatu yang lebih kecil dan yang lebih besar daripada itu.”

Secara harfiah istilah *dzarrah* dalam mushaf Al Jamil yang diterjemahkan oleh Yayasan Penyelenggara/Penafsir Al Quran, dimaknai langsung sebagai *dzarrah* saja, namun disertai dengan catatan kaki. Misalnya

untuk Surah An Nisa' ayat 40, istilah *dzarrah* ditafsirkan sebagai sesuatu yang terkecil dan teringan. Pada surah Al Zalzalah dimaknai setara dengan biji sawi. Sedangkan pada surah Saba' ayat 3, kata *dzarrah* oleh Orang Arab pada saat itu digunakan untuk mengungkapkan sesuatu yang sangat kecil. Selain itu, identik pula dengan jenis terkecil dari semut. Pendapat yang terakhir ini diperkuat dengan penjelasan dalam kitab "Al Mufradat fi Gharibil Quran" yang menjelaskan bahwa *dzarrah* memiliki makna bendang yang sangat kecil, dan diartikan pula sebagai semut hitam yang sangat kecil.

Al Hafiz Ibnu Hajar Al-Asqalani menyebutkan bahwa *dzarrah* merupakan suatu partikel terkecil dari benda yang ada. Ada pula yang menyebutkan bahwa: Empat *dzarrah* setara dengan satu *khardal* (biji sawi). Hal ini merujuk pada akhir kitab "At Tauhid", Imam Bukhari dalam sebuah hadist menyebutkan istilah *khardal* ini, yang artinya, "akan dimasukkan ke dalam surga orang-orang yang didalam hatinya terdapat keimanan sebesar *khardal* (biji sawi). Kemudian juga orang yang di dalam hatinya terdapat keimanan yang lebih kecil daripada itu"

Jika dilihat dalam konteks di atas, istilah *dzarrah* dapat disimpulkan erat kaitannya dengan benda terkecil dan memiliki massa yang sangat ringan. Dari yang mulanya pada waktu itu ditafsirkan setara dengan biji sawi, seukuran kepala semut yang terkecil, belakangan ketika penelitian terkait atom mulai berkembang istilah *dzarrah* dimaknai sebagai atom, yang pada saat itu merupakan benda terkecil yang berhasil diamati oleh manusia.

Namun, tidak dapat dipungkiri ilmu pengetahuan seiring berjalannya waktu akan terus mengalami perkembangan. Termasuk dalam bidang kajian

partikel dan atom. Dalam penelitian selanjutnya diketahui bahwa atom bukan lagi objek terkecil, karena masih terdapat komponen penyusunnya yakni, elektron, proton, dan neutron. Lebih jauh lagi penelitian fisika partikel terbaru mengungkapkan bahwa proton dan neutron dalam atom terusun atas sub-partikel yang dinamakan dengan quark, yang memiliki ukuran sangat kecil sekitar  $10^{-18}m$ . Partikel yang digagas oleh Murray Gell-Mann dan George Zweig ini mampu berinteraksi secara aktif dengan empat gaya fundamental yang ada di alam semesta.

Kondisi ini sejalan dengan pemaknaan *dzarrah* sebagai benda yang sangat kecil dan ringan di dunia. Pemaknaannya pun merujuk pada penemuan teknologi terbaru yang mencatat benda yang berukuran sangat kecil di waktu itu. Hingga perkembangan saat ini penelitian menemukan Higgs Boson sebagai partikel terkecil di alam semesta. Jadi dapat disimpulkan bahwa istilah *dzarrah* dalam ayat-ayat di atas secara implisit memberikan gambaran bahwa Allah SWT Maha Teliti terhadap makhluknya. Hal ini terbukti bahwa dalam menimbang dan mengadili kebaikan dan keburukan yang dilakukan oleh umat manusia Allah SWT tidak melewatinya sedikitpun bahkan yang memiliki ukuran sangat kecil lagi ringan (*dzarrah*) dan tidak ada satu hal pun yang Allah lewatkan sesuatu yang terjadi di langit dan di bumi bahkan sebesar *dzarrah*.

Jika kemudian pemaknaan partikel sebagai benda yang sangat kecil terdapat dalam Al Quran, bagaimana kemudian Al Quran memandang terkait gerak partikel Brown yang merupakan gerak acak yang terjadi pada partikel. Sedangkan sudah sangat jelas kita ketahui bahwa segala yang ada dilangit dan di



bumi telah diatur dengan sangat detail dan sesuai dengan garis edarnya, sebagaimana termaktub dalam Quran Surah Al-Anbiya [21] ayat 33

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ ۗ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ

*“Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing beredar pada garis edarnya.”*

Jika dalam skala besar ruang angkasa peredaran benda-benda langit telah diatur sesuai garis edarnya, hal ini juga termasuk dalam peredaran partikel pada orbitnya di dalam atom, semua beredar sesuai garis edarnya sebagaimana telah kita ketahui, dengan elektron menempati orbit terluar atom serta proton dan neutron yang menyusun inti atom. Namun, yang jadi pemasalah dalam pembahasan kali ini adalah, sistem gerak pada partikel itu sendiri, yang dalam penelitian ditemukan adanya gerak Brown atau gerak acak dari suatu partikel. Meski secara teori dasar gerak ini dilandasi oleh Hukum Gerak Newton, terdapat perbedaan yang mendasar dengan gerak yang terjadi pada partikel Brown. Dimana pada sistem newton benda bergerak pada lintasan lurus, atau yang kita kenal dengan dinamika gerak lurus partikel. Sedangkan dalam realitanya partikel-partikel dalam beberapa pengamatan ada yang mengalami gerak acak tak beraturan yang dikenal dengan gerak Brown.

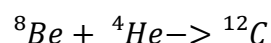
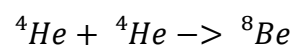
## **2.2 Proses Terbentuknya Bintang Neutron**

Setelah terjadi pembentukan jagat raya terdapat beberapa materi purba yang dihasilkan yakni awan gas hidrogen sebanyak 75% dan awan gas helium sekitar 25%-nya, serta unsur kimia lainnya dihasilkan dari berbagai proses reaksi inti yang akan terjadi pada bintang nantinya. Awan gas hidrogen dan helium tadi mengalami penyusutan karena adanya gaya gravitasi, hal ini mengakibatkan jarak

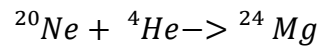
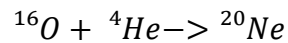
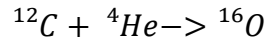
rata-rata antar atom berkurang yang menyebabkan pengaruh energi potensial gravitasi juga mengalami penyusutan. Agar tetap seimbang dan total energinya kekal, maka terjadi penambahan energi kinetik yang diikuti dengan semakin tinggi suhunya (Kasmudin, 2009).

Awan gas akan terus mengalami penyusutan yang mengakibatkan kenaikan suhu di sekitarnya sangat pesat hingga mencapai keadaan akhir berkisar pada suhu  $10^7$  K, serta energi kientik termal protonya lumayan besar sehingga mampu melewati tolakan Coloumb yang terjadi yang menyebabkan terjadinya reaksi inti (fusi) antar proton untuk membentuk helium yang akan melahirkan bintang baru, penyusutan ini terjadi selaaam kurang lebih  $10^6$  tahun. Kondisi ini merupakan fase stabil namun tetap terjadi penyusutan, dimana pada kondisi ini proses penyusutannya dihambat dengan adanya tekanan keluar radiasi (foton) dari inti bintang menuju permukaannya.

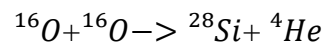
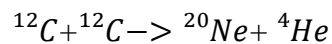
Dengan massa tertentu bintang akan terus melakukan reaksi fusi untuk membangkitkan energi dengan tingkat laju reaksi tertentu. Reaksi fusi yang terus terjadi akan mengubah seluruh hidrogen menjadi helium, serta adanya gravitasi menyebabkan bintang terus mengalami penyusutan dan suhunya bertambah tinggi menjadi  $10^7$  K hingga  $10^8$  K. Kondisi ini memungkinkan untuk terjadi reaksi fusi helium, dengan proses mengubah tiga buah inti  ${}^4\text{He}$  menjadi  ${}^{12}\text{C}$  dengan dua tahap berikut (Kasmudin, 2009)



dengan  ${}^{12}\text{C}$  cukup banyak terbentuk di dalam bintang, reaksi partikel  $\alpha$  atau inti  ${}^4\text{He}$  lainnya berpeluang terjadi dengan reaksi berikut

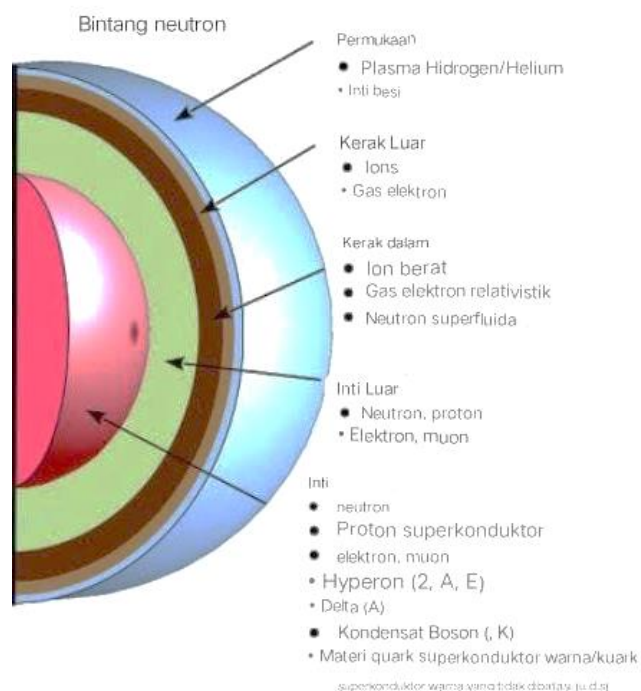


untuk suhu yang lebih tinggi, yakni  $10^9$  K mulai terjadi pembakaran karbon dan oksigen dengan bentuk reaksi



Sehingga terbentuklah inti  $^{56}\text{Fe}$ , pada kondisi ini sudah tidak terdapat energi yang dihasilkan dari proses fusi, sehingga yang terjadi pada bintang adalah penyusutan gravitasinya. Selanjutnya bintang akan memasuki fase *nova* atau yang dalam kondisi lebih dahsyat lagi dikenal dengan istilah *supernova*, kondisi ini menyebabkan bintang terus mengalami penyusutan yang mengakibatkan bintang memiliki densitas sangat padat, sehingga digolongkan sebagai *compact object*.

Struktur dan komposisi bintang neutron jika disimulasikan dalam gambar akan nampak seperti di bawah ini:



### Gambar 2.2 Komposisi dan Struktur Bintang Neutron

(Sumber Gambar: <https://astrobites.org/2014/08/11/peeling-apart-a-neutron-star/>)

Secara umum *compact object* yang berasal dari kematian suatu bintang dibagi menjadi tiga jenis (Gambar 2.3), yaitu lubang hitam (*black hole*), bintang katai putih (*white dwarf*), dan bintang neutron (*neutron stars*). Pembagian ini berdasarkan pada rentang limit massa maksimum pada akhir evolusi bintang yaitu *Chandrasekhar mass* ( $M_{ch}$ ) pada rentang 1.2-1.4  $M_{\odot}$  dan juga *Oppenheimer-Volkoff mass* ( $M_{ov}$ ) pada rentang 1.5-2.0  $M_{\odot}$ . *White dwarf* terbentuk ketika massa objek tersebut kurang dari  $M_{ch}$ , jika bermassa di atas  $M_{ch}$  namun dibawah  $M_{ov}$  maka akan terbentuk *neutron stars*, dan *black hole* terbentuk jika massa objek tersebut diatas  $M_{ch}$ . Ketiga objek ini dapat ditinjau secara relativistik maupun non-relativistik (Yasrina, 2013).

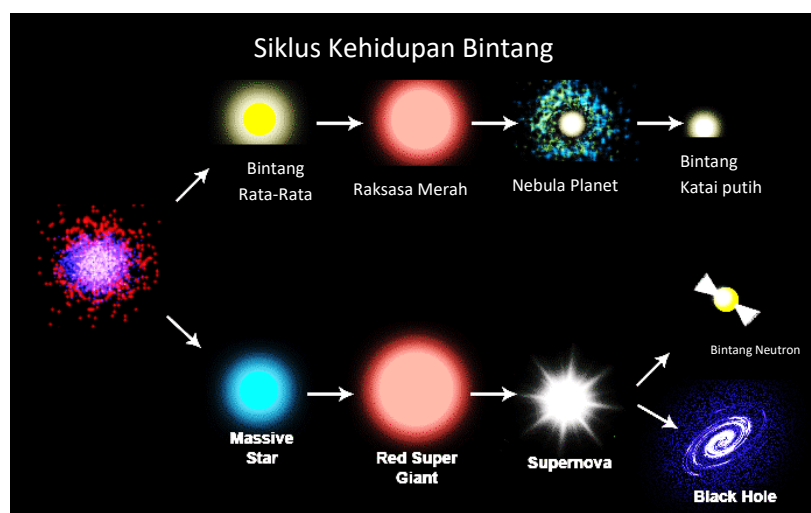
Bintang neutron sendiri ditemukan pertama kali pada 1932. Diantara ketiga *compact object* tadi, bintang neutron memiliki keunikan tersendiri. Terletak pada kisaran objek relativistik, bintang neutron merupakan sisa inti bintang yang tersisa dari runtuhnya peristiwa supernova. Kepadatan yang sangat tinggi dengan massa antara 1,4 dan 2,4  $M_{\odot}$  dan radius urutan 10 km. Kepadatan rata-rata bintang neutron dengan mudah mencapai kerapatan dalam inti (Souza, 2019). Rapat massa dari bintang neutron  $\rho \cong (2-3)\rho_0$ , dengan  $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  adalah kerapatan normal inti. Terlihat bahwa rapat massa inti bintang neutron lebih besar dibandingkan dengan nilai  $\rho_0$  (Yasrina, 2015).

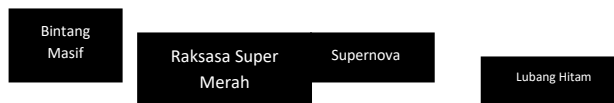
Penelitian astrofisikawan terkait bintang neutron bermula dari penemuan neutron oleh James Chadwick tahun 1932. Hal ini mendorong munculnya

perhitungan secara teoritis terkait bintang neutron. Tahun 1939, Oppenheimer dan Volkoff menjelaskan bahwa bintang neutron terikat oleh gravitasi dalam kondisi berupa gas Fermi neutron. Sedangkan menurut F. Zwicky dan W Baade (1934) bintang neutron adalah sisa dari supernova yang bagian inti bintang mengalami kolaps, dan bagian lainnya dilepaskan dalam bentuk energi (Heiselberg, 2000). Bintang masif mengalami penyusutan menjadi bintang neutron melalui fase supernova (Gambar 2.3) dari diagram ini terlihat hasil akhir dari proses hidup dari suatu bintang yang sangat masif nantinya akan mengalami ledakan yang dahsyat dan akan menjadi objek yang lebih masif lagi yakni bintang neutron dan lubang hitam.

Bintang neutron terbentuk ketika massa bintang kompak lebih pendek dibandingkan batas massa Chandrasekhar, maka tekanan degenerasi elektron tidak dapat menghentikan keruntuhannya. Bintang akan terus runtuh hingga gas neutronnya menjadi berdegenerasi. Gravitasi yang ditimbulkan diimbangi oleh tekanan degenerasi neutron akan membentuk bintang neutron yang stabil (Jain, 2015).

Bintang neutron merupakan objek yang banyak diamati karena merupakan materi dalam kondisi kepadatan tinggi, asimetri isospin ekstrim, dan suhu yang relatif dingin yang tidak dapat diperiksa melalui tabrakan ion berat (Lattimer, 2019).





**Gambar 2.3 Proses Evolusi Bintang Menjadi Bintang Neutron**

(Sumber Gambar: <https://www.infoastronomy.org/2017/06/mengenal-siklus-kehidupan-bintang.html>)

Keunikan dari bintang neutron inilah yang menjadikannya sebagai objek pengamatan benda langit paling menarik, serta dapat dikaji dari berbagai sudut pandang, salah satunya terkait pengaruh dari bintang neutron sebagai objek masif terhadap partikel yang berada di sekitarnya.

Secara umum pada bintang terdapat dua buah gaya yang strukturnya, yaitu gaya gravitasi dan tekanan termal. Khususnya pada bintang neutron tekanan termal dari bintang masif dan Raksasa super merah, Supernova, dan Lubang Hitam bintang neutron yang sangat tinggi membuatnya memiliki gaya gravitasi sangat kuat (Hasudungan, 2018). Sehingga peran relativitas umum sangat diperhitungkan, untuk nantinya mengasumsikan kerangka dan kondisi partikel yang berda di sekitar bintang neutron.

### 2.2.1 Bintang Neutron Tidak Berotasi

Dalam melakukan pengamatan pada objek luar angkasa, khususnya benda yang masif dilakukan pendekatan pertama dengan asumsi objek tersebut berada pada kondisi statik. Termasuk dalam melakukan pangamatan atau studi pada bintang neutron. Dalam kondisi ini bintang neutron diasumsikan tidak berotasi (statik), dengan wujud gas (fluida) yang simetri bola serta memenuhi keseimbangan hidrostatik. Pada asumsi ini adanya tekanan eksternal yang berasal dari gaya gravitasi menekan bintang serta tekanan internal yang disebabkan gaya repulsif degenerasi nukleon membuat keseimbangan pada bintang neutron terjadi. Sehingga penggambaran bintang neutron harus dalam

kondisi keseimbangan hidrostatis dengan pendekatan persamaan relativistik (Glendenning, 2000).

Terkait keseimbangan hidrostatis relativistik pada bintang neutron ini pertama kali dipelajari pada tahun 1939 oleh R.C. Tolman, J.R. Oppenheimer, dan G.M. Volkoff (Sibar, 2004). Dengan melakukan penurunan persamaan untuk memperoleh keseimbangan hidrostatis relativistik, mulanya bintang neutron diasumsikan sebagai fluida yang penuh dengan gas neutron yang kerapatannya sangat tinggi, dengan bentuk persamaan berikut (Shapiro, 1983)

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \left[ 1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM(r)}{c^2r} \right]^{-1} \quad (2.56)$$

dan juga

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi\epsilon(r)r^2}{c^2} \quad (2.57)$$

dengan  $M(r)$  merupakan massa bintang neutron,  $P(r)$  merupakan tekanan internal pada bintang neutron, dan  $\epsilon(r)$  kerapatan energi. Persamaan (2.56) lebih dikenal dengan sebutan persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff atau disingkat menjadi persamaan TOV.

Dari persamaan TOV selain dapat diperoleh hubungan antara massa dan jari-jari bintang neutron, dapat pula dilakukan perhitungan nilai redshift ( $z$ ) dengan persamaan

$$z = \left( 1 - \frac{2GM}{Rc^2} \right)^{-1/2} - 1 \quad (2.58)$$

serta juga dapat dilakukan perhitungan untuk jari-jari radiasi bintang neutron dengan

$$R_{\infty} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} \quad (2.59)$$

Terlihat bahwa persamaan TOV memberikan gambaran terkait evolusi tekanan yang terjadi di internal bintang neutron  $P(r)$  yakni dari pusat bintang ke permukaannya, dengan  $r = 0$  maka nilai  $P(0) = P_c$ , sedangkan saat  $r = R$ , maka nilai  $P(R) = 0$  pada kondisi ini kerapatan energi pada bintang neutron habis. Persamaan keadaan materi pada internal bintang neutron menghubungkan dua besaran ini, tekanan serta kerapatan energi. Sehingga, semakin besar ukuran dari sebuah bintang maka tekanan di pusatnya akan semakin tinggi hal ini disebabkan adanya gaya gravitasi yang sangat kuat yang menekan bintang tersebut. Hal ini juga berkaitan dengan jari-jari bintang yang akan mengecil ketika bintang tersebut sangat masif (Kasmudin, 2009).

Proses *Urca* (*unrecordable cooling agnet*) atau proses pendinginan juga akan dialami bintang neutron, jika bintang tersebut memiliki komposisi neutron, proton, elektron dan juga muon. Dengan mengemisikan neutrino atau yang disebut depletonisasi maka proses pendinginan pada bintang neutron akan terjadi sangat cepat (*direct Urca*), yang akan terjadi jika bintang neutron dalam kondisi sesuai dengan persamaan (Lattimer, 1991)

$$Y_n^{1/3} \leq Y_p^{1/3} + Y_e^{1/3} \quad (2.60)$$

dengan nilai  $Y_n, Y_p$ , dan  $Y_e$  memenuhi fraksi neutron, fraksi proton, dan fraksi elektron pada bintang neutron itu.

### 2.2.2 Bintang Neutron Berotasi

Bintang neutron yang ada di ruang angkasa pada kondisi sebenarnya tidaklah statik (tidak berotasi), akan tetapi memiliki frekuensi rotasi tertentu



yang ditentukan oleh nilai massa dan jari-jarinya. Kondisi ini dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (Lattimer, 2004)

$$v_k = 1045 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{10 \text{ km}}{R} \right)^{3/2} \text{ Hz} \quad (2.61)$$

dengan  $M$  merupakan massa bintang neutron dalam  $M_\odot$ , dan  $R$  jari-jari bintang

Gelombang gravitasi pada bintang neutron dapat menyebabkan terjadinya deformasi pulsar dan variasi mode osilasi dari bintang neutron yang memiliki bentuk menyerupai bola. Deformasi pulsar ini menimbulkan adanya amplitudo regangan gelombang gravitasi yang memiliki ketergantungan terhadap momen kuadrapol bintang, dengan ditentukan pada persamaan keadaan materi yang di dominasi oleh neutron. Kondisi timbulnya amplitudo regangan gelombang gravitasi pada bintang neutron ini dapat ditemukan di bumi, yang dapat dirumuskan dengan (Haskell, 2007 )

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4} \frac{\epsilon I_{zz} v^2}{r} \quad (2.62)$$

dengan nilai  $v$  merupakan frekuensi rotasi bintang,  $I_{zz}$  momen inersia terhadap sumbu  $z$  (sumbu rotasi bintang neutron),  $r$  adalah jarak dari bintang neutron menuju bumi, dan  $\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$  memperlihatkan efek deformasi pada bintang neutron yang disebabkan oleh rotasinya, ini disebut sebagai eliptisitas equator bintang neutron yang memiliki relasi dengan momen kuadrapol maksimum bintang neutron,  $\Phi_{22,max}$  (dengan  $m = 2$ ) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (Owen, 2005)

$$\epsilon_{max} = \sqrt{\frac{8\pi}{15} \frac{\Phi_{22,max}}{I_{zz}}} \quad (2.63)$$

pada bintang neutron yang berotasi lambat nilai  $\Phi_{22,max}$  dapat dituliskan

$$\Phi_{22,max} = 2,4 \times 10^{38} g cm^2 \left( \frac{\sigma}{10^{-2}} \right) \left( \frac{R}{10 km} \right)^{6,26} \left( \frac{1,4M_{\odot}}{M} \right)^{1,2} \quad (2.64)$$

dengan nilai  $\sigma = (10^{-5} - 10^{-2})$  yang merupakan *breaking strain* atau regangan patah pada *crust* bintang neutron. Haensel dan Bejger melakukan pendekatan untuk memperoleh momen inersia pada bintang neutron dengan

$$I_{zz} \approx 9,2 \times 10^{44} g cm^2 \left( \frac{M}{1,4M_{\odot}} \right) \left( \frac{R}{10 km} \right)^2 \times \left[ 1 + 0,7 \left( \frac{M}{1,4M_{\odot}} \right) \left( \frac{R}{10 km} \right) \right] \quad (2.65)$$

dari persamaan (2.64) dan (2.65) maka persamaan (2.63) sebagai eliptisitas ekuator maksimum bintang neutron dapat ditulis kembali menjadi

$$\epsilon_{max} = 3,4 \times 10^{-7} \left( \frac{\sigma_{max}}{10^{-2}} \right) \left( \frac{1,4M_{\odot}}{M} \right)^{2,2} \left( \frac{R}{10 km} \right)^{4,26} \times \left[ 1 + 0,7 \left( \frac{M}{1,4M_{\odot}} \right) \left( \frac{R}{10 km} \right) \right]^{-1} \quad (2.66)$$

serta amplitudo regangan gelombang gravitasi pada persamaan (2.62) menjadi

$$h_0 = x \frac{\Phi_{22} v^2}{r} \quad (2.67)$$

dimana nilai  $x = \sqrt{\frac{2048\pi^5 G}{15 c^4}}$ . Selain itu untuk bintang neutron yang berotasi terdapat rumus empiris tersendiri untuk menghitung momen inersia dari bintang neutron tersebut, persamaan ini dirumuskan oleh Lattiner dan Schutz (Lattiner, 2005) yang dituliskan

$$I \approx (0,237 \pm 0,008) MR^2 \left[ 1 + 4,2 \left( \frac{M km}{M_{\odot} R} \right) + 90 \left( \frac{M km}{M_{\odot} R} \right)^4 \right] \quad (2.68)$$

Bintang berotasi ini kemudian nantinya akan dilakukan sebagai bentuk pendekatan menghitung pengaruh dari bintang neutron terhadap partikel yang

ada di sekitarnya. Pengaruh di sini meliputi dinamika dan juga probabilitas dari partikel tersebut ditinjau dari persamaan gerak Brown relativistik.

### 2.2.3 Proses Terbentuknya Bintang Neutron dalam Al Quran

Bintang merupakan salah satu dari benda langit yang mampu memancarkan cahayanya sendiri, cahaya ini berasal dari proses pembakaran gas di dalamnya, salah satu bintang yang letaknya dekat dengan bumi adalah matahari. Secara astronomi istilah bintang didefinisikan untuk gas atau nebula yang memadat dan bergerak sangat massif dengan massa 0,08-200  $M_{\odot}$  baik yang masih melangsungkan reaksi fusi nuklir ataupun tidak. Hal ini yang menyebabkan istilah bintang juga dipakai untuk bintang katai putih dan juga bintang neutron yang sudah mengalami supernova dan tidak memancarkan energi atau cahaya lagi.

Istilah bintang beberapa kali disebutkan dalam Al Quran dengan istilah kata yang berbeda, dalam konteks ini kata yang digunakan menyesuaikan dengan asbabul nuzul turunnya ayat tersebut. Secara umum terdapat lima kata bermakna bintang dalam Al Quran, yakni *al-Buruj*, *al-Najm*, *al-Kawkab*, *al-Khunnas* dan *at-Thariq*. Kata *Al-Najm* disebutkan sebanyak 12 kali dalam Al Quran, salah satunya dalam ayat yang secara implisit dapat dikaitkan dengan proses menghilangnya atau terhapusnya cahaya bintang. Ayat ini terdapat pada Surah Al Mursalat ayat 8 berikut

فَإِذَا النُّجُومُ طُمِسَتْ

“Maka apabila bintang-bintang telah dihapuskan.”

Jumhur ulama memahami istilah bintang menggunakan kata *An Najm*, yang memiliki makna benda dengan cahaya dan terlihat bagi penghuni bumi. Kata *An Najm* merupakan isim dari *najama-yanjumu* yang berarti *talaa'a*; terbit atau *zahaara* (tampak/terlihat). Ada pula yang memaknai sebagai arti khusus yakni bintang sirus. Selain itu ada pula mufasir yang memaknai sebagai makna dari Al Quran itu sendiri, yang merujuk pada kata *munajjam* yang memiliki arti sedikit demi sedikit, yang menggambarkan turunnya Al Quran secara berangsur-angsur dan sedikit-sedikit. Namun, secara umum istilah bintang dalam Al Quran tetap merujuk kepada istilah *An Najm* yang khusus digunakan pada semua bintang kecuali matahari.

*An-Najm* dalam tafsir Al Maraghi dijelaskan sebagai bintang-bintang yang beredar pada tempat edarnya yang tidak melampaui falak-falaknya. Yang dengan bintang-bintang tersebut memberikan petunjuk bagi manusia ketika berada di padang pasir atau padang belantara, ketika berada di tempat tinggal maupun sedang dalam perjalanan atau di tengah lautan.

Istilah *An Najm* pada Surah Al Mursalat ayat 8 di atas, M Quraish Shihab menjelaskan bahwa ayat tersebut masuk dalam kategori yang menjadikan istilah bintang sebagai penanda untuk menegaskan terkait kepastian hari kiamat melalui kejadian yang terjadi sebelumnya. Istilah *umisat* pada akhir ayat, berasal dari kata *amasa* yang memiliki makna menghilangkan sesuatu dengan menghapusnya. Sehingga, dalam konteks ayat ini dapat dimaknai pula dengan hilangnya cahaya dari bintang-bintang tersebut. Kondisi ini terjadi ketika bintang sudah tidak lagi melakukan pembakaran energi pada sistemnya atas kehendak Allah SWT sehingga tidak memancarkan cahaya lagi seperti

sebelumnya. Zakir Naik dalam bukunya yang berjudul *Miracles of Al-Quran & Al-Sunnah*, menjelaskan dibagian pertama dari hadist Nabi SAW, beliau bersabda

*“Bintang bintang merupakan sumber keamanan bagi langit. Apabila bintang-bintang menghilang maka akan bernasib seperti apa yang telah dijanjikan. Hilangnya bintang berarti bintang tersebut musnah dan tersebar, lalu langit akan terbelah, pecah berkeping-keping, berputar-putar, kemudian berubah menjadi logam cair dan mengeluarkan banyak asap.”*

Fusi nuklir yang terjadi di dalam bintang merupakan serangkaian reaksi yang sangat besar di alam semesta, yang dari sanalah sumber kehidupan diciptakannya langit dan bumi. Gravitasi yang sangat besar antar bintang-bintang yang masif jugamenjadi salah satu faktor yang menahan benda-benda di semesta tetap pada posisinya. Dengan gravitasi ini bintang mendominasi diantara benda lainnya hingga membentuk unit yang sangat besar dan terhubung satu dengan yang lainnya di semesta.

Dalam Tafsir Tahlili Kementerian Agama RI penjelasan terkait dihapusannya bintang-bintang terjadi di hari kiamat. Bintang akan mengalami proses kematian apabila bahan bakar untuk reaksi fusi termonuklir pada inti bintang telah habis dan mulai berhenti berproses menghasilkan energi. Akan terjadi ledakan melepaskan energi yang sangat dahsyat yang dikenal dengan istilah supernova yang menandakan berakhirnya kehidupan suatu bintang.

Jika dilihat kembali konteks turunnya ayat Al Mursalat di atas berkaitan dengan hari kiamat. Namun, jika diruntut dari proses meledaknya suatu bintang dan dihapuskan cahayanya setelah melalui proses supernova dapat dikatakan bahwa ini merupakan bagian dari proses panjang menuju akhir dari alam semesta. Ketika bintang telah mengalami perubahan dan cahayanya dihapuskan,

tentu sedikit banyak memiliki dampak terhadap kehidupan di bumi dan keberlangsungan beredarnya benda di alam semesta.

### **BAB III**

#### **PROSES GERAK BROWN RELATIVISTIK**

Proses gerak partikel Brown secara klasik telah diuraikan di atas, secara umum penjelasan terkait gerak ini dapat menggunakan persamaan Langevin dan persamaan Fokker-Planck. Kedua persamaan ini bersumber dari teori dasar yang sama yakni gerak Newton, dimana keduanya menerangkan terkait dinamika serta evolusi pada partikel Brown, yang dapat dijadikan dasar untuk menganalisis gerak partikel secara acak yang terjadi di alam semesta yang dipengaruhi ruang-waktu relativistik yang sangat kuat. Sehingga kedua persamaan ini perlu diperluas menuju kerangka relativitas.

Perluasan kerangka dari persamaan Langevin dan persamaan Fokker-Planck dalam pembahasan selanjutnya digunakan sebagai dasar untuk menganalisis gerak partikel Brown yang terjadi di sekitar bintang neutron. Telah diketahui bahwa bintang neutron adalah bagian dari benda angkasa yang sangat masif, sama halnya dengan lubang hitam. Sehingga perlu adanya tinjauan persamaan secara relativistik untuk mengetahui pengaruh benda masif tersebut terhadap dinamika dan rapat peluang partikel yang berada di sekitarnya (Arista, 2020).

#### **3.1 Persamaan Langevin Relativistik**

Diasumsikan sebuah partikel Brown dengan massa  $m$  bergerak pada ruang 1-dimensi nonrelativistik dengan kecepatan  $\vec{v}(t)$ , partikel tersebut larut dalam fluida isotropik dan homogen. Dengan menggunakan persamaan Langevin dinamika partikel Brown dapat dijelaskan (Arista, 2013).

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t) \tag{3.1}$$

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -\gamma v(t) + L(t) \tag{3.2}$$

dimana  $v$  merupakan koefisien gesekan fluida yang diukur saat partikel dalam kerangka diam. Sedangkan  $L(t)$  adalah gaya Langevin yang menjelaskan terkait faktor ketaktentuan dan proses difusi yang terjadi pada partikel Brown yang dapat dicirikan sebagai berikut

$$\langle L(t) \rangle = 0 \quad \langle L(t)L(s) \rangle = 2D \delta(t - s) \quad (3.3)$$

dengan semua kumulatif yang lebih tinggi menjadi nol (*Gaussian White Noise*) dan  $D$  konstan. Gaya Langevin diperoleh dari turunan proses Wiener  $W(t)$  terhadap waktu

$$\frac{dW(t)}{dt} = L(t) \quad (3.4)$$

sehingga persamaan (3.2) menjadi

$$d[mv(t)] = -v mv(t)dt + dW(t) \quad (3.5)$$

berdasarkan persamaan momentum maka  $mv(t) = p(t)$ , sehingga persamaan (3.5) dapat dituliskan sebagai berikut

$$p(t) = -v mv(t)dt + dW(t) \quad (3.6)$$

proses Wiener pada kondisi  $t \geq 0$  dan  $dt > 0$  memiliki nilai sebagai berikut

$$w(t) \equiv dW(t) \equiv W(t + dt) - W(t) \quad (3.7)$$

kenaikan dari proses ini dapat dituliskan dengan distribusi Gauss 1-dimensi

$$P^1[w(t)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi D dt}} \exp \left[ -\frac{w(t)^2}{4D dt} \right] \quad (3.8)$$

Kerangka dari partikel tersebut kemudian diperluas menjadi ruang 3-dimensi. Sehingga persamaan (3.8) dapat dituliskan menjadi

$$P^3[w(t)] = \left( \frac{1}{4\pi D dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{w(t)^2}{4D dt} \right] \quad (3.9)$$

dengan  $W(t)$  merupakan kumpulan proses Wiener 1- dimensi di sumbu x,y, dan z.



Persamaan Langevin relativistik diperoleh dengan memperluas analisis terhadap persamaan pada kerangka non-relativistik. Diasumsikan pada kerangka diam  $O$  terdapat partikel yang bergerak dengan kecepatan sangat tinggi. Jika terdapat pengamat yang berada pada kerangka koordinat lain  $O'$  yang bergerak bersama partikel, maka partikel tersebut menurut pengamat dalam keadaan diam. Dari asumsi ini maka dapat dibangun persamaan Langevin relativistik melalui dua pendekatan, yakni (Arista, 2013):

- i. Persamaan (3.2) atau (3.5), dibangun persamaan gerak non-relativistik yang berhubungan dengan kerangka koordinat  $O'$  yang bergerak bersama partikel Brown pada waktu tertentu  $t$ , dengan  $t$  di sini merupakan waktu di kerangka  $O$ .
- ii. Dengan menerapkan transformasi Lorentz pada persamaan gerak non-relativistik yang diperoleh untuk  $O'$ , didapatkan bentuk umum persamaan gerak relativistik.

Diasumsikan kerangka fluida  $O$  diam dan tidak ada gangguan (terisolasi), maka persamaan non-relativistik (3.2) dapat ditulis kembali menjadi

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -\nu m v(t) \quad (3.10)$$

partikel Brown ini memiliki energi kinetik murni

$$E(t) = \frac{mv(t)^2}{2} \quad (3.11)$$

dari persamaan (3.10), diperoleh turunan waktu

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m v \frac{dv}{dt} \\ &= -\nu m v^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

karena kerangka terisolasi menyebabkan tiga persamaan di atas tidak terjadi proses Wiener. Pada waktu  $t$  sistem koordinat  $O'$  bergerak bersama partikel dalam kerangka non-relativistik, kondisi ini menjadikan semua kerangka inersia memiliki waktu  $t$  yang sama atau  $t' = t'(t)$ , dengan  $t'$  di sini merupakan koordinat waktu pada kerangka  $O'$ , maka diperoleh

$$v'(t) \equiv v'(t'(t)) = 0 \quad (3.13)$$

kemudian kerangka  $O'$  dengan kecepatan konstan  $v'$  bergerak relatif terhadap kerangka  $O$ . Persamaan (3.10) dengan menggunakan transformasi Galileo diperoleh kerangka  $O'$  pada waktu  $t$  sebagai berikut

$$m \frac{dv'}{dt'}(t) = -v m[v'(t) - V'] = -v mV' \quad (3.14a)$$

begitupun pada persamaan (3.12) dalam kerangka  $O'$  dapat dituliskan

$$\frac{dE'}{dt'}(t) = -v m v'(t)[v'(t) - V'] \quad (3.14b)$$

Selanjutnya digunakan faktor Lorentz ( $\gamma$ ) pada persamaan gerak non-relativistik, yang dituliskan dalam bentuk

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.15)$$

dalam kondisi non-relativistik persamaan (3.14) berlaku pada waktu  $t$  sembarang. Persamaan gerak kovarian relativistik dapat diperoleh dari persamaan (3.14) dengan memperkenalkan waktu pribadi  $\tau$  yang didefinisikan sebagai berikut

$$d\tau \equiv dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \frac{dt'}{\gamma} \quad (3.16)$$

selanjutnya untuk memperoleh vektor gaya (1+3) dimensi ditentukan komponen

4-vektor kovarian dan kontravarian, pada (1+3) dimensi dengan tensor metrik Minkowski terhadap koordinat kartesian sebagai berikut

$$(\eta_{\sigma\phi}) = (\eta^{\sigma\phi}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

$$(\eta^\sigma_\phi) = (\eta^\sigma_\phi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

sehingga dapat dituliskan vektor kecepatan (1+3) kovarian sebagai berikut

$$v'^\sigma = \frac{dx'^\sigma}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt'}(ct, r') = \gamma(c, v') \quad (3.18)$$

sehingga komponen kovariannya

$$v'_\sigma = \gamma(-c, v') \quad (3.19)$$

dari persamaan di atas dapat ditentukan vektor momentum (1+3) kontravarian yaitu

$$\begin{aligned} p'^\sigma &= mv'^\sigma = m \gamma(c, v') \\ &= (m\gamma c, m\gamma v') = (p^0, p') \\ &= \left(\frac{E}{c}, p'\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

sehingga komponen kovariannya

$$p'_\sigma = \left(\frac{E}{c}, p'\right) \quad (3.21)$$

diperkenalkan gaya-3 dimensi sebagaimana berikut

$$F' = \frac{dp'}{dt} \quad (3.22)$$

selanjutnya dapat ditentukan vektor gaya (1+3) kontravarian pada kerangka  $O'$  yakni  $f'^\sigma$  dengan komponen berikut

$$f'^\sigma = \frac{dp'^\sigma}{d\tau} = \gamma \left(\frac{dE}{c dt}, F'\right) \quad (3.23)$$

dan untuk komponen kovariannya

$$f'_{\sigma} = \gamma \left( -\frac{dE}{c dt}, F' \right) \quad (3.24)$$

dari komponen-komponen persamaan (3.23) maka persamaan (3.14a) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{dp'^{\sigma}}{d\tau} = f'^{\sigma} , \quad (f'^{\sigma}) = -mv (0, v' - V') \quad (3.25)$$

dibuat permisalan yang menyatakan komponen vektor kecepatan (1+3) dari partikel Brown  $u'^{\sigma}$  dan pada kerangka  $O'$  adalah  $U'^{\sigma}$ , dengan vektor gaya  $f^{\sigma}$  tidak dapat berbanding lurus dengan selisih kecepatan (1+3)

$$f'^{\sigma} \neq -mv(u'^{\sigma} - U'^{\sigma}) \quad (3.26)$$

dari persamaan (3.26) terlihat bahwa vektor gaya (1+3)  $f'^{\sigma}$  dimensi tidak berhubungan langsung dengan vektor kecepatan (1+3) dimensi  $u'^{\sigma}$ . Kondisi ini disebabkan karena pada saat kerangka  $O'$  bergerak bersama partikel persamaan perlu diubah menjadi persamaan non-relativistik. Dari sini maka waktu pribadi  $d\tau$  akan memiliki nilai yang sama dengan  $dt$  dan  $f^{\sigma} = (0, F^i)$ , dengan  $F^i$  merupakan gaya non-relativistik pada komponen kartesian, dan  $F^0$  komponen waktu dari gaya non-relativistik dengan nilai

$$F^0 = 0 \quad (3.27)$$

persamaan di atas menyebabkan perubahan komponen waktu dari  $u'^{\sigma} - U'^{\sigma} \neq 0$ , melainkan

$$u'^0 - U'^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} - \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}} = c - \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}} \neq 0 \quad (3.28)$$

kondisi perubahan komponen waktu ini dapat diatasi dengan memasukkan tensor gesekan, sehingga  $f^{\sigma}$  dapat dituliskan dalam bentuk kotravariannya. Tensor

gesekan yang didefinisikan ini memiliki persamaan tensor tekanan gas ideal pada kerangka  $O'$  diam, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$v_{\phi}^{\sigma} = v \left( \eta_{\phi}^{\sigma} + \frac{u^{\sigma} u_{\phi}}{c^2} \right) \quad (3.29)$$

sehingga diperoleh bentuk tensor gesekan fluida yang mencerminkan asumsi fluida dalam kondisi isotropik homogen dengan nilai berikut

$$(v'_{\phi}{}^{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

untuk mendapatkan hasil Lorentz-invarian dari persamaan  $f^{\sigma}$ , maka tensor gesekan pada persamaan (3.30) dimasukkan ke persamaan (3.26) sehingga diperoleh

$$\frac{dp'^{\sigma}}{d\tau} = -mv'_{\beta}{}^{\sigma}(u'^{\beta} - U'^{\beta}) \quad (3.31)$$

Kemudian dilakukan perluasan pendekatan menuju kerangka relativistik untuk menganalisis proses Wiener. Persamaan differensial stokastik pada persamaan (3.14a) dengan menggunakan asumsi (3.27) pada partikel yang bergerak bersama kerangka  $O'$  dengan t kerangka diam, dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$dp'(t) = -v[p'(t) - mV']dt' + w'(t) \quad (3.32)$$

dengan  $w'(t) \equiv dW'(t)$  merupakan gambaran proses Wiener yang kenaikannya telah dituliskan pada persamaan (3.9), maka dapat dituliskan dalam kondisi ini sebagai berikut

$$P^3[w'(t)] = \left( \frac{1}{4\pi D dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{w'(t)^2}{4D dt} \right] \quad (3.33)$$

Dalam hal ini perlu diperhatikan pada kondisi relativistik kenaikan momentum

$w'(t) \equiv dW'(t)$  cenderung tak terhingga, selama kenaikan kecepatannya tetap dibatasi. Hal ini berkaitan dengan teori relativistik yang sangat membedakan antara momentum stokastik dan peningkatan kecepatan. Kemudian didefinisikan kenaikan proses Wiener (1+3) dimensi sebagai berikut

$$(w'^{\sigma}) = (0, w') \quad (3.34)$$

definisi ini sesuai dengan persyaratan pada persamaan (3.27) bahwa dalam sistem inersia  $O'$  yang sesaat bergerak dengan partikel, maka komponen  $D$  dari vektor gaya (1+3) dimensi harus menghilang. Serta kerangka Lorentz  $O'$  yang bergerak dengan partikel Brown pada waktu tertentu  $t$  dan  $w'(t)$  sangat kecil yang dalam artian  $w'(t) = dW'(t)$  dengan sifat

$$\langle w'^{\sigma}(t) \rangle = 0 \langle w^{\sigma}(t) w'^{\phi}(t) \rangle = \begin{cases} 0, & \sigma = 0 \\ 2D & \text{dan} \\ & \text{atau} \\ & \phi = 0 \\ & \sigma, \phi \neq 0 \end{cases} dt,$$

Selanjutnya didefinisikan tensor korelasi berikut

$$D_{\phi}^{\sigma} = 2D d\tau \left( \eta_{\phi}^{\sigma} + \frac{u^{\sigma} u_{\phi}}{c^2} \right) \quad (3.35)$$

dengan inversnya

$$\hat{D}_{\phi}^{\sigma} = \frac{1}{2D d\tau} \left( \eta_{\phi}^{\sigma} + \frac{u^{\sigma} u_{\phi}}{c^2} \right) \quad (3.36)$$

struktur isotropik dari tensor korelasi ini memiliki nilai yang sama dengan tensor gesekan (3.29) sehingga dapat dituliskan

$$\langle w^{\sigma}(\tau) w^{\phi}(\tau') \rangle = D^{\sigma\phi} \quad (3.37)$$

Kemudian dilakukan perluasan kerangka menuju (1+3) dimensi untuk persamaan (3.33) sehingga menjadi

$$P^{1+3}[w^{\sigma}(\tau)] = \frac{1}{(4\pi D d\tau)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{w_{\sigma}(\tau) w^{\sigma}(\tau)}{4D d\tau} \right] \times \delta[u_{\sigma} w^{\sigma}(\tau)] \quad (3.38)$$

terlihat pada persamaan (3.38) muncul delta dirac yang menjelaskan bahwa produk skalar Minkowski dari kecepatan-4 dan gaya-4 harus hilang, dengan kata lain persamaan ini menggambarkan tidak terjadi gaya stokastik atau proses Wiener yang bekerja. Dalam identitas relativitas khusus diperkenalkan hubungan sebagai berikut

$$0 \equiv \frac{d}{d\tau}(-mc^2) = m \frac{d}{d\tau}(u_\sigma u^\sigma) = 2u_\sigma f^\sigma \quad (3.39)$$

dengan  $f^\sigma$  pada kasus gaya stokastik dapat diterjemahkan sebagai

$$0 = u_\alpha w^\alpha \quad (3.40)$$

sehingga distribusi probabilitas pada (3.38) dapat dituliskan kembali menjadi

$$P^{1+3}[w'^\sigma(\tau)] = \frac{c}{(4\pi D d\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{w'^\sigma(\tau)w'^\sigma(\tau)}{4D d\tau}\right] \times \delta[u'_\sigma w'^\sigma(\tau)] \quad (3.41)$$

dengan  $(u'_\sigma) = (-c, 0)$  merupakan kecepatan (1 + 3) kovarian dari partikel yang bergerak pada kerangka diam. Jumlah partikel yang sangat besar dalam rapat peluang partikel Brown menyebabkan hal ini merupakan kasus ruang kontinu, yang menyebabkan persamaan (3.41) mengambil bentuk normalisasi

$$1 = \left\{ \prod_{\alpha=0}^3 \int_{-\infty}^{\infty} d[w^\sigma(\tau)] \right\} P^{1+3}[w^\sigma(\tau)] \quad (3.42)$$

persamaan (3.41) dapat ditulis dalam bentuk rapat peluang untuk sembarang kerangka Lorentz, dengan partikel Brown yang terlarut dalam fluida isotropik dan homogen

$$P^{1+3}[w^\sigma(\tau)] = \frac{c}{(4\pi D d\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{w_\sigma(\tau)w^\sigma(\tau)}{4D d\tau}\right] \times \delta[u_\sigma w^\sigma(\tau)] \quad (3.43)$$

dari persamaan (3.43) dapat disusun persamaan Langevin relativistik untuk

sembarang kerangka Lorentz. Sehingga partikel Brown dengan massa diam  $m$ , terlarut dalam fluida isotropik dan homogen memiliki waktu pribadi  $d\tau$ , kecepatan (1+3) dimensi  $u^\phi$  konstan, dan momentum (1+3) dimensi  $p^\sigma = mu^\sigma$  serta terdapat tambahan gaya eksternal  $K^\sigma(x^u, p^\sigma)$ , dapat dituliskan bentuk persamaan Langevin relativistik untuk partikel Brown tersebut sebagai berikut

$$dx^\sigma(\tau) = \frac{p^\sigma}{m} d\tau$$

$$dp^\sigma(\tau) = \{K^\sigma - v_\phi^\sigma [p^\phi - mU^\phi]\} d\tau + w^\sigma(\tau) \quad (3.44)$$

dengan mengikuti persamaan (3.43) untuk kenaikan stokastik  $w^\sigma(\tau) = dw^\sigma(\tau)$  dan tensor gesekan diberikan oleh

$$v_\beta^\alpha = 2v \left( \eta_\beta^\alpha + \frac{u^\alpha u_\beta}{c^2} \right) \quad (3.45)$$

Kemudian, agar partikel Brown tidak terlihat diam oleh pengamat yang berada pada kerangka bergerak bersama partikel, persamaan (3.44) dituliskan dalam bentuk kerangka laboratorium. Kerangka ini merupakan kerangka dalam keadaan diam atau bergerak dengan kecepatan yang sama dengan kerangka yang lain sehingga nampak diam. Selanjutnya dalam kerangka laboratorium  $O$  didapatkan

$$(U^\sigma) = (c, 0), (v^\mu) = \gamma(c, v^i), (w^\mu) = w^0, w^i, \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (3.46)$$

dengan

$$\gamma \equiv \left( 1 - \frac{v_i v^i}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( 1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

persamaan (3.44) dapat diubah dalam kerangka laboratorium dengan tensor gesekan persamaan (3.45) menjadi persamaan Langevin relativistik berikut



$$dp^i = (\gamma^{-1}K^i - vp^i)dt + w^i \quad (3.47)$$

persamaan (3.47) ini menggambarkan partikel Brown relativistik pada kerangka laboratorium. Kenaikan  $w^i$  dari persamaan di atas dapat ditentukan menggunakan persamaan

$$P^3[w^i] = \int_{-\infty}^{\infty} dw^0 P^{1+3}[w^\sigma] \quad (3.48)$$

selanjutnya persamaan (3.43) disubstitusi ke persamaan (3.45) sehingga diperoleh

$$P^3[w^i(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dw^0 \frac{c}{(4\pi D \frac{d\tau}{dt})^{3/2}} \exp\left[-\frac{w_\sigma(\tau)w^\sigma(\tau)}{4D \frac{d\tau}{dt}}\right] \delta[u_\sigma w^\sigma(\tau)] \quad (3.49)$$

ditentukan hubungan kecepatan  $v^\sigma$  dan juga  $w^\sigma$  sebagai berikut

$$(u_\sigma) = (-\gamma c, \gamma v_i), (w^\sigma) = (w^0, w^i) \quad (3.50)$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} P^3[w^i(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dw^0 \frac{c}{\left(4\pi D \frac{dt}{\gamma}\right)^{3/2}} \exp\left[-\frac{w_\sigma(t)w^\sigma(t)}{4D \frac{dt}{\gamma}}\right] \delta[u_\sigma w^\sigma(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c \left(\frac{\gamma}{4\pi D d}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(w^i)^2(t)(w^0)^2(t)}{4D \frac{dt}{\gamma}}\right] \\ &\quad \delta[-c\gamma w^0(t) + \gamma v w^i(t)] dw^0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

turunan dari persamaan (3.51) ini bergantung pada  $w^0$ . Agar mempermudah perhitungan dibuat permisalan  $w^0 = \frac{a}{\gamma c}$ , jadi  $a = \gamma c w^0$ , sehingga

$$\begin{aligned} P^3[w^i(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} c \left(\frac{\gamma}{4\pi D d}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\gamma}{4D \frac{dt}{\gamma}} w_i w^i \left(\frac{a}{\gamma c}\right)^2\right] \delta[-a \\ &\quad + \gamma v w^i] \frac{da}{\gamma c} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{4\pi D d}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\gamma}{4D \frac{dt}{\gamma}} \frac{w_i w^i \gamma^2 c^2 - a^2}{\gamma^2 c^2}\right] \delta[-a \\ &\quad + \gamma v w^i] da \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D d} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D} \frac{1}{dt} \frac{1}{\gamma^2 c^2} w_i w^i \gamma^2 c^2 - a^2 \right] \delta[-a + \gamma v w^i] da$$

persamaan akhir (3.52) di atas memenuhi bentuk integral  $\delta$  – dirac yakni

$$\int f(a) \delta(a - b) = f(a) \quad (3.53)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P^3[w^i(t)] &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D d} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D} \frac{1}{dt} \frac{1}{\gamma^2 c^2} (w_i w^i \gamma^2 c^2 - (\gamma v w^i)^2) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D d} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D} \frac{1}{dt} \left( w_i w^i - \frac{v_i v^i w_i w^i}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D d} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D} \frac{1}{dt} \left( \delta_{ij} w^j w^i - \frac{\delta_{ij} v^i v^j \delta_{ij} w^j w^i}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D d} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D} \frac{1}{dt} \left( \delta_{ij} - \frac{\delta^{ij} \delta_{ij} v^i v^j}{c^2} \right) w^i w^j \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

dengan  $\delta^{ij}$  merupakan delta kronecker, jika  $i = j$  akan bernilai 1 dan jika  $i \neq j$  nilainya akan 0, serta memiliki sifat

$$\delta^{ij} = \delta^{ji}; \quad \delta^{ij} \delta_{ji} = 1 \quad (3.55)$$

sehingga persamaan (3.51) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$P^3[w^i(t)] = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D dt} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{4D} \frac{1}{dt} \left( \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{c^2} \right) w^i w^j \right] \quad (3.56)$$

persamaan (3.56) merupakan rapat peluang partikel Brown relativistik pada persamaan Langevin reativsitik dalam kondisi kerangka laboratorium.

### 3.2 Persamaan Fokker-Planck Relativistik

Persamaan Fokker-Planck yang terjadi pada partikel dalam kondisi klasik telah dikaji pada penjabaran sebelumnya, yang merupakan bentuk khusus dari persamaan Langevin. Persamaan Fokker-Planck memberikan gambaran terkait evolusi waktu dari partikel Brown melalui fungsi rapat peluang berdasarkan kecepatannya. Selanjutnya agar dapat dijadikan rujukan untuk menganalisis pengaruh benda langit yang memiliki kecepatan mendekati kelajuan cahaya, maka persamaan Fokker-Planck harus dilakukan perluasan menjadi persamaan dalam kondisi relativistik (Arista, 2013).

Untuk mempermudah perluasan persamaan menjadi relativistik, dalam kasus ini digunakan persamaan Langevin relativistik sebagai tinjauan awal untuk kerangka laboratorium  $O$ , yakni

$$dp^i = -vp^i dt + w^i \quad (3.57)$$

dengan  $p^i = \gamma m v^i$  merupakan momentum relativistik.

Diperkenalkan elemen matriks berikut

$$A_j^i \equiv \left( \delta_j^i - \frac{v^i v_j}{c^2} \right) \gamma = \left( \delta_j^i - \frac{p^i p_j}{\gamma^2 m^2 c^2} \right) \quad (3.58)$$

elemen matriks di atas mengubah kenaikan rapat peluang proses Wiener  $w^i$  pada persamaan (3.56) menjadi

$$P^3[W^i(t)] = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi D dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{1}{4D dt} w^j A_j^i w^i \right] \quad (3.59)$$

Kemudian, dibentuk persamaan baru dari persamaan Langevin Relativistik (3.57) dimana persamaan baru tersebut memberikan bentuk perkalian *Gaussian white noise* yang diatur melalui distribusi Gauss tak-tergantung kecepatan. Bentuk

persamaan baru ini didapatkan dengan membuat permisalan matriks baru yang simetri yakni  $(A_j^i) = A(p)$  dengan nilai eigen dan determinan berikut

$$\text{spec}(A) = \{\gamma, \gamma, \gamma^{-1}\}, \quad \det(A) = \gamma \quad (3.60)$$

terihat bahwa matriks A definit positif untuk kecepatan  $v^2 < c^2$ , hal ini tampak dari nilai diagonal utamanya selalu positif dan determinannya juga bernilai positif.

Invers matriks  $A^{-1}$  memiliki nilai

$$(A^{-1})_k^j = \left( \frac{\delta_k^j}{\gamma^2} - \frac{v^j v_k}{c^2} \right) \gamma = \left( \delta_k^j - \frac{p^j p_k}{m^2 c^2} \right) \frac{1}{\gamma} \quad (3.61)$$

matriks A memiliki sifat unik karena simetris dan definit positif, sifat ini disebut *Cholesky-decomposition*. Sehingga dalam penyelesaiannya digunakan metode *cholesky*. Karena merupakan matriks berdefinit positif maka untuk menyelesaikan matriks A digunakan bentuk persamaan  $A = L^T L$ , sehingga dapat dituliskan

$$A = L^T L = \begin{pmatrix} L_1^1 & 0 & 0 \\ L_2^1 & L_2^2 & 0 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & 0 & L_3^3 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

dengan n  $L(p)$  adalah matriks nonsingular yang memiliki elemen matriks berikut

$$\begin{aligned} L_1^1 &= \sqrt{A_1^1} & L_1^3 &= \frac{A_1^3}{L_1^1} \\ L_1^2 &= \frac{A_1^2}{L_1^1} & L_2^3 &= \frac{(A_2^3 - L_1^3 L_1^2)}{L_2^2} \\ L_2^2 &= \sqrt{A_2^2 - (L_1^2)^2} & L_3^3 &= \sqrt{A_3^3 - (L_1^3)^2 - (L_2^3)^2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

serta invers matriks  $L(p)^{-1}$  adalah

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \begin{pmatrix} L_2^2 L_3^3 & -L_1^2 L_3^3 & L_1^2 L_1^3 - L_1^3 L_2^2 \\ 0 & L_3^3 L_1^1 & -L_2^3 L_1^1 \\ 0 & 0 & L_1^1 L_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

dengan

$$\det(L) = L_1^1 L_2^2 L_3^3$$

selanjutnya dihadirkan variabel vektor stokastik  $y(t) = y^i$  yakni

$$y^i \equiv L_j^i w^j \quad (3.65)$$

dengan asumsi bahwa  $(w_i) = w^T$  dan  $(y_i) = y^T$  sehingga didapatkan hubungan

$$w_i A w = w^T A w = w^T L^T L w^i = (L w)^T L w^i = y^T y \quad (3.66)$$

berdasarkan persamaan (3.65) dan (3.66), maka persamaan Langevin (3.57) dapat dituliskan kembali dengan bentuk

$$dp^i = -vp^i dt + L(p)^{-1} y^i \quad (3.67)$$

dengan  $y^i$  adalah vektor stokastik dengan perpindahannya diatur oleh distribusi Gauss yang tidak bergantung kecepatan, berikut

$$P^3[W^i(t)] = \left(\frac{1}{4\pi D dt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{y_i y^i}{4D dt}\right] \quad (3.68)$$

Untuk menentukan solusi dari persamaan Fokker Planck ini dapat dilakukan menggunakan tiga pendekatan, yakni Ito, Stratonovich-Fisk dan Hangei-Klimontovich dimana ketiga pendekatan ini memiliki kesamaan bahwa Persamaan Fokker-Planck dapat dituliskan sebagai persamaan kontinuitas (kekekalan peluang) dalam bentuk

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p, t) + \frac{\partial}{\partial p^i} j^i(p, t) = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p, t) = -\frac{\partial}{\partial p^i} j^i(p, t)$$

dimana  $j^i(p, t)$  merupakan rapat arus peluang

$$j^{i(p,t)} = -\left\{vp^i f + D\delta_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f\right\} \quad (3.70)$$

Untuk memperoleh solusi dari persamaan Fokker Planck digunakan identitas berikut

$$(L^T L)^{-1} = L^{-1}(L^T)^{-1} = L^{-1}(L^{-1})^T = A^{-1} \quad (3.71)$$

dapat dicari solusi untuk masing-masing pendekatan yang akan digunakan.

Dengan kata lain, matriks invers  $L^{-1}$  bergantung pada koordinat momentum  $p^i$ , vektor acak  $y(t)$  disubstitusikan dalam persamaan Langevin relativistik (3.67) sebagai proses *White Noise Gaussian*. Proses *white noises*  $L^{-1}$  sendiri berfungsi sebagai faktor ketidakpastian yang merupakan turunan persamaan gerak Brown terhadap waktu yang kemudian mengikuti rapat peluang *Gaussian*.

### 3.2.1 Pendekatan Ito

Pendekatan Ito merupakan pendekatan yang diperkenalkan oleh K. Ito melalui karyanya pada tahun 1944 dan 1951. Menurut pendekatan Ito, persamaan Langevin (3.67) dapat dianalisa melalui matriks koefisien sebelum  $y(t)$  harus dievaluasi pada batas bawah interval  $[t, t + dt]$  (Dunkel, 2005)

$$L^{-1} = L(t)^{-1} \quad (3.72)$$

nilai pada (3.72) disubstitusikan pada persamaan (3.70) sehingga diperoleh

$$j_i^i(p, t) = - \left( v p^i f + D \frac{\partial}{\partial p_j} [L^{-1} (L^{-1})^T]_j^i f \right) \quad (3.73)$$

dengan kembali pada identitas (3.71) maka persamaan (3.73) menjadi

$$j_i^i(p, t) = - \left[ v p^i f + D \frac{\partial}{\partial p_j} (A^{-1})_j^i f \right] \quad (3.74)$$

persamaan (3.74) adalah rapat arus peluang persamaan Fokker Planck untuk pendekatan Ito. Agar mendapatkan solusi untuk persamaan (3.74) maka diasumsikan arus hilang dari solusi stasioner  $f(p)$  pada persamaan (3.74) sehingga

$$-j_i^i(p, t) \equiv 0 \quad (3.75)$$

dengan memperkenalkan fungsi coba  $f(p)$  dari persamaan Fokker Planck didapatkan

$$f(p) = C\gamma^{-\sigma} \exp(-X\gamma) \quad (3.76)$$

dengan  $C > 0$  merupakan konstanta normalisasi dan nilai

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 + \frac{v_j v^j}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.77)$$

serta nilai  $\alpha$  dan  $X$  merupakan konstanta untuk keadaan stasioner, yang diperoleh dengan menurunkan persamaan (3.76) dan persamaan (3.77) terhadap  $p^j$ , untuk memudahkan terlebih dahulu diturunkan persamaan (3.77) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial p^j} &= \frac{\partial}{\partial p^j} \left(1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{p_j}{m^2 c^2} \\ &= \frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

kemudian dilanjutkan untuk penurunan (3.76) terhadap  $p^j$  sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p^j} &= \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial p^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \gamma} [C\gamma^\sigma \exp(-X\gamma)] \frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \\ &= [C\alpha\gamma^{-\sigma-1} \exp(-X\gamma) + C\gamma^{-\sigma} (-X)\exp(-X\gamma)] \frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \\ &= -\frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \left(\frac{\sigma}{\gamma} + X\right) f \end{aligned} \quad (3.79)$$

sehingga nilai rapat arus peluang pada persamaan (3.74) untuk pendekatan Ito didapatkan berikut

$$j_i^i(p, t) \equiv 0 = vp^i f + Df \frac{\partial}{\partial j} (A^{-1})^{ij} + D(A^{-1})^{ij} \frac{\partial f}{\partial p^j} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} j_i^i(p, t) &= vp^i f + Df \frac{\partial}{\partial p^j} \left( \delta_j^i + \frac{p^i p^j}{m^2 c^2} \right) \\ &\quad + D \left( \delta_j^i + \frac{p^i p^j}{m^2 c^2} \right) \frac{-p_j}{\gamma m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) f \\ &= vp^i f + Df \frac{3p^i}{\gamma m^2 c^2} + D \left( \delta_j^i + \frac{p^i p^j}{m^2 c^2} \right) \frac{-p_j}{\gamma m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) f \\ &= p^i f \left[ v + \frac{3D}{\gamma m^2 c^2} - \frac{D}{m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$

dari hasil pada (3.80) telah diketahui jika  $j_i^i(p, t) = 0$ , apabila diketahui nilai  $\sigma = 3$  dan  $X = \frac{vm^2 c^2}{D}$  nilai ini dimasukkan ke persamaan fungsi coba (3.76) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} f(p) &= C \gamma^{-\sigma} \exp \left( -\frac{vm^2 c^2}{D} \gamma \right) \\ &= C \gamma^{-3/2} \exp \left( -\frac{vm^2 c^2}{D} \gamma \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

sehingga rapat peluang momentum untuk partikel Brown Relativistik untuk persamaan Fokker Planck dengan pendekatan Ito dapat dituliskan menjadi

$$f_I(p) = C_I \left( 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{-3/2} \exp \left( -X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right) \quad (3.82)$$

dimana C merupakan konstanta normalisasi dan

$$X \equiv \frac{vm^2 c^2}{D} \quad (3.83)$$

dengan X merupakan parameter yang tidak memiliki dimensi dengan koefisien difusi  $D$  didalam persamaannya. Parameter ini juga menjelaskan terkait



kecepatan partikel yang mendekati kecepatan cahaya dengan diberikan pengaruh gangguan. Dan memiliki keterkaitan dengan Hubungan Einstein sebagai berikut

$$k_B T = \frac{mc^2}{X} = \frac{D}{mv} \quad (3.84)$$

maka diperoleh

$$k_B T X = mc^2$$

$$X = \frac{mc^2}{k_B T} \quad (3.85)$$

persamaan akhir ini menggambarkan relasi energi termal dengan energi diam dari suatu partikel Brown. Beberapa langkah dari pendekatan Ito ini juga akan digunakan pada dua pendekatan lainnya dengan beberapa kondisi yang berbeda, sehingga nantinya pada perolehan di pendekatan Hanggi-Klimontovich dapat ditentukan hasil akhir untuk persamaan Fokker Planck dalam kerangka relativistik.

### 3.2.2 Pendekatan Stratonovich-Fisk

Jika pendekatan Ito digunakan evaluasi pada interval batas bawah, maka di sini yang membedakan Stratonovich-Fisk melakukan analisa untuk matriks koefisien sebelum  $y(t)$  dievaluasi pada aturan diskritisasi titik tengah, yakni (Dunkel, 2005)

$$L^{-1} = L \left( \frac{p(t) + p(t + dt)}{2} \right)^{-1} \quad (3.86)$$

kemudian persamaan (3.86) disubstitusikan ke persamaan (3.70) dan diperoleh

$$j_{SF}^i(p, t) = - \left( vp^i f + D(L^{-1})_k^i \frac{\partial}{\partial p_j} [(L^{-1})^T]_j^k f \right) \quad (3.87)$$

dengan mengikuti langkah (3.75), (3.76), (3.77), (3.78), dan (3.79) maka nilai rapat arus peluang pada persamaan (3.87) untuk pendekatan Strantonovich-Fisk adalah

$$\begin{aligned}
 j_{SF}^i(p, t) &\equiv 0 = vp^i f + D(L^{-1})_k^i \frac{\partial}{\partial p_j} [(L^{-1})^T]_j^k f \\
 j_{SF}^i(p, t) &= vp^i f + D(L^{-1})_k^i \frac{\partial}{\partial p_j} [(L^{-1})^T]_j^k f \\
 &= vp^i f + D(L^{-1})_k^i f \frac{\partial}{\partial p_j} [(L^{-1})^T]_j^k + D(A^{-1})_j^i \frac{\partial f}{\partial p^j} \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

dengan mengingat bahwa  $L^{-1}$  diberikan oleh persamaan (3.64) maka diperoleh

$$(L^{-1})_k^i f \frac{\partial}{\partial p_j} [(L^{-1})^T]_j^k = \frac{3p^i}{2\gamma m^2 c^2} \quad (3.89)$$

subtitusikan persamaan (3.89) ke persamaan (3.88) sehingga

$$\begin{aligned}
 0 &= vp^i f + D f \frac{3p^i}{2\gamma m^2 c^2} + D \left( \delta_j^i + \frac{p^i p^j}{m^2 c^2} \right) \frac{-p_j}{\gamma m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) f \\
 &= p^i f \left[ v + \frac{3D}{2\gamma m^2 c^2} - \frac{D}{m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) \right] \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

dari hasil pada (3.90) telah diketahui jika  $j_i^i(p, t) = 0$ , apabila diketahui nilai  $\sigma = \frac{3}{2}$  dan  $X = \frac{vm^2 c^2}{D}$  nilai ini dimasukkan ke persamaan coba (3.76) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 f(p) &= C \gamma^{-\sigma} \exp \left( -\frac{vm^2 c^2}{D} \gamma \right) \\
 &= C \gamma^{-3/4} \exp \left( -\frac{vm^2 c^2}{D} \gamma \right) \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

sehingga rapat peluang momentum untuk partikel Brown Relativistik untuk persamaan Fokker Planck dengan pendekatan Strantonovich-Fisk dapat dituliskan menjadi

$$f_{SF}(p) = C_{SF} \left(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}\right)^{-3/4} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) \quad (3.92)$$

sehingga terlihat bahwa yang membedakan persamaan (3.92) dengan persamaan (3.82) adalah dalam segi kekuatan prefaktor yang bergantung pada kecepatan.

### 3.2.3 Pendekatan Hanggi-Klimontovich

Selanjutnya untuk pendekatan Hanggi Klimontovich digunakan evaluasi pada batas atas interval  $[t, t + dt]$  yakni (Dunkel, 2005)

$$L^{-1} = L(p(t + dt))^{-1} \quad (3.93)$$

nilai pada (3.93) disubstitusikan pada persamaan (3.70) sehingga diperoleh

$$j_{HK}^i(p, t) = -\left(v p^i f + D[L^{-1}(L^{-1})^T]_j^i \frac{\partial}{\partial p_j} f\right) \quad (3.94)$$

dengan kembali pada identitas (3.71) maka persamaan (3.94) dapat ditulis menjadi

$$j_{HK}^i(p, t) = -\left[v p^i f + D(A^{-1})^{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} f\right] \quad (3.95)$$

dengan mengikuti langkah (3.75), (3.76), (3.77), (3.78), dan (3.79) maka nilai rapat arus peluang pada persamaan (3.95) untuk pendekatan Hanggi-Klimontovich menjadi

$$\begin{aligned} j_{HK}^i(p, t) &\equiv 0 = v p^i f + D(A^{-1})^{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} \\ j_{HK}^i(p, t) &= v p^i f + D \left( \delta_j^i + \frac{p^i p^j}{m^2 c^2} \right) \frac{-p_j}{\gamma m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) f \\ &= p^i f \left[ v - \frac{D}{m^2 c^2} \left( \frac{\sigma}{\gamma} + X \right) \right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

dari hasil pada (3.96) telah diketahui jika  $j_{HK}^i(p, t) = 0$ , apabila nilai  $\sigma = 0$  dan  $X = \frac{v m^2 c^2}{D}$  nilai ini dimasukkan ke persamaan coba (3.76) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
f(p) &= C\gamma^{-\sigma} \exp\left(-\frac{vm^2c^2}{D}\gamma\right) \\
&= C\gamma^0 \exp\left(-\frac{vm^2c^2}{D}\gamma\right)
\end{aligned} \tag{3.97}$$

sehingga rapat peluang momentum untuk partikel Brown Relativistik untuk persamaan Fokker Planck dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich dapat dituliskan menjadi

$$f_{HK}(p) = C_{HK} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}\right) \tag{3.98a}$$

dari solusi pada persamaan (3.98a) ini terlihat bahwa tidak ada ketergantungan kecepatan pada prefaktor. Sehingga dengan menggunakan definisi suhu pada persamaan (3.85) dan rumus energi kinetik relativistik  $E = \sqrt{m^2c^2 + p^2c^2}$  persamaan (3.98a) dapat dituliskan kembali menjadi

$$f_{HK}(p) = C_{HK} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \tag{3.98b}$$

Berbeda dengan dua pendekatan sebelumnya, pendekatan Hanggi-Klimontovich ini menghasilkan distribusi stasioner, yang dapat diidentifikasi dengan Distribusi Maxwell relativistik Juttner. Ini dapat diperoleh dengan terlebih dahulu mencari nilai dari konstanta normalisasi  $C_{HK}$  pada persamaan (3.98a) dengan diubah menjadi bentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{HK}(p) d^3p = C_{HK} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}\right) d^3p \tag{3.99}$$

nilai normalisasi untuk  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{HK}(p) d^3p = 1$  sehingga dapat dituliskan

$$1 = C_{HK} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}\right) d^3p \tag{3.100}$$

$$C_{HK}^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) d^3 p \quad (3.100)$$

partikel Brown yang diasumsikan di sini berada pada ruang fluida tiga dimensi diam yang dapat dituliskan  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  sehingga persamaan (3.100) diintegrasikan terhadap  $d^3 p$  yang dihitung dengan integral lipat tiga, dimana nilai  $d^3 p = (dp_x, dp_y, dp_z)$  sehingga

$$C_{HK}^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m^2 c^2}}\right) dp_x dp_y dp_z \quad (3.101)$$

untuk menyelesaikan persamaan (3.101) maka koordinat yang digunakan adalah pendekatan untuk koordinat bola, dengan nilai

$$\begin{aligned} p_x &= p \sin \phi \cos \theta \\ p_y &= p \sin \phi \sin \theta \\ p_z &= p \cos \phi \end{aligned} \quad (3.102)$$

dan determinannya diberikan oleh

$$dp_x dp_y dp_z = p^2 \sin \phi dp d\phi d\theta \quad (3.103)$$

dengan definisi momentum  $p$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$p = mc \sinh \rho \quad (3.104)$$

dengan  $\sinh \rho$  adalah sudut hiperbolik imajiner yang bervariasi dari  $p = 0$  hingga  $p = \infty$ . Persamaan (3.101) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} C_{HK}^{-1} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) (mc)^3 \sinh^2 \rho \cosh \rho dp \\ &\quad d\rho \sin \phi dp d\phi d\theta \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$= 4\pi(mc)^3 \int_0^{\infty} \exp\left(-X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho$$

sebab

$$\sinh^2 \rho = \cosh^2 \rho - 1 \quad (3.106)$$

sehingga persamaan (3.105) menjadi

$$\begin{aligned} C_{HK}^{-1} &= 4\pi(mc)^3 \int_0^{\infty} \exp(-X \cosh \rho) \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho \\ &= 4\pi \frac{1}{4} (mc)^3 \int_0^{\infty} \exp(-X \cosh \rho) (\cosh 3\rho - \cosh \rho) \\ &= \pi(mc)^3 \left[ \int_0^{\infty} \exp(-X \cosh \rho) \cosh 3\rho \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \exp(-X \cosh \rho) \cosh \rho \right] \end{aligned} \quad (3.107)$$

bentuk ini merupakan integral pada fungsi Bessel termodifikasi bentuk pertama yang didefinisikan dalam persamaan

$$K_n^{(1)}(X) = \int_0^{\infty} \exp(-X \cosh \rho) \cosh(n\rho) d\rho \quad (3.108)$$

bentuk (3.108) kemudian diubah menjadi fungsi Besel termodifikasi bentuk kedua dengan menggunakan

$$K_n^{(1)}(X) = (-1)^{n+1} K_1^{(2)}(X) \quad (3.109)$$

sehingga persamaan (3.107) dapat dituliskan dalam bentuk baru yakni

$$C_{HK}^{-1} = \pi(mc)^3 \left[ K_3^{(2)}(X) + K_1^{(2)}(X) \right] \quad (3.110)$$

dari sini didapatkan bentuk persamaan rekursi fungsi Bessel termodifikasi untuk bentuk yang kedua adalah

$$K_{n+1}^{(2)} + K_{n-1}^{(2)} = \frac{2n}{X} K_n^{(2)}(X) \quad (3.111)$$

dari sini diperoleh nilai konstanta normalisasi C adalah

$$\begin{aligned} C_{HK}^{-1} &= \pi(mc)^3 \left[ K_3^{(2)}(X) + K_1^{(2)}(X) \right] \\ &= \pi(mc)^3 \left[ \frac{2(2)}{X} K_2^{(2)}(X) \right] \\ &= 4\pi(mc)^3 \left[ \frac{K_2^{(2)}(X)}{X} \right] \\ C_{HK} &= \frac{X}{4\pi(mc)^3 K_2^{(2)}(X)} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Sehingga diperoleh rapat arus peluang pada persamaan Fokker Planck relativistik menggunakan pendekatan Hanggi-Klimontovich dituliskan dalam bentuk

$$f_{HK}(p) = \frac{X}{4\pi(mc)^3 K_2^{(2)}(X)} \exp \left( -X \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right) \quad (3.113)$$

bentuk rapat arus peluang pada persamaan (3.113) masih bergantung pada momentum partikel. Sehingga digunakan hukum transformasi untuk memperoleh rapat arus peluang yang bergantung pada kecepatan partikel, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\phi(v) = f(p(v)) \left| \frac{\partial p}{\partial v} \right| \quad (3.114)$$

dengan

$$p(v) = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.115)$$

serta nilai untuk faktor determinannya diberikan oleh bentuk berikut

$$\left| \frac{\partial p}{\partial v} \right| = m^3 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-5/2} \quad (3.116)$$

dari persamaan-persamaan di atas maka persamaan (3.113) dapat dituliskan kembali dalam bentuk yang lebih lengkap yakni

$$\phi(v) = \frac{X}{4\pi(mc)^3 K_2^{(2)}(X)} \exp\left(-\frac{X}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2} \quad (3.117)$$

dengan  $m$  merupakan massa diam dari partikel,  $c$  adalah kelajuan cahaya di ruang hampa,  $v$  sebagai kecepatan dari partikel,  $K_2^{(2)}(X)$  merupakan fungsi Bessel yang termodifikasi bentuk kedua, dan nilai  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$  merupakan faktor Lorentz kontravarian untuk kasus partikel yang bergerak mendekati kelajuan cahaya, dimana nilai

$$X = \frac{mc^2}{k_B T} \quad (3.118)$$

yang memperlihatkan perbandingan dari energi relativistik pada partikel  $mc^2$  terhadap energi termal partikel  $k_B T$ .

Rapat peluang kecepatan dari Persamaan Fokker-Planck relativistik telah diperoleh pada persamaan (3.117) dengan menggunakan pendekatan Hangei-Klimontovich. Dari persamaan tersebut dapat dijelaskan rapat peluang kecepatan dari partikel yang bergerak mendekati kelajuan cahaya dengan gerakan yang acak.



## BAB IV PROSES DIFUSI GERAK BROWN DI SEKITAR BINTANG NEUTRON

Pada bagian ini dilakukan perhitungan dan analisis untuk mengetahui proses gerak Brown yang terjadi di sekitar bintang neutron. Analisis disini adalah secara teoritis terkait dinamika dan distribusi partikel yang berada di sekitar bintang neutron tidak berotasi dan berotasi cepat. Dengan mengacu pada penelitian sebelumnya, telah melakukan kajian teoritis pada bintang neutron tidak berotasi (Andra, 2014) dan berotasi lambat (Andra, 2017).

Mengacu pada dua persamaan pada kerangka relativistik yang telah diperoleh solusi persamaanya, yakni persamaan Langevin untuk menganalisis gerak acak (gerak Brown) atau dinamika yang terjadi pada partikel di sekitar bintang neutron, serta persamaan Fokker Planck yang menggambarkan rapat peluang atau probabilitas dari distribusi partikel di sekitar bintang neutron yang bergerak secara acak. dilakukan analisis secara lebih luas menggunakan persamaan Kramer relativistik yang merupakan generalisasi teori difusi Markovian dalam ruang fase dalam kerangka teori relativitas umum. Dengan menurunkan persamaan Fokker-Planck relativistik umum dalam ruang fase baik dalam parameterisasi ruang fase waktu pribadi dan koordinat waktu.

Berdasarkan karya Herrmann, persamaan Kramer relativistik umum dalam parameterisasi waktu pengamat diberikan oleh (Herrmann, 2010)

$$N^{-1}v^0 \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = -v^M \text{div}_x(\mathbf{e}_M(x)\phi) - \text{div}_v(\mathbf{F}\phi) + \frac{D}{2} \Delta_v \phi \quad (4.1)$$

dengan  $N = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$ , operator divergensi posisi diberikan oleh  $v^M \text{div}_x(\mathbf{e}_M(x)\phi)$ ,

operator divergensi kecepatan  $\text{div}_v(\mathbf{F}\phi)$ , dan  $\frac{D}{2} \Delta_v \phi$  Operator Laplace-Beltrami.

Selanjutnya, dilakukan perhitungan komponen-komponen pada bintang neutron tidak berotasi dan berotasi, yang meliputi komponen simbol Crishtoffel, koefisien hubungan spin, gaya gravitasi, dan gaya gesek untuk menyusun nilai operator divergensi posisi dan operator divergensi kecepatan. Sehingga, akan diperoleh persamaan difusi yang akan menggambarkan dinamika dan distribusi partikel pada bintang neutron tidak berotasi dan berotasi cepat.

#### 4.1 Perhitungan Komponen Proses Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi

Bintang neutron yang akan dianalisis dalam kasus ini memiliki karakteristik, stasioner, fluida sempuran dan memiliki konfigurasi simetri yang memiliki gravitasi sendiri. Metrik dari bintang neutron tidak berotasi pada koordinat bola dapat dituliskan sebagai berikut (Andra, 2014)

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

dengan fungsi metrik  $\nu, \lambda$  bergantung pada  $r$  dan  $\theta$ , serta didapatkan elemen tensor metrik sebagai berikut

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Selanjutnya ditentukan nilai basis kovarian dan kontravarian yang tidak bernilai 0 dari metrik tersebut, untuk basis kovarian  $e_M^\mu(x)$  terdapat empat komponen yaitu

$$e_0^0 = \sqrt{g^{00}} = \sqrt{e^{2\nu}} = e^\nu$$

$$e_1^1 = \sqrt{g^{11}} = \sqrt{e^{2\lambda}} = e^\lambda \quad (4.4a)$$

$$e_2^2 = \sqrt{g^{22}} = \sqrt{r^2} = r$$

$$e_3^3 = \sqrt{g^{33}} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta$$

dan diperoleh basis kontravariannya  $e_N^\nu(x)$  adalah sebagai berikut

$$e_0^0 = e^{-\nu}$$

$$e_1^1 = e^{-\lambda}$$

$$e_2^2 = \frac{1}{r} \tag{4.4b}$$

$$e_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan pada lampiran B, untuk memperoleh komponen Simbol Crishtoffel yang tidak nol, dan diperoleh komponen berikut

$$\Gamma_{00}^1 = \nu' e^{2\nu-2\lambda} \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda' \quad \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \nu'$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-2\lambda} \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} \quad \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \tag{4.5}$$

Setelah diperoleh komponen simbol Crishtoffel, perhitungan dilanjutkan dengan menentukan komponen koefisien hubungan spin yang tidak nol  $\Omega_{\mu N}^M(x)$ , dengan mensubsitusikan komponen di atas ke persamaan (10) yang didapatkan pada Lampiran A, yakni

$$\Omega_{\mu N}^M(x) = \theta_\nu^M(x) \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_N^\rho(x) + \theta_\nu^M(x) \partial_\mu e_N^\nu(x) \tag{4.6}$$

Dari perhitungan yang telah dilakukan pada Lampiran D maka didapatkan komponen koefisien hubungan spin yang tidak nol sebagai berikut

$$\Omega_{00}^1 = \nu' e^{\nu-\lambda} \quad \Omega_{01}^0 = \nu' e^{\nu-\lambda}$$

$$\Omega_{21}^2 = e^{-\lambda} \quad \Omega_{22}^1 = -e^{-\lambda} \tag{4.7}$$

$$\Omega_{31}^3 = e^{-\lambda} \sin \theta \quad \Omega_{32}^3 = \cos \theta$$

$$\Omega_{33}^1 = -e^{-\lambda} \sin \theta \quad \Omega_{33}^2 = -\cos \theta$$

Setelah diperoleh komponen simbol Crishtoffrel dan koefisien hubungan spin yang tidak nol, selanjutnya komponen ini digunakan untuk menyusun persamaan gravitasi relativistik. Berdasarkan persamaan (11) pada Lampiran A, maka persamaan gaya gravitasi untuk kerangka relativistik dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$F_g^a = -\Omega_{\mu B}^a(x) e_N^\nu(x) u^B u^C \quad (4.8)$$

pada persamaan (4.8)  $\Omega_{\mu B}^a$  merupakan komponen koefisien hubungan spin tidak nol,  $e_N^\nu(x)$  adalah basis kontravarian, dan nilai  $u^B u^C$  merupakan komponen kecepatan spasial dari partikel pada koordinat hiperbolik.

Selanjutnya disubstitusikan komponen-komponen di atas pada persamaan (4.8), maka diperoleh komponen gaya gravitasi di sekitar bintang neutron tidak berotasi sebagai berikut.

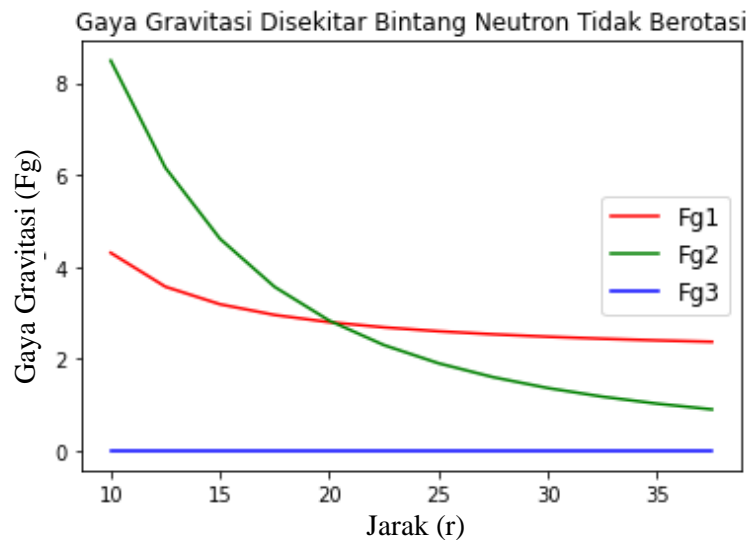
$$\begin{aligned} F_g^1 &= -\Omega_{\mu B}^1(x) e_C^\mu(x) u^B u^C \\ &= [-\Omega_{00}^1(x) e_0^0(x) u^0 u^0] + [-\Omega_{22}^1(x) e_2^2(x) u^2 u^2] \\ &\quad + [-\Omega_{33}^1(x) e_3^3(x) u^3 u^3] \\ &= [-(v' e^{\nu-\lambda})(e^{-\nu})(u^0)^2] + \left[ -(-e^{-\lambda}) \left( \frac{1}{r} \right) (u^2)^2 \right] \\ &\quad + \left[ -(-e^{-\lambda} \sin \theta) \left( \frac{1}{r \sin \theta} \right) (u^3)^2 \right] \\ &= -v' e^{-\lambda} (u^0)^2 + \frac{e^{-\lambda}}{r} (u^2)^2 + \frac{e^{-\lambda}}{r} (u^3)^2 \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} F_g^2 &= -\Omega_{\mu B}^2(x) e_C^\mu(x) u^B u^C \\ &= [-\Omega_{21}^2(x) e_2^2(x) u^1 u^2] + [-\Omega_{33}^2(x) e_3^3(x) u^3 u^3] \\ &= \left[ -(e^{-\lambda}) \left( \frac{1}{r} \right) (u^1)(u^2) \right] + \left[ -(-\cos \theta) \left( \frac{1}{r \sin \theta} \right) (u^3)^2 \right] \\ &= -\frac{e^{-\lambda}}{r} (u^1)(u^2) + \frac{\cot \theta}{r} (u^3)^2 \end{aligned} \quad (4.9b)$$

$$\begin{aligned}
F_g^3 &= -\Omega_{\mu B}^3(x) e_C^\mu(x) u^B u^C \\
&= [-\Omega_{31}^3(x) e_3^3(x) u^1 u^3] + [-\Omega_{32}^3(x) e_3^3(x) u^2 u^3] \\
&= \left[ -(e^{-\lambda} \sin \theta) \left( \frac{1}{r \sin \theta} \right) (u^1)(u^3) \right] \\
&\quad + \left[ -(\cos \theta) \left( \frac{1}{r \sin \theta} \right) (u^2)(u^3) \right] \\
&= -\frac{e^{-\lambda}}{r} (u^1)(u^3) - \frac{\cot \theta}{r} (u^2)(u^3)
\end{aligned} \tag{4.9c}$$

Persamaan (4.9) menjadi acuan awal untuk menentukan pengaruh jarak partikel di sekitar bintang neutron tidak berotasi terhadap gaya gravitasi yang dialami. Sehingga dari sini kemudian di misalkan nilai untuk variabel di sekitar benda masif, yakni  $\lambda = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)$ ,  $\nu = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)$ ,  $\nu' = \frac{M}{r^2 - 2Mr}$ ,  $M = 2$ ,  $u^0 = 2e^{-\nu}$ ,  $u^1 = \sqrt{2} e^{-\lambda}$ ,  $u^2 = \frac{1}{r}$ ,  $u^3 = 0$ , nilai-nilai ini kemudian menjadi input untuk mensimulasikan grafik dari persamaan (4.9a), (4.9b), dan (4.9c).

Setelah dilakukan plot untuk memperoleh grafik hubungan pengaruh jarak dari partikel dengan gaya gravitasi bintang neutron tidak berotasi diperoleh hasil grafik sebagai berikut



**Gambar 4.1 Grafik Gaya Gravitasi Disekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi**

Setelah dilakukan plotting untuk persamaan (4.9) menggunakan google colabs dengan menggunakan bahasa pemrograman Python 3.7, maka diperoleh hasil grafik 4.1 di atas. Pada grafik ini terlihat bahwa, tiga komponen gaya gravitasi disimbolkan dengan garis Fg1, Fg2, dan Fg3 yang merupakan garis grafik dari persamaan  $F_g^1$ ,  $F_g^2$ , dan  $F_g^3$ , yang masing-masing ketiga komponen tersebut merepresentasikan tiga koordinat pada sistem koordinat bola, dengan berturut-turut  $r$ ,  $\theta$ , dan  $\phi$ . Dari grafik di atas terlihat komponen  $F_g^3$  bernilai nol yang menggambarkan bahwa tidak ada gaya gravitasi pada komponen  $\phi$  yang merupakan sudut azimuth (arah rotasi). Hal ini sesuai dengan bintang neutron yang dikaji adalah yang tidak berotasi.

Kemudian dua garis grafik lainnya, menggambarkan pengaruh jarak terhadap gaya gravitasi yang dialami oleh partikel yang berada di sekitar bintang neutron. Di sini terlihat pada komponen  $r$  (jarak radial) yakni garis grafik Fg1 yang menggambarkan arah gaya pada pusat bintang neutron, gaya gravitasi perlahan mengalami penurunan ketika jarak partikel semakin jauh dari bintang, begitu pula pada grafik Fg2. Selain itu, pada garis grafik Fg2 yang merupakan komponen  $\theta$  (sudut kutub) juga masih terdapat gaya gravitasi yang mempengaruhi partikel sehingga, selain ditarik menuju pusat bintang neutron, partikel-partikel di sekitar bintang neutron juga ditarik ke arah kutubnya.

Selanjutnya untuk mempermudah perhitungan mencari persamaan difusi gerak brown di sekitra bintang neutron tidak berotasi maka koordinat komponen gaya gravitasi pada persamaan (4.9) masih perlu diubah menjadi koordinat hiperbolik. Untuk itu pada proses difusi relativistik diperkenalkan relasi kecepatan-4 dalam sistem koordinat hiperbolik yakni

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = 1 \quad (4.10a)$$

dengan

$$\begin{aligned} u^0 &= \cosh \alpha \\ u^1 &= \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \\ u^2 &= \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \\ u^3 &= \sinh \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (4.10b)$$

dengan mensubstitusikan nilai kecepatan-4 pada (4.10b) maka persamaan (4.9a), (4.9b), dan (4.9c) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} F_g^1 &= -v' e^{-\lambda} \cosh^2 \alpha + \frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \phi \\ &\quad + \frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$F_g^2 = -\frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta \sin \phi \cos \phi + \frac{\cot \theta}{r} \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (4.11b)$$

$$\begin{aligned} F_g^3 &= -\frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \\ &\quad - \frac{\cot \theta}{r} \sinh^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi \end{aligned} \quad (4.11c)$$

Selanjutnya disusun nilai komponen gaya gravitasi yang baru dengan mensubstitusikan masing-masing nilai  $F_g^1$ ,  $F_g^2$ , dan  $F_g^3$  pada persamaan komponen gaya dalam bentuk sistem koordinat hiperbolik berikut

$$F_g^\alpha = (\cosh \alpha)^{-1} [\sin \beta (\cos \phi F_g^1 + \sin \phi F_g^2) + \cos \beta F_g^3] \quad (4.12a)$$

$$F_g^\beta = (\sinh \alpha)^{-1} [\cos \beta (\cos \phi F_g^1 + \sin \phi F_g^2) - \sin \beta F_g^3] \quad (4.12b)$$

$$F_g^\phi = (\sinh \alpha)^{-1} (\sin \beta)^{-1} (-\sin \phi F_g^1 + \cos \phi F_g^2) \quad (4.12c)$$

sehingga diperoleh komponen gaya gravitasi total dalam koordinat hiperbolik sebagai berikut

$$F_g^\alpha = -v'e^{-\lambda} \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi \quad (4.13a)$$

$$F_g^\beta = -v'e^{-\lambda} \coth \alpha \cosh \alpha \cos \beta \cos \phi + \frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh \alpha \cos \beta \cos \phi + \frac{\cot \theta}{r} \sinh \alpha \cos \beta \sin \phi \quad (4.13b)$$

$$F_g^\phi = \frac{1}{\sinh \alpha \sin \beta} \left( -v'e^{-\lambda} \cosh^2 \alpha \sin \phi + \frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh^2 \alpha \sin \phi + \frac{\cot \theta}{r} \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right) \quad (4.13c)$$

Selain gaya gravitasi, pada proses gerak brown gaya eksternal yang juga memiliki peran penting terhadap dinamika gerak dari partikel adalah adanya gaya gesek. Dalam teori non-relativistik, gaya gesek dituliskan  $F^i = -\kappa m v^i$ , dimana  $\kappa$  dan  $v^i$  masing-masing adalah koefisien gesekan dan komponen kecepatan non-relativistik. Generalisasi gaya gesekan relativistik memperkenalkan tensor gesekan. Tensor ini mirip dengan tensor tekanan dalam teori relativitas, sehingga gaya gesek diberikan oleh (Herrmann, 2009)

$$F^i = \kappa_\alpha^i [u^\alpha - U^\alpha] \quad (4.14)$$

dimana  $U^\alpha$  adalah kecepatan-4 pada fluida dan  $\kappa_\alpha^i$  adalah koefisien gesekan tensor. Dalam kerangka pengamat, fluida homogen diam dijelaskan oleh  $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ . Untuk fluida homogen isotropik, tensor gesekan diberikan oleh

$$\kappa_\alpha^i = \kappa (\eta_\alpha^i + u^i u_\alpha) \quad (4.14)$$

dengan  $\kappa$  menunjukkan koefisien gesekan skalar yang diukur dalam kerangka sisa partikel. Oleh karena itu, gaya gesek diberikan oleh nilai berikut  $F_f^i = -\kappa u^i u^0$  atau dalam sistem koordinat hiperbolik dinyatakan dengan

$$F_f^\alpha = -\kappa \sinh \alpha; F_f^\beta = 0; F_f^\phi = 0 \quad (4.15)$$



Untuk memperoleh komponen gaya eksternal total yang bekerja, maka dilakukan penjumlahan antara komponen gaya gravitasi pada masing-masing persamaan (4.12) dengan komponen gaya gesek pada persamaan (4.15)

$$F^\alpha = F_g^\alpha + F_f^\alpha \quad (4.16a)$$

$$= -v' e^{-\lambda} \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi - v \sinh \alpha$$

$$F^\beta = F_g^\beta + F_f^\beta$$

$$= -v' e^{-\lambda} \coth \alpha \cosh \alpha \cos \beta \cos \phi + \frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh \alpha \cos \beta \cos \phi \quad (4.16b)$$

$$+ \frac{\cot \theta}{r} \sinh \alpha \cos \beta \sin \phi$$

$$F^\phi = F_g^\phi + F_f^\phi \quad (4.16c)$$

$$= \frac{1}{\sinh \alpha \sin \beta} \left( -v' e^{-\lambda} \cosh^2 \alpha \sin \phi \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\lambda}}{r} \sinh^2 \alpha \sin \phi + \frac{\cot \theta}{r} \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right)$$

Setelah memperoleh seluruh komponen perhitungan pada bintang neutron tidak berotasi selanjutnya, dilakukan perhitungan untuk mengetahui masing-masing komponen persamaan Kramer Relativistik. Dengan mengacu pada persamaan (4.1) maka dilakukan perhitungan komponen operator divergensi ruang posisi dan operator divergensi ruang kecepatan. Persamaan operator divergensi dalam ruang posisi,  $div_x(\mathbf{e}_M(x)\Phi)$ , diberikan oleh persamaan (22) pada Lampiran A yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$div_x(\mathbf{e}_M(x)\Phi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} e^i_M(x)\Phi) \quad (4.17)$$

sehingga diperoleh nilai operator divergensi dalam ruang posisi pada bintang neutron tidak berotasi sebagai berikut

$$-u^M div_x(\mathbf{e}_M(x)\Phi) = -u^M \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} e^i_M(x)\Phi) \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
&= v' \phi e^{-\lambda} \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{2e^{-\lambda} \phi}{r} \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
&\quad \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{\phi}{r} \cot \theta \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sinh \alpha \\
&\quad \sin \beta \sin \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \csc \theta \sinh \alpha \cos \beta
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk operator divergensi dalam ruang kecepatan,  $div_v(\mathbf{F}\phi)$ , diberikan oleh persamaan

$$div_v(\mathbf{F}\phi) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial r^m} (\sqrt{G} F^m \phi) \quad (4.19)$$

dimana  $G = \det G_{ij}$ ,  $g = \det g_{ij}$ . Sehingga operator divergensi dalam ruang kecepatan pada bintang neutron tidak berotasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
div_v(\mathbf{F}\phi) &= (\sinh \alpha)^{-2} \frac{\partial}{\partial \alpha} ((\sinh \alpha)^2 F^\alpha \phi) - (\sinh \alpha)^{-1} (\sin \beta)^{-1} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\sin \beta F^\beta \phi) - (\sinh \alpha)^{-1} (\sin \beta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \beta F^\phi \phi) \\
&= -2v' \phi e^{-\lambda} \coth \alpha \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi - v' \phi e^{-\lambda} \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \\
&\quad -v' e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi - 3v\phi \cosh \alpha - v \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \coth \alpha \cosh \alpha \\
&\quad \sin \beta \cos \phi - v' \phi e^{-\lambda} \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - v' e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \cosh \alpha \sin \beta \\
&\quad \cos \phi - 3v\phi \cosh \alpha - v \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \sinh \alpha + v' \phi e^{-\lambda} \coth^2 \alpha \csc \beta \cos \phi \\
&\quad \frac{e^{-\lambda} \phi}{r} \csc \beta \cos \phi - \frac{\phi}{r} \cot \theta \csc \beta \sin \phi - 2v' \phi e^{-\lambda} \coth^2 \alpha \sin \beta \\
&\quad \cos \phi + \frac{2\phi e^{-\lambda}}{r} \sin \beta \cos \phi + \frac{2\phi}{r} \cot \theta \sin \beta \sin \phi + v' e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \coth^2 \\
&\quad \alpha \cos \beta \cos \phi - \frac{e^{-\lambda} \partial \phi}{r \partial \beta} \cos \beta \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \cot \theta \cos \beta \sin \phi - v' \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda} \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \cos \phi - v' e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \sin \phi + \frac{e^{-\lambda} \phi}{r} \\
& \csc^2 \beta \sin \phi + \frac{e^{-\lambda} \partial \phi}{r \partial \phi} \csc^2 \beta \sin \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \cot \theta \cot^2 \beta \cos \phi \\
& + \frac{\phi}{r} \cot \theta \cot^2 \beta \sin \phi \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Nilai Operator Laplace-Beltrami dapat ditentukan melalui persamaan (24) pada Lampiran A. Untuk nilai Operator Laplace-Beltrami pada bintang neutron tidak berotasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{D}{2} \Delta_u \phi = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{(\sinh \alpha)^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta} + \cot \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \right. \right. \\
\left. \left. \frac{1}{(\sinh \beta)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \right) \right\} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{J(J+1)\phi}{(\sinh \alpha)^2} \right\} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

dimana  $-J(J+1) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta} + \cot \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{1}{(\sinh \beta)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2}$  dengan J merupakan indeks diskrit dengan nilai  $J = 0, 1, 2, 3 \dots \infty$ .

Dengan mensubstitusi persamaan (4.19), (4.20), dan (4.21) ke persamaan (4.1), maka berdasarkan tinjauan studi yang telah dilakukan sebelumnya (Andra, 2014) diperoleh persamaan difusi yang menggambarkan proses difusi partikel di sekitar bintang neutron tidak berotasi dalam ruang-waktu melengkung sebagai berikut

$$\begin{aligned}
e^{-\nu} \cosh \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = & -\frac{2e^{-\lambda}}{r} \phi \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial r} \sinh \alpha \sin \beta \\
& \cos \phi - \frac{\phi}{r} \cot \phi \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \\
& + 3v \phi \cosh \alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \csc \theta \sinh \alpha \cos \beta + 2v' e^{-\lambda} \phi \coth \alpha \\
& \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi + v' e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi + v \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\
& \sinh \alpha - v' e^{-\lambda} \phi \coth^2 \alpha \csc \beta \cos \phi + \frac{e^{-\lambda}}{r} \phi \csc \beta \cos \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\phi}{r} \cot \theta \csc \beta \sin \phi + 2v'e^{-\lambda} \phi \coth^2 \alpha \sin \beta \cos \phi \\
& - \frac{2e^{-\lambda}}{r} \phi \sin \beta \cos \phi - \frac{2}{r} \phi \cot \theta \sin \beta \sin \phi - v'e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \\
& \coth^2 \alpha \cos \beta \cos \phi + \frac{e^{-\lambda}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \cos \beta \cos \phi \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \cot \theta \cos \beta \sin \phi + v'e^{-\lambda} \phi \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \cos \phi \\
& + v'e^{-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \sin \phi + \frac{e^{-\lambda}}{r} \phi \csc^2 \beta \sin \phi - \frac{e^{-\lambda}}{r} \\
& \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \csc^2 \beta \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \cot \theta \cot^2 \beta \cos \phi - \frac{\phi}{r} \cot \theta \cot^2 \beta \\
& \sin \phi + \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{J(J+1)}{(\sinh \alpha)^2} \phi \right\} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

#### 4.2 Perhitungan Komponen Proses Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat

Sama pada kasus tidak berotasi, bintang neutron berotasi cepat yang dianalisis pada penelitian ini adalah bintang neutron stasioner, fluida sempurna dan memiliki konfigurasi simetri yang memiliki gravitasi sendiri. Metrik dari bintang neutron berotasi cepat pada koordinat bola dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -e^{2v} dt^2 + e^{2a} dr^2 + e^{2a} r^2 d\theta^2 + e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\
& - 2\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta dt d\phi + \omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta dt^2 \tag{4.23}
\end{aligned}$$

dengan fungsi metrik  $v, \lambda, a$  bergantung pada  $r$  dan  $\theta$ . Dari metrik ini maka didapatkan elemen tensor metrik sebagai berikut

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta - e^{2v} & 0 & 0 & -\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta \\ 0 & e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2a} r^2 & 0 \\ -\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega^{-2}e^{-2\lambda}r^{-2}\sin^{-2}\theta - e^{-2\nu} & 0 & 0 & -\omega^{-1}e^{-2\lambda}r^{-2}\sin^{-2}\theta \\ 0 & e^{-2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2a}r^{-2} & 0 \\ -\omega^{-1}e^{-2\lambda}r^{-2}\sin^{-2}\theta & 0 & 0 & e^{-2\lambda}r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

Selanjutnya berdasarkan elemen tensor metrik di atas maka dapat ditentukan nilai basis kovarian dan kontravarian yang tidak bernilai 0 dari metrik bintang neutron berotasi cepat. Untuk basis kovarian  $e_M^\mu(x)$  diperoleh komponen sebagai berikut

$$\begin{aligned} e_0^0 &= \sqrt{g^{00}} = \sqrt{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta - e^{2\nu}} \\ &= \omega e^\lambda r \sin \theta - e^\nu \\ e_1^1 &= \sqrt{g^{11}} = \sqrt{e^{2a}} = e^a \\ e_2^2 &= \sqrt{g^{22}} = \sqrt{e^{2a} r^2} = e^a r \\ e_3^3 &= \sqrt{g^{33}} = \sqrt{e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta} = e^\lambda r \sin \theta \\ e_0^3 &= \sqrt{g^{30}} = \sqrt{\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta} = -\omega(r) e^\lambda r \sin \theta \\ e_3^0 &= \sqrt{g^{03}} = \sqrt{\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta} = -\omega(r) e^\lambda r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

sehingga diperoleh basis kontravariannya  $e_N^\nu(x)$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} e_0^0 &= \frac{e^{-\lambda}}{\omega r \sin \theta} - e^{-\nu} \\ e_1^1 &= e^{-a} \\ e_2^2 &= \frac{e^{-a}}{r} \\ e_3^3 &= \frac{e^{-\lambda}}{r \sin \theta} \\ e_0^3 &= -\frac{e^{-\lambda}}{\omega(r) r \sin \theta} \\ e_3^0 &= -\frac{e^{-\lambda}}{\omega(r) r \sin \theta} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Selanjutnya dari metrik ditentukan komponen Simbol Crishtoffel yang tidak nol diberikan oleh komponen berikut berdasarkan perhitungan pada Lampiran D

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega^2} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu}}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \\
\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 &= \frac{\frac{1}{2} \omega^2 e^{2\lambda r^2} \sin 2\theta}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \\
\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 &= \frac{(-\omega e^{2\lambda r^2} \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \\
\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 &= (\omega e^{2(\lambda-a)r^2} \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 &= -\omega \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 &= \omega \cot \theta \\
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \lambda' + \frac{1}{r} \\
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta \\
\Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 &= \frac{\omega e^{2\lambda-a} \sin 2\theta}{2} \\
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1 - a'r}{r} \\
\Gamma_{00}^1 &= -(\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega^2} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) + v' e^{2(\nu-a)} \\
\Gamma_{00}^2 &= \frac{-\omega^2 e^{2\lambda r^2} \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2(e^a r)^2} \\
\Gamma_{11}^1 &= a' \\
\Gamma_{22}^1 &= r(a'r + 1) \\
\Gamma_{33}^1 &= -e^{2(\lambda-a)} r (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \\
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} e^{2(\lambda-a)} r^2 \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{4.27}$$

selanjutnya menentukan komponen koefisien hubungan spin yang tidak nol  $\Omega_{\mu N}^M(x)$  dengan mensubstitusikan hasil diatas ke persamaan (4.6) dan dilakukan

perhitungan pada Lampiran E. Sehingga didapatkan komponen koefesien hubungan spin yang tidak nol sebagai berikut

$$\Omega_{10}^0 = (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \left[ \left( \frac{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega^2} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu}}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta + e^{\nu}} \right) + \left( \frac{\lambda' e^{\lambda} \sin \theta}{\omega' r} - \nu' e^{\nu} \right) \right]$$

$$\Omega_{01}^0 = \frac{(\omega e^{\lambda+a} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu+a}}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta + e^{\nu}}$$

$$\Omega_{02}^0 = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 e^{2\lambda+a} r^3 \sin 2\theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}$$

$$\Omega_{00}^1 = (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \left( -\omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) + \nu' e^{2\nu-a} \right)$$

$$\Omega_{22}^1 = e^{2a} r^2 (a' r + 1)$$

$$\Omega_{33}^1 = -e^{3\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^3 \theta$$

$$\Omega_{21}^2 = e^{2a} (1 - a' r)$$

$$\Omega_{33}^2 = -e^{3\lambda-a} r^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\Omega_{01}^3 = \omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta$$

$$\Omega_{02}^3 = -\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)$$

$$\Omega_{20}^0 = (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \left[ \frac{(\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta)}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta + e^{\nu}} + (\omega e^{\lambda r} \cos \theta - e^{\nu}) \right]$$

$$\Omega_{31}^0 = \frac{(-\omega e^{2\lambda+a} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta + e^{\nu}}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{13}^0 &= \frac{(-\omega e^{3\lambda} r^3 \sin^3 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta + e^{\nu}} \\
\Omega_{30}^1 &= (\omega e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \\
\Omega_{03}^1 &= (\omega e^{3\lambda - a} r^3 \sin^3 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
\Omega_{00}^2 &= \left( \frac{-\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^a r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \\
\Omega_{03}^2 &= \frac{1}{2} \omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \\
\Omega_{10}^3 &= (-\omega e^{\lambda} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \\
\Omega_{31}^3 &= e^{\lambda + a} r \sin \theta (\lambda' + 1) \\
\Omega_{32}^3 &= e^{\lambda + a} r^2 \cos \theta
\end{aligned} \tag{4.28}$$

selanjutnya menentukan komponen dari gaya gravitasi  $F_g^a$  dengan mengacu pada persamaan (4.8) sehingga komponen gaya gravitasi disekitar bintang neutron berotasi cepat didapatkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
F_g^1 &= -\Omega_{\mu B}^1(x) e_C^\mu(x) u^B u^C \\
&= [-\Omega_{00}^1(x) e_0^0(x) u^0 u^0] + [-\Omega_{22}^1(x) e_2^2(x) u^2 u^2] + \\
&\quad [-\Omega_{33}^1(x) e_3^3(x) u^3 u^3] + [-\Omega_{30}^1(x) e_3^3(x) u^0 u^3] + \\
&\quad [-\Omega_{03}^1(x) e_0^0(x) u^3 u^0] \\
F_g^1 &= \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \right) (u^0)^2 \right] \\
&\quad - \left[ (e^a r (a' r + 1)) (u^2)^2 \right] + \left[ (e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) (u^3)^2 \right] \\
&\quad - \left[ (\omega e^{\lambda - a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) (u^0) (u^3) \right]
\end{aligned}$$



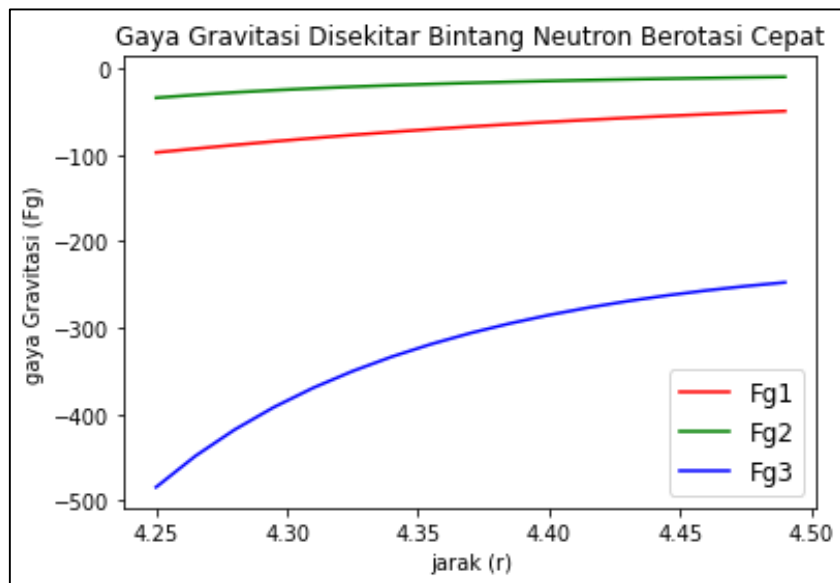
$$-\left[\left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right)(u^3)(u^0)\right] \quad (4.29a)$$

$$\begin{aligned} F_g^2 &= -\Omega_{\mu B}^2(x) e_C^\mu(x) u^B u^C \\ &= [-\Omega_{21}^2(x) e_2^2(x) u^1 u^2] + [-\Omega_{33}^2(x) e_3^3(x) u^3 u^3] \\ &\quad + [-\Omega_{00}^2(x) e_0^0(x) u^0 u^0] + [-\Omega_{03}^2(x) e_0^0(x) u^3 u^0] \\ F_g^2 &= \left[-e^a \left(\frac{1}{r} - a'\right) (u^1)(u^2)\right] + [(e^{2\lambda-a} r^2 \sin \theta \cos \theta)(u^3)^2] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}}\right) (u^0)^2\right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right) (u^3)(u^0)\right] \end{aligned} \quad (4.29b)$$

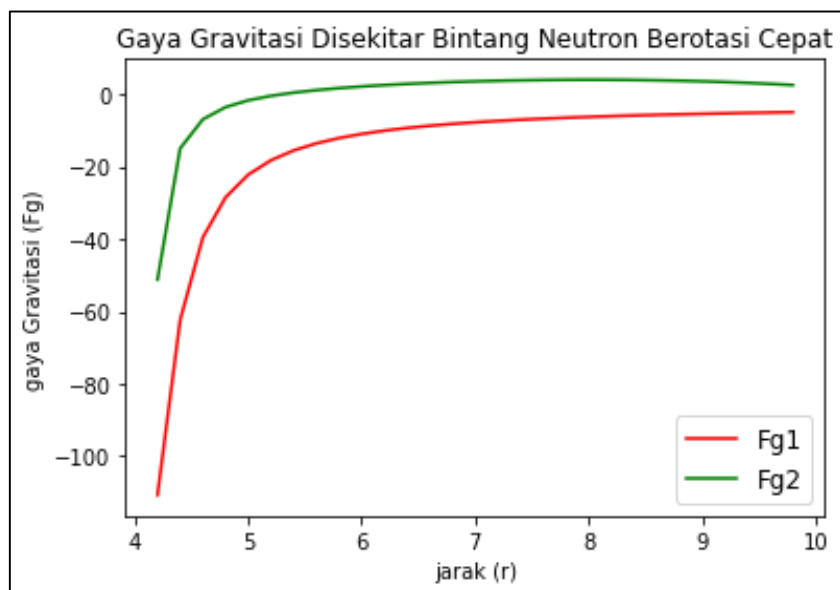
$$\begin{aligned} F_g^3 &= -\Omega_{\mu B}^3(x) e_C^\mu(x) u^B u^C \\ &= [-\Omega_{31}^3(x) e_3^3(x) u^1 u^3] + [-\Omega_{32}^3(x) e_3^3(x) u^2 u^3] + \\ &\quad [-\Omega_{10}^3(x) e_1^1(x) u^0 u^1] + [-\Omega_{01}^3(x) e_0^0(x) u^1 u^0] + \\ &\quad [-\Omega_{02}^3(x) e_0^0(x) u^2 u^0] \\ F_g^3 &= [(-e^a(\lambda' + 1)(u^1)(u^3))] + [(-e^a r \cot \theta)(u^2)(u^3)] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right)\left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right)(u^2)(u^0)\right] \\ &\quad + \left[(\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta)\left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right)(\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right)\right] (u^0)(u^1) \end{aligned} \quad (4.29c)$$

Langkah selanjutnya sama seperti pada proses perhitungan untuk bintang neutron tidak berotasi, untuk selanjutnya komponen gaya gravitasi pada persamaan (4.29a), (4.29b), dan (4.29c) disimulasikan dalam bentuk grafik,

dengan mensubstitusikan nilai variabel di sekitar benda masif, yakni  $\lambda = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ ,  $\nu = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ ,  $\nu' = \frac{M}{r^2 - 2Mr}$ ,  $M = 2$ ,  $u^0 = 2e^{-\nu}$ ,  $u^1 = \sqrt{2} e^{-\lambda}$ ,  $u^2 = \frac{1}{r}$ ,  $u^3 =$  , nilai-nilai ini kemudian menjadi input untuk mensimulasikan grafik dari persamaan (4.29a), (4.29b), dan (4.29c), sehingga diperoleh grafik sebagai berikut



**Gambar 4.2** Grafik Gaya Gravitasi di sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat



**Gambar 4.3** Grafik Gaya Gravitasi di sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat untuk Komponen Fg1 dan Fg2

Dilakukan hal yang sama pada persamaan gaya gravitasi pada bintang neutron berotasi cepat untuk menghasilkan grafik pengaruh jarak terhadap gaya gravitasi yang dialami oleh partikel di sekitar bintang neutron berotasi cepat. Gambar 4.2 di atas menunjukkan tiga komponen gaya gravitasi yakni masing-masing  $F_g^1$ ,  $F_g^2$ , dan  $F_g^3$ . Berbeda dengan kondisi sebelumnya, pada bintang neutron berotasi cepat seluruh komponen dipengaruhi oleh gaya gravitasi. Terlebih pada garis grafik  $F_g^3$  untuk komponen  $\phi$  (sudut arah rotasi) nilai gaya gravitasi sangat besar pada saat jarak partikel ke bintang neutron sangat dekat, berbeda dengan bintang neutron berotasi lambat yang komponen gaya gravitasi  $F_g^3$  memiliki nilai yang sangat kecil bahkan mendekati nol. Hal ini memperlihatkan perbedaan yang signifikan antara bintang neutron tidak berotasi dan berotasi lambat dengan bintang neutron berotasi cepat.

Untuk komponen garis grafik  $F_g^1$  dan  $F_g^2$  diplotting kembali pada grafik 4.3 untuk memperoleh gambaran grafik yang lebih detail. Tanda negatif pada kedua grafik di atas menginterpretasikan gaya yang semakin menarik, dimana tarikan dari gaya gravitasi di sekitar bintang neutron berotasi cepat memiliki nilai yang semakin besar tarikannya. Gambar 4.3 juga menggambarkan bahwa, pada bintang neutron berotasi cepat gaya gravitasi tidak hanya memengaruhi arah radial saja yang membuat partikel ditarik ke pusat bintang, akan tetapi juga pada komponen garis grafik  $F_g^2$ , atau komponen  $\theta$  yang menunjukkan bahwa terdapat gaya yang menarik bintang ke arah kutub yakni  $F_g^2$ . Dari kedua grafik tersebut juga menggambarkan bahwa semakin jauh jarak ( $r$ ) partikel dari bintang neutron maka gaya yang bekerja semakin kecil dan mendekati nol, dan saat partikel dekat

dengan bintang maka gaya gravitasi yang berkerja sangat besar, terlebih pada komponen  $F_g^3$ .

Selanjutnya untuk mempermudah perhitungan dalam menentukan persamaan difusi gerak brown di sekitar bintang neutron berotasi cepat maka koordinat komponen gaya gravitasi pada persamaan (4.9) masih perlu diubah menjadi koordinat hiperbolik. Untuk itu pada proses difusi relativistik diperkenalkan relasi kecepatan-4 dalam sistem koordinat hiperbolik yakni

$$\begin{aligned}
 u^0 &= \cosh \alpha \\
 u^1 &= \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \\
 u^2 &= \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \\
 u^3 &= \sinh \alpha \cos \beta
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

dengan mensubstitusiikan nilai kecepatan-4 untuk sistem koordinat hiperbolik pada persamaan (4.30) maka persamaan (4.29a), (4.29b), dan (4.29c) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned}
 F_g^1 &= \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu-a} \right) \cosh^2 \alpha \right] \\
 &\quad - \left[ (e^a r (a' r + 1)) \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \phi \right] \\
 &\quad + \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \right] \\
 &\quad - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu} \right) \cosh \alpha \sinh \alpha \cos \beta \right] \\
 &\quad - \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu) \cosh \alpha \sinh \alpha \cos \beta \right]
 \end{aligned} \tag{4.31a}$$

$$\begin{aligned}
F_g^2 = & \left[ -e^a \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta \sin \phi \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \right) \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^a r} \right) \cosh^2 \alpha \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \cosh \alpha \sinh \alpha \cos \beta \right]
\end{aligned} \tag{4.31b}$$

$$\begin{aligned}
F_g^3 = & -e^a (\lambda' + 1) \sinh^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \\
& - e^a r \cot \theta \sinh^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \omega e^{\lambda - a} r \sin \theta \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \right] \\
& + \left[ \frac{\omega e^{\lambda + a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right] \cosh \alpha \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{\lambda + a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r} \right) \cosh \alpha \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \right]
\end{aligned} \tag{4.31c}$$

Selanjutnya disusun nilai komponen gaya gravitasi yang baru dengan mensubstitusikan masing-masing nilai  $F_g^1$ ,  $F_g^2$ , dan  $F_g^3$  pada persamaan komponen gaya dalam bentuk sistem koordinat hiperbolik berikut

$$F_g^\alpha = (\cosh \alpha)^{-1} [\sin \beta (\cos \phi F_g^1 + \sin \phi F_g^2) + \cos \beta F_g^3] \tag{4.32a}$$

$$F_g^\beta = (\sinh \alpha)^{-1} [\cos \beta (\cos \phi F_g^1 + \sin \phi F_g^2) - \sin \beta F_g^3] \tag{4.32b}$$

$$F_g^\phi = (\sinh \alpha)^{-1} (\sin \beta)^{-1} (-\sin \phi F_g^1 + \cos \phi F_g^2) \tag{4.32c}$$

sehingga diperoleh komponen gaya gravitasi total dalam koordinat hiperbolik sebagai berikut

$$\begin{aligned}
F_g^\alpha = & \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu - a} \right) \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^a r (a' r + 1) - e^a \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \tanh \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 \sin \theta \cos \theta - e^a r \cot \theta) \tanh \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) + (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) + \right. \\
& \left. \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \right] \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi + \\
& \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{r} \right) \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi \right] - + \\
& \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^a r} \right) \cosh \alpha \sin \beta \sin \phi \right] \tag{4.33a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_g^\beta = & \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \right) \cosh \alpha \coth \alpha \cos \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^a r (a' r + 1) - e^a \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \sinh \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \phi \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \sinh \alpha \cos^3 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \cosh \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \cosh \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 \sin \theta \cos \theta) \sinh \alpha \cos^3 \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^a r} \right) \sinh \alpha \coth \alpha \cos \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \cosh \alpha \cos^2 \beta \sin \phi \right] \\
& + e^a (\lambda' + 1) \sinh \alpha \sin^2 \beta \cos \beta \cos \phi + e^a r \cot \theta \sinh \alpha \sin^2 \beta \cos \beta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \right. \\
& + \left. \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \right] \cosh \alpha \sin^2 \beta \cos \phi \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r} \right) \cosh \alpha \sin^2 \beta \sin \phi \right] \tag{4.33b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_g^{\phi} = & \left[ \left( v' e^{2\nu-a} - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) \cosh^2 \alpha \sin \phi \right] \\
& - (e^a r (a' r + 1)) \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^3 \phi - (e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \\
& \sinh^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \phi + \left[ -e^a \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \cos^2 \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \cosh \alpha \sinh \alpha \cos \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \right) \cosh \alpha \coth \alpha \csc \beta \cos \phi \right] + e^{2\lambda-a} r^2 \\
& \sin \theta \cos \theta \sinh \alpha \cos \beta \cot \beta \cos \phi + \\
& \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \cosh \alpha \cot \beta \cos \phi \right] + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \right. \right. \\
& \left. \left. \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \cosh \alpha \sinh \alpha \cos \beta \sin \phi \right] \tag{4.33c}
\end{aligned}$$

Dengan mengacu pada nilai gaya gesek relativistik dalam koordinat hiperbolik pada persamaan (4.15), maka komponen gaya eksternal total relativistik dalam koordinat hiperbolik yang terjadi disekitar bintang neutron berotasi cepat dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
F^{\alpha} &= F_g^{\alpha} - v \sinh \alpha \\
F^{\beta} &= F_g^{\beta} \\
F^{\phi} &= F_g^{\phi}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

dimana  $F_g^\alpha, F_g^\beta$ , dan  $F_g^\phi$  diberikan oleh persamaan (4.33a), (4.33b), dan (4.33c) secara berturut-turut.

Untuk memperoleh hasil yang akan disubstitusikan pada persamaan (4.1) terlebih dahulu dihitung nilai operator divergensi pada ruang posisi dan ruang kecepatan serta komponen operator Laplace-Bletrami disekitar bintang neutron berotasi cepat. Untuk operator divergensi pada ruang posisi  $div_x(\mathbf{e}_M(x)\phi)$  disekitar bintang neutron berotasi cepat adalah

$$\begin{aligned}
-u^M div_x(\mathbf{e}_M(x)\phi) &= -u^M \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} e^i_M(x)\phi) \\
&= -e^a \phi 2r \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - e^a r \phi \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \cot \theta \\
&\quad - \frac{\partial \phi}{\partial r} e^a \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e^a r \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \\
&\quad + (\omega e^\lambda r \sin \theta \cosh \alpha - e^\lambda r \sin \theta \sinh \alpha \cos \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

sedangkan untuk operator divergensi pada ruang kecepatan  $div_v(\mathbf{F}\phi)$ , sebagai berikut

$$\begin{aligned}
div_v(\mathbf{F}\phi) &= (\sinh \alpha)^{-2} \frac{\partial}{\partial \alpha} ((\sinh \alpha)^2 F^\alpha \phi) - (\sinh \alpha)^{-1} (\sin \beta)^{-1} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\sin \beta F^\beta \phi) - (\sinh \alpha)^{-1} (\sin \beta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \beta F^\phi \phi) \\
&= \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \phi \right) 2 \cosh \alpha \coth \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
&\quad + \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \phi \right) \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
&\quad + \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
&\quad - \left[ \left( e^a r \phi (a' r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) 3 \cosh \alpha \tanh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( e^{ar} \phi (a'r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \operatorname{sech}^2 \alpha \sinh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{ar} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} (a'r + 1) - e^a \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \phi - e^{\nu} \phi) 3 \cosh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \phi \right) \operatorname{sech}^2 \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \phi \right) 3 \tanh \alpha \cosh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 \sin \theta \cos \theta \phi - e^a r \cot \theta \phi \right) \operatorname{sech}^2 \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 \sin \theta \cos \theta \phi - e^a r \cot \theta \phi \right) 3 \tanh \alpha \cosh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - e^a r \cot \theta \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \phi + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \phi \right] \\
& \operatorname{coth} \alpha \operatorname{csch} \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \right. \\
& \left. \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right] \operatorname{csch} \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi - + \\
& \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \phi \right) 2 \operatorname{csch} \alpha \cosh^2 \alpha \sin \beta \sin \phi \right] + \\
& \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \phi \right) \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \right] + \\
& \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \cosh \alpha \sin \beta \sin \phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \phi \right. \\
& + (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \phi \\
& \left. + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \phi \right] 3 \cosh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right. \\
& + (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\
& \left. + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right] \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \\
& - \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \phi \right) \coth \alpha \coth \alpha \cot \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \phi \right) \coth^2 \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \coth^2 \alpha \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{a} r \phi (a' r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) 3 \sin \beta \sin^2 \phi \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{a} r \phi (a' r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{a} r \frac{\partial \phi}{\partial \beta} (a' r + 1) - e^a \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \sin^2 \beta \sin^2 \phi \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + [(e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \phi) 3 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi] \\
& - [(e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \phi) \cos^3 \beta \cot \beta \cos \phi] \\
& - \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \cos^3 \beta \cos \phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \Phi - e^{\nu} \Phi) 2 \coth \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \Phi - e^{\nu} \Phi) \coth \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) 2 \coth \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& + (e^{2\lambda-a} r^2 \Phi \sin \theta \cos \theta) 3 \cos^2 \beta \sin \phi - (e^{2\lambda-a} r^2 \Phi \sin \theta \cos \theta) \\
& \cos^3 \beta \cot \beta \sin \phi - \left( e^{2\lambda-a} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \sin \theta \cos \theta \right) \cos^3 \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a r}} \Phi \right) \coth \alpha \sin \beta \sin \phi \right] - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a r}} \Phi \right) \\
& \coth \alpha \cos \beta \cot \beta \sin \phi - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a r}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \coth \alpha \cos \beta \sin \phi \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) 2 \coth \alpha \cos \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \sin \phi \right] \\
& - 3e^a \Phi (\lambda' + 1) \sin \beta \cos^2 \beta \cos \phi + e^a \Phi (\lambda' + 1) \sin^3 \beta \cos \phi \\
& - e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (\lambda' + 1) \sin^2 \beta \cos \beta \cos \phi - 3e^a r \cot \theta \Phi \sin \beta \cos^2 \beta \sin \phi \\
& - e^a r \cot \theta \sin^3 \beta \sin \phi - e^a r \cot \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \sin^2 \beta \cos \beta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \Phi - e^{\nu} \Phi) + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \right] \\
& 3 \coth \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi - \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
& \left( \omega e^{\lambda} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - e^{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \coth \alpha \sin^2 \beta \cos \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) 2 \coth \alpha \cos \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \sin^2 \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \nu' e^{2\nu-a} \Phi - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) \cosh \alpha \coth \alpha \csc \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \nu' e^{2\nu-a} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) \cosh \alpha \coth \alpha \csc \beta \sin \phi \right] \\
& + (3e^a r \Phi (a'r + 1)) \sinh \alpha \sin \beta \sin^2 \phi \cos \phi + \left( e^{a r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} (a'r + 1) \right) \\
& \sinh \alpha \sin \beta \sin^3 \phi + (e^{2\lambda-a} r^2 \Phi (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \sin \alpha \cos \beta \cot \beta \cos \phi \\
& + (e^{2\lambda-a} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \sin \alpha \cos \beta \cot \beta \sin \phi - \left[ e^a \Phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sin \phi \cos^2 \phi \right] \\
& + \left[ 2e^a \Phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sin^2 \phi \cos \phi \right] + \left[ e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sin \phi \cos^2 \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \cosh \alpha \cot \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \cosh \alpha \cot \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a r}} \Phi \right) \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \sin \phi \right] - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a r}} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \\
& \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \cos \phi + e^{2\lambda-a} r^2 \Phi \sin \theta \cos \theta \cot^2 \beta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{2\lambda-a}r^2 \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \sin \theta \cos \theta \cot^2 \beta \cos \phi + \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \phi \right) \\
& \coth \alpha \cot \beta \csc \beta \sin \phi - \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \partial \phi}{2\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu} \partial \phi} \right) \coth \alpha \cot \beta \csc \beta \cos \phi \\
& -(\omega e^{\lambda-a}r \sin \theta \phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta \phi - e^{\nu} \phi) \cosh \alpha \cot \beta \cos \phi \\
& -\left( \omega e^{\lambda-a}r \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \\
& \cosh \alpha \cot \beta \sin \phi \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Nilai Operator Laplace-Beltrami dapat ditentukan melalui persamaan (24) pada Lampiran A. Untuk nilai Operator Laplace-Beltrami dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{D}{2} \Delta_u \phi = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{J(J+1)\phi}{(\sinh \alpha)^2} \right\} \tag{4.3}$$

dimana  $-J(J+1) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{1}{(\sinh \beta)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2}$  dengan J merupakan indeks diskrit dengan nilai  $J = 0, 1, 2, 3 \dots \infty$ .

Selanjutnya dapat dilakukan perhitungan dengan mensubstitusikan hasil perhitungan pada persamaan (4.35), (4.36) dan (4.37) ke persamaan (4.1) sehingga diperoleh persamaan difusi yang mendeskripsikan proses difusi gerak brown yang terjadi pada bintang neutron berotasi cepat dalam parametrisasi fase ruang waktu pribadi dalam kerangka relativitas umum untuk fungsi kerapatan probabilitas dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \omega^{-1} e^{-\lambda} r^{-1} \sin^{-1} \theta - e^{-\nu} \cosh \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = -e^a \phi 2r \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \\
& -e^a r \phi \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \cot \theta - \frac{\partial \phi}{\partial r} e^a \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} e^a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi + (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \cosh \alpha - e^{\lambda} r \sin \theta \sinh \alpha \cos \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \\
& \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \Phi \right) 2 \cosh \alpha \coth \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \Phi \right) \sinh \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda - a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu - a} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \cosh \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{a} r \Phi(a'r + 1) - e^a \Phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) 3 \cosh \alpha \tanh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{a} r \Phi(a'r + 1) - e^a \Phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \operatorname{sech}^2 \alpha \sinh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{a} r \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} (a'r + 1) - e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& - \left[ (\omega e^{\lambda - a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \Phi - e^{\nu} \Phi) 3 \cosh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ (\omega e^{\lambda - a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + [(e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \Phi) \operatorname{sech}^2 \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi] \\
& + [(e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \Phi) 3 \tanh \alpha \cosh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + [(e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \Phi - e^a r \cot \theta \Phi) \operatorname{sech}^2 \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi] \\
& + [(e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \Phi - e^a r \cot \theta \Phi) 3 \tanh \alpha \cosh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi] \\
& + \left[ \left( e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - e^a r \cot \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \tanh \alpha \sinh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \Phi + \left( \frac{\omega e^{\lambda + a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \Phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right. \\
& + \left. \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] \operatorname{csch} \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \Phi \right) 2 \operatorname{csch} \alpha \operatorname{cosh}^2 \alpha \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \Phi \right) \sinh \alpha \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \operatorname{cosh} \alpha \sin \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \right) \Phi \right. \\
& + \left. (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \Phi \right. \\
& + \left. \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \right) \Phi \right] 3 \operatorname{cosh} \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right. \\
& + \left. (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right. \\
& + \left. \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] \sinh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi \\
& - \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \Phi \right) \operatorname{coth} \alpha \operatorname{coth} \alpha \cot \beta \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \Phi \right) \operatorname{coth}^2 \alpha \sin \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu-a} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \operatorname{coth}^2 \alpha \cos \beta \cos \phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( e^{ar} \phi(a'r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) 3 \sin \beta \sin^2 \phi \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{ar} \phi(a'r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( e^{ar} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} (a'r + 1) - e^a \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right) \sin^2 \beta \sin^2 \phi \cos \beta \cos \phi \right] \\
& + [(e^{2\lambda - ar^2} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \phi) 3 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi] \\
& - [(e^{2\lambda - ar^2} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \phi) \cos^3 \beta \cot \beta \cos \phi] \\
& - \left[ \left( e^{2\lambda - ar^2} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \cos^3 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \omega e^{\lambda - ar} \sin \theta \phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta \phi - e^\nu \phi) 2 \coth \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega e^{\lambda - ar} \sin \theta \phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta \phi - e^\nu \phi) \coth \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega e^{\lambda - ar} \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \coth \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda - ar^3} \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu} \phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) 2 \coth \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda - ar^3} \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu} \phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda - ar^3} \sin^3 \theta \partial \phi}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu \partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] \\
& + (e^{2\lambda - ar^2} \phi \sin \theta \cos \theta) 3 \cos^2 \beta \sin \phi - (e^{2\lambda - ar^2} \phi \sin \theta \cos \theta) \\
& \cos^3 \beta \cot \beta \sin \phi - \left( e^{2\lambda - ar^2} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \sin \theta \cos \theta \right) \cos^3 \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \phi \right) \coth \alpha \sin \beta \sin \phi \right] - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \phi \right) \\
& \coth \alpha \cos \beta \cot \beta \sin \phi - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \coth \alpha \cos \beta \sin \phi
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) 2 \coth \alpha \cos \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \coth \alpha \cos^2 \beta \sin \phi \right] \\
& - 3e^a \Phi (\lambda' + 1) \sin \beta \cos^2 \beta \cos \phi + e^a \Phi (\lambda' + 1) \sin^3 \beta \cos \phi \\
& - e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (\lambda' + 1) \sin^2 \beta \cos \beta \cos \phi - 3e^a r \cot \theta \Phi \sin \beta \cos^2 \beta \sin \phi \\
& - e^a r \cot \theta \sin^3 \beta \sin \phi - e^a r \cot \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \sin^2 \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \Phi - e^{\nu} \Phi) + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \right] \\
& 3 \coth \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi - \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
& \left( \omega e^{\lambda} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - e^{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \coth \alpha \sin^2 \beta \cos \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) 2 \coth \alpha \cos \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \sin^2 \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \nu' e^{2\nu-a} \Phi - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) \cosh \alpha \coth \alpha \csc \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \nu' e^{2\nu-a} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) \cosh \alpha \coth \alpha \csc \beta \sin \phi \right] \\
& + (3e^a r \Phi (a' r + 1)) \sinh \alpha \sin \beta \sin^2 \phi \cos \phi + \left( e^a r \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} (a' r + 1) \right) \\
& \sinh \alpha \sin \beta \sin^3 \phi + (e^{2\lambda-a} r^2 \Phi (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \sin \alpha \cos \beta \cot \beta \cos \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( e^{2\lambda - ar^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \right) \sin \alpha \cos \beta \cot \beta \sin \phi - \left[ e^a \Phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sin \phi \cos^2 \phi \right] \\
& + \left[ 2e^a \Phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sin^2 \phi \cos \phi \right] + \left[ e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} - a' \right) \sin \phi \cos^2 \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda - ar^3} \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^v} \Phi \right) \cosh \alpha \cot \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda - ar^3} \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^v} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \cosh \alpha \cot \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2v}}{2e^{ar}} \Phi \right) \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \sin \phi \right] - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2v}}{2e^{ar}} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \\
& \coth^2 \alpha \csc^2 \beta \cos \phi + e^{2\lambda - ar^2} \Phi \sin \theta \cos \theta \cot^2 \beta \sin \phi \\
& - e^{2\lambda - ar^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \sin \theta \cos \theta \cot^2 \beta \cos \phi + \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^v} \Phi \right) \\
& \coth \alpha \cot \beta \csc \beta \sin \phi - \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^v} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \coth \alpha \cot \beta \csc \beta \cos \phi \\
& - (\omega e^{\lambda - ar} \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta \Phi - e^v \Phi) \cosh \alpha \cot \beta \cos \phi \\
& - \left( \omega e^{\lambda - ar} \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^v) \\
& \cosh \alpha \cot \beta \sin \phi + \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{J(J+1)\Phi}{(\sinh \alpha)^2} \right\} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

### 4.3 Dinamika dan Distribusi Partikel di Sekitar Bintang Neutron

Dinamika partikel atau yang dalam mekanika klasik dikenal dengan sistem partikel, yang memberikan gambaran tentang gerak suatu partikel yang banyak dijelaskan oleh hukum Newton tentang gerak, khususnya hukum kedua Newton. Dalam hukum kedua Newton dijelaskan bahwa, suatu benda yang berinteraksi atau mendapatkan pengaruh gaya akan bergerak sedemikian rupa, yang menyebabkan laju perubahan waktu dari momentumnya sama dengan gaya tersebut. Hukum gerak Newton ini memiliki arti fisis jika memiliki kerangka acuan tertentu, yang kemudian disebut dengan kerangka acuan inersia. Dimana

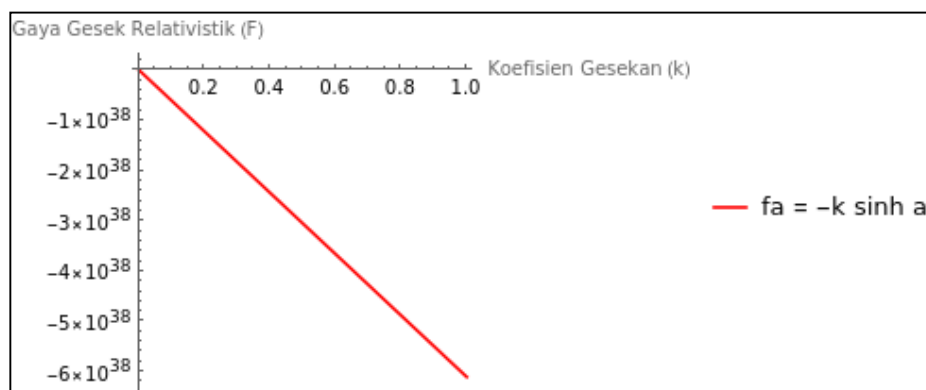
pada kerangka ini memperlihatkan suatu kerangka acuan yang tidak terjadi percepatan sehingga kerangka acuannya bergerak serba sama. Jika hukum Newton ini berlaku pada suatu kerangka acuan, maka berlaku hal yang sama pada kerangka acuan lain yang bergerak serba sama relatif terhadap kerangka acuan pertama.

Persamana Langevin sebagaimana diketahui merupakan bentuk persamaan diferensial stokastik, menggambarkan dinamika dari materi yang terdifusi di sekitar bintang enutron. Persamaan difusi yang dibangun melalui ruang fase dan parameterisasi waktu pribadi dalam koordinat hiperbolik dijadikan rujukan untuk menganalisis proses difusi yang terjadi di sekitar bintang neutron tidak berotasi dan berotasi. Dari sini nantinya diperoleh gambaran sebaran (distribusi) dan juga dinamika stokastik dari partikel yang bergerak di sekitar bintang neutron.

Merujuk kembali pada hasil perhitungan komponen di atas, secara umum dalam proses difusi gerak brown di sekitar bintang neutron, setidaknya ada dua buah gaya eksternal yang bekerja. Yakni gaya gravitasi dan gaya gesek yang masing-masing dalam kerangka relativistik karena gaya yang bekerja berada di sekitar benda masif. Berdasarkan grafik gaya gravitasi pada gambar (4.1) dan (4.2) sangat jelas terlihat bahwa jarak partikel ke bintang neutron pengaruh terhadap gaya gravitasi yang di alami oleh partikel tersebut. Hal ini erat kaitannya dengan semakin lemahnya medan gravitasi pada jarak yang semakin jauh dari sumber gravitasi. Gaya gravitasi yang sangat besar dari bintang neutron pada ruang-waktu melengkung yang menyebabkan partikel-partikel di sekitarnya bergerak menuju bintang-bintang kompak dikenal dengan piringan akresi.

Kondisi ini pula yang menyebabkan partikel secara fisis bergerak dengan lintasan acak dan mendekati kelajuan cahaya. Karena gerakan yang ditimbulkan adalah acak, sehingga partikel bersifat non-deterministik, dimana kecepatan partikel pada suatu waktu tidak dapat dipastikan hanya dengan mengacu pada kecepatan sebelumnya. Hal ini disebabkan karena kecepatan partikel bergantung pada tumbukan antar partikel, yang juga dipengaruhi oleh gaya gesek relativistik antar partikel dimana gaya gesek ini bergantung dari koefisien gesek yang ada ( $\kappa$ ), pada kondisi relativistik, untuk koordinat hiperbolik gaya gesek yang memiliki nilai hanya  $F_f^\alpha$ , sedangkan untuk komponen  $F_f^\beta$  dan  $F_f^\phi$  bernilai nol, sehingga pengaruh koefisien gesekan terhadap gaya gesek, dapat disimulasikan dalam bentuk grafik dengan menggunakan program Wolfram Mathematica yang diakses melalui wolframcloud.com, dengan memvariasikan nilai dari koefisien gaya gesek  $\kappa = 0$  sampai 1, untuk mengetahui pengaruh koefisien gesekan terhadap gaya gesek yang dialami oleh partikel pada kerangka relativistik untuk koordinat hiperbolik, sehingga didapatkan grafik berikut

#### Grafik Gaya Gesek Relativistik pada Koordinat Hiperbolik



Gambar 4.4 Grafik Gaya Gesek Relativistik pada Koordinat Hiperbolik

Berdasarkan grafik di atas, yang menggambarkan hubungan antara pengaruh koefisien gesekan terhadap gaya gesek yang dialami partikel, terlihat bahwa semakin besar koefisien gaya gesek yang ada akan berpengaruh pada semakin besarnya gaya gesek yang dialami oleh partikel yang berada di sekitar benda masif yang dalam hal ini adalah bintang neutron, tanda negatif pada nilai gaya gesek di atas menginterpretasikan arah gaya gesek yang berlawanan dengan arah gerak partikel itu tadi.

Koefisien gesekan  $\kappa$  disini merupakan bentuk persamaan tensor gesekan yang memiliki bentuk sebagaimana tensor tekanan gas ideal pada kerangka diam, sehingga tensor gesekan di sini merupakan bentuk tensor gesekan fluida pada kondisi fluida yang homogen dan isotropik. Pada kondisi klasik nilai koefisien gesek baik statik atau kinetik bergantung pada sifat kekasaran dari permukaan dua benda yang saling bersentuhan, dan memiliki nilai dari 0 hingga 1, dapat berharga lebih dari 1 pada beberapa benda saja. Sedangkan pada kondisi relativistik, koefisien gesekan bergantung pada tensor metrik dari bendayang sangat masif dan juga kecepatan dari benda tersebut yang mendekati kecepatan cahaya.

Sehingga, ketidakpastian terkait kecepatan partikel ini hanya dapat dianalisa secara probabilitas untuk mendapatkan distribusi kecepatan partikel dari persamaan difusi disekitar bintang neutron yang telah diperoleh pada persamaan (4.22) dan (4.38).

Telah diketahui bahwa persamaan Fokker Planck adalah bentuk persamaan diferensial kontinuitas yang diperoleh dengan mereduksi persamaan Langevin dalam bentuk proses *White Noise Gaussian*, proses inilah yang menjadi faktor

ketidaktentuan yang merupakan turunan persamaan Langevin relativistik terhadap waktu. Dari sini dapat dipahami bahwa persamaan Fokker Planck menyajikan gambaran terkait evolusi waktu pada partikel yang bergerak secara acak tadi dalam bentuk rapat probabilitas yang bergantung pada kecepatannya. Secara umum Persamaan Fokker Planck yang telah di peroleh pada persamaan (2.51) menggambarkan sebaran dari partikel. Dari persamaan tersebut terlihat bahwa hal paling fundamental terjadinya gerak Brown adalah karena adanya koefisien difusi konstan yang menggambarkan rata-rata perubahan kecepatan dari partikel yang berhubungan dengan *white noise* di atas, serta adanya gaya gesek berlawanan dengan arah gerak partikel sehingga memperlambat kecepatan partikel, adanya gaya gesek ini berkaitan dengan teorema fluktuasi disipasi.

Persamaan Fokker Planck yang telah diperluas dalam kerangka relativitas umum kemudian dijadikan pendekatan untuk menganalisa proses difusi yang terjadi pada partikel di sekitar bintang neutron. Pendekatan dilakukan dengan menggunakan hasil penurunan persamaan difusi relativitas umum yang telah dikerjakan oleh Herrman. Sebelumnya juga telah dilakukan kajian terkait proses difusi di sekitar bintang neutron oleh Andra, baik pada bintang neutron tidak berotasi (2014) dan berotasi lambat (2017). Berbeda dengan studi yang dilakukan oleh Herrman yang dapat dengan mudah memperoleh solusi untuk rapat probabilitas terhadap komponen kecepatan dalam ruang-waktu melengkung, pada studi proses difusi gerak Brown di sekitar bintang neutron, persamaan difusi yang diperoleh memiliki bentuk persamaan diferensial panjang, sehingga sangat sulit untuk kemudian memperoleh solusi persamaan secara umum untuk rapat probabilitasnya.

Sehingga dalam studi ini dilakukan analisa pada persamaan difusi yang sudah diperoleh, dengan memperhatikan parameter yang mempengaruhi distribusi dari partikel yang berada di sekitar bintang neutron. Pertama-tama dilakukan analisa pada bintang neutron tidak berotasi sebagai acuan untuk melakukan analisa pada bintang neutron berotasi cepat. Berdasarkan hasil persamaan (4.22) terkait proses difusi di sekitar bintang neutron tidak berotasi, dapat dilakukan analisa dengan mengubah persamana tersebut dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \phi}{\partial x^0} + e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial r} \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi + \frac{e^\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tanh \alpha \sin \beta \sin \phi \\
& + \frac{e^\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \csc \theta \tanh \alpha \cos \beta = - \frac{2e^{\nu-\lambda}}{r} \phi \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{e^\nu \phi}{r} \\
& \tanh \alpha \sin \beta \cot \phi \sin \phi + 3ve^\nu \phi + 2v'e^{\nu-\lambda} \phi \coth \alpha \sin \beta \cos \phi \\
& + v'e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \sin \beta \cos \phi + v e^\nu \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \tanh \alpha - v' e^{\nu-\lambda} \phi \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \\
& \csc \beta \cos \phi + \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \phi \operatorname{sech} \alpha \csc \beta \cos \phi + \frac{e^\nu \phi}{r} \cot \theta \operatorname{sech} \alpha \csc \beta \sin \phi \\
& + 2v'e^{\nu-\lambda} \phi \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \sin \beta \cos \phi - \frac{2e^{\nu-\lambda}}{r} \phi \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \cos \phi \\
& - \frac{2e^\nu}{r} \phi \cot \theta \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \sin \phi - v' e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \cos \beta \cos \phi \\
& + \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \cos \phi \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \cos \phi + \frac{e^\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \cot \theta \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \\
& \sin \phi + v' e^{\nu-\lambda} \phi \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \csc^2 \beta \cos \phi + v' e^{\nu-\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \\
& \csc^2 \beta \sin \phi - \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \phi \operatorname{sech} \alpha \csc^2 \beta \cos \phi - \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \operatorname{sech} \alpha \csc^2 \beta \sin \phi \\
& + \frac{e^\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \cot \theta \operatorname{sech} \alpha \cot^2 \beta \cos \phi - \frac{e^\nu \phi}{r} \cot \theta \operatorname{sech} \alpha \cot^2 \beta \sin \phi \\
& + \frac{e^\nu D}{2} \left\{ \operatorname{sech} \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + 2 \operatorname{csch} \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{sech} \alpha}{(\sinh \alpha)^2} J(J+1) \phi \right\} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Selanjutnya analisa dilakukan dengan menggunakan bentuk umum persamaan Fokker-Planck pada persamaan (2.51). Suku pertama  $\frac{\partial \phi}{\partial x^0}$  pada ruas kiri persamaan (4.39) di atas menggambarkan turunan dari fungsi rapat probabilitas  $\partial \phi(t, x, u)$  terhadap koordinat waktu yang dalam persamaan ini dinotasikan dengan  $x^0$  yang merupakan parameterisasi waktu pengamat pada kondisi tertentu. Hal ini sesuai dengan bentuk persamaan Fokker-Planck pada persamaan (2.51) yang merupakan bentuk turunan dari rapat probabilitas terhadap waktu  $\frac{\partial p(x, t)}{\partial t}$ . Sedangkan tiga suku selanjutnya, menggambarkan turunan fungsi rapat probabilitas terhadap koordinat ruang.

Analisa dilanjutkan pada bagian persamaan (4.39) di ruas kanan. Pada bagian ini dianggap sebagai sumber difusi, karena adanya koefisien difusi  $D$  konstan yang terdapat pada operator Laplace Beltrami dalam koordinat hiperbolik, koefisien difusi di sini sebagaimana telah dibuktikan pada persamaan (2.34) mengandung konstanta Boltzman dan juga temperatur dari partikel, sehingga dapat dituliskan bahwa temperatur pada partikel di sekitar bintang neutron dianggap konstan. Pada bagian ruas kanan ini pula digambarkan kelengkungan ruang-waktu bergantung pada kecepatan-4, hal ini digambarkan pada beberapa komponen di ruas kanan. Sehingga dari sini dapat dikatakan bahwa, distribusi partikel di sekitar bintang neutron bergantung pada rapat probabilitas partikel, koefisien difusi, evolusi waktu, kecepatan-4, dan juga kelengkungan ruang-waktu pada koordinat hiperbolik.

Analisa lebih lanjut dilakukan untuk mendapatkan faktor lain yang mempengaruhi partikel yang bergerak di sekitar bintang neutron tidak berotasi,



maka persamaan (4.39) diasumsikan dalam kondisi asimtotik, dengan nilai  $r \rightarrow \infty$  dan  $e^\nu = e^\lambda = 1$ . Sehingga didapatkan bentuk baru sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi = (v' \sin \beta \cos \phi + v \tanh \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \\
& - (v' \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \cos \beta \cos \phi) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + (v' \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \csc^2 \beta \sin \phi) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\
& + 2v' \phi \coth \alpha \sin \beta \cos \phi + 3v' \phi + 2v' \phi \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \sin \beta \cos \phi \\
& - v' \phi \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \csc \beta \cos \phi + v' \phi \coth \alpha \operatorname{csch} \alpha \csc^2 \beta \cos \phi \\
& + \frac{D}{2} \left\{ \operatorname{sech} \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + 2 \operatorname{csch} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{sech} \alpha}{(\sinh \alpha)^2} J(J+1) \Phi \right\} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Pada kondisi asimtotik difusi partikel di sekitar bintang neutron tidak berotasi, tetap bergantung pada nilai kecepatan-4 namun untuk koordinatnya hanya bergantung pada koordinat radial saja.

Analisa juga dilakukan pada persamaan (4.38) yang merupakan hasil perhitungan pada bintang neutron berotasi cepat, dengan terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} + (e^a \omega e^{\lambda+a} r \sin \theta - e^{\nu+a}) \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} (\omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta - e^{\nu+a} r) \\
& \tanh \alpha \sin \beta \sin \phi - (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\lambda} r \sin \theta \tanh \alpha \cos \beta) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\
& = -e^a 2r (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \phi \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi - e^a r (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \phi \\
& \tanh \alpha \sin \beta \sin \phi \cot \theta + \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu-a} \phi \right) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) 2 \coth \alpha \sin \beta \cos \phi + \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu-a} \phi \right) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi + \left( \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - v' e^{2\nu-a} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \tanh \alpha \sin \beta \cos \phi - \left( e^a r \phi (a' r + 1) - e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) 3 \tanh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi - \left( e^a r \Phi(a'r + 1) - e^a \Phi\left(\frac{1}{r} - a'\right) \right) \\
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi - \left( e^a r \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(a'r + 1) - e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{r} - a'\right) \right) \\
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \tanh^2 \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi - (\omega e^{\lambda - a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu})^2 3 \sin \beta \cos \beta \cos \phi - \left( \omega e^{\lambda - a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu})^2 \\
& \tanh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi + \left( e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \Phi \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \\
& \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi + \left( e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \Phi \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \\
& 3 \tanh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi + \left( e^{2\lambda - a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \\
& \tanh^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi + \left( e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \Phi - e^a r \cot \theta \Phi \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \\
& \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi + \left( e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \Phi - e^a r \cot \theta \Phi \right) \\
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) 3 \tanh \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi + \left( e^{2\lambda - a} r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - e^a r \cot \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \\
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \tanh^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \sin \phi (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \sin \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \left( \frac{\omega e^{\lambda + a} r^2 \sin \theta}{\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] \\
& (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \operatorname{csch} \alpha \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \Phi \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) 2 \operatorname{csch} \alpha \operatorname{cosh} \alpha \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \Phi \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \tanh \alpha \sin \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{ar}} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}) \sin \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\omega e^{3\lambda - a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r \sin \theta} - e^{\nu}} \right) \Phi + (\omega e^{\lambda - a} r \sin \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r \sin \theta} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\nu})\Phi + \left(\frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right) \Phi \Big] (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) 3 \sin \beta \cos \beta \cos \phi - \left[ \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{r}\right) \left(\frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta) \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \right. \\
& \left. \left(\frac{\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \tanh \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi - \\
& \left[ (\omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right) - \nu' e^{2\nu-a} \Phi) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) \coth^2 \alpha \operatorname{sech} \alpha \cot \beta \cos \beta \cos \phi \right] + \left[ (\omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \Phi \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right) - \right. \\
& \left. \nu' e^{2\nu-a} \Phi) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) \coth^2 \alpha \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \cos \phi \right] - \left[ (\omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right) - \right. \\
& \left. \nu' e^{2\nu-a} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \coth^2 \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \cos \phi \right] + \left[ (e^{a r} \Phi (a' r + 1) - \right. \\
& \left. e^a \Phi \left(\frac{1}{r} - a'\right)) 3 (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \sin^2 \phi \cos^2 \beta \cos \phi \right] - \\
& \left[ (e^{a r} \Phi (a' r + 1) - e^a \Phi \left(\frac{1}{r} - a'\right)) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin^3 \beta \sin^2 \phi \cos \phi \right] \\
& + \left( e^{a r} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (a' r + 1) - e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \left(\frac{1}{r} - a'\right) \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \phi \cos \beta \cos \phi + \\
& \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \Phi) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) 3 \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ (e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \Phi) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \cos^3 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( e^{2\lambda-a} r^2 (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \cos^3 \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) 2 \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \sin \beta \cos \phi \right] + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{r}\right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^{\nu})^2 \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) 2 \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \cos \phi \right] \\
& + \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta}{\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \right] + \\
& (e^{2\lambda-a} r^2 \Phi \sin \theta \cos \theta) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) 3 \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \sin \phi - \\
& (e^{2\lambda-a} r^2 \Phi \sin \theta \cos \theta) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \cos^3 \beta \cot \beta \sin \phi - \\
& \left( e^{2\lambda-a} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \sin \theta \cos \theta \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \cos^3 \beta \sin \phi \\
& + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \Phi \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \sin \phi \right] - \\
& \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \Phi \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \cot \beta \sin \phi \\
& - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^{a} r} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \sin \phi \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) 2 \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \sin \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \Phi \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \cot \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos^2 \beta \sin \phi \right] \\
& - 3e^a \Phi (\lambda' + 1) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \cos^2 \beta \cos \phi + e^a \Phi (\lambda' + \\
& 1) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin^3 \beta \cos \phi - e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (\lambda' + \\
& 1) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin^2 \beta \cos \beta \cos \phi - \\
& 3e^a r \cot \theta \Phi (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \cos^2 \beta \sin \phi - \\
& e^a r \cot \theta (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin^3 \beta \sin \phi - e^a r \cot \theta (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \\
& e^{\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \operatorname{sech} \alpha \sin^2 \beta \cos \beta \sin \phi \\
& + \left[ (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \Phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta \Phi - e^{\nu} \Phi)^2 + (\omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta \Phi) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3 \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \phi - \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \\
& \left( \omega e^{\lambda} r \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - e^{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) + \left( \omega e^{\lambda+a} r^2 \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \sin^2 \beta \cos \phi \\
& + \left[ \left( \omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta \phi \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) 2 \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cos \beta \sin \phi \right] \\
& + \left[ \left( \omega e^{\lambda+a} r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \sin^2 \beta \sin \phi \right] \\
& - \left[ \left( \nu' e^{2\nu-a} \phi - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \phi \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \csc \beta \cos \phi \right] \\
& - \left[ \left( \nu' e^{2\nu-a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \omega^2 e^{2\lambda-a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \csc \beta \sin \phi \right] \\
& + (3e^a r \phi (a' r + 1)) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \tanh \alpha \sin \beta \sin^2 \phi \cos \phi + \left( e^a r \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} (a' r + 1) \right) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \tanh \alpha \sin \beta \sin^3 \phi + (e^{2\lambda-a} r^2 \phi (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin \alpha \cos \beta \cot \beta \cos \phi + \left( e^{2\lambda-a} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta \right) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin \alpha \cos \beta \cot \beta \sin \phi - \left[ e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) \sin \phi \cos^2 \phi \right] + \left[ 2e^a \phi \left( \frac{1}{r} - a' \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin^2 \phi \cos \phi \right] + \\
& \left[ e^a \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} - a' \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \operatorname{sech} \alpha \sin \phi \cos^2 \phi \right] \\
& - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta \phi) \cot \beta \cos \phi \right] - \left[ \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{r} \right) (\omega e^{3\lambda-a} r^3 \sin^3 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}) \cot \beta \sin \phi \right] + \left[ \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^a r} \phi \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \right. \right. \\
& \left. \left. e^{\nu}) \coth^2 \alpha \operatorname{sech} \alpha \csc^2 \beta \sin \phi \right] - \left( \frac{\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta + e^{2\nu}}{2e^a r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) \coth^2 \alpha \operatorname{sech} \alpha \csc^2 \beta \cos \phi + e^{2\lambda-a} r^2 (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) \phi \sin \theta \cos \theta \operatorname{sech} \alpha \cot^2 \beta \sin \phi - e^{2\lambda-a} r^2 (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \right. \\
& \left. e^{\nu}) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \sin \theta \operatorname{sech} \alpha \cos \theta \cot^2 \beta \cos \phi + \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \phi \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cot \beta \csc \beta \sin \phi - \left( \frac{\omega e^{3\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) \\
& (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \coth \alpha \operatorname{sech} \alpha \cot \beta \csc \beta \cos \phi - (\omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \phi) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \\
& \left. \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu})^2 \cot \beta \cos \phi - \left( \omega e^{\lambda-a} r \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \right. \\
& \left. \frac{1}{r} \right) \left( \omega e^{\lambda} r \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \phi} - e^{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu}) \cot \beta \sin \phi + \\
& \frac{D(\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^{\nu})}{\cosh \alpha^2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{J(J+1)\phi}{(\sinh \alpha)^2} \right\} \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Dari persamaan baru ini, terlihat bentuk persamaan sama halnya dengan bintang neutron tidak berotasi, bahwa suku pertama pada ruas kiri merupakan turunan fungsi rapat probabilitas terhadap fungsi waktu  $x^0$ , ini menggambarkan distribusi kecepatan partikel tiap waktu. Untuk suku-suku selanjutnya pada ruas kiri merupakan turunan fungsi rapat probabilitas terhadap fungsi ruang. Dan ruas kanan diinterpretasikan sebagai sumber difusi dengan adanya koefisien difusi konstan  $D$  yang bergantung pada kecepatan-4 dan kelengkungan ruang waktu.

Pada kasus bintang neutron berotasi cepat didapatkan hal serupa dengan hasil pada bintang neutron tidak berotasi, yakni persamaan difusi akhir yang berupa persamaan diferensial yang sangat panjang dan sulit untuk menentukan solusi penyelesaiannya secara umum. Sehingga dilakukan analisis secara kualitatif pada persamaan difusi yang telah diperoleh. Pada persamaan ini terlihat bahwa fungsi kepadatan probabilitas  $\phi(t, x, u)$  dihasilkan dalam bentuk persamaan diferensial panjang, yang pada persamaan ini fungsi rapat probabilitas terdiri atas delapan parameter (yakni variabel  $\nu, \lambda, a, \alpha, \beta, \phi, \varphi$ , dan  $\theta$ ) yang memiliki pengaruh pada nilai rapat probabilitas. Sedikit berbeda dengan hasil pada bintang neutron berotasi lambat yang telah dikaji sebelumnya (Andra, 2017) yang hanya memiliki tujuh parameter saja, hal ini disebabkan karena metrik yang menyusun keduanya berbeda.

Berbeda dengan kasus bintang neutron tidak berotasi ataupun berotasi lambat, pada bintang neutron berotasi cepat tidak dapat dilakukan analisa lanjutan pada kasus asimtotik, karena seluruh suku di ruas kanan pada persamaan difusi partikel di sekitar bintang neutron berotasi cepat mengandung komponen  $r$ , sehingga tidak dapat dilakukan pendekatan dengan kondisi asimtotik.

Berdasarkan persamaan baru di atas terlihat bahwa hasil yang didapat sangat berbeda dengan bintang neutron tidak berotasi, dengan ditemukannya istilah baru yakni  $\theta$ ,  $a$  dan  $\varphi$ , dimana istilah ini muncul pada persamaan metrik bintang neutron berotasi cepat. Selain itu, pada kasus bintang neutron berotasi lambat dan berotasi cepat, muncul istilah  $\omega$  (pada seluruh suku pada persamaan difusi bintang neutron berotasi cepat) yang menginterpretasikan frekuensi sudut pada bintang neutron yang berotasi. Sehingga distribusi partikel yang berada di sekitarnya selain dipengaruhi oleh kecepatan-4 dan kelengkungan ruang waktu juga bergantung pada frekuensi sudut.

Sehingga untuk solusi permasalahan ini, dapat digunakan pendekatan probabilitas atau peluang untuk menganalisis proses difusi gerak partikel Brown di sekitar bintang neutron. Baik secara dinamika gerak partikelnya ataupun distribusi kecepatan partikelnya. Teori probabilitas banyak digunakan dalam statistika sosial maupun sains untuk menganalisis data acak yang dihasilkan dari suatu pengamatan. Sebagai contoh pada peluang pembelian saham, industri asuransi, pengamatan yang dilakukan untuk mengamati kondisi cuaca, penentuan hari-hari besar dalam Islam, penentuan arah kiblat juga menggunakan

data acak yang dihitung berdasarkan probabilitasnya. Hal ini termaktub dalam Surah Yunus [10] ayat 6

إِنَّ فِي اخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَمَا خَلَقَ اللَّهُ فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ

*“Sesungguhnya pada pergantian malam dan siang dan pada apa yang diciptakan Allah di langit dan di bumi, pasti terdapat tanda-tanda (kebesarannya) bagi orang-orang yang bertakwa.”*

Berdasarkan ayat ini terlihat bahwa terdapat tanda-tanda kebesaran Allah SWT yang terdapat pada pergantian siang dan malam jika manusia benar-benar bertakwa dan memikirkannya. Hal ini juga sesuai dengan ayat ke-5 Surah Yunus yang menyatakan bahwa pergantian siang dan malam ini agar manusia mampu mengetahui bilangan tahun dan pergantian waktu. Sehingga dalam konteks ini agama memperbolehkan untuk menganalisis atau memperhitungkan segala sesuatu yang terjadi di alam semesta menggunakan konsep probabilitas. Karena dari data yang ada terdapat banyak kemungkinan terjadi. Sehingga ilmu peluang diperlukan di sini untuk mengetahui tanda-tanda kebesaran Allah SWT. Dalam konteks ini termasuk untuk mengkaji probabilitas gerak Brown yang terjadi pada partikel baik itu secara klasik ataupun nantinya dikembangkan dalam kerangka relativistik.



## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan analisa di atas maka didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Dinamika yang terjadi pada partikel di sekitar bintang neutron yang tidak berotasi dan berotasi dipengaruhi oleh adanya gaya eksternal total  $(F^\alpha, F^\beta, \text{ dan } F^\phi)$  yang merupakan penjumlahan dari gaya gravitasi  $(F_g^\alpha, F_g^\beta, \text{ dan } F_g^\phi)$  dengan gaya gesek  $(F_f^\alpha, F_f^\beta, \text{ dan } F_f^\phi)$  dalam kerangka relativistik dan koordinat hiperbolik, gaya gesek yang ditimbulkan di sini berasal dari adanya tumbukan partikel yang bergerak secara acak.
2. Untuk distribusi partikel di sekitar bintang neutron bergantung pada nilai fungsi rapat probabilitas  $\phi(t, x, u)$  serta tensor kecepatan-4. Pada kondisi asimtotik untuk bintang neutron tidak berotasi distribusi partikel di sekitarnya tetap bergantung pada nilai kecepatan-4 namun untuk koordinatnya hanya bergantung pada koordinat radial saja. Sedangkan untuk bintang neutron berotasi cepat tidak dapat dilakukan pendekatan dengan kondisi asimtotik karena seluruh suku dari persamaan difusi yang diperoleh mengandung variabel  $r$ , sehingga analisis dilakukan pada persamaan akhir yang diperoleh dan didapatkan variabel baru yakni  $\theta, \varphi, \text{ dan } a$ . Selain itu pada bintang neutron berotasi cepat distribusi partikel yang ada disekitarnya juga dipengaruhi oleh kelengkungan ruang-waktu serta frekuensi sudut  $\omega$  dan kecepatan-4.

## 5.2 Saran

Penelitian terkait gerak brown pada bintang neutron ini nantinya dapat dijadikan rujukan untuk meneliti gerak brown di sekitar bintang neutron dengan meninjau partikel-partikel apa saja yang ada di sekitarnya. Serta lebih lanjut nantinya untuk mengkaji proses gerak brown yang terjadi di alam semesta khususnya dalam mendukung teori pengembangan alam semesta.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adam, S. Burruco. 2015. Baade and Zwicky: "Super-Novae" Neutron Stars, and Cosmic Rays. Princeton University.
- Al-Maraghi, Ahmad Musthafa. 1365. *Tafsir Al Maraghi Jilid 9*. Mesir: Musthafa Al-Babiy Al-Halaby
- Andra, Doni dan M.F. Rosyid. 2014. Theoretical Study of Diffusion Processes Around a Non-Rotating Neutron Star. *Journal of Physics: Conference Series 539 (2014) 012005*
- Andra, Doni et al. 2017. Theoretical Study of Diffusion Processes Around a Slowly Rotating Neutron Star. *Advanced Studies in Theoretical Physics Vol. 11, 2017. No. 3, 155-133*
- Ashfahani, Abu al-Qasim al-Husain ibn Muhammad ar-Raghib, Al. 2012. *Al Mufradat fi Gharib Al-Qur'an*. Kairo: Dar Ibn Al Jawzi
- Debbasch, Fabrice, dkk. 1997. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *J. Stat Phys. 88, 945*
- Dunkel, J dan P. Hanggi. 2005. Theory of Relativistic Brownian Motion: The (1+1)-Dimension Case. *Physical Review E. 71, 016124*
- Dunkel, J dan P. Hanggi. 2005. Theory of Relativistic Brownian Motion: The (1+3)-Dimension Case. *Physical Review E. 72, 036106*.
- Einstein, Albert. 1956. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. America: Dover Publication.inc
- Glendenning, N.K. 2000. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particel Physics, and General Relativity, Second Edition*. New York: Springer
- Gold. T. 1969. Rotatting Neutron Stars and The Nature of Pulsars. *Nature 221: 25-7*
- Grattan, I. dan Guinnes. 2005. Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940. *Joseph Fourier: Theorie Analytique de La Chaleur (1822)*
- Haskell, B, N.Andresson, D.I. Jones, and L. Samuelson.2007.Are Neutron Stars with Crystalline Color-Superconducting Cores Relevant for the LIGO Experiment?*Physical Review Letters 99, 231101*

- Hasudungan, Ivander Manuel. 2018. *Simulasi Persamaan Keadaan Bintang Neutron Menggunakan Persamaan Polytropic dan Modified Gravity*. Bogor: IPB
- Heiselberg, H. 2000. Recent Progress in Neutron Star Theory. *Annual Review of Nuclear and Particle Science Vol. 50: 481-524*.
- Herrmann, Joachim. 2009. Diffusion in the Special Theory of Relativity. *Phys.Rev. E.80.051110*
- Herrmann, Joachim. 2010. Diffusion in the General Theory of Relativity. *Phys.Rev.D82:024026*.
- Jain, Pankaj. 2015. *An Introduction to Astronomy and Astrophysics*. Francis: CRC Press
- Kardanoff, L, P. 2000. Statistical Physics, Dynamics and Renormalization. World Scientific. ISBN 9810237642
- Kasmudin, 2009. *Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi Lambat*. Tesis: Universitas Indonesia
- Lattimer, J. M. C.J. Petchick, M. Prakash, and P. Haensel. 1991. Direct URCA Process in Neutron Stars. *Physical Review Letter 66, 2701*
- Lattimer, J.M. and M. Prakash. 2004. The Physics of Neutron Stars. *Science Vol 304, Issue536*
- Lattimer, J.M. and B.F Schutz. 2005. Constraining the Equation of State with Moment of Inertia Measurements, *Astrophysics Journal 629, 979*
- Lattimer, James M. 2019. Neutron Star Mass and Radius Measurements. *Universe 2019, 5, 159*
- Morsink, Sharon M. 1999. Relativistic Precession Around Rotating Neutron Star: Effects Due to Frame Dragging and Stellar Oblateness. *The Astrophysical Journal Vol.513*
- Nelson, E., 2001, *Dynamical Theoried of Brownian Motion, Second Edition*. Princeton University Press
- Owen, Benjamin J. 2005. Maximum Elastic Deformations Of Compact Stars With Exotic Equations of State. *Physical Review Letters 95, 211101*
- Palacios, J.L. Garcia. 2004. *Introduction to the Theory of Stochastic Processe and Brownian Motion* Problem. Universidad de Zaragoza

- Palupi, Dwi Satya. 2010. Persamaan Fokker Planck dan Aplikasinya dalam Astrofisika. *Jurnal Berkala Fisika Vol. 13, No.2* (Edisi Khusus April 2010 halA1-A6)
- Powles, J.G. 1978. Brownian Motion-June-1827. *Phys Educ. Vol. 13 1978 Printed in Great Britain.*
- RI, Departemen Agama. 2010. *Alquran dan Tafsirnya: Edisi yang Disempurnakan*. Jakarta: Lentera Abadi.
- RI, Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran Kementerian Agama. 2011. *Mushaf Al Quran Al Jamil Tajwid Warna Terjemah Per Kata Terjemah Inggris Kecil*. Bekasi: Cipta Bagus Segara
- Romadani, Arista. 2013. *Proses Difusi Relativistik pada Kasus (1+3)-Dimensi*. Skripsi: Universitas Gajah Mada
- Romadani, Arista. 2020. Brownian Motion Around Black Hole. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research, volume 529*
- Shapiro, S.L. and S. A. Teukolsky. 1983. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Publishing by: John Wiley and Sons
- Shihab, M. Quraish. 2016. *Tafsir Al Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Qur'an, Vol. 14*. Jakarta: Lentera Hati
- Silbar, Richard.R. and S. Reddy. 2004. Neutron Stars for Undergraduates, *American Journal of Physics* 72, 892
- Yasrina, Atsnaita. 2015. Tensor Kontravarian Medan Elektromagnetik Bintang Neutron yang Berotasi Cepat Diukur Oleh Pengamat Zamo (*Zero Angular Momentum Observers*) . *Jurnal Fisika Vol. 5 No.1*
- Yasrina, Atsnaita, dan M. Farchani Rosyid. 2013. Tentang Medan Elektromagnet Relativistik di Bintang Neutron yang Berotasi Lambat. *Jurnal Fisika Indonesia No: 50, Vol XVII,*

**LAMPIRAN A**  
**DIFUSI DALAM KERANGKA RELATIVISTIK UMUM**

Untuk memperoleh persamaan Kramer Relativistik, terlebih dahulu diturunkan persamaan difusi relativistik umum dengan memperhatikan. Poin penting dalam difusi relativistik adalah pengamatan bahwa ruang kecepatan dalam relativitas khusus adalah manifold Riemannian 3-dimensi hiperbolik nonkompak yang tertanam ke dalam ruang Minkowski kecepatan 4-dimensi. Menggunakan variabel kecepatan normal  $u^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) struktur metrik hiperbolik untuk sistem relativitas partikel masif digambarkan dengan relasi

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = 1. \quad (1)$$

Sehingga proses difusi Markovian relativistik dapat dijelaskan dengan menggunakan kalkulus stokastik matematis pada lipatan Riemann, dengan dialihkan ke ruang kecepatan.

Pada kondisi relativitas umum kecepatan-4  $v^\mu$  partikel yang masif pada medan gravitasi dengan metrik  $g_{\mu\nu}(x)$  memenuhi kondisi

$$g_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu = 1 \quad (2)$$

tidak hanya bergantung pada kecepatan  $v^\nu$  tetapi juga pada koordinat  $x^\mu$ .

Solusi dari kondisi ini adalah dengan menggunakan kerangka vektor orthonormal  $e_M = e_M^\mu(x)\partial_\mu$  dalam ruang posisi, di mana subscript  $M$ , nomor  $N$  vektor ( $M, N = 0, 1, 2, 3$ ),  $\mu$  komponen-komponen pada koordinat dasar  $e_\mu = \partial_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) dan  $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ , dengan kerangka vektor memenuhi kondisi

$$\begin{aligned} \eta^{MN} e_M^\mu(x) e_N^\nu(x) &= g^{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu} e_M^\mu(x) e_N^\nu(x) &= \eta_{MN} \end{aligned} \quad (3)$$

dimana  $\eta_{MN} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  merupakan metrik dari ruang Minkowski. Dasar ganda dari kerangka medan  $e_M$  adalah bingkai kotangen bentuk-1  $\theta^M = \theta_\mu^M dx^\mu$  dengan hubungan orthogonality dapat dituliskan

$$e_M^\mu(x)\theta_\mu^M = \delta_\nu^\mu \quad (4)$$

Setiap vektor merujuk koordinat dasar  $e_\mu = \partial_\mu$  adalah sebagai vektor yang mengacu pada kerangka dasar  $e_M$  sesuai dengan aturan

$$v^\nu = e_M^\nu(x)v^M \quad (5)$$

sehingga diperoleh nilai  $v^M$  adalah

$$v^M = \theta_v^M(x)v^\nu \quad (6)$$

Dengan menggunakan kerangka bergerak ortogonal dari jenis pseudo-Riemannian dalam ruang posisi, diperoleh bentuk yang sama seperti pada persamaan (1)

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu &= g_{\mu\nu}(x)e_M^\mu(x)e_N^\nu(x)v^M v^N \\ &= \eta_{MN}v^M v^N = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

turunan kovarian dalam kerangka normal didefinisikan dalam bentuk,

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho \quad (8)$$

dengan  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$  adalah koefisien hubungan Christoffel. Turunan kovarian dari vektor mengacu pada kerangka dasar dapat ditulis sebagai:

$$\nabla_\mu v^M = \partial_\mu v^M + \Omega_{\mu N}^M v^N \quad (9)$$

dimana  $\Omega_{\mu N}^M$  disebut koefisien hubungan spin. Kedua hubungan ini muncul dari kondisi kompatibilitas metrik, yang dapat dinyatakan dengan  $\nabla_\mu \theta_v^M = 0, \nabla_\mu e_M^\nu = 0$ , sehingga diperoleh

$$\Omega_{\mu N}^M(x) = \theta_v^M(x)\Gamma_{\mu\rho}^\nu e_N^\rho(x) + \theta_v^M(x)\partial_\mu e_N^\nu(x) \quad (10)$$

Transportasi paralel komponen vektor-4  $v^M$  pada kerangka yang bergerak  $e_A$  dan elemen garis  $dx^\mu$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} dv^M &= -\Omega_{\mu N}^M(x)v^N dx^\mu \\ dx^\mu &= e_M^\mu(x)v^M d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

Perubahan komponen spasial kecepatan  $v^m$  dari partikel ditentukan oleh gaya gravitasi yang dideskripsikan melalui koefisien hubungan spin  $\Omega_{\mu N}^M(x)$ . Dengan mempertimbangkan bahwa kecepatan diubah oleh gaya stokastik  $F_{noise}^a$  yang didorong oleh proses Wiener  $dW^a(t)$ .

Selanjutnya proses Wiener dipindahkan sepanjang kerangka ortonormal  $E_a^i(u)$  pada ruang kecepatan hiperbolik tiga dimensi yang ditentukan oleh hubungan

$$\sum_{a=1}^3 E_a^m E_a^n = G^{mn} \quad (12)$$

ekuivalen dengan

$$G_{mn} E_a^m E_b^n = \delta_{ab} \quad (13)$$

mana  $G_{ij}$  adalah metrik Riemann dari vektor hiperbolik ruang kecepatan dengan  $G^{ij}$  merupakan invers matrik dari  $G_{ij}$ .

Gerakan kecil dari kecepatan  $v^m(\tau)$  pada ruang fase dapat digambarkan dengan  $u^a(\tau)$  ( $a = 1, 2, 3$ ) yang bergerak dalam kerangka kecepatan  $E_a^m$  dengan menggunakan transformasi paralel

$$\begin{aligned} dv^m &= E_a^m du^a \\ dE_a^m(\tau) &= -\gamma_{nl}^m(v) E_a^l(\tau) dv^n \end{aligned} \quad (14)$$

Kurva acak dalam ruang fase didefinisikan menggunakan proses Wiener yang menggantikan  $du^a \rightarrow dW^a(\tau)$ . Oleh karena itu analog yang konsisten dari difusi Markovian untuk relativitas umum  $F_{noise}$  dijelaskan oleh  $F_{noise}^m = E_a^m(\tau) \circ dW^a$ .

Sebuah bagian dari difusi Markovian manifold Riemannian adalah anggapan bahwa untuk koefisien difusi hanya koefisien kerangka ortonormal  $E_b^a$  yang dapat diterima yang berhubungan langsung geometri hiperbolik dari ruang kecepatan. Yang sangat berbeda pada manifold Euclidian, jenis koefisien difusi yang lebih umum diperbolehkan. Sehingga persamaan diferensial stokastik yang menggambarkan difusi dalam medan gaya gravitasi dan gaya eksternal (persamaan Langevin relativistik umum) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} dx^i &= e_M^i(x) v^M d\tau \\ dv^m &= E_a^m(\tau) \circ dW^a - \Omega_{\mu N}^m(x) e_M^\mu(x) v^N v^M d\tau + F_{ex}^m d\tau \\ dE_a^m(\tau) &= -\gamma_{nl}^m(v) E_a^l(\tau) \circ dv^n \end{aligned} \quad (15)$$

dengan  $\tau$  merupakan parameter yang didefinisikan di sepanjang garis dunia partikel, yang dapat dipilih sebagai ruang fase waktu yang tepat. Di sini gaya eksternal tambahan  $F_{ex}^\mu = K_{ex}^\mu/m$  diambil untuk memperhitungkan di mana  $K_{ex}^\mu$  adalah komponen eksternal gaya-4 dalam kerangka koordinat dan  $m$  adalah sisanya massa partikel. Dalam kerangka bergerak gaya ini diungkapkan oleh



$F_{ex}^m = \theta_{\mu}^m F_{ex}^{\mu}$ . Koefisien hubungan Christoffel pada hiperboloid  $\gamma_{nl}^m(v)$  didefinisikan dalam bentuk

$$G_{ij}(u) = \delta_{ij} - \frac{(u^i u^j)}{(u^0)^2}, \quad (16)$$

$$\gamma_{jk}^i(u) = -u^i G_{jk}$$

Kondisi yang cukup dan perlu untuk keberadaan dan keunikan persamaan diferensial stokastik adalah peyimpangan dan koefisien difusi memenuhi kondisi Lipschitz seragam dan proses stokastik  $X(\tau) = \{x(\tau), v(\tau)\}$  disesuaikan dengan proses Wiener  $W^a(\tau)$ , yaitu, keluaran  $X(\tau_2)$  adalah fungsi dari  $W^a(\tau_1)$  sampai saat itu ( $\tau_1 \leq \tau_2$ ).

Operator difusi  $A_{F(M)}$  dalam bundel serat  $F(M_L)$  dengan koordinat  $r = \{x^i, v^m, E_a^m\}$  untuk proses stokastik memiliki bidang vektor horizontal  $H_a$  dan  $H_0$  diturunkan sebagai berikut

$$H_a = E_a^m \frac{\partial}{\partial v^m} - \gamma_{nl}^m(v) E_a^l E_b^n \frac{\partial}{\partial E_b^m}$$

$$H_0 = e_M^i(x) v^M \frac{\partial}{\partial x^i} - \Omega_{\mu N}^m(x) e_M^{\mu}(x) v^N v^M \frac{\partial}{\partial v^m} + F_{ex}^m \frac{\partial}{\partial v^m} \quad (17)$$

$$- \gamma_{nl}^m(v) E_a^l F^n \frac{\partial}{\partial E_a^m}$$

Operator  $A_{F(M)}$  dapat diproyeksikan ke fase ruang dengan koordinat  $r = \{x^i, v^m\}$  oleh  $A_{F(M)} f(r) = A_P f(x, v)$ , di mana generator difusi dalam fase ruang  $A_P$  diberikan oleh

$$A_P = \frac{D}{2} \partial^{ab} E_a^m \frac{\partial}{\partial v^m} E_b^n \frac{\partial}{\partial v^n} + e_m^i(x) v^M \frac{\partial}{\partial x^i} + F^m \frac{\partial}{\partial v^m} \quad (18)$$

Di sini suku pertama berisi operator Laplace-Beltrami dalam kecepatan hiperbolik ruang angkasa. Gaya  $F_m$  terdiri dari gravitasi gaya dan gaya luar mantan. Kolmogorov yang terbelakang persamaan untuk proses stokastik didefinisikan oleh

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, x, v) = A_P \varphi(\tau, x, v) \quad (19)$$

Persamaan Fokker-Planck yang berkorespondensi dalam ruang fase (persamaan Kramer relativistik umum) di dalam kerangka relativitas umum

didefinisikan oleh adjoint dari operator  $A_p$ . Karena operator Laplace-Beltrami adalah selfadjoint  $\Delta_v = \Delta_v^+$  berbentuk:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -v^M \text{div}_x(e_M(x)\Phi) - \text{div}_v(\mathbf{F}\Phi) + \frac{D}{2} \Delta_v \Phi \quad (20)$$

di mana  $\Delta_v$  adalah Operator Laplace-Beltrami dalam hiperbolik ruang kecepatan

$$\begin{aligned} \Delta_v &= \frac{G^{mn} \partial^2}{\partial v^m \partial v^n} + G^{mn} \gamma_{mn}^l \frac{\partial}{\partial v^l} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v^m} \left( \sqrt{G} G^{mn} \frac{\partial}{\partial v^n} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

operator divergensi dalam ruang posisi diberikan oleh

$$\text{div}_x(\mathbf{e}_M(x)\Phi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} e_M^i(x)\Phi) \quad (22)$$

dan dalam ruang kecepatan dengan

$$\text{div}_v(\mathbf{F}\Phi) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v^m} (\sqrt{G} F^m \Phi) \quad (23)$$

dengan  $G = \det\{G_{ij}\}$ ,  $g = \det\{g_{ij}\}$ .

Persamaan (20) adalah persamaan difusi dalam parameterisasi fase-ruang waktu yang tepat dalam frame relativitas umum untuk fungsi kepadatan probabilitas.

Dengan metrik yang diberikan, Laplace Operator Beltrami mengambil persamaan

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \coth \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ &\quad - \frac{1}{(\sinh \alpha)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{(\sinh \beta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

dan

$$\begin{aligned} &\text{div}_v(\mathbf{F}\Phi) \\ &= (\sinh \alpha)^{-2} \frac{\partial}{\partial \alpha} ((\sinh \alpha)^2 F^\alpha \Phi) - (\sinh \alpha)^{-1} (\sinh \beta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} (\sinh \beta F^\beta \Phi) \\ &\quad - (\sinh \alpha)^{-1} (\sinh \beta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sinh \beta F^\phi \Phi) \end{aligned} \quad (25)$$

adalah operator divergensi. Di sini komponen gaya di sistem koordinat hiperbolik  $F^\alpha, F^\beta, F^\phi$

Persamaan difusi dalam parameterisasi waktu pengamat dapat diturunkan dari persamaan diferensial stokastik menggunakan teorema matematika perubahan waktu acak dalam stokastik persamaan diferensial. Yang tepat waktu berhubungan dengan  $x^0$  dengan transformasi acak

$$\tau = \int_0^{x^0} N(s)(v^0(s))^{-1} ds \quad (26)$$

Karena hanya bergantung pada stokastik kejadian  $v^i$  lebih awal dari  $x^0$  perubahan waktu acak ini adalah proses yang disesuaikan dan oleh karena itu perubahan waktu dari suatu Ito integral sekali lagi merupakan integral Ito, tetapi didorong oleh yang berbeda Proses Wiener. Aturan untuk perubahan waktu acak ini berlaku di dalam Ito kalkulus. Persamaan Langevin relativistik dapat ditulis ulang dalam parametrisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dx^i(x^0) &= e_M^i(x)(v^0)^{-1} N dx^0 \\ dv^m(x^0) &= E_a^m(v^0)^{-1/2} N^{\frac{1}{2}} \circ dW^a(x^0) \\ &\quad - \frac{D}{2} \delta^{ab} E_a^m E_b^n N(v^0)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial v^n} ((v^0)^{-1/2}) dx^0 \\ &\quad + F^m(v^0)^{-1} N dx^0 \\ dE_a^m &= -\gamma_{nl}^m(v) E_a^l \circ dv^n(x^0) \end{aligned} \quad (27)$$

Perhatikan bahwa dalam Persamaan. istilah drift tambahan proporsional dengan konstanta difusi  $D$  muncul yang berasal dari aturan transformasi dari Ito ke Kalkulus Stratonovich untuk perubahan waktu acak. Difusi operator  $AF(M)$  dalam bundel serat  $F(ML)$  dengan koordinat  $r = \{x^i, v^m, E^m a\}$  untuk proses stokastik dijelaskan didefinisikan seperti pada Persamaan dengan horizontal medan vektor  $H_a$  dan  $H_0$  sekarang diberikan oleh

$$H_a = E_a^m(v^0)^{-1/2} N^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial v^m} - \gamma_{nl}^m(v) E_a^l E_b^n (v^0)^{-1/2} N^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial E_b^m} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
H_0 = & \left\{ -\frac{D}{2} \partial^{ab} E_a^m E_b^n N (v^0)^{-1} \frac{\partial}{\partial v^n} ((v^0)^{-1/2}) \right. \\
& + (v^0)^{-1} N F^m \left. \right\} \frac{\partial}{\partial v^m} + (v^0)^{-1} N e_M^i(x) v^M \frac{\partial}{\partial x^i} \\
& - (v^0)^{-1} N \gamma_{nl}^m(v) E_a^l \left\{ F^n \right. \\
& \left. + \frac{D}{2} \delta^{bc} E_b^n E_c^k \frac{\partial}{\partial v^k} ((v^0)^{-1/2}) \right\} \frac{\partial}{\partial E_a^m}
\end{aligned} \tag{29}$$

dengan gravitasi dan gaya luar  $F^m = -M N(x) e_\mu^m M(x) v^N v^M + F_{Mex}$  di mana generator difusi dalam ruang fase  $A_P$  diberikan oleh

$$A_P = \frac{D}{2} (v^0)^{-1} N \delta^{ab} E_a^i \frac{\partial}{\partial v^i} E_b^j \frac{\partial}{\partial v^j} + e_M^i(x) v^M (v^0)^{-1} N \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{30}$$

Persamaan Kramers relativistik umum dalam parameterisasi waktu pengamat  $x^0$  dapat diturunkan analogi seperti di atas dan ditulis sebagai berikut:

$$N^{-1} v^0 \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = -v^M \text{div}_x(\mathbf{e}_M(x)\phi) - \text{div}_v(\mathbf{F}\phi) + \frac{D}{2} \Delta_v \phi \tag{31}$$

Persamaan (31) adalah hasil utama dari saat ini kertas dan mewakili generalisasi Kramers persamaan dalam kerangka relativitas umum dalam parameterisasi waktu pengamat untuk probabilitas fungsi densitas  $\phi = (x^0; x, v)$  dengan kondisi awal  $\phi(x^0 = 0; x, v) = \phi_0(x, v)$ . Probabilitas transisi ditentukan oleh persamaan yang sama tetapi didefinisikan dengan kondisi awal.

**LAMPIRAN B**  
**PERHITUNGAN KOMPONEN SIMBOL CRHISTOFFEL BINTANG**  
**NEUTRON BEROTASI CEPAT**

Selanjutnya mengacu pada nilai metrik bintang neutron berotasi cepat pada persamaan (4.2), maka didapatkan elemen tensor metrik sebagai berikut:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta - e^{2\nu} & 0 & 0 & -\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta \\ 0 & e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2a} r^2 & 0 \\ -\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega^{-2} e^{-2\lambda} r^{-2} \sin^{-2} \theta - e^{-2\nu} & 0 & 0 & -\omega^{-1} e^{-2\lambda} r^{-2} \sin^{-2} \theta \\ 0 & e^{-2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2a} r^{-2} & 0 \\ -\omega^{-1} e^{-2\lambda} r^{-2} \sin^{-2} \theta & 0 & 0 & e^{-2\lambda} r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}$$

Kemudian untuk memperoleh seluruh komponen simbol Crishtoffel maka dilakukan perhitungan dengan mengacu pada persamaan

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu})$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_0 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 0} - \partial_{\sigma} g_{01}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} (\omega^{-2} e^{-2\lambda} r^{-2} \sin^{-2} \theta - e^{-2\nu}) \left( \frac{\partial}{\partial r} (\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta - e^{2\nu}) \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left[ ((\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) 2\omega' + \omega^2 r^2 \sin^2 \theta 2\lambda' e^{2\lambda} + \omega^2 e^{2\lambda} \sin^2 \theta 2r) - (2\nu' e^{2\nu}) \right]}{(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left[ 2 \left( (\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - (\nu' e^{2\nu}) \right) \right]}{(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \\ &= \frac{(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu}}{(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \\ \sigma = 1 : \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} g^{01} (\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}) = 0 \\ \sigma = 2 : \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} g^{02} (\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_0g_{13} + \partial_1g_{30} - \partial_3g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_0g_{2\sigma} + \partial_2g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{02})$$

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \Gamma_{02}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{20} + \partial_2g_{00} - \partial_0g_{02}) \\ &= \frac{1}{2}\omega^{-2}e^{-2\lambda r^{-2}}\sin^{-2}\theta - e^{-2\nu} \left( \frac{\partial}{\partial\theta}\omega^2e^{2\lambda r^2}\sin^2\theta - e^{2\nu} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}\omega^2e^{2\lambda r^2}\sin 2\theta}{(we^{\lambda r}\sin\theta)^2 - e^{2\nu}} \end{aligned}$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_0g_{21} + \partial_2g_{10} - \partial_1g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_0g_{22} + \partial_2g_{20} - \partial_2g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_0g_{23} + \partial_2g_{30} - \partial_3g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_0g_{3\sigma} + \partial_3g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{03})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{30} + \partial_3g_{00} - \partial_0g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_0g_{31} + \partial_3g_{10} - \partial_1g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_0g_{32} + \partial_3g_{20} - \partial_2g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_0g_{33} + \partial_3g_{30} - \partial_3g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_1g_{1\sigma} + \partial_1g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{10} + \partial_1g_{01} - \partial_0g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_1g_{11} + \partial_1g_{11} - \partial_1g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_1g_{12} + \partial_1g_{21} - \partial_2g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_1 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{13})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13})$$

$$= \frac{1}{2}\omega^{-2}e^{-2\lambda}r^{-2}\sin^{-2}\theta - e^{-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \omega e^{2\lambda}r^2\sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[(-\omega e^{2\lambda}r^2\sin^2\theta)\left(\frac{\omega'}{\omega} + 2\lambda' + \frac{2}{r}\right)\right]}{(\omega e^{\lambda}r\sin\theta)^2 - e^{2\nu}}$$

$$= \frac{(-\omega e^{2\lambda}r^2\sin^2\theta)\left(\frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r}\right)}{(\omega e^{\lambda}r\sin\theta)^2 - e^{2\nu}}$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{02} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{03} (\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_2 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{23})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2} g^{01} (\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2} g^{02} (\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2} g^{03} (\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{01} (\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{02} (\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{03} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00})$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta - e^{2\nu} \right) \\
&= \frac{\frac{1}{2} \left[ -2 \left( (\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - (v' e^{2\nu}) \right) \right]}{e^{2\alpha}} \\
&= \frac{-(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) + v' e^{2\nu}}{(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}}
\end{aligned}$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_1 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{10})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{10}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{13} - \partial_2 g_{10}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^1 = \Gamma_{02}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_2 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{20})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^1 = \Gamma_{03}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_3 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{30})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left( -\frac{\partial}{\partial r} - \omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta \right)$$

$$= \frac{(\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{e^{2\alpha}}$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial r} e^{2\alpha} + \frac{\partial}{\partial r} e^{2\alpha} - \frac{\partial}{\partial r} e^{2\alpha} \right)$$

$$= \alpha'$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left( -\frac{\partial}{\partial r} e^{2\alpha} r^2 \right)$$

$$= \alpha' r^2 + r$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_0 g_{00} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left( -\frac{\partial}{\partial r} e^{2\lambda r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$= -e^{2(\lambda-\alpha)r} (\lambda' + 1) \sin^2 \theta$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_2 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{21})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_2 g_{10} + \partial_1 g_{02} - \partial_0 g_{21}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{32} - \partial_1 g_{21}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{13} (\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_3 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{31})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{10} (\partial_3 g_{10} + \partial_1 g_{03} - \partial_0 g_{31}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{33} - \partial_1 g_{31}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{12} (\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{31}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}g^{13}(\partial_3g_{13} + \partial_1g_{33} - \partial_3g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{1\sigma}(\partial_3g_{2\sigma} + \partial_2g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{32})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{10}(\partial_3g_{20} + \partial_2g_{03} - \partial_0g_{32}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{21} + \partial_2g_{33} - \partial_1g_{32}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{12}(\partial_3g_{22} + \partial_2g_{23} - \partial_2g_{32}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{13}(\partial_3g_{23} + \partial_2g_{33} - \partial_3g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_0g_{0\sigma} + \partial_0g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_0g_{00} + \partial_0g_{00} - \partial_0g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_0g_{01} + \partial_0g_{10} - \partial_1g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{02} + \partial_0g_{20} - \partial_2g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0g_{03} + \partial_0g_{30} - \partial_3g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_1g_{0\sigma} + \partial_0g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{10})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_1g_{00} + \partial_0g_{01} - \partial_0g_{10}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_1g_{01} + \partial_0g_{11} - \partial_1g_{10}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{02} + \partial_0g_{13} - \partial_2g_{10}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1g_{03} + \partial_0g_{13} - \partial_3g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_2g_{0\sigma} + \partial_0g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{20})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^2 = \Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_3 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{30})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = 0$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}e^{-2\alpha}r^{-2} \left( -\frac{\partial}{\partial\theta} - \omega e^{2\lambda}r^2 \sin^2\theta \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}\omega e^{2\lambda}r^2 \sin 2\theta}{(e^\alpha r)^2} \end{aligned}$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{2\sigma} (\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{20} (\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0 \\ \sigma = 1 : \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{21} (\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0 \\ \sigma = 2 : \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0 \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\alpha r^{-2}} \left( -\frac{\partial}{\partial r} e^{2\alpha r^2} \right) \\ &= \frac{1 - \alpha' r}{r} \\ \sigma = 3 : \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{23} (\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2} g^{2\sigma} (\partial_3 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{31}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2} g^{10} (\partial_3 g_{10} + \partial_1 g_{03} - \partial_0 g_{31}) = 0 \\ \sigma = 1 : \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{33} - \partial_1 g_{31}) = 0 \\ \sigma = 2 : \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2} g^{12} (\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{31}) = 0 \\ \sigma = 3 : \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2} g^{13} (\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{2\sigma} (\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{20} (\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0 \\ \sigma = 1 : \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{21} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0 \\ \sigma = 2 : \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0 \\ \sigma = 3 : \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{23} (\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_3 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{32})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_3 g_{20} + \partial_2 g_{03} - \partial_0 g_{32}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{33} - \partial_1 g_{32}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{32}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_0 g_{00} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2\alpha} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} e^{2\lambda r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2(\lambda-\alpha)r^2} \sin 2\theta$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{01}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{01}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{10}) = 0 \\ \sigma = 1 : \Gamma_{01}^3 &= \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{10}) = 0 \\ \sigma = 2 : \Gamma_{01}^3 &= \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{10}) = 0 \\ \sigma = 3 : \Gamma_{01}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{10}) = 0 \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\lambda r^{-2}} \sin^{-2}\theta \left( \frac{\partial}{\partial r} - \omega e^{2\lambda r^2} \sin^2\theta \right) \\ &= \frac{(-\omega e^{2\lambda r^2} \sin^2\theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{(e^{\lambda r} \sin\theta)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{02}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{20}) = 0 \\ \sigma = 1 : \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{20}) = 0 \\ \sigma = 2 : \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{20}) = 0 \\ \sigma = 3 : \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{20}) = 0 \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\lambda r^{-2}} \sin^{-2}\theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - \omega e^{2\lambda r^2} \sin^2\theta \right) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\omega e^{2\lambda r^2} \sin 2\theta}{(e^{\lambda r} \sin\theta)^2} = \omega \cot\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{03}) \\ \sigma = 0 : \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = 0 \\ \sigma = 1 : \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) = 0\end{aligned}$$



$$\sigma = 2 : \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{32} (\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{3\sigma} (\partial_1 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{13})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{30} (\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{31} (\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{32} (\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma = 3 : \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta (\partial_1 r^{-2} \sin^{-2} \theta) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{3\sigma} (\partial_2 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{23})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{30} (\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{31} (\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{32} (\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma = 3 : \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = 0 \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\lambda r^{-2} \sin^{-2} \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} e^{2\lambda r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ &= \cot \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2} g^{3\sigma} (\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2} g^{30} (\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0 : \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1 : \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 2 : \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 3 : \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

**LAMPIRAN C**  
**PERHITUNGAN KOMPONEN KOEFISIEN HUBUNGAN SPIN**  
**BINTANG NEUTRON BEROTASI CEPAT**

Dengan menggunakan hasil komponen simbol Crishtoffel tidak nol, maka dapat dilakukan perhitungan komponen koefisien hubungan spin pada bintang neutron berotasi cepat dengan menggunakan persamaan

$$\Omega_{\mu N}^M(x) = e_\nu^M(x) \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_N^\rho(x) + e_\nu^M(x) \partial_\mu e_N^\nu(x)$$

Sehingga diperoleh perhitungan sebagai berikut

$$\Omega_{10}^0 = e_\nu^0 \Gamma_{1\rho}^\nu e_0^\rho + e_\nu^0 \partial_1 e_0^\nu$$

$$\nu, \rho = 0$$

$$\Omega_{10}^0 = e_0^0 \Gamma_{10}^0 e_0^0 + e_0^0 \partial_1 e_0^0$$

$$\Omega_{10}^0 = (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \left( \frac{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu}}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) \\ (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) + (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \partial_1 (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu)$$

$$\Omega_{01}^0 = e_\nu^0 \Gamma_{0\rho}^\nu e_1^\rho + e_\nu^0 \partial_0 e_1^\nu$$

$$\nu = 0, 1; \rho = 1$$

$$\nu, \rho = 0, 1$$

$$\Omega_{01}^0 = e_0^0 \Gamma_{01}^0 e_1^1 + e_0^0 \partial_0 e_1^0$$

$$= (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \left( \frac{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu}}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) (e^\alpha)$$

$$\Omega_{01}^0 = \frac{(\omega e^{\lambda+\alpha} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) - \nu' e^{2\nu+\alpha}}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta + e^\nu}$$

$$\nu, \rho = 1, 1$$

$$\Omega_{01}^0 = e_1^0 \Gamma_{01}^1 e_1^1 + e_1^0 \partial_0 e_1^1 = 0$$

$$\Omega_{02}^0 = e_\nu^0 \Gamma_{0\rho}^\nu e_2^\rho + e_\nu^0 \partial_0 e_2^\nu$$

$$\nu = 0, 2; \rho = 2$$

$$\nu, \rho = 0, 2$$

$$\Omega_{02}^0 = e_0^0 \Gamma_{02}^0 e_2^2 + e_0^0 \partial_0 e_2^0$$

$$= (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \left( \frac{\frac{1}{2} \omega^2 e^{2\lambda r^2} \sin 2\theta}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) (e^{\alpha r})$$

$$\Omega_{02}^0 = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 e^{2\lambda + \alpha} r^3 \sin 2\theta}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu}$$

$$\nu, \rho = 2, 2$$

$$\Omega_{02}^0 = e_2^0 \Gamma_{02}^2 e_2^2 + e_2^0 \partial_0 e_2^2 = 0$$

$$\Omega_{00}^1 = e_\nu^1 \Gamma_{0\rho}^\nu e_0^\rho + e_\nu^1 \partial_0 e_0^\nu$$

$$\nu = 0, 1; \rho = 0$$

$$\nu, \rho = 0, 0$$

$$\Omega_{00}^1 = e_0^1 \Gamma_{00}^0 e_0^0 + e_0^1 \partial_0 e_0^0 = 0$$

$$\nu, \rho = 1, 0$$

$$\Omega_{00}^1 = e_1^1 \Gamma_{00}^1 e_0^0 + e_1^1 \partial_0 e_0^1$$

$$= (e^\alpha) \left( \frac{-(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) + \nu' e^{2\nu}}{(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu)$$

$$\Omega_{00}^1 = \frac{-\omega^2 e^{2\lambda + \alpha} r^2 \sin \theta \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) + \nu' e^{2\nu + \alpha}}{\omega e^{\lambda r} \sin \theta + e^\nu}$$

$$\Omega_{22}^1 = e_\nu^1 \Gamma_{2\rho}^\nu e_2^\rho + e_\nu^1 \partial_2 e_2^\nu$$

$$\nu = 1, 2; \rho = 2$$

$$\nu, \rho = 1, 2$$

$$\Omega_{22}^1 = e_1^1 \Gamma_{22}^1 e_2^2 + e_1^1 \partial_2 e_2^1$$

$$= (e^\alpha) (\alpha' r^2 + r) (e^{\alpha r})$$

$$= e^{2\alpha r^2} (\alpha' r + 1)$$

$$\nu, \rho = 2, 2$$

$$\Omega_{22}^1 = e_2^1 \Gamma_{22}^2 e_2^2 + e_2^1 \partial_2 e_2^2 = 0$$

$$\Omega_{33}^1 = e_3^1 \Gamma_{3\rho}^\nu e_3^\rho + e_3^1 \partial_3 e_3^\nu$$

$$\nu = 1, 3; \rho = 3$$

$$\nu, \rho = 1, 3$$

$$\Omega_{33}^1 = e_1^1 \Gamma_{33}^1 e_3^3 + e_1^1 \partial_3 e_3^1$$

$$= (e^\alpha) (-e^{2(\lambda-\alpha)} r (\lambda' + 1) \sin^2 \theta) (e^\lambda r \sin \theta)$$

$$= -e^{3\lambda-\alpha} r^2 (\lambda' + 1) \sin^3 \theta$$

$$\Omega_{33}^1 = -e^{3\lambda-\alpha} r^2 (\lambda' + 1) \sin^3 \theta$$

$$\nu, \rho = 3, 3$$

$$\Omega_{33}^1 = e_3^1 \Gamma_{33}^3 e_3^3 + e_3^1 \partial_3 e_3^3 = 0$$

$$\Omega_{21}^2 = e_1^2 \Gamma_{2\rho}^\nu e_1^\rho + e_1^2 \partial_2 e_1^\nu$$

$$\nu = 1, 2; \rho = 1$$

$$\nu, \rho = 1, 1$$

$$\Omega_{21}^2 = e_1^2 \Gamma_{21}^1 e_1^1 + e_1^2 \partial_2 e_1^1 = 0$$

$$\nu, \rho = 2, 1$$

$$\Omega_{21}^2 = e_2^2 \Gamma_{21}^2 e_1^1 + e_2^2 \partial_2 e_1^2$$

$$= (e^\alpha r) \left( \frac{1 - \alpha' r}{r} \right) (e^\alpha)$$

$$\Omega_{21}^2 = e^{2\alpha} (1 - \alpha' r)$$

$$\Omega_{33}^2 = e_3^2 \Gamma_{3\rho}^\nu e_3^\rho + e_3^2 \partial_3 e_3^\nu$$

$$\nu = 2, 3; \rho = 3$$

$$\nu, \rho = 2, 3$$

$$\Omega_{33}^2 = e_2^2 \Gamma_{33}^2 e_3^3 + e_2^2 \partial_3 e_3^2$$

$$= (e^\alpha r) \left( -\frac{1}{2} e^{2(\lambda-\alpha)} r^2 \sin 2\theta \right) (e^\lambda r \sin \theta)$$

$$\Omega_{33}^2 = -e^{3\lambda-\alpha} r^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\nu, \rho = 3, 3$$

$$\Omega_{33}^2 = e_3^2 \Gamma_{33}^3 e_3^3 + e_3^2 \partial_3 e_3^3 = 0$$

$$\Omega_{01}^3 = e_\nu^3 \Gamma_{0\rho}^\nu e_2^\rho + e_\nu^3 \partial_\nu e_1^\nu$$

$$\nu = 1, 3; \rho = 2$$

$$\nu, \rho = 1, 2$$

$$\Omega_{01}^3 = e_1^3 \Gamma_{02}^1 e_2^2 + e_1^3 \partial_0 e_1^1 = 0$$

$$\nu, \rho = 3, 2$$

$$\begin{aligned} \Omega_{01}^3 &= e_3^3 \Gamma_{02}^3 e_2^2 + e_3^3 \partial_0 e_1^3 \\ &= (e^{\lambda} r \sin \theta)(\omega \cot \theta)(e^{\alpha} r) \\ &= \omega e^{\lambda-\alpha} r^2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Omega_{02}^3 = e_\nu^3 \Gamma_{0\rho}^\nu e_2^\rho + e_\nu^3 \partial_\nu e_2^\nu$$

$$\nu = 2, 3; \rho = 2$$

$$\nu, \rho = 2, 2$$

$$\Omega_{02}^3 = e_2^3 \Gamma_{22}^2 e_2^2 + e_2^3 \partial_0 e_2^2 = 0$$

$$\nu, \rho = 3, 2$$

$$\begin{aligned} \Omega_{02}^3 &= e_3^3 \Gamma_{02}^3 e_2^2 + e_3^3 \partial_0 e_2^3 \\ &= (e^{\lambda} r \sin \theta)(\omega \cot \theta)(e^{\alpha} r) \end{aligned}$$

$$\Omega_{02}^3 = \omega e^{\lambda+\alpha} r^2 \cos \theta$$

$$\Omega_{20}^0 = e_\nu^0 \Gamma_{2\rho}^\nu e_0^\rho + e_\nu^0 \partial_2 e_0^\nu$$

$$\nu, \rho = 0$$

$$\Omega_{20}^0 = e_0^0 \Gamma_{20}^0 e_0^0 + e_0^0 \partial_2 e_0^0$$

$$\begin{aligned} &= (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu) \left( \frac{\frac{1}{2} \omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta}{(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu) \\ &\quad + (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu) \partial_2 (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu) \end{aligned}$$

$$\Omega_{20}^0 = \frac{(\omega^2 e^{2\lambda} r^2 \sin 2\theta) (\omega e^\lambda r \sin \theta - e^\nu)}{\omega e^\lambda r \sin \theta + e^\nu} +$$

$$\Omega_{31}^0 = e_\nu^0 \Gamma_{3\rho}^\nu e_1^\rho + e_\nu^0 \partial_3 e_1^\nu$$

$$\nu = 0, 1; \rho = 1$$

$$\nu, \rho = 0, 1$$

$$\Omega_{31}^0 = e_0^0 \Gamma_{31}^0 e_1^1 + e_0^0 \partial_3 e_1^0$$

$$= (\omega e^\lambda r \sin \theta - e^\nu) \left( \frac{(-\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{(\omega e^\lambda r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) (e^\alpha)$$

$$\Omega_{31}^0 = \frac{(-\omega e^{2\lambda+\alpha} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{\omega e^\lambda r \sin \theta + e^\nu}$$

$$\nu, \rho = 1, 1$$

$$\Omega_{31}^0 = e_1^0 \Gamma_{31}^1 e_1^1 + e_1^0 \partial_3 e_1^1 = 0$$

$$\Omega_{13}^0 = e_\nu^0 \Gamma_{1\rho}^\nu e_3^\rho + e_\nu^0 \partial_1 e_3^\nu$$

$$\nu = 0, 3; \rho = 3$$

$$\nu, \rho = 0, 3$$

$$\Omega_{13}^0 = e_0^0 \Gamma_{13}^0 e_3^3 + e_0^0 \partial_1 e_3^0$$

$$= (\omega e^\lambda r \sin \theta - e^\nu) \left( \frac{(-\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{(\omega e^\lambda r \sin \theta)^2 - e^{2\nu}} \right) (e^\lambda r \sin \theta)$$

$$\Omega_{13}^0 = \frac{(-\omega e^{3\lambda} r^3 \sin^3 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{\omega e^\lambda r \sin \theta + e^\nu}$$

$$\nu, \rho = 3, 3$$

$$\Omega_{13}^0 = e_3^0 \Gamma_{13}^3 e_3^3 + e_3^0 \partial_1 e_3^3 = 0$$

$$\Omega_{30}^1 = e_\nu^1 \Gamma_{3\rho}^\nu e_0^\rho + e_\nu^1 \partial_3 e_0^\nu$$

$$\nu = 0, 1; \rho = 0$$

$$\nu, \rho = 0, 0$$



$$\Omega_{30}^1 = e_0^1 \Gamma_{30}^0 e_0^0 + e_0^1 \partial_3 e_0^0 = 0$$

$$\nu, \rho = 1, 0$$

$$\Omega_{30}^1 = e_1^1 \Gamma_{30}^1 e_0^0 + e_1^1 \partial_3 e_0^1$$

$$= (e^\alpha) \left( \frac{(\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{e^{2\alpha}} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu)$$

$$\Omega_{30}^1 = \frac{(\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu)}{e^\alpha}$$

$$\Omega_{03}^1 = e_\nu^1 \Gamma_{0\rho}^\nu e_3^\rho + e_\nu^1 \partial_0 e_3^\nu$$

$$\nu = 1, 3; \rho = 3$$

$$\nu, \rho = 1, 3$$

$$\Omega_{03}^1 = e_1^1 \Gamma_{03}^1 e_3^3 + e_1^1 \partial_0 e_3^1$$

$$= (e^\alpha) \left( \frac{(\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{e^{2\alpha}} \right) (e^{\lambda} r \sin \theta)$$

$$\Omega_{03}^1 = \frac{(\omega e^{3\lambda} r^3 \sin^3 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{e^\alpha}$$

$$\nu, \rho = 3, 3$$

$$\Omega_{03}^1 = e_3^1 \Gamma_{03}^3 e_3^3 + e_3^1 \partial_0 e_3^3 = 0$$

$$\Omega_{00}^2 = e_\nu^2 \Gamma_{0\rho}^\nu e_0^\rho + e_\nu^2 \partial_0 e_0^\nu$$

$$\nu = 0, 2; \rho = 0$$

$$\nu, \rho = 0, 0$$

$$\Omega_{00}^2 = e_0^2 \Gamma_{00}^0 e_0^0 + e_0^2 \partial_0 e_0^0 = 0$$

$$\nu, \rho = 2, 0$$

$$\Omega_{00}^2 = e_2^2 \Gamma_{00}^2 e_0^0 + e_2^2 \partial_0 e_0^2$$

$$= (e^\alpha r) \left( \frac{-(\omega e^{\lambda} r \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) + \nu' e^{2\nu}}{(e^\alpha r)^2} \right) (\omega e^{\lambda} r \sin \theta - e^\nu)$$

$$= \frac{-(\omega e^{\lambda r} \sin \theta)^2 \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) + \nu' (\omega e^{\lambda+2\nu} r \sin \theta - e^{3\nu})}{e^{\alpha r}}$$

$$\Omega_{03}^2 = e_\nu^2 \Gamma_{0\rho}^\nu e_3^\rho + e_\nu^2 \partial_0 e_3^\nu$$

$$\nu = 2,3; \rho = 3$$

$$\nu, \rho = 2,3$$

$$\begin{aligned} \Omega_{03}^2 &= e_2^2 \Gamma_{03}^2 e_3^3 + e_2^2 \partial_0 e_3^2 \\ &= (e^{\alpha r}) \left( \frac{\frac{1}{2} \omega e^{2\lambda} \sin 2\theta}{e^\alpha} \right) (e^{\lambda r} \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\Omega_{03}^2 = \omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\nu, \rho = 3,3$$

$$\Omega_{03}^2 = e_3^2 \Gamma_{03}^3 e_3^3 + e_3^2 \partial_0 e_3^3 = 0$$

$$\Omega_{10}^3 = e_\nu^3 \Gamma_{1\rho}^\nu e_0^\rho + e_\nu^3 \partial_0 e_0^\nu$$

$$\nu = 0,3; \rho = 0$$

$$\nu, \rho = 0,0$$

$$\Omega_{10}^3 = e_0^3 \Gamma_{10}^0 e_0^0 + e_0^3 \partial_0 e_0^0 = 0$$

$$\nu, \rho = 3,0$$

$$\begin{aligned} \Omega_{10}^3 &= e_3^3 \Gamma_{10}^3 e_0^0 + e_3^3 \partial_0 e_0^3 \\ &= (e^{\lambda r} \sin \theta) \left( \frac{(-\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{(e^{\lambda r} \sin \theta)^2} \right) (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \\ &= \frac{(-\omega e^{2\lambda} r^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{\omega'}{2\omega} + \lambda' + \frac{1}{r} \right)}{e^{\lambda r} \sin \theta} (\omega e^{\lambda r} \sin \theta - e^\nu) \end{aligned}$$

$$\Omega_{31}^3 = e_\nu^3 \Gamma_{3\rho}^\nu e_1^\rho + e_\nu^3 \partial_3 e_1^\nu$$

$$\nu = 1,3; \rho = 1$$

$$\nu, \rho = 1,1$$

$$\Omega_{31}^3 = e_1^3 \Gamma_{31}^1 e_1^1 + e_1^3 \partial_3 e_1^1 = 0$$

$$\nu, \rho = 3, 1$$

$$\begin{aligned} \Omega_{31}^3 &= e_3^3 \Gamma_{31}^3 e_1^1 + e_3^3 \partial_3 e_1^3 \\ &= (e^{\lambda r} \sin \theta) \left( \lambda' + \frac{1}{r} \right) (e^\alpha) \\ &= e^{\lambda + \alpha} r \sin \theta (\lambda' + 1) \end{aligned}$$

$$\Omega_{32}^3 = e_\nu^3 \Gamma_{3\rho}^\nu e_2^\rho + e_\nu^3 \partial_3 e_2^\nu$$

$$\nu = 2, 3; \rho = 2$$

$$\nu, \rho = 2, 2$$

$$\Omega_{32}^3 = e_2^3 \Gamma_{32}^2 e_2^2 + e_2^3 \partial_3 e_2^2 = 0$$

$$\nu, \rho = 3, 2$$

$$\Omega_{32}^3 = e_3^3 \Gamma_{32}^3 e_2^2 + e_3^3 \partial_3 e_2^3 = (e^{\lambda r} \sin \theta) (\cot \theta) (e^{\alpha r}) = e^{\lambda + \alpha} r^2 \cos \theta$$

## LAMPIRAN D

### SCRIPT GRAFIK KOMPONEN GAYA GRAVITASI RELATIVISTIK DI SEKITAR BINTANG NEUTRON PADA KOORDINAT HIPERBOLIK

#### 1. Script Grafik Gaya Gravitasi di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

#draw function
r=np.arange (10,40,2.5)
M=2
λ=-1/2*np.log(1-2*M/r)
v=1/2*np.log(1-2*M/r)
V= 1/(2-4*M/r)
u0=2*np.exp(-v)
u1=np.sqrt(2)*np.exp(-λ)
u2=1/r
u3=0
w=0.01*r
theta=90
N=1000

Fg1=(V*np.exp(-λ)*u0**2+np.exp(-λ)/r*u2**2+np.exp(-λ)/r*u3**2)
Fg2=(N*(np.exp(-λ)/r*u1*u2-(np.cos(theta)/np.sin(theta))/r*u3**2))
Fg3=(-np.exp(-λ)/r*u1*u3-(np.cos(theta)/np.sin(theta))/r*u2*u3)

plt.plot (r, Fg1, '-', color='red', ls= 'solid', label= 'Fg1')
plt.plot (r, Fg2, '-', color='green', ls= 'solid', label= 'Fg2')
plt.plot (r, Fg3, '-', color='blue', ls= 'solid', label='Fg3')
plt.xlabel ('jarak')
plt.ylabel ('Fg')
plt.title ('Gaya Gravitasi Disekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi')
plt.legend (loc= 'center right', fontsize=12)
plt.show()
```

#### 2. Script Grafik Gaya Gravitasi di Sekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat

```
#Gravitational Force Around a Non Rotating Neutron Star#
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

#draw function
r=np.arange (4.25,4.5,0.015)
M=2
λ=-1/2*np.log(1-2*M/r)
L=1/(4*M/r-2)
v=1/2*np.log(1-2*M/r)
V= 1/(2-4*M/r)
a=1/2*np.log(1-2*M/r)
A=1/(2-4*M/r)
u0=2*np.exp(-v)
u1=np.sqrt(2)*np.exp(-λ)
u2=1/r
u3=0
w=0.01*r
W=0.01
θ=90

F1g= (u**2*np.exp(2*λ-a)*r**2*np.sin(θ)*(W/(2*u)+L+1/r)-V*np.exp(2*v-a)*u0**2)-(np.exp(a)*r*(A+r+1)*u2**2+(np.exp(2*λ-a)*r**2*(L+1)*np.sin(θ)*np.sin(θ)*u3*
F2g= (-np.exp(a)*(1/r-A)*u1*u2+(np.exp(2*λ-a)*r**2*np.sin(θ)*np.cos(θ)*u3**2)+(u*np.exp(3*λ)*r**2*np.sin(θ)*np.sin(θ)*np.cos(θ))/2*u*np.exp(λ)*r*np.sin(θ)-
F3g= -np.exp(a)*(L+1)*u1*u3-np.exp(a)*r*(np.cos(θ)/np.sin(θ))*u2*u3+w*np.exp(λ-a)*r*np.sin(θ)*(W/(2*u)+L+1/r)*(u*np.exp(λ)*r*np.sin(θ)-np.exp(v))+u*np.exp(

plt.plot(r, F1g, '-', color='red', ls= 'solid', label= 'Fg1')
plt.plot(r, F2g, '-', color='green', ls= 'solid', label= 'Fg2')
plt.plot(r, F3g, '-', color='blue', ls= 'solid', label='Fg3')
plt.xlabel('jarak (r)')
plt.ylabel('gaya Gravitasi (Fg)')
plt.title('Gaya Gravitasi Disekitar Bintang Neutron Berotasi Cepat')
plt.legend (loc= 'under left', fontsize=12)
plt.show()
```

**LAMPIRAN E**  
**SCRIPT GRAFIK KOMPONEN GAYA GESEK RELATIVISTIK PADA**  
**KOORDINAT HIPERBOLIK**

1. Script Grafik Gaya Gesek Relativistik dengan  $\kappa = 0$  sampai 1

```
In[41]: a := 90
k := Range [0, 1]
f[a_] := -k * Sinh[a]

Plot[f[a], {k, 0, 1}, AspectRatio → 1/1, PlotStyle → {Red, Thickness {0.005}}, PlotLegends → {"fa = -k sinh
a"},
AxesLabel → {"Koefisien Gesekan (k)", "Gaya Gesek Relativistik (F)"}]
```



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : NURIL QOMARIYAH  
NIM : 17640001  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Fisika  
Judul Skripsi : Studi Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi dan Berotasi  
Pembimbing I : Drs. Abdul Basid, M.Si  
Pembimbing II : Arista Romadani, M.Sc.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	13 Januari 2021	Konsultasi Bab I	
2	20 Januari 2021	Konsultasi Turunan Rumus Bab II	
3	25 Januari 2021	Konsultasi Bab I dan Bab III	
4	1 Februari 2021	Konsultasi Bab I, II, dan III	
5	21 Juni 2021	Konsultasi Turunan Rumus Bab III	
6	15 Juli 2021	Konsultasi Bab III dan Perhitungan Bab IV	
7	26 Agustus 2021	Konsultasi Bab IV	
8	7 Oktober 2021	Konsultasi Bab I, II, III, dan ACC	
9	1 November 2021	Konsultasi Bab IV dan Grafik	
10	15 November 2021	Konsultasi Bab IV dan Bab V	
11	30 November 2021	Konsultasi Integrasi Al Qur'an	
12	17 Desember 2021	Konsultasi Semua Bab, Abstrak dan Acc	



Malang, 20 Desember 2021

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Fisika,

*(Signature)*  
Dr. Imam Tazi, M.Si.

NIP. 197410730 200312 1 002