

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA  
PENYEBARAN COVID-19 PADA POPULASI SEIR**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ESTER MEYLIANA  
NIM. 17610033**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA  
PENYEBARAN COVID-19 PADA POPULASI SEIR**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH  
ESTER MEYLIANA  
NIM. 17610033**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA  
PENYEBARAN COVID-19 PADA POPULASI SEIR**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ESTER MEYLIANA  
NIM. 17610033**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 09 Desember 2021

Pembimbing I



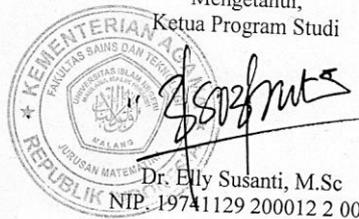
Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si  
NIP. 19770521 200301 2 004

Pembimbing II



Juhari, M.Si  
NIDT. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,  
Ketua Program Studi



Dr. Ely Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA  
PENYEBARAN COVID-19 PADA POPULASI SEIR**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ESTER MEYLIANA  
NIM. 17610033**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)  
Tanggal 15 Desember 2021

Penguji Utama : Dr. Heni Widayani, M.Si



Ketua Penguji : Erna Herawati, M.Pd



Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si



Anggota Penguji : Juhari, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Program Studi



  
Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

### PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ester Meyliana

NIM : 17610033

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran COVID-19  
Pada Populasi SEIR

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Desember 2021

Yang membuat pernyataan,



Ester Meyliana

NIM. 17610033

## **MOTTO**

*“Whatever you do, do it well.”-Walt Disney.*

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Erwin Pranajaya dan Sumiati, kakak penulis Sulis, adik penulis Aurel Cinta Agustin, beserta semua keluarga yang selalu mendoakan, memberi semangat, nasihat dan kasih sayang yang tak terhingga. Sehingga menjadikan alasan bagi penulis untuk selalu semangat dalam berproses.

## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR”. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rector Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M. Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M. Sc, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M. Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Juhari, M. Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, do'a dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu yang diberikan dan atas segala bimbingannya.
7. Seluruh teman-teman MAGENTA 2017, terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan saat menuntut ilmu bersama.
8. Semua pihak yang tidak disebutkan satu-persatu yang telah memberikan bantuan secara langsung maupun tidak langsung kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan. Dengan demikian, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan sehingga dapat menjadi lebih baik lagi. Selain itu, penulis juga mengharapkan semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan kepada para pembaca. Aamiin.  
Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 23 November 2021

Penyusun

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR..... viii

DAFTAR ISI..... x

DAFTAR TABEL ..... xii

DAFTAR GAMBAR..... xiii

ABSTRAK ..... xiv

ABSTRACT..... xv

ملخص.....xvi

### BAB I PENDAHULUAN

1.1	Latar Belakang .....	1
1.2	Rumusan Masalah .....	4
1.3	Tujuan Penelitian.....	4
1.4	Manfaat Penelitian.....	4
1.5	Batasan Masalah.....	5
1.6	Metode Penelitian.....	6
1.7	Sistematika Penulisan.....	7

### BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1	Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	9
2.2	Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu.....	14
2.3	Sistem Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu.....	15
2.4	Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Penyakit.....	16
2.4.1	Linierisasi.....	18
2.4.2	Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	21
2.4.3	Jenis Kestabilan dan Akar Karakteristik.....	24
2.4.4	Kriteria Routh-Hurwitz.....	25
2.5	COVID-19.....	27
2.6	Kajian Keagamaan .....	29

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	31
3.1.1	Titik-titik Keseimbangan .....	31
3.1.2	Linierisasi Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	36
3.1.3	Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan.....	40
3.1.3.1	Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit.....	40
3.1.3.2	Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik .....	42
3.1.4	Potret Fase dan Simulasi Numerik.....	46
3.2	Kajian Nilai-nilai Keagamaan Penyebaran Penyakit COVID-19.	49

### **BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN**

4.1	Kesimpulan.....	52
4.2	Saran .....	52

### **DAFTAR PUSTAKA ..... 53**

### **LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai Awal Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	13
Tabel 2.2	Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran COVID-19 .....	13
Tabel 2.4	Tabel Jenis Kestabilan Titik Tetap.....	25

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Potret Fase $X_1$ , $X_2$ , dan $X_3$ .....	46
Gambar 3.2	Potret Fase $X_1$ , $X_3$ , dan $X_4$ .....	47
Gambar 3.3	Simulasi Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	48

## ABSTRAK

Meyliana, Ester, 2021. **Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Ari Kusumastuti, M. Pd, M. Si, (2) Juhari, M.Si.

**Kata Kunci:** analisis dinamik, model matematika penyebaran COVID-19, titik kesetimbangan, potret fase

Penelitian ini membahas tentang analisis dinamik pada model matematika penyebaran COVID-19 dengan menggunakan kasus harian di Indonesia yang diklasifikasikan menjadi empat variabel yaitu, *Susceptible (S)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, dan *Recovered (R)* yang kemudian dianalisis dinamikanya dengan menghitung titik kesetimbangan dan mencari sifat kestabilan. Dua titik kesetimbangan dari model ini yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0^*$  dan titik kesetimbangan endemik  $P_1^*$ . Kemudian, dilakukan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan dengan menggunakan parameter yang diberikan. Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan  $P_0^*$  menghasilkan empat nilai eigen yang mana salah satunya bernilai positif. Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan  $P_1^*$  menghasilkan dua nilai eigen riil negatif dan sepasang nilai eigen kompleks dengan bagian riil negatif. Potret fase dan simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan untuk semua variabel  $S$ ,  $E$ ,  $I$ , dan  $R$  akan stabil asimtotik lokal menuju titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemik  $P_1^*$ . Sehingga, berdasarkan analisis dinamik yang diperoleh menunjukkan bahwa untuk titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0^*$  tidak stabil dan untuk titik kesetimbangan endemik  $P_1^*$  stabil asimtotik lokal.

## ABSTRACT

Meyliana, Ester, 2021. **On the Dynamic Analysis of Mathematical Model of the Spread of COVID-19 in SEIR Population.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (1) Ari Kusumastuti, M. Pd, M. Si, (2) Juhari, M.Si.

**Keyword:** dynamic analysis, mathematical model of the spread of COVID-19, equilibrium points, phase portrait

This study discusses the dynamic analysis of the mathematical model of the spread of COVID-19 using daily cases in Indonesia which are classified into four variables, namely, Susceptible ( $S$ ), Exposed ( $E$ ), Infected ( $I$ ), and Recovered ( $R$ ) which are then analyzed dynamically by calculate the equilibrium point and look for stability properties. The two equilibrium points of this model are the disease-free equilibrium point  $P_0^*$  and the endemic equilibrium point  $P_1^*$ . Then, it is linearized around the equilibrium point using the given parameters. Linearization around the equilibrium point  $P_0^*$  produces four eigenvalues, one of which is positive. Linearization around the equilibrium point  $P_1^*$  yields two negative real eigenvalues and a pair of complex eigenvalues with negative real parts. Phase portraits and numerical simulations have shown that all variables  $S$ ,  $E$ ,  $I$ , and  $R$  will be asymptotically stable locally towards the equilibrium point, namely the endemic equilibrium point  $P_1^*$ . Thus, based on the dynamic analysis obtained, it is shown that the disease-free equilibrium point  $P_0^*$  is unstable and the endemic equilibrium point  $P_1^*$  is locally asymptotically stable.

## ملخص

ميليانا، إيستير. ٢٠٢١. تحليل ديناميك نموذج رياضيات إنتشار كوفيد-19 على سكان SEIR. البحث العلمي. رداة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) عار كوسوماواتي الماجستير، (٢) جوهاري

**الكلمات الأساسية:** تحليل الديناميك، نموذج رياضيات إنتشار كوفيد-19، نقطة التوازن، رسم المرحلة.

يبحث هذا البحث في تحليل الديناميك على نموذج رياضيات إنتشار كوفيد-19 باستخدام الحالة اليومية في إندونيسيا مما يتكون على أربعة المتغيرات وهي الحساس *Susceptible (S)*، الكشف *Exposed (E)*، المصاب *Infected (I)*، و الاستعاد *Recovered (R)* مما يحلل ديناميكه بإحصاء نقطة التوازن والبحث عن صفة ثباته. فنقطتي التوازن من هذا النموذج هما نقطة توازن حر الداء  $P_0^*$  و نقطة توازن المتوطنة  $P_1^*$ . ويقوم بعده التطويل حول نقطتي التوازن باستخدام موجه البرامج المحكوم. فعلمية التطويل حول نقطة التوازن  $P_0^*$  تنتج أربع نتائج الملك حيث كانت إحداها إيجابية. وأما عملية التطويل حول نقطة التوازن  $P_1^*$  فتنتج نتيجة الملك الحقيقية السلبية ونتيجتي الملك المعقدة بالقسم الحقيقي السلي. فدل رسم المرحلة ومتظاهر العدد إلى أن كل المتغير  $S, E, I,$  و  $R$  سوف يكون ثابتا مقاربا داخليا إلى نقطة التوازن وهو نقطة توازن المتوطنة  $P_1^*$ . إذا، بناء على عملية تحليل الديناميك المحسولة دلت على أن نقطة توازن حر الداء  $P_0^*$  غير ثابتة، وأما نقطة توازن المتوطنة  $P_1^*$  ثابتة مقارنة

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

COVID-19 merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh *coronavirus* jenis baru yang kemudian diberi nama *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) (Ndairou, F., dkk, 2020). Sepanjang perjalanan sejarah manusia, munculnya wabah penyakit seperti COVID-19 sudah merupakan suatu fase yang tidak akan lepas dari kehidupan manusia itu sendiri. Dari Abdullah bin Abbas bahwa Umar ibnul Khathtab r.a. melakukan perjalanan ke negeri Syam. Ketika dia sampai di Sarg, dia bertemu dengan para pemimpin tentara yang terdiri dari Abu Ubaidah Ibnul Jarrah dan teman-temannya. Mereka memberitahukan bahwa wabah penyakit tengah menyebar di negeri Syam (Al-Albani, M. Nashiruddin, 2008). Kemudian datang Abdurrahman bin Auf, dan dia kemudian berkata,

*“Sebenarnya ada hadist yang aku ketahui tentang masalah ini. Karena aku pernah mendengar Rasulullah SAW bersabda, ‘Jika kalian mendengar ada suatu wabah penyakit di suatu tempat, kalian jangan masuk ke tempat tersebut. Jika wabah tersebut menyebar di suatu tempat, sedangkan kalian tengah berada di tempat tersebut, janganlah kalian keluar dari tempat tersebut untuk lari dari wabah tersebut.’”* (H.R. Bukhari)

Tindakan Rasulullah ketika melarang umatnya untuk masuk ke wilayah yang terjangkit wabah, menurut Ibnu Qayyim merupakan salah satu bentuk pencegahan yang memang dianjurkan oleh Allah yakni mencegah kita untuk tidak masuk ke lingkungan yang membawa derita dan menjauhkan diri dari berbagai hal yang membahayakan. Sedangkan larangan Rasulullah kepada umatnya untuk tidak keluar dari suatu wilayah tersebut mengandung maksud agar umat manusia percaya

kepada Allah serta tabah dan ridha menghadapi takdirnya. Karena kita sebaiknya senantiasa meyakini bahwa tidak ada yang terjadi di alam semesta ini kecuali atas kuasa Allah, sama halnya dengan wabah penyakit COVID-19 yang terjadi saat ini pula atas kehendak-Nya.

Proses reinfeksi COVID-19 yang terjadi pada penelitian ini akan digambarkan dengan model matematika pada populasi SEIR. Model matematika ini memuat empat subpopulasi individu dalam suatu sistem persamaan yang terdiri atas variabel *Susceptible* ( $S$ ), *Exposed* ( $E$ ), *Infected* ( $I$ ), dan *Recovered* ( $R$ ). Selanjutnya keempat subkelas tersebut merupakan variabel dalam penelitian ini. Dimana *Susceptible* merupakan subpopulasi individu rentan yang dapat terinfeksi atau tertular, *Exposed* merupakan subpopulasi individu yang terpapar dengan merujuk pada kasus yang dicurigai, *Infected* merupakan subpopulasi individu terinfeksi yang telah dinyatakan positif melalui fasilitas kesehatan dan juga akibat tidak adanya penanganan atau pengobatan secara langsung pada individu terpapar, dan *Recovered* merupakan subpopulasi individu sembuh dari penyakit karena adanya *treatment* yang sukses, namun individu yang telah sembuh nantinya akan memiliki kekebalan sementara yang akan menyebabkan individu tersebut menjadi individu yang rentan terinfeksi atau tertular COVID-19 kembali.

Model matematika penyebaran COVID-19 yang akan digunakan dalam penelitian ini merujuk pada (Sasmita, N. R, dkk, 2020), yang disajikan dalam bentuk PDB (Persamaan Diferensial Biasa) bergantung waktu. Model tersebut menjelaskan proses terjadinya reinfeksi COVID-19 dalam populasi makro manusia di Indonesia. Parameter yang digunakan antara lain: laju kelahiran alami ( $\Lambda$ ), laju kematian alami ( $\mu$ ) dari populasi manusia, laju perubahan individu rentan menjadi

individu terpapar ( $\alpha$ ), kemudian laju kematian yang disebabkan COVID-19 ( $\mu_i$ ), lalu laju perubahan individu terpapar kembali menjadi individu rentan ( $\beta_1$ ), dan tingkat perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi ( $\beta_2$ ), laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena adanya *treatment* yang sukses ( $\theta_1$ ), dan laju perubahan dari individu sembuh menjadi individu rentan karena adanya penurunan imunitas ( $\varphi_1$ ).

Pada penelitian (Sasmita, N. R, dkk, 2020) membahas kontrol optimal pada model matematika penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan mempertimbangkan lima strategi kontrol yaitu, pembatasan sosial skala besar, pelacakan kontak, pengujian massal, mendeteksi kasus beserta pengobatan, dan penggunaan masker. Tiga skenario pada penelitian ini dikembangkan yaitu masing-masing dibedakan dengan kontrol. Dari semua skenario yang ada, skenario 2 yang terdiri dari pembatasan sosial skala besar, mendeteksi kasus beserta pengobatan, dan penggunaan masker menghasilkan 0 kasus untuk jumlah individu rentan atau terpapar, 8473 kasus untuk jumlah individu *carrier* (kasus tidak terdeteksi), dan 10919 kasus untuk jumlah individu terinfeksi. Sehingga, disimpulkan bahwa skenario 2 adalah skenario terbaik yang dapat digunakan dalam pengendalian penyebaran COVID-19.

Penelitian serupa dilakukan oleh penelitian (Annas, dkk, 2020) membahas analisis kestabilan dan simulasi numerik pada model dalam bentuk SEIR. Model tersebut mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi sebagai parameter. Analisis model tersebut menghasilkan kestabilan stabil asimtotik secara global dan menghasilkan prediksi dari angka penyebaran COVID-19 dengan menggunakan faktor vaksinasi dan isolasi yang dapat memperlambat penyebaran COVID-19.

Selanjutnya, penelitian (Ndairou, F, dkk, 2020) membahas model matematika COVID-19 di Wuhan dengan fokus penyebaran pada individu *super-spreaders*. Pada penelitian tersebut menghasilkan kestabilan secara lokal dan simulasi numerik menunjukkan kesesuaian model COVID-19 yang diusulkan untuk wabah yang terjadi di Wuhan.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis akan menggunakan model matematika Sasmita, N. R, dkk (2020) dimana selanjutnya akan dilakukan analisis perilaku dinamik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR di Indonesia.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana analisis dinamik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR di Indonesia?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka tujuan yang ingin dicapai yaitu untuk mengetahui analisis dinamik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR di Indonesia.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini yaitu untuk mengetahui analisis perilaku dinamik dari model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR di Indonesia sehingga dapat disusun strategi perencanaan dan pengendalian virus serta menginterpretasikan hasil simulasi model tersebut.

## **1.5 Batasan Masalah**

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi ruang lingkup pembahasannya yaitu:

1. Model penelitian yang akan digunakan dalam penelitian kali ini, yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R$$

2. Asumsi yang digunakan dalam pembentukan model matematika penyebaran COVID-19 dalam penelitian ini diantaranya,
  - a. Populasi dibagi menjadi empat subpopulasi yaitu *Susceptible* (S) yang merupakan individu sehat yang rentan tertular atau terinfeksi COVID-19 dan belum melakukan vaksinasi. *Exposed* (E) merupakan individu terpapar dengan merujuk pada kasus yang dicurigai yaitu, Orang Dalam Pengawasan (ODP) dan Pasien Dalam Perawatan (PDP). Pada kasus ODP yaitu adanya individu yang bepergian ke tempat dengan tingkat infeksi atau penyebaran COVID-19 nya tinggi dan juga individu yang pernah melakukan kontak baik langsung ataupun tidak langsung terhadap individu terinfeksi COVID-19 namun tidak ada gejala apapun. Sedangkan, PDP yaitu individu yang telah menunjukkan adanya gejala, namun belum dilakukan tes sehingga masih ada dua kemungkinan antara terinfeksi COVID-19 atau karena penyakit lain. Lalu, *Infected* (I)

merupakan subpopulasi dimana seorang individu dapat dikatakan terinfeksi COVID-19 setelah terdeteksi oleh fasilitas kesehatan dan dinyatakan positif serta telah mendapatkan pengobatan atau *treatment*. *Recovered* (R) merupakan individu yang sembuh dari infeksi COVID-19 karena adanya *treatment* yang sukses.

- b. Pada model matematika penyebaran COVID-19 di Indonesia yang akan digunakan, hanya terdapat satu jenis strain virus COVID-19.
  - c. Peluang penyebaran antar individu diasumsikan hampir sama untuk semua struktur umur.
  - d. Individu yang sudah sembuh memiliki kekebalan sementara yang mana nantinya dapat terinfeksi kembali jika kekebalan atau imun terhadap virus corona menurun dan juga karena lalai dalam menjalani protokol kesehatan.
3. Parameter yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari jurnal (Sasmita, N. R, dkk, 2020).

## 1.6 Metode Penelitian

Analisis dinamik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR menggunakan langkah-langkah sebagai berikut

- a. Menentukan titik-titik tetap pada model SEIR.
- b. Linearisasi sistem persamaan diferensial yang terlibat.
- c. Menghitung nilai eigen dan mengidentifikasi jenis kestabilan semua titik tetap model berdasarkan nilai eigen.
- d. Melakukan interpretasi dari potret fase (perilaku titik tetap model) dari model penyebaran COVID-19.

- e. Membuat kesimpulan dari pembahasan

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian kali ini terdiri dari empat bab utama, yang terdiri dari sebagai berikut:

### BAB I                      PENDAHULUAN

Bab pendahuluan terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### BAB II                     KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka berisi tentang konsep-konsep atau teori-teori pendukung untuk bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai rujukan dalam pembahasan analisis dinamik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR, yang meliputi kajian model matematika penyebaran COVID-19, persamaan diferensial bergantung waktu, sistem persamaan diferensial bergantung waktu, analisis perilaku model matematika penyebaran COVID-19 yang mencakup linierisasi, nilai eigen dan vektor eigen, kriteria Routh-Hurwitz, jenis kestabilan titik tetap dan kajian kegamaan.

### BAB III                    HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan akan membahas secara rinci dari hasil penelitian dengan jelas. Pembahasan tersebut antara lain yang meliputi deskripsi model matematika penyebaran COVID-19 pada

populasi SEIR, menentukan titik-titik tetap model SEIR, melakukan linierisasi sistem persamaan diferensial yang terlibat, menghitung nilai eigen, kemudian mengidentifikasi jenis kestabilan semua titik tetap model berdasarkan nilai eigen, dan menggambarkan potret fase model serta melakukan simulasi dan interpretasi dari perilaku model matematika penyebaran COVID-19.

#### BAB IV

#### PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran dari hasil penulisan penelitian ini.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Matematika Penyebaran COVID-19

Model matematika penyebaran COVID-19 pada penelitian ini dibagi menjadi empat subpopulasi individu dalam suatu sistem persamaan differensial biasa, yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E \quad (2.1)$$

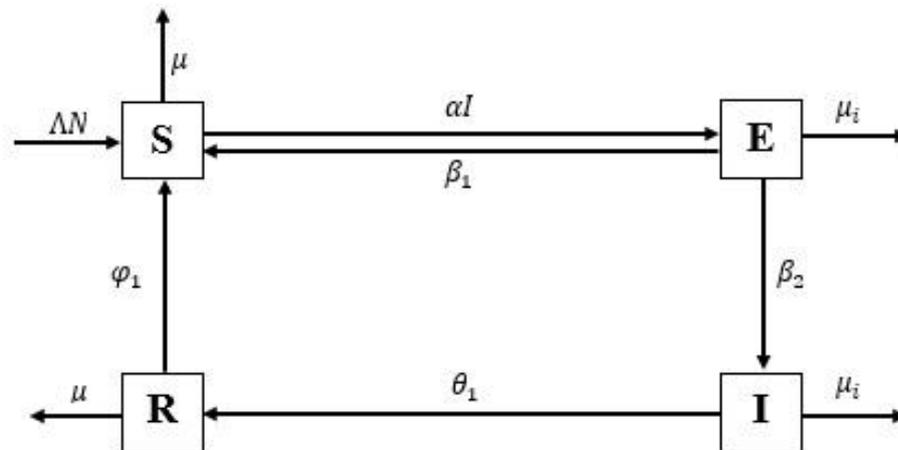
$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E \quad (2.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I \quad (2.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R \quad (2.4)$$

Model di atas memiliki empat variabel terikat yaitu *Susceptible* merupakan subpopulasi individu rentan yang dapat terinfeksi atau tertular, *Exposed* merupakan subpopulasi individu yang terpapar dengan merujuk pada kasus yang dicurigai, *Infected* merupakan subpopulasi individu terinfeksi yang telah dinyatakan positif melalui fasilitas kesehatan dan juga akibat tidak adanya penanganan atau pengobatan secara langsung pada individu terpapar, dan *Recovered* merupakan subpopulasi individu sembuh dari penyakit karena adanya *treatment* yang sukses, kemudian  $N$  merupakan jumlah populasi penduduk di Indonesia.

Dengan diagram alir yang digambarkan sebagai berikut:



**Gambar 2.1** Model Matematika Penyebaran COVID-19

Gambar 2.1 adalah gambar dari model matematika penyebaran COVID-19

Berikut parameter-parameter yang digunakan pada pada sistem persamaan diferensial biasa bergantung waktu pada model matematika penyebaran COVID-19:

$\Lambda$  : Laju kelahiran alami

$\mu$  : Laju kematian alami

$\mu_i$  : Laju kematian yang disebabkan oleh COVID-19

$\alpha$  : Laju perubahan individu rentan menjadi individu terpapar karena adanya paparan oleh individu terinfeksi

$\beta_1$  : Laju perubahan individu terpapar kembali menjadi individu rentan

$\beta_2$  : Laju perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi

$\theta_1$  : Laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena adanya *treatment* yang sukses

$\varphi_1$  : Tingkat perubahan dari individu sembuh menjadi individu rentan karena adanya penurunan imunitas

Berdasarkan Gambar 2.1 menunjukkan bahwa perubahan populasi individu rentan terhadap waktu di pengaruhi oleh laju kelahiran alami  $\Lambda$  dan berkurang karena laju kematian alami sebesar  $\mu S$ . Laju perubahan yang menyebabkan individu rentan menjadi individu terpapar disebabkan karena terpapar oleh individu terinfeksi diasumsikan sebagai  $\alpha SI$  dan selanjutnya juga terjadi perubahan dari individu terpapar kembali menjadi individu rentan dengan laju  $\beta_1 E$ . Kemudian, populasi individu rentan juga dipengaruhi oleh adanya perubahan dari individu sembuh menjadi individu rentan karena penurunan imunitas pada individu sembuh sehingga menyebabkan kemungkinan bahwa individu rentan dapat terpapar kembali dengan laju  $\varphi_1 R$ . Sehingga, diperoleh persamaan kompartemen  $S$  adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E \quad (2.5)$$

Perubahan populasi individu terpapar terhadap waktu dipengaruhi oleh laju perubahan individu rentan menjadi individu terpapar disebabkan karena terpapar oleh individu terinfeksi sebagai  $\alpha SI$ . Kemudian, populasi individu rentan berkurang karena adanya laju perubahan dari individu terpapar menjadi individu terinfeksi karena telah dinyatakan positif melalui fasilitas kesehatan dan juga akibat tidak adanya penanganan atau pengobatan secara langsung pada individu terpapar sebagai  $\beta_2 E$  dan juga dipengaruhi oleh laju perubahan individu terpapar menjadi individu sembuh dengan tingkat  $\beta_1 E$ . Kemudian, pada populasi rentan juga terdapat

laju kematian alami  $\mu E$ . Sehingga didapatkan persamaan kompartemen  $E$  yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E \quad (2.6)$$

Kemudian, perubahan populasi individu terinfeksi terhadap waktu dipengaruhi oleh laju perubahan dari individu terpapar menjadi individu terinfeksi  $\beta_2 E$ . Kemudian, subpopulasi ini juga dipengaruhi oleh laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh dengan tingkat  $\theta_1 I$ . Selanjutnya dipengaruhi oleh laju kematian yang disebabkan oleh COVID-19 dengan tingkat  $\mu_i I$ . Sehingga, didapatkan persamaan kompartemen  $I$  yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I \quad (2.7)$$

Terakhir, perubahan populasi individu sembuh terhadap waktu dipengaruhi oleh laju perubahan individu terpapar menjadi individu sembuh dengan tingkat  $\beta_1 E$ . Kemudian, laju perubahan dari populasi individu terinfeksi menjadi populasi yang sembuh dengan  $\theta_1 I$ . Karena adanya asumsi penurunan imunitas pada individu sembuh yang menyebabkan individu sembuh tersebut menjadi individu yang rentan dengan asumsi  $\varphi_1 R$ . Namun, populasi individu *recovered* ini juga memiliki laju kematian alami yang diasumsikan sebagai  $\mu R$ . Sehingga, bentuk persamaan kompartemen R adalah sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \beta_1 E - \theta_1 I - \mu R \quad (2.)$$

Nilai awal dari variabel dan nilai parameter yang digunakan dalam sistem persamaan pada model matematika penyebaran COVID-19 adalah sebagai berikut.

**Tabel 2.1** Nilai Awal Model Matematika COVID-19 (Bulan Desember 2020-Agustus 2021)

Variabel	Definisi	Nilai Awal
$N$	Banyaknya penduduk di Indonesia	270,20 juta
$S$	Banyaknya individu rentan terhadap waktu	267968836
$E$	Banyaknya individu terpapar terhadap waktu	132723
$I$	Banyaknya individu terinfeksi terhadap waktu	228835
$R$	Banyaknya individu sembuh terhadap waktu	1869606

**Tabel 2.2** Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran COVID-19 (Sasmita, N. R, dkk, 2020)

Variabel	Definisi	Nilai	Satuan
$\Lambda$	Laju kelahiran alami	$6,25 \times 10^{-3}$	perhari
$\mu$	Laju kematian alami	0,00712	perhari
$\alpha$	Laju perubahan individu rentan menjadi individu terpapar	$3,586 \times 10^{-5}$	Perorang / hari
$\theta_1$	Laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena adanya <i>treatment</i> yang sukses	0,086	Perhari
$\mu_i$	Laju kematian pada populasi yang disebabkan oleh COVID-19	0,087	Perhari
$\beta_1$	Laju perubahan individu terpapar kembali menjadi individu rentan	7012	Perhari
$\beta_2$	Tingkat perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi	0,4	perhari
$\varphi_1$	Laju perubahan individu sembuh kembali menjadi individu rentan karena adanya penurunan imunitas	0,9629	Perhari

## 2.2 Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan sebuah fungsi (Ayres, Frank, & Mendelson, Elliot, 2006). Pada umumnya, terdapat dua jenis persamaan yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa sendiri merupakan suatu persamaan yang hanya melibatkan turunan biasa bagi satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas tunggal (Sugiyarto, 2015).

Secara umum, menurut Waluya (2006) bentuk persamaan diferensial biasa linier seperti berikut:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) merupakan persamaan diferensial orde ke- $n$  dapat dikatakan linier apabila memenuhi ciri-ciri sebagai berikut:

- a. Variabel terikat serta turunannya berderajat satu.
- b. Tidak ada perkalian antar variabel terikat, tidak ada perkalian antara turunan yang satu dengan turunan lainnya dan tidak ada perkalian antara variabel terikat dengan turunan.
- c. Variabel terikat bukan merupakan fungsi transenden.

Apabila terdapat persamaan yang tidak memenuhi ketiga syarat di atas maka boleh dikatakan bahwa persamaan tersebut merupakan persamaan nonlinier.

Sebagai contoh diberikan persamaan diferensial bergantung waktu sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda N + \varphi_2 R(t) - \mu S(t) - \frac{\alpha_1 I(t)S(t)}{N} - \frac{\alpha_2 I(t)S(t)}{N} \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier bergantung waktu  $t$ . Karena terdapat variabel terikat  $I(t)$  pada  $\frac{\alpha_1 I(t) S(t)}{N}$  yang merupakan perkalian antar variabel terikat lainnya yaitu  $S(t)$ .

### 2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu

Sistem persamaan diferensial biasa merupakan sebuah sistem persamaan yang terdiri atas dua atau lebih persamaan diferensial yang menjelaskan suatu fenomena. Sistem persamaan diferensial ditulis sebagai berikut (Ndi, Meksianis Zadrak, 2018).

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dimana variabel terikatnya adalah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel bebasnya adalah  $t$ , sehingga  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$  dengan  $\frac{dx_n}{dt}$  merupakan turunan fungsi  $x_n$  terhadap  $t$  (Kartono, 2012). Menurut Boyce dan Diprima (2001) sistem persamaan diferensial biasa dapat disebut linier apabila sistem persamaan tersebut memuat lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan sistem persamaan diferensial biasa dapat dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari persamaan nonlinier yang saling terkait sebanyak lebih dari satu.

Salah satu bentuk dari sistem persamaan diferensial adalah model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR,

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu - (\alpha I + \mu + v)S \\
\frac{dE}{dt} &= \alpha IS - (\beta + \mu)E \\
\frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu_i + \delta + \mu)I \\
\frac{dR}{dt} &= \delta I + vS - \mu R
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

Di mana  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $R(t)$  adalah secara berturut-turut merupakan populasi individu rentan, individu terpapar, individu terinfeksi dan individu sembuh. Konstanta  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $v$ ,  $\beta$ ,  $\mu_i$ , dan  $\delta$  merupakan nilai parameter yang diberikan.

#### 2.4 Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Penyakit

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui kestabilan suatu sistem persamaan diferensial pada model matematika. Analisis kestabilan dapat membantu untuk mengetahui valid atau tidaknya suatu model matematika. Analisis kestabilan dapat ditentukan melalui analisis pada titik kestimbangan, kemudian melalui nilai eigen yang didapatkan dari persamaan akan diketahui jenis kestabilannya (Boyce dan Di Prima, 2001).

Titik kesetimbangan merupakan suatu titik dimana pada posisi tersebut menjadikan suatu sistem tidak berubah, secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= h(x, y) \\
\frac{dy}{dt} &= g(x, y)
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Jika  $(x, y)$  sebuah titik dalam bidang fase untuk mana memenuhi  $h(x, y) = 0$  dan  $g(x, y) = 0$  secara simultan, maka  $\frac{dx}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt}$  keduanya nol. Jadi, tidak ada gerakan baik dalam arah  $x$  maupun  $y$ , dan partikel itu tetap atau tidak berubah. Titik yang demikian dinamakan titik kritis atau titik keretimbangan dari sistem (2.13). Catatan bahwa bilamana  $P_0: (x_0, y_0)$  merupakan titik kritis dari sistem (2.13) maka persamaan  $x = x_0$  dan  $y = y_0$  memberikan sebuah solusi untuk sistem (2.13) itu.

Kemudian, kita menganggap bahwa  $P_0: (x_0, y_0)$  merupakan titik kritis, yaitu  $P_0: (x_0, y_0)$  yang merupakan satu-satunya titik kritis dari sistem (2.13) di dalam lingkungan persekitaran di sekitar  $P_0: (x_0, y_0)$ . Sehingga solusi keadaan ini adalah hanya yang melewati titik  $P_0: (x_0, y_0)$  dalam bidang fase. Trayektori yang dikaitkan dengan solusi ini secara sederhana adalah titik kritis  $P_0: (x_0, y_0)$  sendiri (Kartono, 2012).

#### 2.4.1 Linierisasi

Analisis kestabilan pada titik tetap dari sistem persamaan diferensial non-linier dapat dilakukan dengan melakukan linierisasi di sekitar titik tetapnya dengan deret Taylor, sehingga titik tetap untuk sistem liniernya sama. Linierisasi merupakan proses pendekatan pada persamaan diferensial non-linier dengan persamaan linier untuk membantu memahami persamaan diferensial non-linier (Boyce dan Di Prima, 2001). Berikut linierisasi yang dilakukan pada sistem (2.12) dan dapat dimisalkan dengan,

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu - (\alpha I + \mu + \nu)S = f_1(S, E, I, R) \\
\frac{dE}{dt} &= \alpha IS - (\beta + \mu)E = f_2(S, E, I, R) \\
\frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu_i + \delta + \mu)I = f_3(S, E, I, R) \\
\frac{dR}{dt} &= \delta I + \nu S - \mu R = f_4(S, E, I, R)
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

Kemudian, terdapat  $(S_0, E_0, I_0, R_0)$  yang merupakan titik kesetimbangan dari sistem persamaan non-linier (2.14). Karena itu dilakukan pendekatan disekitar titik  $(S_0, E_0, I_0, R_0)$  dengan mengekspansi menurut deret Taylor untuk menghilangkan suku tak linier. Misalkan, digunakan titik kesetimbangan  $(S_0, E_0, I_0, R_0) = (0, 0, 0, 0)$ . Berikut linierisasi pada sistem persamaan (2.14),

$$\begin{aligned}
f_1(S, E, I, R) &\approx f_1(S_0, E_0, I_0, R_0) + \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0) \\
f_2(S, E, I, R) &\approx f_2(S_0, E_0, I_0, R_0) + \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0)
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
f_3(S, E, I, R) &\approx f_3(S_0, E_0, I_0, R_0) + \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4(S, E, I, R) &\approx f_4(S_0, E_0, I_0, R_0) + \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_4}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0)
\end{aligned}$$

Nilai  $f_1(S_0, E_0, I_0, R_0)$ ,  $f_2(S_0, E_0, I_0, R_0)$ ,  $f_3(S_0, E_0, I_0, R_0)$ , dan  $f_4(S_0, E_0, I_0, R_0)$  akan selalu nol pada titik setimbang, sehingga jika (2.15) disederhanakan akan menjadi,

$$\begin{aligned}
f_1(S, E, I, R) &\approx \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_1}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0) \\
f_2(S, E, I, R) &\approx \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_2}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
f_3(S, E, I, R) &\approx \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_3}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0) \\
f_4(S, E, I, R) &\approx \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_4}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)(E - E_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)(I - I_0) \\
&\quad + \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)(R - R_0)
\end{aligned}$$

Kemudian, akan dilakukan substitusi dengan memisalkan  $(S - S_0) = u$ ,  $(E - E_0) = v$ ,  $(I - I_0) = w$ , dan  $(R - R_0) = x$ , maka  $\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dE}{dt} = \frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{dw}{dt}$ , dan  $\frac{dR}{dt} = \frac{dx}{dt}$ . Sistem persamaan (2.16) akan menjadi sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)u + \frac{\partial f_1}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)v + \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)w \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)x \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)u + \frac{\partial f_2}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)v + \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)w \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)x \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)u + \frac{\partial f_3}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)v + \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)w \\
&\quad + \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)x \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, R_0)u + \frac{\partial f_4}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, R_0)v + \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, R_0)w \\
&\quad + \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, R_0)x
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Selanjutnya, sistem persamaan (2.17) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks yaitu,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \text{ dimana } A = \begin{pmatrix} f_{1(S)} & f_{1(E)} & f_{1(I)} & f_{1(R)} \\ f_{2(S)} & f_{2(E)} & f_{2(I)} & f_{2(R)} \\ f_{3(S)} & f_{3(E)} & f_{3(I)} & f_{3(R)} \\ f_{4(S)} & f_{4(E)} & f_{4(I)} & f_{4(R)} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

atau

$$A = \begin{pmatrix} -(\alpha I + \mu + \nu) & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha I & -(\beta + \mu) & \alpha S & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu_i + \delta + \mu) & 0 \\ \nu & 0 & \delta & -\mu \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Substitusikan nilai  $S = S_0 = 0, E = E_0 = 0, I = I_0 = 0$ , dan  $R = R_0 = 0$  pada matriks A sehingga diperoleh,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\mu - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\mu_i - \delta - \mu & 0 \\ \nu & 0 & \delta & -\mu \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Matriks (2.19) disebut matriks Jacobi. Untuk ukuran pada matriks ini bergantung pada banyaknya persamaan yang membentuk sistem persamaan diferensial. Kemudian, pada matriks Jacobi ini dapat menentukan sifat kestabilan dari sistem persamaan diferensial linier (Hardiningsih, 2010).

#### 2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan  $A_{n \times n}$  dan  $\bar{x} \in R^n$ . Jika  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ , maka  $\lambda$  disebut nilai eigen dari A dan  $\bar{x}$  disebut vektor eigen terkait dengan  $\lambda$ . Dari persamaan  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow A\bar{x} - \lambda\bar{x} \\ &\Leftrightarrow A\bar{x} - \lambda\sqrt{\bar{x}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

Agar  $\lambda$  dapat menjadi nilai eigen, maka paling tidak ada satu solusi dari persamaan  $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ . Persamaan  $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$  mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika  $\det(A - \lambda I) = 0$  atau  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Persamaan  $\det(\lambda I - A) = 0$  disebut persamaan karakteristik matriks  $A$  dan merupakan polynomial derajat  $n$ , sehingga mempunyai sebanyak  $n$  nilai  $\lambda$  (Andari, 2017).

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

a. Nilai eigen

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda[(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 0] + 2[0 + (\lambda - 1)] = 0$$

$$(\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 3) + 2] = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Jadi, nilai eigen matriks adalah  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ .

b. Vektor eigen

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Untuk  $\lambda = 2$ .

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris pertama diperoleh:

$$2x_1 + 2x_3 = 0, \text{ yaitu } x_1 = -x_3$$

Misalkan  $x_2 = s$  dan  $x_3 = t$ , maka

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen terkait dengan  $\lambda = 2$  adalah  $\bar{u}$  dan  $\bar{v}$  dengan

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{u}$  dan  $\bar{v}$  membentuk basis untuk ruang eigen terkait dengan  $\lambda = 2$ .

Untuk  $\lambda = 1$ .

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris pertama diperoleh  $x_1 + 2x_3 = 0$ , yaitu  $x_1 = -2x_3$

Dari baris kedua diperoleh  $-x_1 - x_2 - x_3 = 0$ , yaitu

$$x_2 = -x_1 - x_3 = -(-2x_3) - x_3 = x_3.$$

Misalkan  $x_3 = s$ , maka

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen terkait dengan  $\lambda = 1$  adalah  $\bar{w}$  dengan  $\bar{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Vektor  $\bar{w}$  membentuk basis untuk ruang eigen terkait dengan  $\lambda = 1$ .

### 2.4.3 Jenis Kestabilan dan Akar Karakteristik

Misalkan terdapat suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px - qxy \\ \frac{dy}{dt} &= -ry + \gamma xy \end{aligned} \tag{2.21}$$

Sistem persamaan diferensial tersebut memiliki koefisien konstan dengan  $p, q, r, \gamma$  yang merupakan konstanta. Penyelesaian dari sistem (2.21) merupakan kombinasi linier dari  $\lambda^n$  dimana  $\lambda$  adalah akar-akar karakteristiknya. Berikut ini penyelesaian sistem (2.21) dengan matriks Jacobi sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} p - \lambda & 0 \\ 0 & -r - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (p - \lambda)(-r - \lambda) - 0 &= 0 \\ \lambda^2 + (r - p)\lambda - pr &= 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\lambda = -\frac{(r - p) \pm \sqrt{(r - p)^2 + 4pr}}{2}$$

$$\frac{(p - r) \pm \sqrt{(r - p)^2 + 4pr}}{2}$$

Persamaan (2.22) berisi akar-akar karakteristik. Bagian real dari akar-akar karakteristik persamaan (2.22) menentukan sifat kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2.21). berikut ini merupakan beberapa sifat kestabilan sistem linier yaitu sebagai berikut (Boyce & Diprima, 2001),

**Tabel 2.4** Tabel Jenis Kestabilan Titik Tetap Sistem Linier (Boyce dan Diprima, 2001)

Nilai Eigen	Kestabilan Titik Tetap	Jenis Titik Tetap ( $x^*, y^*$ )
$\lambda_{1,2} > 0$	Tidak stabil	Titik simpul ( <i>Node</i> )
$\lambda_{1,2} < 0$	Stabil asimtotik	Titik simpul ( <i>Node</i> )
$\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_1 > 0$	Tidak stabil	Titik pelana ( <i>Saddle</i> )
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Titik bintang ( <i>Star</i> )
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Titik simpul ( <i>Node</i> )
$\lambda_{1,2} = k \pm bi$ , dengan $k > 0$ $k < 0$	Tidak stabil	Titik spiral
	Stabil asimtotik	Titik spiral
$\lambda_1 = bi$ dan $\lambda_2 = -bi$ dengan $I \neq 0$	stabil	Titik pusat ( <i>Center</i> )

Pada beberapa kasus kestabilan pada titik kesetimbangan terkadang sulit untuk diamati dikarenakan bentuk dari nilai eigen yang kompleks sehingga sulit untuk menentukan bagian realnya. Sehingga untuk mengidentifikasi jenis kestabilan pada titik kesetimbangan menggunakan metode yang dapat menentukan bagian real dari nilai eigen. Salah satunya yaitu metode Routh-Hurwitz.

#### 2.4.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Salah satu cara untuk menentukan kestabilan adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

#### Teorema

Diketahui persamaan karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.23)$$

Dimana koefisien  $a_i$  adalah sebuah konstanta riil dan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .  
 definisikan  $n$  matriks Routh-Hurwitz dengan menggunakan koefisien  $a_i$  dari persamaan karakteristik (2.23).

$$H_1 = [a_1]$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimana  $a_j = 0$  jika  $j > n$ . Jika semua akar dari polinomial (suku banyak)  $P(\lambda)$  adalah negatif atau memiliki bagian riil yang negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif

$$\text{Det } H_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Misalkan  $n = 2$ , maka kriteria Routh  $\text{Det } H_1 = a_1 > 0$  dan  $\text{Det } H_2 =$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 > 0 \text{ atau } a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0. \text{ Untuk polinomial}$$

berderajat  $n = 3, 4, 5$ , kriteria Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut,

1.  $n = 3$ :  $a_1 > 0, a_3 > 0$ , dan  $a_1 a_2 > a_3$
2.  $n = 4$ :  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

3.  $n = 5: a_i > 0$  dimana  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ ,  $(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$

Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif dan kriteria Routh-Hurwitz tidak dapat menjelaskan bagaimana memperbaiki kestabilan relatif atau bagaimana menstabilkan sistem tak stabil, tetapi dapat digunakan untuk menentukan batas penguatan suatu sistem agar masih stabil (Wahab, W & Subiantoro A, 2013).

### Contoh

Diketahui persamaan karakteristik  $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 3$ . Persamaan karakteristik tersebut memiliki nilai bagian riil dari nilai eigen negatif apabila memenuhi kriteria Routh-hurwitz sebagaimana dipaparkan di atas. Dari kriteria Routh-Hurwitz diperoleh  $a_1 = 4 > 0$ ,  $a_3 = 3 > 0$  dan  $a_1 a_2 = 3 > a_3 = 3$ . Dengan demikian maka titik tetep dari model matematika yang menghasilkan persamaan karakteristik di atas stabil (Ndi, Meksianis Zadrak, 2018).

## 2.5 COVID-19

*Coronavirus* merupakan bagian dari keluarga besar virus yang dapat menyebabkan infeksi pada bagian saluran pernafasan bagian atas dengan tingkat ringan dan sedang. Virus ini merupakan jenis virus varian baru yang memiliki tingkat

penyebaran atau penularan lebih tinggi dibandingkan varian virus sebelumnya. Virus korona ditularkan melalui droplet yang keluar dari mulut atau hidung yang mengenai seseorang atau jatuh ke permukaan benda di sekitar dan kemudian tersentuh oleh orang lain. *Coronavirus* juga dikenal dengan *Novel coronavirus*

ditemukan pertama kali di kota Wuhan Tiongkok pada bulan Desember 2019. Virus ini dapat menyebar dengan cepat dan menyebabkan wabah pneumonia yang meluas secara global, sehingga disebut *Coronavirus Disease (COVID-19)*. COVID-19 telah ditetapkan sebagai pandemi global oleh organisasi kesehatan dunia (WHO) (Marzuki, I, dkk, 2021).

Menurut *United Nations Environment (UNEP)* bahwa *Coronavirus* merupakan penyakit zoonosis, sehingga terdapat kemungkinan virus berasal dari hewan dan ditularkan ke manusia (Handayani, D, dkk, 2020). Namun sekarang menular dengan cepat dari manusia ke manusia. Seringkali, penularan dari manusia ke manusia terjadi di dekat orang yang terinfeksi. Durasi inkubasi dan latensi virus COVID-19 berlangsung sekitar 14 hari. Ini berarti bahwa orang tersebut dapat terinfeksi virus COVID-19 tanpa mengalami gejala (Orang Tanpa Gejala, OTG) dan tidak mengetahuinya (Marzuki, I, dkk, 2021). Berikut merupakan gejala utama dari infeksi COVID-19 diantaranya (Di Gennaro, F, dkk, 2020):

1. Demam ( $> 38^{\circ} \text{C}$ )
2. Batuk (*Cough*)
3. Sesak napas (*Dyspnea*)
4. Sakit Kepala (*Headache*)
5. Sakit Tenggorokan (*Sore Throat*)
6. Hidung Meler (*Rhinorrhea*)
7. Gastrointestinal seperti diare dan gejala saluran pernafasan lainnya.

Gejala tersebut biasanya ringan dan mulai secara bertahap dan juga akan berbeda di beberapa orang. Hal ini dipengaruhi oleh berbagai faktor, seperti daya tahan tubuh, umur pasien, perokok atau tidak, apakah ada penyakit pemberat atau

tidak, jenis kelamin dan faktor imunitas. Beberapa orang terinfeksi tetapi tidak menunjukkan gejala apapun dan merasa tidak enak badan. Kebanyakan orang (sekitar 80%) pulih dari penyakit COVID-19 tanpa perlu perawatan khusus (Marzuki, I, dkk, 2021).

## 2.6 Kajian Keagamaan

Semua hal yang ada di alam semesta ini telah Allah SWT ciptakan dengan seimbang dan memiliki keunikan serta keajaiban masing-masing, terutama dalam hal ukuran seperti pada virus yang tidak dapat dilihat secara langsung oleh kedua mata kita. Dalam firman Allah SWT pada Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 26 yang artinya:

*“Sesungguhnya Allah tidak segan membuat perumpamaan berupa nyamuk atau yang lebih kecil dari itu. Adapun orang-orang yang beriman, maka mereka yakin bahwa perumpamaan itu benar dari Tuhan mereka, tetapi mereka yang kafir berkata: “Apakah maksud Allah menjadikan ini untuk perumpamaan?”. Dengan perumpamaan itu banyak orang disesatkan Allah, dan dengan perumpamaan itu (pula) banyak orang yang diberinya petunjuk. Dan tidak ada yang disesatkan dengan (perumpamaan) Allah kecuali orang-orang yang fasik.” (Q.S. Al-Baqarah:26).*

Abdurazzaq meriwayatkan dari Mu'ammarr, dari Qatadah, menurutnya: *“Ketika Allah menyebutkan laba-laba atau lalat, orang-orang musyrik pun bertanya:” Untuk apa laba-laba dan lalat itu disebut?”*, lalu Allah menurunkan ayat yang maknanya memberitahukan bahwa *“Dia tidak memandang remeh.”*, ada yang mengartikan, tidak takut untuk membuat perumpamaan apa saja baik dalam bentuk yang kecil maupun besar. Maka Allah memberitahukan bahwa Dia tidak pernah menganggap remeh sesuatu apapun yang telah dijadikan-Nya sebagai perumpamaan, meskipun hal yang hina dan kecil seperti nyamuk ataupun yang lebih kecil daripada itu. (Ishaq Alu Syaikh, 2007).

Adapun redaksi (*fauqa ba 'ūdhaḥ*), yaitu sesuatu yang lebih kecil dibanding nyamuk. Misalnya virus, bakteri dan sejenisnya yang tidak dapat dilihat langsung oleh mata dan membutuhkan alat bantu seperti mikroskop untuk dapat melihatnya. Itulah mengapa jika sesuatu tersebut tidak penting maka tidak mungkin disebut oleh

Allah sebagai perumpamaan (Nurul Wathoni, Nursyamsu). Dalam hal tersebut juga Al-Qurthuby menjelaskan bahwa perumpamaan virus (*fauqa ba 'ūdhaḥ*) merupakan *amtsal al-I'tibar* yaitu perumpamaan yang menunjukkan sifat ketakjuban terhadap sesuatu meskipun itu hal yang kecil namun hal tersebut tetap menjadi bagian dari ciptaan dan tanda-tanda kuasa-Nya. Sebagian ulama salaf menuturkan: “*Jika aku mendengar perumpamaan di dalam al-Qur'an, lalu aku tidak memahaminya, maka aku menangisi diriku.*”, karena Allah telah berfirman dalam surat Al-Ankabut ayat 43 yang artinya, “*Dan perumpamaan-perumpamaan ini Kami buat untuk manusia, dan tiada yang memahaminya kecuali orang-orang yang berilmu.*” (Shihab, M. Quraish, 2002).

Kesesatan orang-orang yang fasik itu akan terus bertambah karena pengingkaran mereka terhadap perumpamaan yang diberikan Allah dan telah mereka ketahui dengan benar dan yakin. Dan dengan perumpamaan itu Dia telah memberikan petunjuk kepada banyak orang yang beriman, sehingga petunjuk demi petunjuk bertambah kepada mereka, iman pun semakin tebal, karena kepercayaan mereka atas apa yang mereka ketahui secara benar dan yakin bahwa ia pasti sesuai dengan apa yang diperumpamakan Allah. (Shihab, M. Quraish, 2002).

**BAB III**  
**PEMBAHASAN**

**3.1 Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran COVID-19**

**3.1.1 Titik-titik Keseimbangan**

Titik-titik kesetimbangan pada persamaan (2.1) sampai (2.4) dapat diperoleh jika  $\frac{dS}{dt} = 0$ ,  $\frac{dE}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI}{dt} = 0$  dan  $\frac{dR}{dt} = 0$ . Dimana pada saat titik kesetimbangan didapatkan, maka laju pertumbuhan dari setiap persamaan akan tetap. Dengan kata lain, tidak ada perubahan jumlah populasi (keadaan setimbang). Sehingga, persamaan (2.1) sampai (2.4) menjadi sebagai berikut:

$$\Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E = 0 \quad (3.1)$$

$$\alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E = 0 \quad (3.2)$$

$$\beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I = 0 \quad (3.3)$$

$$\theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R = 0 \quad (3.4)$$

dengan,

$$\Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E = 0$$

$$\dot{S} = \frac{\Lambda N + \varphi_1 R + \beta_1 E}{\mu} \quad (3.5)$$

$$\alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E = 0$$

$$\dot{E} = \frac{\alpha SI}{\mu_i + \beta_1 + \beta_2} \quad (3.6)$$

$$\beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I = 0$$

$$\dot{I} = \frac{\beta_2 E}{\mu_i + \theta_1} \quad (3.7)$$

$$\theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R = 0$$

$$\dot{R} = \frac{\theta_1 I}{\varphi_1 + \mu} \quad (3.8)$$

Kemudian, persamaan (3.1) sampai dengan persamaan (3.4) tersebut akan dicari dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

**a) Titik kesetimbangan bebas penyakit**

Pertama, pada sistem persamaan tersebut akan dicari titik kesetimbangan pertama yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang mengasumsikan bahwa tidak adanya penyebaran penyakit, sehingga  $I = 0$ , maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E = 0 \\ &= \Lambda N + \varphi_1 R - \mu S + \beta_1 E \\ \mu S &= \Lambda N + \varphi_1 R + \beta_1 E \\ \dot{S} &= \frac{\Lambda N + \varphi_1 R + \beta_1 E}{\mu} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Untuk  $\frac{dE}{dt} = 0$  substitusikan persamaan (3.9) ke persamaan (3.2), sehingga

$$\begin{aligned} \alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E &= 0 \\ \alpha \left( \frac{\Lambda N + \varphi_1 R + \beta_1 E}{\mu} \right) I - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha I (\Lambda N + \varphi_1 R + \beta_1 E)}{\mu} &= (\beta_1 + \beta_2 + \mu_i) E \\ \dot{E} &= \frac{\alpha I (\Lambda N + \varphi_1 R)}{-\alpha \beta_1 I + \mu_i \mu + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Untuk  $\frac{dI}{dt} = 0$  substitusikan persamaan (3.10) ke persamaan (3.3), sehingga didapatkan

$$\beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I = 0$$

$$\frac{\alpha I (\Lambda N + \varphi_1 R) \beta_2}{-\alpha \beta_1 I + \mu_i \mu + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu} - \theta_1 I - \mu_i I = 0$$

Sehingga didapatkan nilai untuk *Infected* ( $\dot{I}$ ) adalah

$$\dot{I} = 0 \quad (3.11)$$

Kemudian, untuk  $\frac{dR}{dt} = 0$  substitusikan persamaan (3.11) ke persamaan (3.4), sehingga

$$\theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R = 0$$

$$\dot{R} = \frac{\theta_1 I}{\varphi_1 + \mu}$$

Sehingga didapatkan nilai untuk *Recovered* ( $\dot{R}$ ) adalah

$$\dot{R} = 0 \quad (3.12)$$

Kemudian, substitusikan persamaan (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.10) untuk memperoleh nilai *Exposed* ( $\dot{E}$ ),

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{\alpha I (\Lambda N + \varphi_1 R)}{-\alpha \beta_1 I + \mu_i \mu + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu} \\ &= \frac{\alpha(0)(\Lambda N + \varphi_1(0))}{-\alpha \beta_1(0) + \mu_i \mu + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu} \end{aligned}$$

Sehingga, untuk nilai *Exposed* ( $\dot{E}$ ) didapatkan,

$$\dot{E} = 0 \quad (3.13)$$

Setelah itu substitusikan persamaan (3.12) dan (3.13) ke dalam persamaan (3.9), sehingga

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\Lambda N + \varphi_1 R + \beta_1 E}{\mu} \\ &= \frac{\Lambda N + \varphi_1(0) + \beta_1(0)}{\mu} \end{aligned}$$

$$\dot{S} = \frac{\Lambda N}{\mu}$$

(3.14)

Maka, berdasarkan persamaan (3.7), (3.8), (3.9), dan (3.10) didapatkan titik kesetimbangan pertama bebas penyakit  $\mathbf{P}_0^*$  yaitu  $\mathbf{P}_0^*(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*) = \mathbf{P}_0^*\left(\frac{\Lambda N}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ .

### b) Titik kesetimbangan endemik

Untuk titik kesetimbangan endemik dimana pada keadaan adanya penyebaran penyakit ( $\mathbf{P}_1^*$ ). Pertama, dengan menggunakan persamaan (3.3) sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I &= 0 \\ E^* &= \frac{(\mu_i + \theta_1)I}{\beta_2}\end{aligned}\tag{3.15}$$

Kemudian, substitusikan (3.15) ke dalam persamaan (3.2) sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}\alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E &= 0 \\ \alpha SI - \frac{\beta_1(\mu_i + \theta_1)I}{\beta_2} - (\mu_i + \theta_1)I - \frac{\mu_i(\mu_i + \theta_1)I}{\beta_2} &= 0 \\ \alpha SI &= \frac{\beta_1(\mu_i + \theta_1)I}{\beta_2} + (\mu_i + \theta_1)I + \frac{\mu_i(\mu_i + \theta_1)I}{\beta_2} \\ S^* &= \frac{\mu_i^2 + \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_1 + \mu_i\theta_1 + \beta_1\mu_i + \beta_2\mu_i}{\alpha\beta_2}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Kemudian, persamaan (3.7), (3.8) dan (3.16) disubstitusikan ke dalam persamaan

$$\Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E = 0$$

(3.1),

$$\begin{aligned}
& \Lambda N + \frac{\varphi_1 \theta_1 \beta_2 E}{(\varphi_1 + \mu)(\theta_1 + \mu_i)} + \beta_1 E \\
& \quad - \frac{(\mu_i^2 + \beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_1 + \mu_i \theta_1 + \beta_1 \mu_i + \beta_2 \mu_i) E}{\mu_i + \theta_1} \\
& \quad - \frac{\mu(\beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_1 + \mu_i \theta_1 + \beta_1 \mu_i + \beta_2 \mu_i + \mu_i^2)}{\alpha \beta_2} = 0 \\
E^* = & - \frac{(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \Phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)(\mu_i + \theta_1)(\varphi_1 + \mu)}{\alpha\beta_2(\Phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\text{dengan } \Phi = \mu_i^2\mu + \mu_i\beta_2\mu + \mu_i\mu\theta_1 + \beta_2\mu\theta_1$$

Kemudian, hasil persamaan pada (3.17) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3) sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
& \beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I = 0 \\
& \beta_2 (-(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \mu_i^2\mu + \mu_i\beta_1\mu + \mu_i\beta_2\mu + \mu_i\mu\theta_1 + \beta_1\mu\theta_1 + \beta_2\mu\theta_1)(\mu_i + \\
& \theta_1)(\varphi_1 + \mu) / \alpha\beta_2 (\mu_i^2\varphi_1 + \mu_i^2\mu + \mu_i\varphi_1\beta_2 + \mu_i\varphi_1\theta_1 + \mu_i\beta_2\mu + \mu_i\theta_1\mu + \\
& \beta_2\mu\theta_1)) - \theta_1 I - \mu_i I = 0 \\
I^* = & - \frac{(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \Phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)(\varphi_1 + \mu)}{\alpha(\Phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Kemudian, untuk mendapatkan titik kesetimbangan  $R^*$  akan disubstitusikan hasil persamaan (3.18) ke dalam persamaan (3.4), sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
& \theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R = 0 \\
& \theta_1 (-(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \mu_i^2\mu + \mu_i\beta_1\mu + \mu_i\beta_2\mu + \mu_i\mu\theta_1 + \beta_1\mu\theta_1 + \beta_2\mu\theta_1)(\varphi_1 + \\
& \mu) / (\alpha(\mu_i^2\varphi_1 + \mu_i^2\mu + \mu_i\varphi_1\beta_2 + \mu_i\varphi_1\theta_1 + \mu_i\beta_2\mu + \mu_i\theta_1\mu + \beta_2\mu\theta_1))) - \\
& \varphi_1 R - \mu R = 0
\end{aligned}$$

$$R^* = -\frac{\theta_1(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)}{\alpha(\phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))} \quad (3.19)$$

Maka, berdasarkan persamaan (3.16), (3.17), (3.18), dan (3.19)

didapatkan titik kesetimbangan endemik  $P_1^*(S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$ ,

$$S_2^* = \frac{\mu_i^2 + \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_1 + \mu_i\theta_1 + \beta_1\mu_i + \beta_2\mu_i}{\alpha\beta_2}$$

$$E_2^* = -\frac{(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)(\mu_i + \theta_1)(\varphi_1 + \mu)}{\alpha\beta_2(\phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))}$$

$$I_2^* = -\frac{(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)(\varphi_1 + \mu)}{\alpha(\phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))}$$

$$R_2^* = -\frac{\theta_1(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)}{\alpha(\phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))}$$

Sehingga, berdasarkan titik kesetimbangan yang sudah didapat, titik kesetimbangan endemik akan eksis ketika  $\phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1 < N\Lambda\alpha\beta_2$ .

### 3.1.2 Linierisasi Model Matematika Penyebaran COVID-19

Sistem persamaan model matematika penyebaran COVID-19 akan dilakukan linierisasi sebagai proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier terhadap persamaan diferensial linier dengan mengekspansi deret Taylor untuk menghilangkan suku tak linier di sekitar titik kesetimbangannya. Kemudian, dari persamaan pada (3.1) – (3.4) didefinisikan sebagai berikut,

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E = f_1(S, E, I, R)$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu E = f_2(S, E, I, R)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I = f_3(S, E, I, R)$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R = f_4(S, E, I, R)$$

(3.20)

1. Linierisasi di sekitar  $\mathbf{P}_0^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*)$  untuk titik kesetimbangan pertama yaitu titik dimana pada keadaan bebas penyakit,

$$f_1(S, E, I, R) \approx f_1(P_0^*) + \frac{\partial f_1}{\partial S} \Big|_{P_0^*} (S - S^*) + \frac{\partial f_1}{\partial E} \Big|_{P_0^*} (E - E^*) + \frac{\partial f_1}{\partial I} \Big|_{P_0^*} (I - I^*) + \frac{\partial f_1}{\partial R} \Big|_{P_0^*} (R - R^*)$$

$$f_2(S, E, I, R) \approx f_2(P_0^*) + \frac{\partial f_2}{\partial S} \Big|_{P_0^*} (S - S^*) + \frac{\partial f_2}{\partial E} \Big|_{P_0^*} (E - E^*) + \frac{\partial f_2}{\partial I} \Big|_{P_0^*} (I - I^*) + \frac{\partial f_2}{\partial R} \Big|_{P_0^*} (R - R^*)$$

$$f_3(S, E, I, R) \approx f_3(P_0^*) + \frac{\partial f_3}{\partial S} \Big|_{P_0^*} (S - S^*) + \frac{\partial f_3}{\partial E} \Big|_{P_0^*} (E - E^*) + \frac{\partial f_3}{\partial I} \Big|_{P_0^*} (I - I^*) + \frac{\partial f_3}{\partial R} \Big|_{P_0^*} (R - R^*)$$

$$f_4(S, E, I, R) \approx f_4(P_0^*) + \frac{\partial f_4}{\partial S} \Big|_{P_0^*} (S - S^*) + \frac{\partial f_4}{\partial E} \Big|_{P_0^*} (E - E^*) + \frac{\partial f_4}{\partial I} \Big|_{P_0^*} (I - I^*) + \frac{\partial f_4}{\partial R} \Big|_{P_0^*} (R - R^*)$$

Maka, didapatkan persamaan dalam bentuk sebagai berikut,

- $f_1(S, E, I, R) \approx (0) + (-\mu - \alpha I^*)(S - S^*) + (\beta_1)(E - E^*) + (-\alpha S^*)(I - I^*) + (\varphi_1)(R - R^*)$
- $f_2(S, E, I, R) \approx (0) + (\alpha I^*)(S - S^*) + (-\beta_1 - \mu - \beta_2)(E - E^*) + (\alpha S^*)(I - I^*) + (0)$
- $f_3(S, E, I, R) \approx (0) + (0) + (\beta_2)(E - E^*) + (-\mu_i - \theta_1)(I - I^*) + (0)$
- $f_4(S, E, I, R) \approx (0) + (0) + (0) + (\theta_1)(I - I^*) + (-\varphi_1 - \mu)(R - R^*)$

(3.21)

Sehingga dapat dibuat matriks Jacobi seperti berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Sehingga,

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Kemudian, dimisalkan  $(S - S^*) = u$ ,  $(E - E^*) = v$ ,  $(I - I^*) = w$ , dan  $(R -$

$R^*) = x$ . Maka,  $\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dE}{dt} = \frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{dw}{dt}$ , dan  $\frac{dR}{dt} = \frac{dx}{dt}$ . Sistem persamaan

(3.20) akan menjadi sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Kemudian, sistem persamaan (3.24) dapat sekaligus disubstitusi nilai titik

kesetimbangan pertama yaitu  $\mathbf{P}_0^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*) = \left(\frac{\Lambda N}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ ,

sehingga didapatkan matriks Jacobi seperti sebagai berikut,

$$J(\mathbf{P}_0^*) = \begin{bmatrix} -\mu & \beta_1 & -\frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

2. Linierisasi di sekitar  $P_1^* = (S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$  yaitu pada titik kesetimbangan kedua yaitu pada saat keadaan dimana adanya penyebaran penyakit  $P_1^*(S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$  yaitu,

$$f_1(S, E, I, R) \approx f_1(P_1^*) + \frac{\partial f_1}{\partial S|_{P_1^*}} (S - S^*) + \frac{\partial f_1}{\partial E|_{P_1^*}} (E - E^*) + \frac{\partial f_1}{\partial I|_{P_1^*}} (I - I^*) + \frac{\partial f_1}{\partial R|_{P_1^*}} (R - R^*)$$

$$f_2(S, E, I, R) \approx f_2(P_1^*) + \frac{\partial f_2}{\partial S|_{P_1^*}} (S - S^*) + \frac{\partial f_2}{\partial E|_{P_1^*}} (E - E^*) + \frac{\partial f_2}{\partial I|_{P_1^*}} (I - I^*) + \frac{\partial f_2}{\partial R|_{P_1^*}} (R - R^*)$$

$$f_3(S, E, I, R) \approx f_3(P_1^*) + \frac{\partial f_3}{\partial S|_{P_1^*}} (S - S^*) + \frac{\partial f_3}{\partial E|_{P_1^*}} (E - E^*) + \frac{\partial f_3}{\partial I|_{P_1^*}} (I - I^*) + \frac{\partial f_3}{\partial R|_{P_1^*}} (R - R^*)$$

$$f_4(S, E, I, R) \approx f_4(P_1^*) + \frac{\partial f_4}{\partial S|_{P_1^*}} (S - S^*) + \frac{\partial f_4}{\partial E|_{P_1^*}} (E - E^*) + \frac{\partial f_4}{\partial I|_{P_1^*}} (I - I^*) + \frac{\partial f_4}{\partial R|_{P_1^*}} (R - R^*)$$

Maka, didapatkan persamaan dalam bentuk sebagai berikut,

- $f_1(S, E, I, R) \approx (\Lambda N + \varphi_1 R^* - \alpha S^* I^* - \mu S^* + \beta_1 E^*) + (-\mu - \alpha I^*)(S - S^*) + (\beta_1)(E - E^*) + (-\alpha S^*)(I - I^*) + (\varphi_1)(R - R^*)$
- $f_2(S, E, I, R) \approx (\alpha S^* I^* - \beta_1 E^* - \beta_2 E^* - \mu E^*) + (\alpha I^*)(S - S^*) + (-\beta_1 - \mu - \beta_2)(E - E^*) + (\alpha S^*)(I - I^*) + (0)$  (3.26)
- $f_3(S, E, I, R) \approx (\beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I) + (0) + (\beta_2)(E - E^*) + (-\mu_i - \theta_1)(I - I^*) + (0)$
- $f_4(S, E, I, R) \approx (\theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R) + (0) + (0) + (\theta_1)(I - I^*) + (-\varphi_1 - \mu)(R - R^*)$

Sehingga dapat dibuat matriks Jacobi seperti berikut,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

maka,

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Kemudian, dimisalkan  $(S - S^*) = u$ ,  $(E - E^*) = v$ ,  $(I - I^*) = w$ , dan

$(R - R^*) = x$ . Maka,  $\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dE}{dt} = \frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{dw}{dt}$ , dan  $\frac{dR}{dt} = \frac{dx}{dt}$ . Sistem

persamaan (3.20) akan menjadi sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Kemudian, disubstitusi titik kesetimbangan endemik, sehingga

didapatkan matriks Jacobi  $J(P_1^*)$  sebagai berikut,

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix}$$

### 3.1.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Untuk menentukan kestabilan pada titik keseimbangan dilakukan menggunakan kaidah dinamik, maka akan dihitung nilai eigen dari titik keseimbangan dengan menentukan akar-akar karakteristik pada matriks Jacobi.

#### 3.1.3.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan bebas penyakit dengan menggunakan matriks Jacobi pada (3.25). Nilai eigen matriks (3.25) diperoleh dari sebagai berikut,

$$\det(\mathbf{J}(\mathbf{P}_0^*) - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\mu & \beta_1 & -\frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 & \frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & \beta_1 & -\frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda) \begin{bmatrix} -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha \Lambda N}{\mu} & 0 \\ \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(-\varphi_1 - \mu - \lambda) \begin{bmatrix} -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha \Lambda N}{\mu} \\ \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$= 0$$

Dari dua faktor pertama diperoleh,

$$\lambda_1 = -\mu < 0 \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = -\varphi_1 - \mu < 0$$

Dua nilai eigen lainnya merupakan solusi dari persamaan berikut

$$(-\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda)(-\mu_i - \theta_1 - \lambda) - \beta_2 \left( \frac{\alpha \Lambda N}{\mu} \right) = 0$$

Atau dapat ditulis sebagai polinom pangkat dua sebagai berikut,

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \lambda = 0 \quad (3.31)$$

dengan,

$$a_1 = (\beta_1 + 2\mu_i + \beta_2 + \theta_1)$$

$$a_2 = (\mu_i + \theta_1)(\beta_1 + \mu + \beta_2) - \beta_2 \frac{\alpha \Lambda N}{\mu}$$

Kemudian, nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz berikut:

$$a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0$$

Berdasarkan kriteria tersebut, untuk nilai eigen  $\lambda_3$  dan  $\lambda_4$  pada persamaan karakteristik akan stabil jika memenuhi syarat dari kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Kemudian, dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2, maka akan didapatkan nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$\lambda_1 = -0,0071200000000000$$

$$\lambda_2 = -0,9700200000000000$$

$$\lambda_3 = 0,312142354616299$$

$$\lambda_4 = -7012,89226235462$$

Berdasarkan nilai eigen yang didapatkan dapat diketahui bahwa  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 < 0$ , tetapi untuk  $\lambda_3 > 0$ . Dan juga tidak memenuhi syarat pada kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Sehingga, secara keseluruhan sifat kestabilannya adalah tidak stabil. Sehingga, model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR tidak stabil pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0^*$ .

### 3.1.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik. Nilai eigen akan dicari menggunakan matriks (3.22) melalui persamaan karakteristiknya yaitu dengan mensubstitusi titik kesetimbangan endemik  $P_1^* = (S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$  sehingga didapatkan matriks Jacobi sebagai berikut,

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix}$$

kemudian,

$$\det(J(E_1^*) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* - \lambda & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 - \lambda & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (3.30) yang diperoleh adalah:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (3.33)$$

dengan,

$$a_1 = \alpha I^* + 2\mu_i + \varphi_1 + \beta_1 + \beta_2 + 2\mu + \theta_1$$

$$a_2 = 2\mu_i\alpha I^* - S^*\alpha\beta_2 + \alpha\varphi_1 I^* + \alpha\beta_1 I^* + \alpha\beta_2 I^* + \alpha I^*\mu + \alpha I^*\theta_1 + \mu_i\varphi_1 \\ + \mu_i\beta_1 + \mu_i\beta_2 + 3\mu_i\mu + \varphi_1\beta_1 + \varphi_1\beta_2 + 2\varphi_1\mu + \varphi_1\theta_1 \\ + 2\beta_1\mu + \beta_1\theta_1 + 2\beta_2\mu + \beta_2\theta_1 + \mu^2 + 2\mu\theta_1$$

$$a_3 = \mu_i^2\alpha I^* + 2\mu_i\alpha\varphi_1 I^* + \mu_i\alpha\beta_2 I^* + 2\mu_i\alpha I^*\mu + \mu_i\alpha I^*\theta_1 - S^*\alpha\varphi_1\beta_2 \\ - 2S^*\alpha\beta_2\mu + \alpha\varphi_1\beta_2 I^* + \alpha\varphi_1 I^*\theta_1 + \alpha\beta_2 I^*\mu + \alpha\beta_2 I^*\theta_1 \\ + \alpha I^*\mu\theta_1 + \mu_i^2\varphi_1 + 2\mu_i^2\mu + \mu_i\varphi_1\beta_1 + \mu_i\varphi_1\beta_2 + 2\mu_i\varphi_1\mu \\ + \mu_i\varphi_1\theta_1 + 2\mu_i\beta_1\mu + 2\mu_i\beta_2\mu + 2\mu_i\mu^2 + 2\mu_i\mu\theta_1 + \varphi_1\beta_1\mu \\ + \varphi_1\beta_1\theta_1 + \varphi_1\beta_2\mu + \varphi_1\beta_2\theta_1 + \varphi_1\mu\theta_1 + \beta_1\mu^2 + 2\beta_1\mu\theta_1 \\ + \beta_2\mu^2 + 2\beta_2\mu\theta_1 + \mu^2\theta_1$$

$$a_4 = \mu_i^2\alpha\varphi_1 I^* + \mu_i^2\alpha I^*\mu + \mu_i\alpha\varphi_1\beta_2 I^*\mu + \mu_i\alpha\varphi_1 I^*\theta_1 + \mu_i\alpha\beta_2 I^*\mu \\ + \mu_i\alpha I^*\mu\theta_1 - S^*\alpha\varphi_1\beta_2\mu - S^*\alpha\beta_2\mu^2 + \alpha\beta_2 I^*\mu\theta_1 + \mu_i^2\varphi_1\mu \\ + \mu_i^2\mu^2 + \mu_i\varphi_1\beta_1\mu + \mu_i\varphi_1\mu\theta_1 + \mu_i\beta_1\mu^2 + \mu_i\beta_1\mu^2 + \mu_i\beta_2\mu^2 \\ + \mu_i\mu^2\theta_1 + \varphi_1\beta_1\mu\theta_1 + \varphi_1\beta_2\mu\theta_1 + \beta_1\mu^2\theta_1 + \beta_2\mu^2\theta_1$$

Untuk perhitungan persamaan karakteristik di atas secara detail dapat dilihat pada Lampiran. Pada kriteria Routh-Hurwitz untuk  $n = 4$ , nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz berikut:

1.  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$  dan

2.  $a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$

Berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan endemik akan stabil jika memenuhi syarat kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Kemudian, karena pembuktian kriteria Routh-Hurwitz untuk titik kesetimbangan endemik secara umum sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, digunakan nilai parameter pada Tabel 2.2 untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan

endemik secara khusus. Nilai koefisien polinom (3.31) menggunakan Tabel 2.2 diperoleh sebesar.

$$a_1 = 7015,300577 > 0$$

$$a_3 = 273,7928204 > 0$$

$$a_4 = 15,11846886 > 0$$

dan

$$a_1 a_2 a_3 = 1,475894340 \times 10^{10}$$

$$a_3^2 + a_1^2 a_4 = 8,112011451 \times 10^8$$

Dengan demikian, jelas bahwa  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$  dan  $a_4 > 0$ . Dan  $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$  ketika digunakan nilai parameter pada Tabel 2.2. Maka, dapat disimpulkan bahwa  $P_1^*$  stabil asimtotik lokal karena memenuhi syarat dari kriteria Routh-Hurwitz. Lebih lanjut untuk nilai eigen dari persamaan karakteristik (3.31) dengan menggunakan parameter pada Tabel 2.2 adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -7323,70294680509$$

$$\lambda_2 = -0,0182001870337431 + 0,0424297154345613I$$

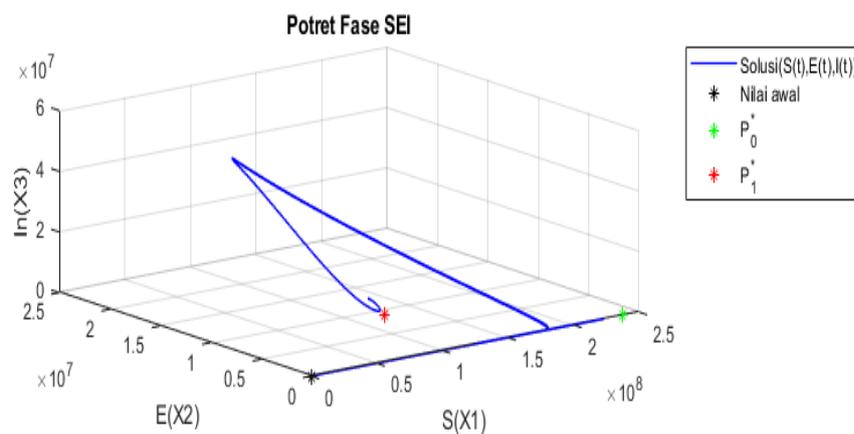
$$\lambda_3 = -0,0182001870337431 - 0,0424297154345613I$$

$$\lambda_4 = -0,968469920848185$$

Berdasarkan nilai Eigen tersebut dapat diketahui secara keseluruhan nilai Eigen tersebut semua mempunyai bagian real negative. Sehingga, sifat kestabilan dari titik kesetimbangan endemik adalah stabil asimtotik lokal.

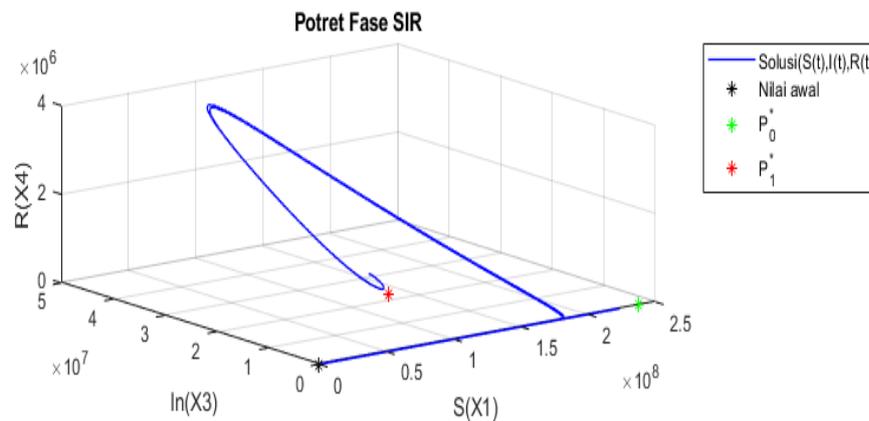
### 3.1.4 Potret Fase dan Simulasi Numerik

Potret fase merupakan bidang fase yang mewakili himpunan lintasan variabel pada sistem persamaan. Persamaan model COVID-19 memiliki empat variabel dan tidak bisa diamati keseluruhan secara bersamaan, sehingga keempat persamaan tersebut ditampilkan setiap tiga persamaan dalam satu gambar tanpa mengubah nilai dari titik kesetimbangan yang diperoleh sebelumnya. Penulis menggunakan Matlab dan adapun gambar tersebut yaitu:



**Gambar 3.1** Potret Fase  $X_1, X_2$ , dan  $X_3$

Gambar 3.1 yaitu bidang fase  $X_1, X_2$ , dan  $X_3$  berada pada titik hitam yang merupakan nilai awal  $X_1(0) = 267968836, X_2(0) = 132723$ , dan  $X_3(0) = 228835$ . Selanjutnya,  $X_1$  yaitu subpopulasi individu rentan,  $X_2$  yaitu subpopulasi individu terpapar, dan  $X_3$  yaitu subpopulasi individu terinfeksi bergerak melalui lintasan masing-masing menuju suatu nilai menuju titik kesetimbangan endemik (titik merah) dengan nilai  $E_1^*(8,457614689 \times 10^7, 3,751758724 \times 10^6, 8,674586645 \times 10^6, 7,690712063 \times 10^5)$ .



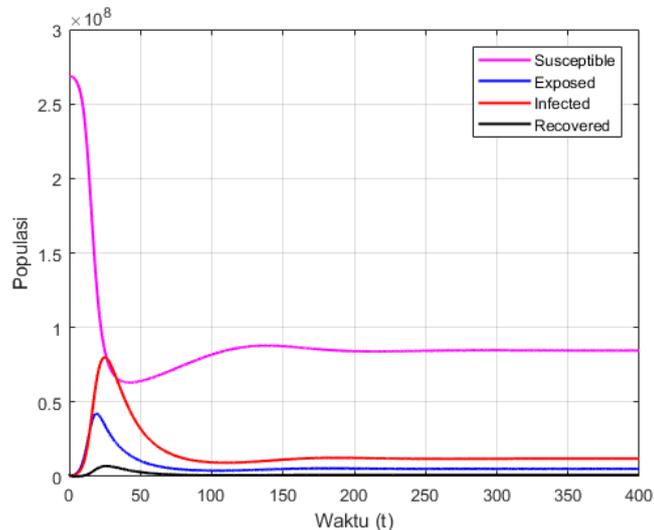
**Gambar 3.2** Potret Fase  $X_1, X_3$ , dan  $X_4$

Gambar 3.2 yaitu bidang fase  $X_1, X_3$ , dan  $X_4$  berada pada titik hitam yang merupakan nilai awal  $X_1(0) = 267968836$ ,  $X_3(0) = 228835$ , dan  $X_4(0) = 1869606$ . Selanjutnya,  $X_1$  yaitu subpopulasi individu rentan,  $X_3$  yaitu subpopulasi individu terinfeksi, dan  $X_4$  yaitu subpopulasi individu sembuh bergerak melalui lintasan masing-masing menuju suatu nilai menuju titik kesetimbangan endemik (titik merah) dengan nilai  $E_1^*(8,457614689 \times 10^7, 3,751758724 \times 10^6, 8,674586645 \times 10^6, 7,690712063 \times 10^5)$ .

Berdasarkan kedua gambar tersebut dapat diketahui bahwa sulasi sistem persamaan diferensial biasa diatas mendekati titik kesetimbangannya dengan waktu  $t \rightarrow 400$  sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan tersebut stabil menuju titik kesetimbangannya, yaitu titik kesetimbangan endemik.

Kemudian, penulis juga menggunakan Matlab untuk mendapatkan simulasi numerik dengan menggunakan nilai parameter:  $\Lambda = 6,25 \times 10^{-3}$ ,  $\mu = 0,00712$ ,  $\alpha = 3,586 \times 10^{-5}$ ,  $\theta_1 = 0,086$ ,  $\mu_i = 0,087$ ,  $\beta_1 = 7012$ ,  $\beta_2 = 0,4$ ,  $\varphi_1 = 0,9629$ , dan  $N = 270,20$  juta kemudian diberikan nilai

awal yaitu  $S(0) = 267968836$ ,  $E(0) = 132723$ ,  $I(0) = 228835$ ,  $R(0) = 1869606$  dengan nilai  $t = 400$ .



**Gambar 3.3** Simulasi Model Matematika Penyebaran COVID-19

Berdasarkan Gambar 3.3, menunjukkan dinamika dari total populasi dan terlihat bahwa populasi  $S, E, I$ , dan  $R$  stabil pada titik kesetimbangan  $E_1^*(8,457614689 \times 10^7, 3,751758724 \times 10^6, 8,674586645 \times 10^6, 7,690712063 \times 10^5)$  yaitu bersifat stabil asimtotik.

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit COVID-19 kepada individu rentan, sehingga terjadilah penyebaran penyakit COVID-19 yang meluas. Populasi individu rentan terhadap penyakit COVID-19 akan mengalami kestabilan secara asimtotik pada waktu tertentu dengan populasi mencapai  $8,457614689 \times 10^7$ .

Populasi individu rentan menjadi individu terpapar akan mengalami penurunan karena adanya upaya pencegahan sebelum menjadi individu terinfeksi misalnya dengan melakukan karantina dll, dan juga dengan adanya kematian akibat penyakit pada populasi tersebut. Populasi individu

terpapar akan mengalami kestabilan dengan populasi mencapai  $3,751758724 \times 10^6$ .

Populasi individu yang terpapar menjadi individu terinfeksi akan mengalami penurunan karena terdapat laju penyembuhan dan kematian yang disebabkan oleh penyakit pada populasi tersebut. Populasi orang yang terinfeksi akan mengalami kestabilan dengan populasi mencapai  $8,674586645 \times 10^6$ .

Populasi orang yang sembuh juga akan mengalami penurunan karena terdapat kematian alami dan juga laju perubahan dari individu sembuh kembali menjadi individu rentan karena berhubungan dengan sistem imunitas seseorang yang akan mengalami kestabilan dengan populasi mencapai  $7,690712063 \times 10^5$ .

### **3.2 Kajian Nilai-nilai Keagamaan Penyebaran Penyakit COVID-19**

Dalam islam selalu diperintahkan untuk menerapkan nilai-nilai yang ada, yaitu dengan selalu beribadah kepada-Nya. Berdasarkan kajian 2.6, ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah SWT menciptakan dunia dan segala isinya terutama makhluk di muka bumi ini dengan kelebihan dan kekurangan dari masing-masing makhluk tersebut. Dan ayat tersebut juga menginformasikan bahwa Allah tak segan untuk membuat perumpamaan hingga paling kecil dan hina yang mana diyakini kebenarannya oleh orang-orang beriman bahwa ia datang dari Allah, dan menyesatkan bagi orang-orang yang fasik, ia berkata: orang-orang yang beriman mengetahuinya lalu mereka mengimaninya, dan orang-orang yang fasik juga mengetahuinya namun mereka mengingkarinya. (Shihab, M. Quraish, 2002).

Dalam konteks COVID-19, maka virus COVID-19 bagian dari perumpamaan makhluk terkecil yang Allah maksudkan dalam surat Al-Baqarah ayat 26. Manusia hendaknya tidak boleh menganggap enteng virus tersebut, karena ia juga makhluk Allah, apalagi virus tersebut dapat membawa penyakit kepada manusia. Dan orang yang menyepelekan COVID-19 termasuk bertsayabbuh (menyerupai diri) dengan kaum Musyrik yang pernah meremehkan makhluk sekecil apapun yang Allah sebut dalam surat Al-Baqarah ayat 26 (Nurul Wathoni, Nursyamsu). Maka dapat kita ketahui bahwa virus COVID-19 bisa jadi disebabkan oleh ulah manusia itu sendiri tanpa disadari, sehingga Allah SWT memberikan peringatan kepada kita untuk selalu ingat kepada Allah SWT.

Berdasarkan penjelasan tersebut dalam suatu masalah matematika seperti permasalahan dalam model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR, pada hasil penelitian ini didapatkan bahwa penyebaran COVID-19 akan stabil menuju titik kesetimbangannya yaitu pada kondisi endemik, yang mana bukan berarti akan hilang seketika atau seluruhnya. Ada kemungkinan juga bahwa pada penyebaran COVID-19 pada akhirnya akan stabil pada tingkat yang konstan, baik pada subpopulasi individu rentan ( $S$ ), subpopulasi individu terpapar ( $E$ ), subpopulasi individu terinfeksi ( $I$ ), dan subpopulasi individu sembuh ( $R$ ). Upaya yang dapat dilakukan dalam peran untuk menurunkan kasus infeksi yaitu contohnya seperti, pengobatan dan pencegahan. Salah satu upaya untuk menjaga kebersihan diri dapat dilakukan dengan cara bersuci dengan berwudhu atau mandi, dan menjaga kebersihan pakaian. Berwudhu dapat melindungi tubuh akan penyakit seperti menjaga kebersihan hidung dari berbagai macam kuman, virus, dan bakteri dengan melakukan *Instinsyaq* yaitu menghirup atau memasukkan air ke dalam

lubang hidung, lalu menghirupnya dengan sekali nafas sampai ke dalam hidung bagian dalam (Akrom, Muhammad, 2010).

Pencegahan dalam rangka memperlambat dan mengurangi penyebaran COVID-19 yaitu bagi mereka yang telah terinfeksi untuk menjalani dengan ikhlas, bersabar dan berusaha semaksimal mungkin untuk sembuh dan juga jangan lupa untuk memohon pertolongan dari Allah SWT. Bagi kita yang sehat tetap selalu terapkan protokol kesehatan, tingkatkan imun tubuh, atur pola makan dll (Marzuki, I, dkk, 2021). Wabah virus Corona yang saat ini terjadi jika kita rujuk pada sejarah Nabi merupakan wabah yang pernah terjadi dengan kondisi yang hampir sama, sehingga penanganannya pun sama. Oleh karena itu, untuk mengatasi wabah COVID-19 terdapat salah satu cara yang dapat digunakan yakni, karantina atau *social distancing* guna mengurangi dan mencegah penyebaran COVID-19 karena hal ini dilakukan juga semata-mata untuk melindungi diri kita sendiri dan orang lain dari bahaya virus COVID-19.

## **BAB IV**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

#### **4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan analisis dinamik yang telah dilakukan didapatkan dua titik kesetimbangan dari model matematika penyebaran COVID-19, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan yang pertama yaitu  $P_0^*$  dengan kondisi dimana tidak adanya penyebaran penyakit yang menghasilkan nilai eigen yang mana salah satunya bernilai positif, kedua disekitar titik kesetimbangan  $P_1^*$  dengan kondisi dimana adanya penyebaran penyakit yang menghasilkan dua nilai eigen riil negatif dan dua nilai eigen kompleks dengan bagian riil negatif. Sehingga, berdasarkan analisis dinamik yang diperoleh menunjukkan bahwa untuk titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0^*$  tidak stabil dan untuk titik kesetimbangan endemik  $P_1^*$  stabil asimtotik yang artinya penyakit COVID-19 akan tetap ada namun seiring berjalannya waktu akan menjadi konstan, artinya untuk setiap individu rentan, terpapar, terinfeksi, dan sembuh akan stabil.

#### **4.2 Saran**

Untuk menindak lanjuti penelitian ini, dapat dikembangkan model dengan menganalisis model matematika penyebaran COVID-19 dan respon imun yang memperhitungkan faktor lain seperti vaksinasi atau lainnya dengan menggunakan metode penyelesaian model matematika lain yang lebih akurat dan terbaru.

## DAFTAR PUSTAKA

- Akrom, Muhammad. 2010. *Terapi Wudhu*. Yogyakarta: Mutiara Media
- Al-Albani, M. Nashiruddin. 2008. *Ringkasan Shahih Bukhari*. Depok: Gema Insani.
- Al-Qur'an Terjemah. 2015. Departemen Agama RI. Bandung: CV Darus Sunnah.
- Andari, Ari. 2017. *Aljabar Linier Elementer*. Malang: UB Press.
- Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.
- Arofi, Zuhron. 2021. *Optimis di Tengah Pandemi: Cara Rasulullah Menyelesaikan Masalah Pandemi*. Lembaga Pengembangan Studi Islam: Universitas Muhammadiyah Magelang.
- Ayres, Frank, & Mendelson, Elliot. 2006. *Kalkulus: Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W.E & DiPrima, R.C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Von Hoffmann Press.
- Di Gennaro, F., Pizzol, D., Marotta, C., Antunes, M., Racalbuto, V., Veronese, N., & Smith, L. (2020). Coronavirus diseases (COVID-19) current status and future perspectives: a narrative review. *International journal of environmental research and public health*, 17(8), 2690.
- Finizio, N & Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Handayani, D., Hadi, D. R., Isbaniah, F., Burhan, E., & Agustin, H. (2020). Corona virus disease 2019. *Jurnal Respirologi Indonesia*, 40(2), 119-129.
- Hardiningsih, A, Y. 2010. *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Skokastik Pada Waktu Diskrit*. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.
- Hariyanto. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Ishaq Alu Syaikh, Abdullah bin Muhammad bin Abdurrahman bin. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Surabaya: Pustaka Imam asy-Syafi'i

- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Marzuki, I., Bachtiar, E., Zuhriyatun, F., Purba, A. M. V., Kurniasih, H., Purba, D. H., & Airlangga, E. (2021). *COVID-19: Seribu Satu Wajah*. Yayasan Kita Menulis.
- Ndairou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*, 109846.
- Ndii, Meksinanis Zadrak. 2018. *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. Sleman: Deepublish Publisher.
- Nurul Wathoni, Nursyamsu. *Tafsir Virus (Fauqa Ba'udhah: Korelasi COVID-19 Dengan Ayat-ayat Al-Qur'an)*. UIN Mataram.
- Sasmita, N. R., Ikhwan, M., Suyanto, S., & Chongsuvivatwong, V. (2020). Optimal control on a mathematical model to pattern the progression of coronavirus disease 2019 (COVID-19) in Indonesia. *Global Health Research and Policy*, 5(1), 1-12.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta; Lentera Hati.
- Sugiyarto. 2015. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Binafsi Publisher.
- Wahab, W & Subiantoro A. 2013. *Fundamental of Control System Stability Criterion-Routh Hurwitz*. <http://staff.ui.ac.id/internal/130702176/material/Lecture5-StabilityCriterion-Routh-HurwitzTest20Oct08.pdf>. (diakses pada 12 April 2021).
- Waluya. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1: Script Maple untuk Menghitung Titik Kesetimbangan, Nilai Eigen, dan Persamaan Karakteristik

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
> a := 6.25·10(-3) : μ := 0.00712 : μi := 0.087 : α := 3.586·10-5 : β1 := 7012 : β2 := 0.4 : θ1
:= 0.086 : b1 := 0.9629 : N := 270200000 :

> dS := a·N - μ·S - α·S·i + b1·R + β1·E :
> dE := α·S·i - β1·E - μi·E - β2·E :
> di := β2·E - μi·i - θ1·i :
> dR := θ1·i - μ·R - b1·R :
> TTK := solve({dS, dE, di, dR}, {S, E, i, R});
TTK := {E = 0., R = 0., S = 2.371839888 108, i = 0.}, {E = 3.751758724 106, R
= 7.690712063 105, S = 8.457614689 107, i = 8.674586645 106}

> with(linalg) : with(DEtools) : with(LinearAlgebra) :
> jac := Matrix(jacobian([dS, dE, di, dR], [S, E, i, R]));
jac := 
$$\begin{bmatrix} -0.00003586000000 i - 0.00712 & 7012 & -0.00003586000000 S & 0.9629 \\ 0.00003586000000 i & -7012.487 & 0.00003586000000 S & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.173 & 0 \\ 0 & 0 & 0.086 & -0.97002 \end{bmatrix}$$


> fp1 := TTK[1];
fp1 := {E = 0., R = 0., S = 2.371839888 108, i = 0.}

> fp2 := TTK[2];
fp2 := {E = 3.751758724 106, R = 7.690712063 105, S = 8.457614689 107, i = 8.674586645 106}

> with(plots) :
> with(linalg) :
> jac := jacobian([dS, dE, di, dR], [S, E, i, R]);
jac := 
$$\begin{bmatrix} -0.00003586000000 i - 0.00712 & 7012 & -0.00003586000000 S & 0.9629 \\ 0.00003586000000 i & -7012.487 & 0.00003586000000 S & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.173 & 0 \\ 0 & 0 & 0.086 & -0.97002 \end{bmatrix}$$


> jac1 := subs(fp1, evalm(jac));
jac1 := 
$$\begin{bmatrix} -0.00712 & 7012 & -8505.417838 & 0.9629 \\ 0. & -7012.487 & 8505.417838 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.173 & 0 \\ 0 & 0 & 0.086 & -0.97002 \end{bmatrix}$$


> nilai_eigen1 := eigenvals(jac1);
nilai_eigen1 := -0.0071200000000000, -0.9700200000000000, 0.312136828934854,
-7012.97213682894

> eigenvectors(jac1);

```

$[-0.97002, 1, \{[-1.000000000 \ 0 \ 0 \ 1]\}], [0.312137, 1,$   
 $\{[-0.02833359154 \ 0.01212752879 \ 0.009999264588 \ 0.0006706953630]\}], [$   
 $-7012.972137, 1,$   
 $\{[-0.9999359396 \ 1.000004367 \ -0.00005703881421 \ 6.995631121 \ 10^{-10}]\}], [$   
 $-0.00712, 1, \{[1 \ 0 \ 0 \ 0]\}]$

>  $jac2 := subs(fp2, evalm(jac));$

$$jac2 := \begin{bmatrix} -311.0777971 & 7012 & -3032.900627 & 0.9629 \\ 311.0706771 & -7012.487 & 3032.900627 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.173 & 0 \\ 0 & 0 & 0.086 & -0.97002 \end{bmatrix}$$

>  $nilai\_eigen2 := eigenvals(jac2);$

$nilai\_eigen2 := -7323.70294680509, -0.0182001870337431 + 0.0424297154245613 I,$   
 $-0.0182001870337431 - 0.0424297154245613 I, -0.968469920848185$

>  $eigenvectors(jac2);$

$[-7323.702948, 1,$   
 $\{[0.9949579470 \ -0.9950231409 \ 0.00005434664150 \ -6.382604944 \ 10^{-10}]\}], [$   
 $-0.0182001752 + 0.04242913115 I, 1, \{[2.373760005 + 0.4076367960 I,$   
 $0.01201983356 - 0.3712422528 I, -0.2156690104 - 0.9001706305 I, -0.02306614210$   
 $- 0.08030511332 I]\}], [-0.9684699209, 1,$   
 $\{[-0.0999735290 \ -0.00364299804 \ 0.001831872196 \ 0.1016341645]\}], [$   
 $-0.0182001752 - 0.04242913115 I, 1, \{[2.373760005 - 0.4076367960 I,$   
 $0.01201983356 + 0.3712422528 I, -0.2156690104 + 0.9001706305 I, -0.02306614210$   
 $+ 0.08030511332 I]\}]$

>  $restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :$

>

$a := 6.25 \cdot 10^{(-3)} : \mu := 0.00712 : \mu i := 0.087 : \alpha := 3.586 \cdot 10^{-5} : \beta 1 := 7012 : \beta 2 := 0.4 : \theta 1$   
 $:= 0.086 : b 1 := 0.9629 : N := 270200000 :$

>  $A := \begin{bmatrix} -\mu - \alpha \cdot i & \beta 1 & -\alpha \cdot S & b 1 \\ \alpha \cdot i & -\beta 1 - \mu i - \beta 2 & \alpha \cdot S & 0 \\ 0 & \beta 2 & -\mu i - \theta 1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta 1 & -b 1 - \mu \end{bmatrix};$

$$A := \begin{bmatrix} -\alpha i - \mu & \beta 1 & -\alpha S & b 1 \\ \alpha i & -\beta 1 - \mu i - \beta 2 & \alpha S & 0 \\ 0 & \beta 2 & -\mu i - \theta 1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta 1 & -b 1 - \mu \end{bmatrix}$$

>  $g := (\text{Matrix}(4, 4, [[\lambda, 0, 0, 0], [0, \lambda, 0, 0], [0, 0, \lambda, 0], [0, 0, 0, \lambda]]));$

$$g := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

>  $b := A - g;$

$$b := \begin{bmatrix} -\alpha i - \lambda - \mu & \beta l & -\alpha S & b l \\ \alpha i & -\beta l - \mu i - \beta 2 - \lambda & \alpha S & 0 \\ 0 & \beta 2 & -\mu i - \theta l - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta l & -b l - \mu - \lambda \end{bmatrix}$$

>  $\text{poli1} := \text{collect}(\text{charpoly}(A, \lambda), \lambda);$

$$\begin{aligned} \text{poli1} := & \mu^2 \alpha b l i + \mu^2 \alpha i \mu - S \alpha \beta 2 \mu^2 + \mu i b l \beta l \mu + \mu i b l \beta 2 \mu + \mu i b l \mu \theta l + b l \beta l \mu \theta l \\ & + b l \beta 2 \mu \theta l + \lambda^4 + \mu^2 b l \mu + \mu i \beta l \mu^2 + \mu i \beta 2 \mu^2 + \mu i \mu^2 \theta l + \beta l \mu^2 \theta l + \beta 2 \mu^2 \theta l \\ & + \mu i \alpha b l \beta 2 i + \mu i \alpha b l i \theta l + \mu i \alpha \beta 2 i \mu + \mu i \alpha i \mu \theta l - S \alpha b l \beta 2 \mu + \alpha \beta 2 i \mu \theta l + (\alpha i \\ & + 2 \mu i + b l + \beta l + \beta 2 + 2 \mu + \theta l) \lambda^3 + (2 \mu i \alpha i - S \alpha \beta 2 + \alpha b l i + \alpha \beta 2 i + \alpha i \mu \\ & + \alpha i \theta l + \mu^2 + 2 \mu i b l + \mu i \beta l + \mu i \beta 2 + 4 \mu i \mu + \mu i \theta l + b l \beta l + b l \beta 2 + b l \mu \\ & + b l \theta l + 2 \beta l \mu + \beta l \theta l + 2 \beta 2 \mu + \beta 2 \theta l + \mu^2 + 2 \mu \theta l) \lambda^2 + (\mu^2 \alpha i + 2 \mu i \alpha b l i \\ & + \mu i \alpha \beta 2 i + 2 \mu i \alpha i \mu + \mu i \alpha i \theta l - S \alpha b l \beta 2 - 2 S \alpha \beta 2 \mu + \alpha b l \beta 2 i + \alpha b l i \theta l \\ & + \alpha \beta 2 i \mu + \alpha \beta 2 i \theta l + \alpha i \mu \theta l + \mu^2 b l + 2 \mu^2 \mu + \mu i b l \beta l + \mu i b l \beta 2 + 2 \mu i b l \mu \\ & + \mu i b l \theta l + 2 \mu i \beta l \mu + 2 \mu i \beta 2 \mu + 2 \mu i \mu^2 + 2 \mu i \mu \theta l + b l \beta l \mu + b l \beta l \theta l + b l \beta 2 \mu \\ & + b l \beta 2 \theta l + b l \mu \theta l + \beta l \mu^2 + 2 \beta l \mu \theta l + \beta 2 \mu^2 + 2 \beta 2 \mu \theta l + \mu^2 \theta l) \lambda + \mu^2 \mu^2 \end{aligned}$$

>  $A5 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 5));$

$$A5 := 0$$

>  $A4 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 4));$

$$A4 := 1$$

>  $A3 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 3));$

$$A3 := \alpha i + 2 \mu i + b l + \beta l + \beta 2 + 2 \mu + \theta l$$

>  $A2 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 2));$

$$\begin{aligned} A2 := & 2 \mu i \alpha i - S \alpha \beta 2 + \alpha b l i + \alpha \beta 2 i + \alpha i \mu + \alpha i \theta l + \mu^2 + 2 \mu i b l + \mu i \beta l + \mu i \beta 2 \\ & + 4 \mu i \mu + \mu i \theta l + b l \beta l + b l \beta 2 + b l \mu + b l \theta l + 2 \beta l \mu + \beta l \theta l + 2 \beta 2 \mu + \beta 2 \theta l \\ & + \mu^2 + 2 \mu \theta l \end{aligned}$$

>  $A1 := \text{factor}(\text{coeff}(\text{poli1}, \lambda, 1));$

$$\begin{aligned}
A1 := & \mu^2 \alpha i + 2 \mu i \alpha b1 i + \mu i \alpha \beta 2 i + 2 \mu i \alpha i \mu + \mu i \alpha i \theta l - S \alpha b1 \beta 2 - 2 S \alpha \beta 2 \mu \\
& + \alpha b1 \beta 2 i + \alpha b1 i \theta l + \alpha \beta 2 i \mu + \alpha \beta 2 i \theta l + \alpha i \mu \theta l + \mu^2 b1 + 2 \mu^2 \mu + \mu i b1 \beta 1 \\
& + \mu i b1 \beta 2 + 2 \mu i b1 \mu + \mu i b1 \theta l + 2 \mu i \beta 1 \mu + 2 \mu i \beta 2 \mu + 2 \mu i \mu^2 + 2 \mu i \mu \theta l + b1 \beta 1 \mu \\
& + b1 \beta 1 \theta l + b1 \beta 2 \mu + b1 \beta 2 \theta l + b1 \mu \theta l + \beta 1 \mu^2 + 2 \beta 1 \mu \theta l + \beta 2 \mu^2 + 2 \beta 2 \mu \theta l \\
& + \mu^2 \theta l
\end{aligned}$$

> A0 := factor(coeff(poli1, λ, 0));

$$\begin{aligned}
A0 := & \mu^2 \alpha b1 i + \mu^2 \alpha i \mu + \mu i \alpha b1 \beta 2 i + \mu i \alpha b1 i \theta l + \mu i \alpha \beta 2 i \mu + \mu i \alpha i \mu \theta l \\
& - S \alpha b1 \beta 2 \mu - S \alpha \beta 2 \mu^2 + \alpha \beta 2 i \mu \theta l + \mu^2 b1 \mu + \mu^2 \mu^2 + \mu i b1 \beta 1 \mu + \mu i b1 \beta 2 \mu \\
& + \mu i b1 \mu \theta l + \mu i \beta 1 \mu^2 + \mu i \beta 2 \mu^2 + \mu i \mu^2 \theta l + b1 \beta 1 \mu \theta l + b1 \beta 2 \mu \theta l + \beta 1 \mu^2 \theta l \\
& + \beta 2 \mu^2 \theta l
\end{aligned}$$

## Lampiran 2: M-File untuk Menentukan Potret Fase dari Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR

```
function dx=fsh(y,x)
a=6.25*10^(-3);
mu=0.00712;
mui=0.087;
alpha=3.586*10^(-5);
beta1=7012;
beta2=0.4;
theta1=0.086;
b1=0.9629;
N=270200000;
dx=zeros(4,1);

dx(1)=a*N+b1*x(4)-(alpha*x(1)*x(3))-mu*x(1)+beta1*x(2);
dx(2)=(alpha*x(1)*x(3))-beta1*x(2)-beta2*x(2)-mu*x(2);
dx(3)=beta2*x(2)-theta1*x(3)-mui*x(3);
dx(4)=theta1*x(3)-b1*x(4)-mu*x(4);

end

clc;clear all;close all;
X1=5*[2 3 1];%s
X2=2*[0 1 2];%e
X3=1*[0 1 2];%i
X4=1.25*ones(3,1);%r

for i=1:length(X1)
[y,x]=ode45('fsh',400,[X1(i) X2(i) X3(i) X4(i)]);
U=gradient(x(:,1));
V=gradient(x(:,2));
W=gradient(x(:,3));
figure(1)
quiver3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),U,V,W,'r');hold on;
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'b-','Linewidth',1);hold on;
plot3(X1(i),X2(i),X3(i),'k*');grid on;

xlabel('X1');
ylabel('X2');
zlabel('X3');
plot3(2.371839888*10^8,0,0,'g*');
X1E=8.457518347*10^7;
X2E=3.751758724*10^6;
X3E=8.674586645*10^6;
plot3(X1E,X2E,X3E,'r*');
legend('-', 'SEI', 'Nilai awal', 'E_0^*', 'E_1^*');

U=gradient(x(:,1));
V=gradient(x(:,3));
W=gradient(x(:,4));
figure(2)
quiver3(x(:,1),x(:,3),x(:,4),U,V,W,'r');hold on;
plot3(x(:,1),x(:,3),x(:,4),'b-','Linewidth',1);hold on;
plot3(X1(i),X3(i),X4(i),'k*');grid on;

xlabel('X1');
```

```
ylabel('X3');
xlabel('X4');
plot3(2.371839888*10^8,0,0,'g*');
X1E=8.457518347*10^7;
X3E=8.674586645*10^6;
X4E=7.690712063*10^5;
plot3(X1E,X3E,X4E,'r*');
legend('-', 'SIR', 'Nilai awal', 'E_0^*', 'E_1^*');
end
```

### Lampiran 3: M-File untuk Menentukan Solusi Numerik Untuk Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR

```
function dxdt=cpk(t,x)
global a mu mui alpha beta1 beta2 theta1 b1 N
a=6.25*10^(-3);
mu=0.00712;
mui=0.087;
alpha=3.586*10^(-5);
beta1=7012;
beta2=0.4;
theta1=0.086;
b1=0.9629;
N=270200000;

S=x(1);
E=x(2);
I=x(3);
R=x(4);

dxdt_1=a*N+b1*R-(alpha*S*I)-mu*S+beta1*E;
dxdt_2=(alpha*S*I)-beta1*E-beta2*E-mu*E;
dxdt_3=beta2*E-theta1*I-mui*I;
dxdt_4=theta1*I-b1*R-mu*R;

dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3;dxdt_4];
end

clc;clear all;close all;

t=0:0.1:1000;

initial_S=267968836;
initial_E=132723;
initial_I=228835;
initial_R=1869606;

[t,x]=ode45(@cpk,t,[initial_S;initial_E;initial_I;initial_R]);

S=x(:,1);
E=x(:,2);
I=x(:,3);
R=x(:,4);

figure(1)
plot(t,(x(:,1)),'m',t,(x(:,2)),'b',t,(x(:,3)),'r',t,(x(:,4)),'k','LineWidth',1.5);
title('Grafik Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR');
legend('Susceptible','Exposed','Infected','Recovered');
grid on;
```

## RIWAYAT HIDUP



Ester Meyliana, lahir di Kota Bandung pada tanggal 06 Mei 1999, dan biasa dipanggil Ester, tinggal di Kota Tangerang, Banten. Anak kedua dari tiga bersaudara dari Erwin Pranajaya dan Sumiati Susiana, serta merupakan adik dari Sulis Tio dan kakak dari Aurel Cinta Agustin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Batu Ceper 02 dan lulus pada tahun 2011, setelah itu melanjutkan ke SMPN 21 Kota Tangerang dan lulus pada tahun 2014, kemudian melanjutkan ke jenjang SMA di SMAS YUPPENTEK 1 Kota Tangerang dan lulus pada tahun 2017, lalu melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil program studi Matematika. Selama menempuh Pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dia aktif menjadi pengurus HMJ “Integral” UIN Malang, anggota Mathematics English Club (MEC), dan juga mengikuti Riset Kompetitif Mahasiswa (RKM) Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Ester Meyliana  
NIM : 17610033  
Fakultas/ Program Studi : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran  
COVID-19 Pada Populasi SEIR  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si  
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	16 Maret 2021	Konsultasi Bab I & II & III	1.
2	12 April 2021	Revisi Bab I & II & III	2.
3	15 April 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I	3.
4	20 April 2021	Revisi Keseluruhan dan Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I & II & III	4.
5	6 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan	5.
6	2 Juni 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab III	6.
7	21 Agustus 2021	Konsultasi Bab III	7.
8	1 September 2021	Revisi Kajian Agama Bab III	8.
9	11 Oktober 2021	Revisi Bab III	9.
10	22 November 2021	Konsultasi dan ACC Bab III & IV	10.
11	30 November 2021	ACC Keseluruhan untuk disidangkan	11.

Malang, 15 Desember 2021  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

