

**METODE *BACKWARD TIME CENTRAL SPACE* DALAM  
PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA  
ALAT MUSIK PETIK**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ATIK DAMAYANTI  
NIM. 17610016**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**METODE *BACKWARD TIME CENTRAL SPACE* DALAM  
PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA  
ALAT MUSIK PETIK**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ATIK DAMAYANTI  
NIM. 17610016**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**METODE *BACKWARD TIME CENTRAL SPACE* DALAM  
PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA  
ALAT MUSIK PETIK**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)**

**OLEH  
ATIK DAMAYANTI  
NIM. 17610016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

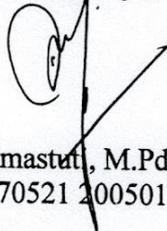
**METODE BACKWARD TIME CENTRAL SPACE DALAM  
PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA  
ALAT MUSIK PETIK**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Atik Damayanti  
NIM. 17610016**

Telah Diajukan dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal, 30 November 2021

Pembimbing I,



Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si  
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,



Erna Herawati, M.Pd  
NIDT. 19760723201802012222

Mengetahui,  
Ketua Program Studi



Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005

**METODE *BACKWARD TIME CENTRAL SPACE* DALAM  
PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI PADA  
ALAT MUSIK PETIK**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Atik Damayanti  
NIM. 17610016**

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi  
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Tanggal, 07 Desember 2021

Penguji Utama : Dr. Heni Widayani, M.Si

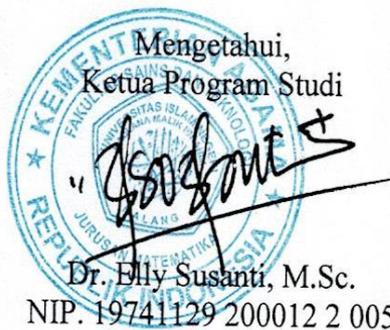
Ketua Penguji : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph. D

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji : Erna Herawati, M.Pd



Mengetahui,  
Ketua Program Studi



Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005



## **MOTTO**

“Jika kamu benar-benar ingin melakukan sesuatu, kamu akan menemukan cara.

Jika tidak, kamu akan menemukan alasan.” –Jim Rohn

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua penulis yang selalu mendoakan penulis dan menginspirasi penulis dengan kesabaran dan kegigihannya. Ketiga kakak penulis yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat setiap hari. Semoga Allah selalu menyertai langkahnya mereka dalam menggapai kesuksesan di dunia maupun di akhirat.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul “Metode *Backward Time Central Space* dalam Penyelesaian Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik”. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang yakni agama Islam. Semoga penulis dan pembaca tergolong sebagai orang-orang yang mendapat syafaat kelak di hari kiamat, aamiin.

Dalam selesainya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah mendukung dan membantu secara langsung maupun tidak langsung, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang ditujukan:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasehat, pembelajaran, saran dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ibu Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasehat dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Ibu Dr. Heni Widayani, M.Si., sebagai dosen penguji Seminar Proposal dan Ujian Skripsi yang telah banyak memberikan masukan, arahan dan nasehat kepada penulis.
7. Bapak Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph. D sebagai dosen penguji Ujian Skripsi yang telah memberikan arahan, masukan, serta nasehat kepada penulis.

8. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih untuk segenap ilmu dan bimbingan selama ini.
9. Kedua orang tua dan keluarga yang selalu memberikan doa dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga rahmat dan karunia Allah selalu dilimpahkan kepada kita semua. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca maupun bagi penulis.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, Desember 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>ملخص</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	4
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik .....	8
2.1.1 Besar Peregangan Dawai akibat Petikan .....	9
2.1.2 Hukum-Hukum Fisika yang Terlibat.....	12
2.1.3 Persamaan <i>Lagrange</i> dan Penurunan Persamaan <i>Lagrange</i> .....	20
2.2 Metode Beda Hingga Implisit .....	26
2.3 Syarat Kestabilan Skema Numerik .....	29
2.4 Analisis Orde Error .....	31
2.5 Kajian Vibrasi Dawai dalam Islam .....	32

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Diskritisasi Model Matematika dengan Skema BTCS.....	34
3.2	Analisis Keabsahan Solusi Metode Implisit.....	43
3.2.1	Analisis Kestabilan Metode BTCS.....	43
3.2.2	Analisis Konsistensi .....	51
3.3	Prinsip Mencari Solusi dalam Al-Quran .....	57

### **BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan.....	59
4.2	Saran.....	60

<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>61</b>
-----------------------------	-----------

### **LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Partisi Dawai ketika Dipetik $\frac{1}{2}l$ .....	8
Gambar 2.2 Peregangan pada Dawai ketika Diberi Simpangan .....	10
Gambar 2.3 Kondisi Awal Dawai ketika Dipetik .....	24
Gambar 2.4 Kondisi Dawai Alat Musik Setelah Dipetik.....	25
Gambar 2.5 Skema Stensil Metode Implisit .....	28
Gambar 3.1 Bentuk Stensil BTCS .....	36
Gambar 3.2 Grafik Vibrasi dengan Metode BTCS .....	41
Gambar 3.3 Grafik Simpangan Dawai $u(x, t)$ .....	42

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai Error untuk $u(x, t)$ pada $t \in [0,7]$ dan $x \in [0,0.64]$ dengan $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t = 0,1$ .....	55
Tabel 3.2 Nilai Error untuk $u(x, t)$ pada $t \in [0,7]$ dan $x \in [0,0.64]$ dengan $\Delta t \rightarrow 0$ dan $\Delta x = 0.05$ .....	56

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini memiliki makna sebagai berikut:

$j$  : Indeks yang menyatakan ruang di  $x$

$n$  : Indeks yang menyatakan waktu di  $t$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  : Turunan orde pertama terhadap  $t$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$  : Turunan orde kedua terhadap  $t$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  : Turunan orde kedua terhadap  $x$

$\Delta x$  : Perubahan ruang

$\Delta t$  : Perubahan waktu

## ABSTRAK

Damayanti, Atik. 2021. **Metode *Backward Time Central Space* dalam Penyelesaian Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

**Kata Kunci:** Vibrasi Dawai Alat Musik Petik, Model Matematika, Simpangan Dawai, Metode Implisit, *Backward Time Central Space*, Solusi  $u(x, t)$

Penelitian ini dilakukan untuk memperoleh solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik. Model matematika ini merupakan representasi dari fenomena alat musik petik yang dikenai simpangan. Model tersebut dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk (2017) dan berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah metode BTCS (*Backward Time Central Space*). Solusi numerik diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut, 1). Melakukan diskritisasi model matematika kemudian mendiskritisasi kondisi awal dan kondisi batas. 2). Melakukan analisis kestabilan solusi numerik untuk mengetahui solusi yang diperoleh stabil dan analisis konsistensi sebagai syarat dari kekonvergenan solusi numerik yang diperoleh. 3). Mensimulasikan solusi numerik dan melakukan interpretasi grafik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik stabil tanpa syarat dan memiliki  $error (\Delta x^2, \Delta t^3)$ .

## ABSTRACT

Damayanti, Atik. 2021. **On The Backward Time Central Space Method in Solving the Mathematical Model of String Vibration on Stringed Instruments**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Supervisor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

**Keywords:** String Vibration Stringed Instrument, Mathematical Model, String Deviation, Implicit Method, Backward Time Central Space,  $u(x, t)$  Solution

This study discusses the numerical solution of the mathematical model of string vibration given the deviation on a stringed instrument. This mathematical model is a representation of the phenomenon of stringed instruments that are subject to deviations in the form of partial differential equations. The model used in this study is a model that has been constructed by Kusumastuti, et al (2017). The method used in solving the model is the BTCS (Backward Time Central Space) method. The numerical solution is obtained by the following steps, 1). Discretize the mathematical model and then discretize the initial conditions and boundary conditions. 2). Determine the stability analysis of the numerical solution to find out the solution obtained is stable and the consistency analysis as a condition for the convergence of the obtained numerical solution. 3). Simulate the numerical solutions and perform graph interpretations. The results obtained are declared unconditionally stable. The Backward Time Central Space implicit method in solving the mathematical model of string vibration on this stringed instrument has a cutting error of the first order ( $\Delta x^2, \Delta t^3$ ).

## ملخص

داميانتي، عاتك. ٢٠٢١. طريقة الامتداد المركزي للوقت الخلفي *Backward Time Central Space* في إجراء نموذج رياضيات تذبذب السلك على آلة القيثارة. البحث العلمي. دراسة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) أري كوسوماستوتي، الماجستير، (٢) إيرنا هيراواتي، الماجستير.

الكلمات الأساسية: تذبذب السلك، الطريقة الضمنية، الامتداد المركزي للوقت الخلفي.  $u(x, t)$  الرقمي.

يبحث هذا الباب في الحل الرقمي لنموذج رياضيات تذبذب السلك المعطاة لانحراف آلة القيثارة. فهذه نموذج الرياضيات هو من عملية التفسير من مظاهر آلة القيثارة التي يتحكمها الانحراف بصيغة تشابه الاختلاف الجزئي. فالنموذج المستخدمة في هذا البحث هو النموذج الذي بنته كوسوماواتي وآخرون (٢٠١٧). فالطريقة المستخدمة في هذا البحث هي طريقة الامتداد المركزي للوقت الخلفي *Backward Time Central Space (BTCS)*. فالحل الرقمي يحصل بالخطوات التالية: (١) القيام بعملية تمييز نموذج الرياضيات ثم تمييز الأحوال الأولى والأحوال المحددة، (٢) البحث عن تحليل ثبات الحل الرقمي لمعرفة الحل الثابت وتحليل الاستقرار كشرط تجانس الحل الرقمي المحصول، (٣) إدعاء الحل الرقمي والقيام بعملية تفسير الرسم البياني. دلت نتائج على وجود الثبات دون الشرط. طريقة الامتداد المركزي للوقت الخلفي في إجراء نموذج رياضيات تذبذب السلك على آلة القيثارة لها خطأ القطف الأول بعهد  $(\Delta x^2, \Delta t^3)$ .

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Allah berfirman dalam surat Al-Jumuah ayat 10 yang artinya:

*“Apabila sholat telah dilaksanakan, maka bertebaranlah kamu di bumi, carilah karunia Allah dan ingatlah Allah banyak-banyak agar kamu beruntung.”*

Pada surat tersebut, kata “*fantasyiru*” dimaknai “maka bertebaranlah kalian”. Perintah “*fantasyiru*” di ayat ini merupakan jawaban atas potongan kalimat sebelumnya yang mengatakan “*idza qudiyatis shalah*”. Artinya, Al-Quran memberikan seruan bagi orang-orang untuk bertebarlah atau meyebarlah ke bisnis masing-masing, baik menyebarkan dagangannya bagi seorang pedagang maupun menyebarkan agamanya atau dakwah. Dari Abdullah ibn Amr: Bahwa Nabi bersabda:

*“sampaikan dariku sekalipun satu ayat dan ceritakanlah (apa yang kalian dengar) dari bani Israil itu tidak apa (dosa) Dan barangsiapa yang berdusta atas namaku dengan sengaja maka bersiap-siaplah menempati tempat duduknya di neraka”.*

Hadis di atas menjelaskan tentang kewajiban dakwah untuk semua orang walaupun hanya satu ayat. Namun jangan sampai melampaui batasan menyampaikan ayat atau kebaikan tentang sesuatu yang tidak diketahuinya. Ada banyak cara dalam melakukan penyebaran agama, salah satunya yaitu melalui musik. Ditinjau dari keilmuan komunikasi, musik adalah media yang sangat ampuh dan cepat dalam proses penyampaian pesan secara massal.

Berdasarkan pada ayat di atas, fokus penelitian ini adalah melakukan interpretasi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik pada penelitian Kusumastuti tahun 2017. Interpretasi model bertujuan untuk melihat seberapa realistis model matematika yang telah dikonstruksi terhadap kondisi riil nya. Salah satu cara adalah dengan menggunakan interpretasi dari plot grafik numerik model

matematika vibrasi dawai pada alat musik petik yang dimaksud. Simulasi numerik dilakukan dengan menampilkan grafik model dengan analisis kestabilan. Solusi numerik pada penelitian ini menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS), dengan hampiran deret Taylor menggunakan hampiran beda mundur untuk  $u(x, t)$  di sekitar titik  $t + \Delta t$  dan beda pusat untuk  $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$  dan  $u(x - \Delta x, t + \Delta t)$  di sekitar titik  $x$ .

Penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Agus Purwanto pada tahun 2006, yaitu analisis sinyal suara yang dihasilkan oleh alat musik gitar semi-akustik. Dalam penelitian ini, untuk mendapatkan komponen-komponen penyusun sinyal suara seperti amplitudo, rasio amplitudo, frekuensi fundamental dan frekuensi harmonik, serta memperoleh spektrum sinyal suara digunakan program *SOUND FORGE* sebagai alat perekam suara yang dihasilkan dawai gitar yang dipetik, seperti yang dilakukan Gulla, kemudian menerapkan FFT untuk menganalisis data suara hasil rekaman tersebut. Setelah menambahkan faktor peredam pada model sinyal suara yang telah dikonstruksi berdasarkan komponen-komponen yang telah didapatkan, dan hasil suara yang diperoleh adalah hampir sama dengan suara asli dari gitar yang dipetik.

Penelitian sebelumnya juga pernah dilakukan oleh Kusumastuti, dkk pada tahun 2017 yaitu melakukan konstruksi model matematika vibrasi dawai pada alat musik tradisional Sasando. Proses dalam konstruksi model matematika vibrasi dawai Sasando ini memanfaatkan persamaan *Lagrange*. Kemudian penelitian ini dilanjutkan oleh Kusumastuti, dkk pada tahun 2019 dengan mencari solusi numerik untuk model vibrasi dawai pada alat musik Sasando yang telah diperoleh dengan

metode *Central Time Central Space* (CTCS) dihasilkan bahwa solusi stabil tetapi dengan syarat  $\Delta t \leq 0,1$ .

Berdasarkan permasalahan tersebut, penelitian ini dimaksudkan untuk melakukan analisis numerik menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) untuk memperbaiki performa *Central Time Central Space* (CTCS) dari penelitian sebelumnya. Manfaat dari penelitian ini yaitu untuk memprediksi besar simpangan maksimal yang diberikan pada dawai alat musik petik sehingga diperoleh nada tanpa *noise* akibat vibrasi tanpa osilasi yang besar.

Dari pemaparan latar belakang tersebut, maka penulis bermaksud untuk menyusun skripsi dengan judul “*Metode Backward Time Central Space dalam Penyelesaian Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik*”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan pemaparan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS)?
2. Bagaimana analisis keabsahan solusi metode *Backward Time Central Space* (BTCS) melalui analisis kestabilan dan orde *error* model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS).
2. Untuk mengetahui analisis keabsahan solusi metode *Backward Time Central Space* (BTCS) melalui analisis kestabilan dan orde *error* model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yaitu solusi yang dihasilkan dapat menambah wawasan keilmuan, khususnya dalam penerapan metode beda hingga implisit kedalam model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik, sehingga dapat dijadikan sebagai bahan literatur yang bersangkutan dengan model matematika vibrasi dawai pada alat musik senar lainnya.

### 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

1. Model yang digunakan dalam penelitian yaitu model matematika untuk masalah vibrasi dawai pada alat musik petik dengan persamaannya sebagai berikut (Kusumastuti, 2017):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Dengan kondisi awal untuk  $u$  sebagai berikut:

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = 0$$

Dimana fungsi  $f(x)$  dinyatakan sebagai:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ 2h - \frac{2hx}{l}, & \frac{1}{2}l < x \leq l \end{cases}$$

Dan kondisi batas untuk  $u$

$$u(0, t) = 0, \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0, \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

2. Dawai yang digunakan dalam penelitian ini adalah dawai yang sering digunakan pada alat musik petik lainnya yaitu dawai berbahan dasar nilon.
3. Model matematika untuk masalah vibrasi dawai pada alat musik petik dihitung dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS).

## 1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode kepustakaan. Peneliti melakukan eksplorasi terhadap artikel jurnal, buku, serta referensi lain yang berhubungan dengan analisis numerik model matematika vibrasi dawai yang berupa persamaan diferensial parsial hiperbolik dan simulasi grafik dengan bantuan software *OCTAVE*. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS)

- a) Melakukan diskritisasi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS).
  - b) Mengkonstruksi bentuk stensil hitung model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS).
  - c) Melakukan diskritisasi kondisi awal serta kondisi batas dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS).
2. Analisis kestabilan dan analisis orde *error* metode *Backward Time Central Space* (BTCS) dari model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik
- a) Menganalisis kestabilan dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) untuk gerak dawai pada alat musik petik menggunakan metode *von Neumann*.
  - b) Menentukan analisis orde *error* dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) dengan menentukan nilai limit dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) ketika  $\Delta t \rightarrow 0$ .
  - c) Verifikasi kestabilan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) menggunakan  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  dari poin 2b).

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam skripsi ini terdapat empat bab.

Masing-masing bab terdiri dari beberapa sub bab, yaitu:

### Bab I Pendahuluan

Pendahuluan adalah bab yang memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

## Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka menyajikan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Seperti teori gelombang, metode beda hingga, dan skema implisit *Backward Time Central Space* (BTCS).

## Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang pembahasan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) dalam penyelesaian model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik.

## Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan penelitian yang dilakukan dan saran yang berkaitan dengan penelitian.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik

Dawai yang digunakan dalam penelitian ini yaitu dawai yang berbahan dasar nilon. Dawai ini sering digunakan pada alat musik petik lainnya. Kedua ujung dawai pada alat musik petik terikat pada dua pengait dawai. Massa jenis dawai ( $\rho$ ) didefinisikan sebagai

$$\rho = \frac{m}{V}$$

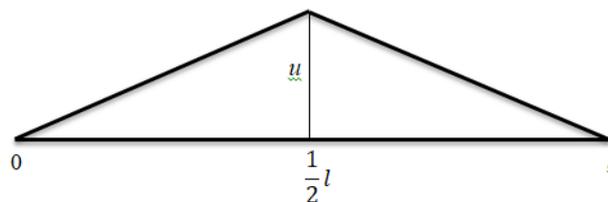
dengan

$\rho$  : Massa Jenis

$m$  : Massa

$V$  : Volume

Volume dawai sebanding dengan panjang dawai, hal ini dikarenakan luas penampang dawai ( $A$ ) yang digunakan sangat kecil. Sehingga massa jenis dawai dapat ditulis sebagai massa ( $m$ ) per satuan panjang dawai ( $l$ ). Kemudian dawai dipetik pada posisi  $\frac{1}{2}l$  dari panjang dawai. Dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut yaitu partisi dawai ketika dipetik pada posisi  $\frac{1}{2}l$  dari panjang dawai



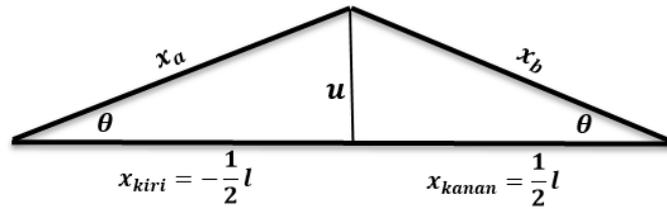
**Gambar 2. 1** Partisi Dawai ketika Dipetik  $\frac{1}{2}l$

Berdasarkan Gambar 2.1 maka dapat ditarik asumsi untuk masalah vibrasi dawai pada alat musik petik sebagai berikut:

1. Dawai alat musik petik berada pada posisi setimbang di sepanjang sumbu  $x$  dan dawai alat musik petik adalah dawai yang lentur.
2. Dawai alat musik petik yang diberi simpangan akan mengalami gerak osilasi atau gerak bolak-balik menuju titik setimbang dan dawai akan berhenti pada waktu  $t$  tertentu.
3. Terdapat gaya peredam yang bekerja pada dawai.
4. Terbentuknya simpangan yang bergantung pada  $x$  dan  $t$  pada dawai ketika dawai alat musik petik bervibrasi. Simpangan ini didefinisikan sebagai  $u$ . Simpangan yang terjadi sangatlah kecil, hal ini menyebabkan kemiringan di sepanjang dawai juga sangat kecil.
5. Ketika dawai berada pada posisi setimbang, berlaku hukum I Newton dan ketika dawai bervibrasi maka berlaku hukum II Newton.
6. Adanya gaya gesek antara dawai dengan fluida (udara) disekitar dawai selama dawai berosilasi.
7. Volume dawai sebanding dengan panjang dawai, karena luas penampang dawai sangat kecil.

### **2.1.1 Besar Peregangan Dawai akibat Petikan**

Dawai pada alat musik petik ketika diberi simpangan pada posisi  $\frac{1}{2}l$  dari panjang dawai  $l$  akan menimbulkan adanya peregangan dawai ( $e$ ). Peregangan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.2 berikut:



**Gambar 2. 2** Peregangan pada Dawai ketika Diberi Simpangan

Berdasarkan Gambar 2.2, terlihat bahwa dawai di sisi kiri terjadi peregangan yang menyebabkan pertambahan panjang dawai yang mula-mula  $x_{kiri} = -\frac{1}{2}l$  menjadi  $x_a$  dan dawai di sisi kanan juga terjadi peregangan yang menyebabkan panjang dawai yang mula-mula  $x_{kanan} = \frac{1}{2}l$  menjadi  $x_b$ . Selain terjadi peregangan juga terbentuk simpangan sebesar  $u$  yang bergantung pada  $x$  dan  $t$ . Perhitungan besar simpangan  $u$  yaitu:

jika ditinjau dari sisi kiri dawai adalah

$$u = x_{kiri} \tan \theta = -\frac{1}{2}l \tan \theta \quad (2.1)$$

dan jika ditinjau dari sisi kanan dawai adalah

$$u = x_{kanan} \tan \theta = \frac{1}{2}l \tan \theta \quad (2.2)$$

$\tan \theta$  didefinisikan sebagai  $\frac{\partial u}{\partial x}$  yang merupakan nilai kemiringan. Sehingga ditinjau dari sisi kiri dawai dapat ditentukan besar simpangan  $u$  yaitu,

$$u = -\frac{1}{2}l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

dan besar simpangan  $u$  dari sisi kanan dawai yaitu,

$$u = \frac{1}{2}l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

Selanjutnya yaitu menentukan panjang peregangan  $x_a$  dan  $x_b$ . Panjang  $x_a$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$x_a = \sqrt{u^2 + (x_{kiri})^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}l\right)^2} = \frac{1}{2}l\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad (2.5)$$

Panjang  $x_b$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$x_b = \sqrt{u^2 + (x_{kanan})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \frac{1}{2}l\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad (2.6)$$

Pertambahan panjang dari sisi kiri dawai dapat ditentukan dari panjang  $x_a$  yang diperoleh, yaitu selisih antara  $x_a$  dengan  $x_{kiri}$ . Besar pertambahan panjang ini dapat disimbolkan dengan  $x^-$  yaitu:

$$\begin{aligned} x^- &= x_a - x_{kiri} \\ &= \frac{1}{2}l\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \left(-\frac{1}{2}l\right) = \frac{1}{2}l\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dengan cara yang sama, pertambahan panjang dari sisi kanan dawai dapat ditentukan dari panjang  $x_b$  yang diperoleh, yaitu selisih antara  $x_b$  dengan  $x_{kanan}$ . Besar pertambahan panjang ini dapat disimbolkan dengan  $x^+$  yaitu

$$\begin{aligned} x^+ &= x_b - x_{kanan} \\ &= \frac{1}{2}l\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{1}{2}l\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Besar peregangan ( $e$ ) yang terjadi pada dawai dapat juga ditentukan dari nilai  $x^-$  dan  $x^+$  yang diperoleh pada persamaan (2.7) dan (2.8). Besar peregangan ( $e$ ) didefinisikan berdasarkan konsep elastisitas, yaitu:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.9)$$

dengan

$\Delta l$  : Pertambahan panjang dawai ( $m$ )

$l_0$  : Panjang mula-mula ( $m$ )

$e$  : Regangan.

Pertambahan panjang dawai dalam penelitian ini yaitu pertambahan panjang dawai di sisi kiri ( $x^-$ ) dan pertambahan panjang dawai di sisi kanan ( $x^+$ ). Panjang dawai sebelum mengalami peregangan didefinisikan dengan  $l_0$ . Dalam penelitian ini panjang dawai sebelum mengalami peregangan terbagi menjadi dua, yaitu di sisi kiri dawai ( $x_{kiri}$ ) dan di sisi kanan dawai ( $x_{kanan}$ ). Sehingga besar peregangan dawai di sisi kiri ( $e^-$ ) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$e^- = \frac{x^-}{x_i^-} = \frac{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right)}{-\frac{1}{2}l} = - \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \quad (2.10)$$

Dan diperoleh besar peregangan ( $e^+$ ) di sisi kanan dawai yaitu sebagai berikut

$$e^+ = \frac{x^+}{x_i^+} = \frac{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)}{\frac{1}{2}l} = \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (2.11)$$

### 2.1.2 Hukum-Hukum Fisika yang Terlibat

Konstruksi model matematika gerak dawai terbentuk dari pemanfaatan hukum fisika, seperti hukum Newton I sampai III, hukum Hooke, dan hukum Stokes. Dari hukum-hukum tersebut dapat diidentifikasi gaya-gaya yang terlibat dari masalah vibrasi dawai yang diberikan simpangan. Contohnya yaitu adanya gerak osilasi atau gerak bolak-balik hingga dawai kembali pada posisi setimbang atau berhenti ketika simpangan dawai dilepas (Kusumastuti, dkk: 2017).

Selain itu, disekitar dawai juga terjadi gaya gesek antara dawai dengan fluida (udara). Selain terjadi gaya gesek antara dawai dengan fluida di sekitar dawai ketika dawai dipetik, juga terjadi energi potensial ( $E_p$ ) yang memiliki satuan *Joule*. Energi potensial ini timbul ketika dawai pada alat musik petik diberi simpangan yang menyebabkan adanya partikel penyusun dawai yang bereaksi melawan gaya tarikan. Berikut adalah beberapa gaya dan energi potensial yang terjadi pada dawai alat musik petik ketika diberi simpangan, yaitu:

### 1. Gaya Pegas dan Energi Potensial Pegas ( $E_{p_{Pegas}}$ )

$E_{p_{Pegas}}$  dalam penelitian ini terjadi di beberapa *point* yaitu,

- a.  $E_{p_{Pegas}}$  terjadi karena adanya gaya pegas ( $F_{Pegas}$ ) pada dawai alat musik petik ketika diberi simpangan.
- b.  $E_{p_{Pegas}}$  terjadi ketika dawai pada alat musik petik mengalami pertambahan panjang akibat dawai diberi simpangan.
- c. Pertambahan panjang terjadi di sisi kanan dan di sisi kiri. Sehingga dalam menentukan  $E_{p_{Pegas}}$  melibatkan besar pertambahan panjang dawai di sisi kanan dan di sisi kiri.
- d. Pertambahan panjang dawai sebelum dawai alat musik petik diberi simpangan adalah nol, hal ini dikarenakan dawai belum terjadi pertambahan panjang baik di sisi kanan maupun di sisi kiri.

Langkah selanjutnya yaitu menentukan  $E_{p_{Pegas}}$  pada dawai dengan memperhatikan beberapa *point* yang telah diperoleh. Sehingga dapat ditentukan besar perubahan potensial pegas di sisi kiri ( $\Delta E_{p_{Pegas\ kiri}}$ ), yaitu

$$\begin{aligned} \Delta E p_{Pegas\ kiri} &= - \int_{x_{setimbang}^-}^{x_{setelah\ petikan}^-} F_{Pegas}(x^-) d(x^-) \\ \Delta E p_{Pegas\ kiri} &= - \int_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)} -k_p x^- d(x^-) \\ E p_{Pegas\ kiri} - E p_{Pegas\ kiri\ setimbang} &= \left[ \frac{1}{2} k_p (x^-)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)} \\ E p_{Pegas\ kiri} - (0) &= \frac{1}{2} k \left[ \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right)^2 - (0)^2 \right] \\ E p_{Pegas\ kiri} &= \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sedangkan perubahan potensial pegas di sisi kanan ( $\Delta E p_{pegas\ kanan}$ ), yaitu

$$\begin{aligned} \Delta E p_{Pegas\ kanan} &= - \int_{x_{setimbang}^+}^{x_{setelah\ petikan}^+} F_{Pegas}(x^-) d(x^-) \\ \Delta E p_{Pegas\ kanan} &= - \int_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)} -k_p x^- d(x^-) \\ E p_{Pegas\ kanan} - E p_{Pegas\ kanan\ setimbang} &= \left[ \frac{1}{2} k_p (x^-)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)} \\ E p_{Pegas\ kanan} - (0) &= \frac{1}{2} k_p \left[ \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right) \right)^2 - (0)^2 \right] \\ E p_{Pegas\ kanan} &= \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dengan demikian,  $E_{p_{Pegas\ total}}$  adalah penjumlahan dari persamaan (2.12) dan (2.13), yaitu:

$$E_{p_{Pegas}} = E_{p_{Pegas\ kiri}} + E_{p_{Pegas\ kanan}}$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{2}k_p \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2 + \frac{1}{2}k_p \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{2}k_p \left( \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2 \right)$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{2}k_p \left( \left( \frac{1}{4}l^2 \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \right) + \left( \frac{1}{4}l^2 \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right) \right) \right)$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{8}k_p l^2 \left( \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 2 \right) + \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 2 \right) \right)$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{8}k_p l^2 \left( 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4 \right)$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{4}k_p l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}k_p l^2$$

$$E_{p_{Pegas}} = \frac{1}{2}k_p l^2 \left( \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 \right) \tag{2.14}$$

## 2. Gaya Tegang dan Energi Potensial Tegangan ( $E_{p_{Tegangan}}$ )

Terdapat beberapa *point* penting yang menyebabkan adanya energi potensial tegangan ( $E_{p_{Tegangan}}$ ) dawai pada alat musik petik ketika diberi simpangan, diantaranya:

- Ketika dawai pada alat musik petik diberi simpangan, maka akan ada gaya tegangan ( $F_{Tegangan}$ ), hal ini menyebabkan timbulnya energi potensial tegangan ( $E_{p_{Tegangan}}$ )
- $E_{p_{Tegangan}}$  dawai pada alat musik petik ketika diberi simpangan terjadi selama dawai mengalami peregangan. Sehingga  $E_{p_{Tegangan}}$  dapat ditentukan dengan melibatkan besar peregangan dawai yang terjadi di sisi kanan maupun di sisi kiri dawai.
- Besar peregangan dawai sebelum diberi simpangan adalah nol. Hal ini disebabkan ketika dawai sebelum diberi simpangan tidak terjadi peregangan dawai baik di sisi kanan maupun di sisi kiri.

Langkah selanjutnya yaitu menentukan  $E_{p_{Tegangan}}$  pada dawai yang dilakukan dengan menerapkan *point-point* yang telah diperoleh tersebut. Sehingga dapat ditentukan besar perubahan potensial tegangan di sisi kiri ( $\Delta E_{p_{tegangan\ kiri}}$ ), yaitu:

$$\Delta E_{p_{Tegangan\ kiri}} = - \int_{e_{Setimbang}}^{e_{Setelah\ petikan}} F_{Tegangan\ kiri}(e^-) d(e^-)$$

$$\Delta E_{p_{Tegangan\ kiri}} = - \int_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}} -Ee^- d(e^-)$$

$$E_{p_{Tegangan\ kiri}} - E_{p_{Tegangan\ kiri\ setimbang}} = \left[ \frac{1}{2} E(e^-)^2 \right]_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}
Ep_{Tegangan\ kiri} - (0) &= \frac{1}{2}E \left[ \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 \right) - 0 \right] \\
Ep_{Tegangan\ kiri} &= \frac{1}{2}E \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 \right) \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Dan besar perubahan potensial tegangan di sisi kanan ( $\Delta Ep_{tegangan\ kanan}$ ), yaitu:

$$\begin{aligned}
\Delta Ep_{Tegangan\ kanan} &= - \int_{e^-_{Setimbang}}^{e^+_{Setelah\ petikan}} F_{Tegangan\ kiri}(e^-) d(e^-) \\
\Delta Ep_{Tegangan\ kanan} &= - \int_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1}} -Ee^+ d(e^+) \\
Ep_{Tegangan\ kanan} - Ep_{Tegangan\ kanan\ setimbang} &= \left[ \frac{1}{2}E(e^+)^2 \right]_0^{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1}} \\
Ep_{Tegangan\ kanan} - (0) &= \frac{1}{2}E \left[ \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) - 0 \right] \\
Ep_{Tegangan\ kanan} &= \frac{1}{2}E \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Dengan nilai  $Ep_{Tegangan\ kiri}$  pada persamaan (2.15) dan  $Ep_{Tegangan\ kanan}$  pada persamaan (2.16), dapat ditentukan  $Ep_{Tegangan\ total}$  yaitu:

$$\begin{aligned}
Ep_{Tegangan} &= Ep_{Tegangan\ kiri} + Ep_{Tegangan\ kanan} \\
Ep_{Tegangan} &= \frac{1}{2}E \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}E \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ep_{Tegangan} &= \frac{1}{2}E \left( \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right)^2 + \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - 1} \right)^2 \right) \\
Ep_{Tegangan} &= \frac{1}{2}E \left( \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) + \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 1} \right) \right) \\
Ep_{Tegangan} &= \frac{1}{2}E \left( \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2} \right) + \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2} \right) \right) \\
Ep_{Tegangan} &= \frac{1}{2}E \left( 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4 \right) \\
Ep_{Tegangan} &= E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2E \\
Ep_{Tegangan} &= 2E \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 \right) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

### 3. Gaya Gesek dan Energi Potensial Gesek ( $Ep_{Gesek}$ )

Terdapat beberapa *point* untuk menganalisis energi potensi gesek ( $Ep_{Gesek}$ ), diantaranya:

- a. Ketika dawai pada alat musik petik diberi simpangan maka terjadi gaya gesek ( $F_{Gesek}$ ), hal ini menyebabkan timbulnya energi potensial gesek ( $Ep_{Gesek}$ ).

- b.  $Ep_{Gesek}$  terjadi ketika dawai mengalami gerak osilasi dan membentuk simpangan akibat petikan.  $Ep_{Gesek}$  dapat ditentukan dengan melibatkan besar simpangan yang terbentuk baik ketika posisi setimbang maupun setelah petikan.
- c. Sebelum dawai pada alat musik petik diberi simpangan, maka belum terjadi osilasi pada dawai. Sehingga besar energi potensial gesek yang terjadi ketika dawai sebelum diberi simpangan adalah sebesar nol.

Langkah selanjutnya yaitu menentukan  $Ep_{Gesek}$  dawai yaitu dengan menerapkan *point-point* yang telah diperoleh tersebut. Sehingga dapat ditentukan besar perubahan potensial gesek ( $\Delta Ep_{Gesek}$ ), yaitu:

$$\begin{aligned}\Delta Ep_{Gesek} &= - \int_{u_{Setimbang}}^{u_{Setelah\ petikan}} F_G(u) d(u) \\ \Delta Ep_{Gesek} &= - \int_0^u k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d(u) \\ Ep_{Gesek} - Ep_{Gesek\ setimbang} &= -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) [u]_0^u \\ Ep_{Gesek} - (0) &= -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) [u - 0] \\ Ep_{Gesek} &= -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u\end{aligned}\tag{2.18}$$

Dari persamaan (2.14), (2.17), dan (2.18) dapat dihasilkan keseluruhan energi potensial atau energi potensial total  $Ep_{Total}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}EP_{Model} &= EP_{Pegas} + EP_{Tegangan} + EP_{Gesek} \\ &= \frac{1}{2} k_p l^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + 2E \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left( -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left( -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right)\end{aligned}\tag{2.19}$$

Selain energi potensial, juga terdapat energi kinetik ( $Ek$ ) yaitu energi yang terjadi pada suatu benda yang mengalami pergerakan. Semakin cepat benda bergerak maka energi kinetik juga semakin besar, berbeda ketika benda diam maka energi kinetiknya nol. Hal ini juga terjadi ketika dawai alat musik dipetik dan terjadi gerak bolak-balik pada dawai. Energi kinetik pada dawai alat musik petik didefinisikan sebagai berikut:

$$Ek_{Model} = \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (2.20)$$

### 2.1.3 Persamaan *Lagrange* dan Penurunan Persamaan *Lagrange*

Langkah berikutnya yaitu menentukan persamaan *Lagrange*, yaitu selisih antara energi kinetik dan energi potensial. sehingga didapatkan persamaan *Lagrange* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L &= Ek_{Model} - Ep_{Model} \\ &= \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + \left( -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \end{aligned} \quad (2.21)$$

Berdasarkan formula *Lagrange* yang telah diperoleh pada persamaan (2.21), model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (2.22)$$

Langkah pertama, persamaan (2.21) diturunkan terhadap variabel  $u$  untuk memperoleh bentuk yang memenuhi persamaan (2.22), adapun penurunannya yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= k \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya, persamaan (2.21) diturunkan terhadap variabel  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \left( \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \\ &= - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Selanjutnya menurunkan persamaan (2.21) terhadap variabel  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \left( \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \\ &= \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + k_b \eta u\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + k_b \eta u \right) \\ &= \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Dari pemaparan tersebut, diperoleh persamaan (2.21) yang memenuhi persamaan

(2.22) adalah:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) &= \frac{\partial L}{\partial u} \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0 \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} k_p l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l^2}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{E}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}$$

Dimana

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sehingga

$$\frac{E}{\rho} = c^2$$

dengan

$c$  : Cepat rambat gelombang ( $m/s$ )

$E$  : Modulus elastisitas ( $N/m^2$ )

$\rho$  : Massa jenis linier dawai ( $m/V$ )

Dan persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Kemudian parameter  $k_p$  yang menyatakan ukuran kekakuan dari dawai yang didefinisikan sebagai

$$k_p = \frac{E}{l}$$

maka perkalian antara kekakuan dawai ( $k_p$ ) dengan panjang dawai ( $l$ ) adalah

Modulus elastisitas ( $E$ ). Sehingga dapat dituliskan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.23)$$

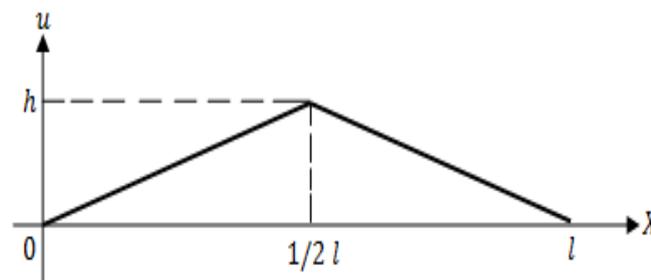
Vibrasi dawai pada alat musik petik yang diberi simpangan diasumsikan bahwa tidak akan berlangsung selama-lamanya, dengan artian pada waktu tertentu vibrasi dawai akan berhenti. Maka dalam persamaan (2.23) akan ditambahkan faktor peredam dan mendapatkan persamaan model matematika gerak dawai pada alat musik petik. Gaya peredam dalam kasus dawai alat musik petik yang kedua ujungnya terikat didefinisikan sebagai  $F_d = k_d \frac{\partial u}{\partial t}$  dengan  $k_d$  adalah faktor

peredam. Model tersebut berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua seperti yang terdapat pada persamaan berikut, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

Berdasarkan persamaan (2.24) nilai parameter  $c$  dan  $k_d$  akan selalu bernilai positif. Sehingga nilai dari  $B^2 - 4AC > 0$  dan persamaan (2.24) dikategorikan ke dalam PDP hiperbolik.

Tidak hanya pada persamaan panas, solusi yang memenuhi syarat awal dan syarat batas akan dicoba dicari dalam persamaan gelombang, dimana posisi dawai ditentukan pada waktu  $t = 0$ . Maka persamaan (2.24) perlu dilakukan analisis syarat awal dan syarat batasnya. Bentuk dawai yang diberi simpangan sebesar  $h$  dari posisi kesetimbangan pada posisi  $\frac{1}{2}l$  dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut (Kusumastuti, dkk: 2017):



**Gambar 2. 3** Kondisi Awal Dawai ketika Dipetik

Dawai yang mula-mula diam tidak mempunyai kecepatan akan didefinisikan sebagai fungsi  $f(x)$  ketika dawai tersebut dipetik. Sehingga syarat awalnya adalah sebagai berikut:

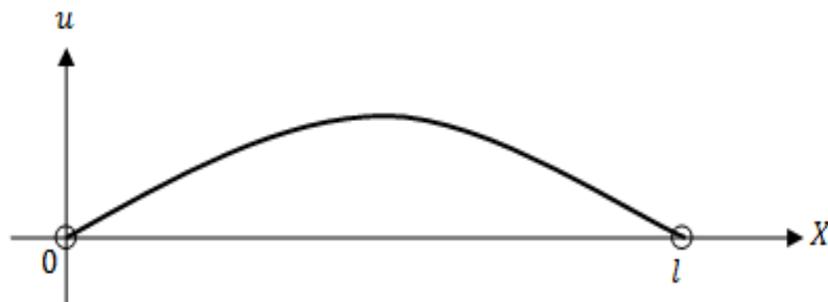
$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$$

Dimana fungsi  $f(x)$  dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ 2h - \frac{2hx}{l}, & \frac{1}{2}l < x \leq l \end{cases}$$

Dawai alat musik petik memiliki panjang berhingga yaitu dari  $x = 0$  hingga  $x = l$  seperti pada Gambar 2.4 berikut (Kusumastuti, dkk: 2017):



**Gambar 2. 4** Kondisi Dawai Alat Musik Setelah Dipetik

Pada Gambar 2.4 bisa diketahui bahwa kedua ujung dawai adalah terikat, sehingga tidak ada simpangan yang terjadi pada kedua ujung dawai atau bernilai nol. Maka bisa didefinisikan bahwa dawai tersebut memiliki dua syarat batas yaitu sebagai berikut:

$$u(0, t) = 0, \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0, \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

Dalam penelitian juga dijelaskan bahwa terjadi gerak bolak-balik menuju titik setimbang dawai atau biasa disebut gerak osilasi. Hal ini menyebabkan dengan adanya gerak osilasi maka sesuai dengan keadaan vibrasi dawai pada alat musik petik dalam dunia nyata. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model matematika hasil konstruksi untuk masalah vibrasi dawai pada alat musik petik bersifat *reliable*.

## 2.2 Metode Beda Hingga Implisit

Metode beda hingga adalah metode numerik yang seringkali digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan masalah matematis dari suatu gejala fisis. Prinsip dari metode beda hingga yaitu mendiskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor untuk mengganti turunan yang ada pada persamaan diferensial. Deret Taylor dalam matematika dapat didefinisikan sebagai suatu besaran tinjauan yang bergantung pada suatu ruang ( $x$ ) dan waktu ( $t$ ) tertentu, yang dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang mempunyai perbedaan yang kecil dengan ruang dan waktu tinjauan (Strauss, 2017).

Secara matematis, ekspansi deret Taylor di sekitar  $(x, t)$  yaitu:

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.25)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 - \dots \quad (2.26)$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.27)$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 - \dots \quad (2.28)$$

Jika titik diskrit pada  $x$  dinyatakan dengan menggunakan indeks subskrip  $j$  dan titik diskrit pada  $t$  dinyatakan dengan menggunakan superskrip  $n$ , maka dari ekspansi deret Taylor tersebut, didapat beberapa persamaan yaitu:

Persamaan beda maju pada ruang

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (2.29)$$

Persamaan beda mundur pada ruang

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta t} \quad (2.30)$$

Persamaan beda pusat pada ruang

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} \quad (2.31)$$

Persamaan beda maju pada waktu

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (2.32)$$

Persamaan beda mundur pada waktu

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.33)$$

Persamaan beda pusat pada waktu

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.34)$$

Penyelesaian dengan menggunakan metode beda hingga implisit lebih sulit dibandingkan dengan metode beda hingga eksplisit. Tetapi kelebihan dari metode beda hingga implisit yaitu stabil tanpa syarat, sehingga dapat diambil sembarang langkah waktu  $\Delta t$  yang tidak menimbulkan ketidakstabilan. Pembatasan  $\Delta t$  dalam metode ini yaitu untuk menjaga kesalahan pemotongan. Salah satu aproksimasi dalam metode beda hingga implisit yaitu menggunakan skema beda mundur pada waktu dan skema beda pusat terhadap ruang, atau biasa disebut dengan skema *Backward Time Central Space* (BTCS).

Sebagai contoh penerapan metode beda hingga implisit diterapkan pada persamaan berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2}c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.35)$$

Diskritisasi persamaan (2.35) dengan menggunakan metode *Backward Time*

*Central Space* (BTCS) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{\Delta t^2} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.37)$$

Substitusi persamaan (2.36) dan (2.37) ke dalam persamaan (2.35), maka

$$\frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{\Delta t^2} - \frac{1}{2}c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Geser time level 1 tingkat di atasnya, sehingga

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{1}{2}c^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

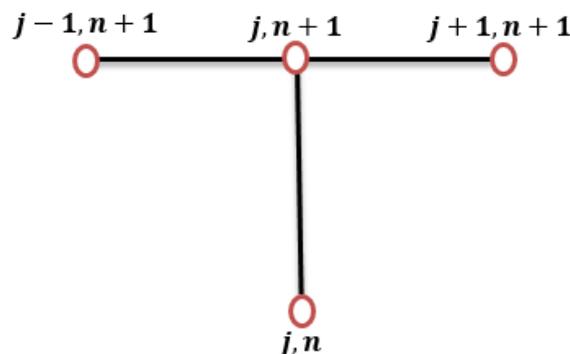
$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{\Delta x^2}\right) u_j^{n+1} - \frac{2}{\Delta t^2} u_j^n + \frac{1}{\Delta t^2} u_j^{n-1} - \left(\frac{c^2}{2\Delta x^2}\right) u_{j+1}^{n+1} - \left(\frac{c^2}{2\Delta x^2}\right) u_{j-1}^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2 \Delta t^2}\right) u_j^{n+1} - \frac{2}{\Delta t^2} u_j^n + \frac{1}{\Delta t^2} u_j^{n-1} - \frac{c^2}{2\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} - \frac{c^2}{2\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} = 0$$

Diu dengan  $\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right)$

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) u_j^{n+1} + \frac{1}{2} u_j^{n-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (2.38)$$



**Gambar 2.5** Skema Stensil Metode Implisit

Gambar 2.5 menunjukkan skema stensil dari skema implisit. Dari gambar tersebut, terlihat bahwa nilai  $u_j^n$  bergantung pada tiga nilai pada *time level*  $n + 1$ .

### 2.3 Syarat Kestabilan Skema Numerik

Zauderer pada tahun 2009 mengatakan bahwa stabil dan tidak stabil adalah konsep dari permasalahan persamaan diferensial parsial. Kestabilan dan ketidakstabilan sering diterapkan dalam metode beda hingga. Akibat dari skema beda hingga yang tidak stabil yaitu solusi numerik yang dihasilkan kurang mendekati solusi eksak, hal ini disebabkan kesalahan dalam proses pendekatan untuk mendapatkan solusi numerik terhadap solusi nilai sebenarnya dari masalah yang diberikan.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan metode beda hingga yaitu stabilitas *von Neumann* atau biasa dikenal dengan stabilitas *Fourier*. Penerapan stabilitas Fourier pada persamaan beda yaitu dengan mensubstitusikan  $u_j^n = \lambda^n e^{ikjh}$  ke dalam persamaan beda hingga.

Dimana:

- $n$  : menunjukkan waktu
- $i$  : menunjukkan posisi
- $j$  : menunjukkan vektor
- $kh$  : menunjukkan interval  $[0, 2\pi]$

Syarat cukup dan syarat perlu stabilitas *von Neumann* yaitu  $|\lambda| \leq 1$  (Zauderer, 2009).

Sebagai contoh penerapan analisis kestabilan skema numerik dapat diterapkan pada persamaan 2.18 yaitu sebagai berikut:

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) \lambda^{n+1} e^{ikjh} + \frac{1}{2} \lambda^{n-1} e^{ikjh} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} \lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h} = \lambda^n e^{ikjh}$$

Persamaan tersebut dibagi dengan  $\lambda^n e^{ikjh}$ , diperoleh

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) \lambda + \frac{1}{2} \lambda^{-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} \lambda e^{ikh} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} \lambda e^{-ikh} = 1$$

Karena  $e^{ikh} = \cos kh + i \sin kh$  dan  $e^{-ikh} = \cos kh - i \sin kh$ , sehingga

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) \lambda + \frac{1}{2} \lambda^{-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} \lambda \cos kh + i \sin kh - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} \lambda \cos kh - i \sin kh = 1$$

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) \lambda + \frac{1}{2} \lambda^{-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} 2\lambda \cos kh = 1$$

Dikalikan dengan  $\lambda$ , diperoleh

$$\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) \lambda^2 + \frac{1}{2} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} 2\lambda^2 \cos kh = \lambda$$

$$\left(\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) - \frac{c^2 \Delta t^2}{4\Delta x^2} 2 \cos kh\right) \lambda^2 + \frac{1}{2} = \lambda$$

$$\left(\left(\frac{\Delta x^2 + c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) - \left(\frac{2c^2 \Delta t^2 \cos kh}{4\Delta x^2}\right)\right) \lambda^2 + \frac{1}{2} = \lambda$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2 + 2c^2 \Delta t^2 - 2c^2 \Delta t^2 \cos kh}{4\Delta x^2}\right) \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \quad (2.39)$$

Sehingga akar-akar persamaan dari persamaan tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\left(\frac{2\Delta x^2 + 2c^2 \Delta t^2 - 2c^2 \Delta t^2 \cos kh}{4\Delta x^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}}{2\left(\frac{2\Delta x^2 + 2c^2 \Delta t^2 - 2c^2 \Delta t^2 \cos kh}{4\Delta x^2}\right)} \leq 1 \quad (2.40)$$

Karena persamaan (2.40) memuat  $\cos kh$ , maka diambil titik diskritnya yaitu  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$ ,  $\cos kh = 1$ , sehingga bisa dicari nilai dari lambda nya.

## 2.4 Analisis Orde Error

Operasi dan besaran matematika yang pasti sering dinyatakan dengan penggunaan aproksimasi, hal ini biasanya dapat menimbulkan kesalahan numerik. (Chapra dan Canale, 1998:56). Terdapat tiga macam dalam kesalahan, yaitu:

1. *round-off error* atau kesalahan pembulatan
2. *truncation error* atau kesalahan pemotongan
3. kesalahan bawaan

Menurut Triatmodjo pada tahun 2002, perhitungan yang tidak sesuai dengan prosedur matematika yang benar akan menyebabkan kesalahan pemotongan (*truncation error*). Contohnya semua suku yang tidak berhingga adalah suatu proses yang sulit diperhitungkan, sehingga penggantian suku yang tidak berhingga tersebut menjadi dengan suku berhingga akan menyebabkan kesalahan pemotongan. Akibatnya hasil dari perhitungan ini akan berbeda dengan solusi eksak. Kesalahan pemotongan dalam penelitian ini terjadi saat pemotongan orde pada deret Taylor.

Hal lain terjadi karena beberapa angka terakhir dari suatu bilangan tidak diperhitungkan yang menyebabkan kesalahan pembulatan (*round-off error*). Misalnya dalam menggunakan bilangan perkiraan untuk menggantikan bilangan eksak. Solusi dari skema yang digunakan dikatakan konsisten jika selisih antara persamaan yang diperoleh dengan persamaan diferensial parsialnya menuju nol atau dalam kata lain kriteria konsistensi akan terpenuhi jika  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Nilai hampiran memiliki tanda-tanda positif maupun negatif. Nilai galatnya bernilai positif jika nilai hampiran (aproksimasi) lebih kecil daripada nilai sejati. Sedangkan galatnya bernilai negatif jika nilai hampiran (aproksimasi) lebih besar

daripada nilai sejati atau memiliki penyebut yang mungkin nilainya negatif juga akan membuat galatnya negatif. Pada saat melakukan perhitungan, seringkali lebih tertarik terhadap nilai mutlaknya lebih kecil daripada suatu toleransi  $\varepsilon_s$  yang telah ditetapkan sebelumnya. Hal ini menyebabkan tanda galat tidak dipedulikan, oleh karena itu dibutuhkan penerapan nilai mutlak untuk persamaan ini.

## 2.5 Kajian Vibrasi Dawai dalam Islam

Getaran merupakan gerak osilasi atau gerak bolak-balik yang berulang dalam lintasan dan selang waktu yang sama di sekitar titik kesetimbangan. Benda dikatakan setimbang jika benda tetap diam atau benda bergerak dengan kecepatan konstan. Jadi benda tidak akan mengalami getaran jika benda tersebut tidak dikenai gaya atau simpangan. Gerak osilasi atau getaran ini sering dijumpai dalam kehidupan, misalnya roda keseimbangan arloji, massa yang diikatkan pada pegas, atau dawai pada alat musik petik seperti gitar, sasando, biola dan lain sebagainya.

Allah berfirman:

*“Dan sungguh, Kami telah memberikan kepadamu tujuh (ayat) yang (dibaca) berulang-ulang dan Alquran yang agung.”* –QS. Al-Hijr[15]: 87

Ali, Umar, Ibnu Mas'ud, dan Ibnu Abbas berpendapat bahwa yang dimaksud dengan *as-sab'ul masani* ialah surat Al-Fatihah atau surat yang terdiri dari tujuh ayat. Qatadah mengatakan, telah diceritakan kepada kami bahwa yang dimaksud dengan *sab'ul masani* ialah *fatihatul kitab*, dan bahwa surat Al-Fatihah ini dibaca berulang-ulang pada setiap rakaat salat fardu maupun salat sunah.

Dari surat Al-Hijr ayat 87 tersebut merupakan pernyataan Allah SWT tentang kandungan Alquran yang mengingatkan kita dengan berbagai perumpamaan secara berulang-ulang. Apabila kita perluas makna ayat tersebut

dengan peristiwa atau gejala fisis bahwa Allah SWT menciptakan alam semesta dengan wujudnya atau materinya selalu berulang-ulang dan seimbang. Dalam ayat lain juga dijelaskan bahwa semua yang Allah ciptakan itu seimbang. Hal ini dijelaskan dalam surat al-Mulk ayat 3 yang artinya,

*“yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Karena sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu Lihat sesuatu yang tidak seimbang?”*

Berdasarkan surat al-Mulk ayat 3, kita tahu bahwa Allah menciptakan langit tampak berlapis-lapis dan juga astronomi telah menjelaskan secara terperinci mengenai gerakan benda-benda langit. Pada tahun 2009, Ali mengatakan bahwa susunan benda langit dalam keindahan angkasa yang begitu luas berjalan sesuai dengan hukum gerak dalam ruang yang sangat besar. Cobalah pikirkan, apakah ada sesuatu yang tidak seimbang dalam setiap ciptaan Allah. Tetapi jika dilihat dari fenomena gempa bumi, bumi yang mulanya pada posisi seimbang, bumi juga akan bergetar dengan kehendak Allah SWT. Hal ini merupakan bukti kebesaran dan kekuasaan Allah SWT.

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Diskritisasi Model Matematika dengan Skema BTCS

Langkah-langkah untuk mencari solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) akan dijelaskan dalam subbab ini. Model matematika vibrasi dawai yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Dengan kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad 0 < x < l$$

Dan kondisi batas sebagai berikut:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad \text{untuk setiap} \quad t > 0$$

Diskritisasi persamaan (3.1) menggunakan metode BTCS sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{\Delta t^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Substitusi persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4) ke dalam persamaan (3.1), maka

$$\frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{\Delta t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + k_d \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = 0$$

Geser time level 1 tingkat di atasnya, sehingga

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \left( \frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + k_d \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{c^2}{\Delta x^2} + \frac{4c^2}{l\Delta x^2} + \frac{k_d}{\Delta t} \right) u_j^{n+1} - \left( \frac{2}{\Delta t^2} + \frac{k_d}{\Delta t} \right) u_j^n + \frac{1}{\Delta t^2} u_j^{n-1} - \left( \frac{c^2}{2\Delta x^2} + \frac{2c^2}{l\Delta x^2} \right) u_{j+1}^{n+1} - \\ & \left( \frac{c^2}{2\Delta x^2} + \frac{2c^2}{l\Delta x^2} \right) u_{j-1}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sehingga menjadi

$$\begin{aligned} & \left( \frac{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 \Delta t^2} \right) u_j^{n+1} - \left( \frac{2+k_d \Delta t}{\Delta t^2} \right) u_j^n + \frac{1}{\Delta t^2} u_j^{n-1} - \left( \frac{c^2 l + 4c^2}{2l\Delta x^2} \right) u_{j+1}^{n+1} - \\ & \left( \frac{c^2 l + 4c^2}{2l\Delta x^2} \right) u_{j-1}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) dikalikan dengan  $\left( \frac{l\Delta x^2 \Delta t^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right)$  menjadi

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^{n-1} - \\ & \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^{n+1} - \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^{n-1} + \\ & \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^{n+1} + \\ & \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kelompokkan waktu  $n + 1$  di ruas kiri sedangkan waktu  $n$  dan  $n - 1$  di ruas

kanan, sehingga menjadi

$$\begin{aligned} & u_j^{n+1} - \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^{n+1} - \\ & \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^{n+1} = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \\ & \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^{n-1} \end{aligned}$$

Misalkan

$$\left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l \Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) = a$$

$$\left( \frac{2l \Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l \Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) = b$$

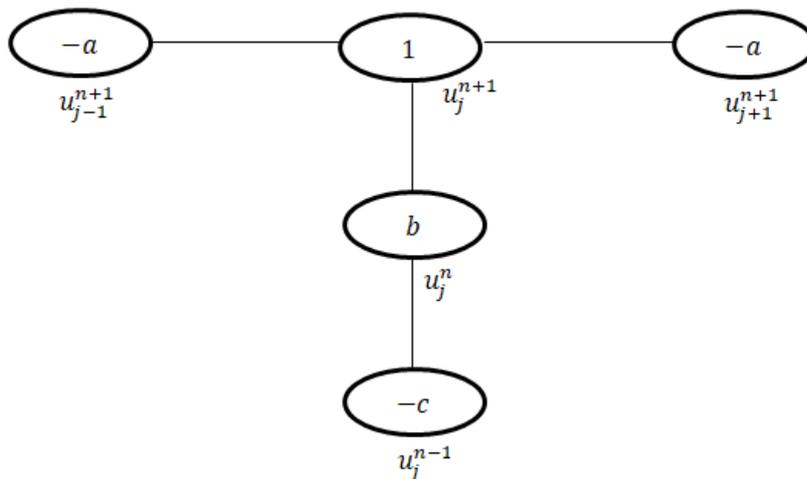
$$\left( \frac{l \Delta x^2}{l \Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) = c$$

Sehingga persamaan tersebut menjadi

$$u_j^{n+1} - (a)u_{j+1}^{n+1} - (a)u_{j-1}^{n+1} = (b)u_j^n - (c)u_j^{n-1} \quad (3.9)$$

Stensil bentuk diskrit dari persamaan (3.9) dengan metode BTCS adalah sebagai

berikut:



**Gambar 3. 1** Bentuk Stensil BTCS

Dengan diskritisasi kondisi awal

$$1. \quad u(x, 0) = f(x) \approx u_j^0$$

Dimana fungsi  $f(x)$  dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \\ 2h - \frac{2hx}{l}, & \frac{1}{2}l < x \leq l \end{cases}$$

$$2. \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{u_j^0 - u_j^{-1}}{\Delta t} = 0$$

$$u_j^0 - u_j^{-1} = 0$$

$$u_j^0 = u_j^{-1}$$

dan kondisi batasnya

$$3. \quad u(0, t) = 0 \approx u_0^n$$

$$4. \quad u(l, t) = 0 \approx u_{j_{max}}^n$$

Nilai yang sudah diketahui sebelumnya digunakan untuk mencari nilai yang belum diketahui. Kemudian substitusi kondisi awal dan kondisi batas untuk mencari nilai  $u$  yang belum diketahui. Karena suku dengan indeks terkecil adalah  $u_{j-1}^{n+1}$  maka  $\forall_n = 0, 2, 3, \dots, N_t - 1$  serta  $\forall_j = 1, 3, \dots, N_x - 1$ . Hal ini disebabkan jika dimulai dari 0 maka suku terkecil tersebut akan menjadi  $u_{-1}^{n+1}$ . Hal ini akan memunculkan nilai di luar domain. Oleh karena itu, dilakukan iterasi dari  $n = 0$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1$ , sehingga diperoleh nilai-nilai parameter sebagai berikut:

Untuk  $j = 1$  diperoleh:

$$u_1^{0+1} - (a)u_{1+1}^{0+1} - (a)u_{1-1}^{0+1} = (b)u_1^0 - (c)u_1^{0-1}$$

$$u_1^1 - (a)u_2^1 - (a)u_0^1 = (b)u_1^0 - (c)u_1^{-1}$$

Namun terdapat masalah baru yaitu nilai  $(a)u_0^1$  merupakan nilai yang sudah diketahui pada batas kiri, dan  $(b)u_1^0$ ,  $(c)u_1^{-1}$  juga merupakan nilai yang sudah diketahui pada kondisi awal, maka hasil iterasi pada persamaan tersebut menjadi:

$$u_1^1 - (a)u_2^1 = (b)u_1^0 - (c)u_1^{-1} + (a)u_0^1$$

$$u_1^1 - (a)u_2^1 = (b - c)u_1^0 + (a)u_0^1$$

Untuk  $j = 2$  diperoleh:

$$u_2^1 - (a)u_3^1 - (a)u_1^1 = (b)u_2^0 - (c)u_2^{-1}$$

$$u_2^1 - (a)u_3^1 - (a)u_1^1 = (b - c)u_2^0$$

Untuk  $j = 3$  diperoleh:

$$u_3^1 - (a)u_4^1 - (a)u_2^1 = (b)u_3^0 - (c)u_3^{-1}$$

$$u_3^1 - (a)u_4^1 - (a)u_2^1 = (b - c)u_3^0$$

Untuk  $j = 4$  diperoleh:

$$u_4^1 - (a)u_5^1 - (a)u_3^1 = (b)u_4^0 - (c)u_4^{-1}$$

$$u_4^1 - (a)u_5^1 - (a)u_3^1 = (b - c)u_4^0$$

Untuk  $j = 5$  diperoleh:

$$u_5^1 - (a)u_6^1 - (a)u_4^1 = (b)u_5^0 - (c)u_5^{-1}$$

$$u_5^1 - (a)u_6^1 - (a)u_4^1 = (b - c)u_5^0$$

Untuk  $j = N_x$  diperoleh:

$$u_{N_x}^{n+1} - (a)u_{N_x+1}^{n+1} - (a)u_{N_x-1}^{n+1} = (b)u_{N_x}^n - (c)u_{N_x}^{n-1}$$

$$u_{N_x}^{n+1} - (a)u_{N_x+1}^{n+1} - (a)u_{N_x-1}^{n+1} = (b - c)u_{N_x}^n$$

Persamaan-persamaan tersebut diubah ke dalam bentuk perkalian matriks,

sehingga menjadi:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a & 1 & -a & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ \vdots \\ u_{N_x+1}^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (b-c)u_1^0 + (a)u_0^1 \\ (b-c)u_2^0 \\ (b-c)u_3^0 \\ (b-c)u_4^0 \\ (b-c)u_5^0 \\ \vdots \\ (b-c)u_{N_x}^0 \end{bmatrix}$$

Kedua ruas matriks tersebut dikalikan dengan  $\mathbf{A}^{-1}$ , sehingga menjadi

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Karena  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ , maka nilai matrik  $\mathbf{X}$  dapat dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Dalam menyelesaikan persamaan tersebut, maka digunakan bantuan software *OCTAVE* untuk memudahkan perhitungannya.

Selanjutnya untuk iterasi dari  $n = 1$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1$ , sehingga diperoleh nilai-nilai parameter sebagai berikut:

Untuk  $j = 1$  diperoleh:

$$u_1^{1+1} - (a)u_{1+1}^{1+1} - (a)u_{1-1}^{1+1} = (b)u_1^1 - (c)u_1^{1-1}$$

$$u_1^2 - (a)u_2^2 - (a)u_0^2 = (b)u_1^1 - (c)u_1^0$$

Namun terdapat masalah baru yaitu nilai  $(a)u_0^2$  merupakan nilai yang sudah diketahui pada batas kiri, dan  $-(c)u_1^0$  juga merupakan nilai yang sudah diketahui pada kondisi awal, maka hasil iterasi pada persamaan tersebut menjadi:

$$u_1^2 - (a)u_2^2 = (b)u_1^1 - (c)u_1^0 + (a)u_0^2$$

Untuk  $j = 2$  diperoleh:

$$u_2^2 - (a)u_3^2 - (a)u_1^2 = (b)u_2^1 - (c)u_2^0$$

Untuk  $j = 3$  diperoleh:

$$u_3^2 - (a)u_4^2 - (a)u_2^2 = (b)u_3^1 - (c)u_3^0$$

Untuk  $j = 4$  diperoleh:

$$u_4^2 - (a)u_5^2 - (a)u_3^2 = (b)u_4^1 - (c)u_4^0$$

Untuk  $j = 5$  diperoleh:

$$u_5^2 - (a)u_6^2 - (a)u_4^2 = (b)u_5^1 - (c)u_5^0$$

Untuk  $j = N_x$  diperoleh:

$$u_{N_x}^{n+1} - (a)u_{N_x+1}^{n+1} - (a)u_{N_x-1}^{n+1} = (b)u_{N_x}^n - (c)u_{N_x}^{n-1}$$

Persamaan-persamaan tersebut diubah ke dalam bentuk perkalian matriks,

sehingga menjadi:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & -a & 1 & -a & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ \vdots \\ u_{N_x+1}^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (b)u_1^1 - (c)u_1^0 + (a)u_0^2 \\ (b)u_2^1 - (c)u_2^0 \\ (b)u_3^1 - (c)u_3^0 \\ (b)u_4^1 - (c)u_4^0 \\ (b)u_5^1 - (c)u_5^0 \\ \vdots \\ (b)u_{N_x}^n - (c)u_{N_x}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Kedua ruas matriks tersebut dikalikan dengan  $\mathbf{A}^{-1}$ , sehingga menjadi

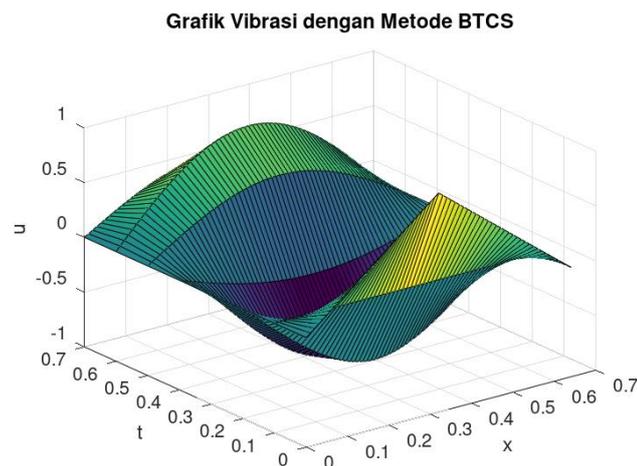
$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Karena  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ , maka nilai matrik  $\mathbf{X}$  dapat dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Dalam menyelesaikan persamaan tersebut, maka digunakan bantuan software *OCTAVE* untuk memudahkan perhitungannya.

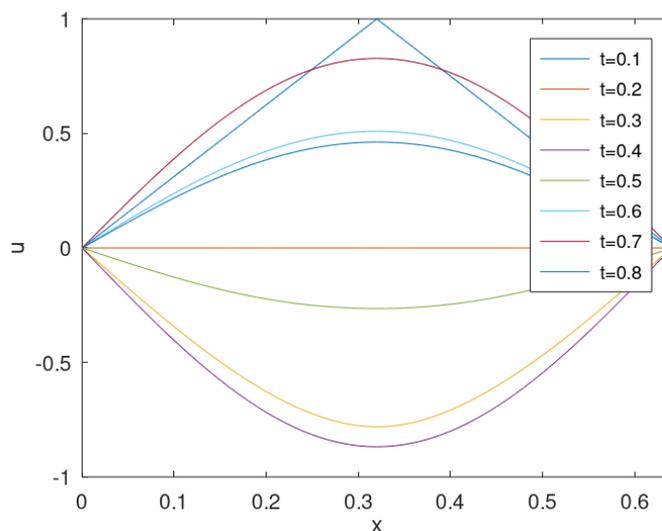
Simulasi grafik untuk solusi numerik pada persamaan (3.9) dilakukan dengan menggunakan software *OCTAVE*. Diambil  $\Delta t = 0.1$ , sehingga menghasilkan *output* grafik yaitu:



**Gambar 3.2** Grafik Vibrasi dengan Metode BTCS

Gambar 3.2 menunjukkan hasil simulasi untuk solusi  $u(x, t)$  yang menggambarkan pergerakan simpangan dawai pada alat musik petik yang berubah terhadap nilai  $x$

dan waktu  $t$  pada interval  $x = \{x|0 \leq x \leq 0.64\}$  dan  $t = \{t|0 \leq t \leq 0.7\}$ . Terlihat semakin lama, pergerakan solusi  $u(x, t)$  menuju posisi setimbang  $(0,0)$ . Tampilan grafik selanjutnya sebagai berikut



**Gambar 3. 3** Grafik Simpangan Dawai  $u(x, t)$

Gambar 3.3 menunjukkan hasil simulasi untuk solusi  $u(x, t)$  yang menggambarkan pergerakan simpangan dawai alat musik petik yang berubah terhadap nilai  $x$  pada interval  $x = \{x|0 \leq x \leq 0.64\}$ . Terlihat terjadi gerak bolak balik atau gerak osilasi yang disertai dengan perubahan pergerakan simpangan dawai  $u(x, t)$  yang semakin kecil menuju titik kesetimbangan  $(0,0)$ .

Dari kedua hasil simulasi ini, dapat kita simpulkan perilaku gerak dawai pada alat musik petik semakin lama bergerak kembali ke keadaan semula yakni pada posisi setimbang dawai. Hal ini sesuai dengan keadaan riil untuk gerak dawai pada alat musik petik dalam dunia nyata yakni gerak dawai tidak berlangsung selama-lamanya artinya dapat berhenti pada suatu waktu tertentu. Sehingga dapat dikatakan metode BTCS dalam penyelesaian model matematika vibrasi dawai pada

alat musik petik yang diperoleh sudah bersifat *reliable* dan model yang telah dikonstruksi pada penelitian sebelumnya sudah valid.

## 3.2 Analisis Keabsahan Solusi Metode Implisit

### 3.2.1 Analisis Kestabilan Metode BTCS

Setelah persamaan (3.1) didiskritkan sehingga diperoleh persamaan (3.8) langkah selanjutnya yaitu menganalisis kestabilan. Hal ini bertujuan untuk mengetahui metode BTCS stabil atau tidak stabil. Dalam penelitian ini akan dilakukan analisis kestabilan *von Neumann* dengan cara mensubstitusikan  $u_j^n = \lambda^n e^{ikjh}$ ,  $\forall i = \sqrt{-1}$  pada persamaan beda (3.8), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} e^{ikjh} &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^n e^{ikjh} - \\ &\left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{n-1} e^{ikjh} + \\ &\left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h} + \\ &\left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h} \end{aligned}$$

Agar lebih sederhana, persamaan tersebut dibagi dengan  $\lambda^n e^{ikjh}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \\ &\left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda e^{ikh} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda e^{-ikh} \end{aligned}$$

Karena  $e^{ikh} = \cos kh + i \sin kh$  dan  $e^{-ikh} = \cos kh - i \sin kh$ , maka

$$\begin{aligned} \lambda &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \\ &\left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda (\cos kh + i \sin kh) + \\ &\left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda (\cos kh - i \sin kh) \\ \lambda &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \\ &\left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) (\lambda \cos kh + \lambda i \sin kh + \lambda \cos kh - \lambda i \sin kh) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \lambda &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \\ &\left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) 2\lambda \cos kh \end{aligned}$$

Dikalikan dengan  $\lambda$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) + \\ &\left( \frac{2c^2 l\Delta t^2 \cos kh + 8c^2 \Delta t^2 \cos kh}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^2 \end{aligned}$$

Atau

$$\begin{aligned} \lambda^2 &- \left( \frac{2c^2 l\Delta t^2 \cos kh + 8c^2 \Delta t^2 \cos kh}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^2 - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda + \\ &\left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) = 0 \\ &\left( \frac{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t) - (2c^2 l\Delta t^2 \cos kh + 8c^2 \Delta t^2 \cos kh)}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^2 - \\ &\left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) = 0 \\ &\left( \frac{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t - 2c^2 l\Delta t^2 \cos kh - 8c^2 \Delta t^2 \cos kh}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^2 - \\ &\left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) = 0 \quad (3.10) \end{aligned}$$

Agar lebih sederhana, persamaan (3.10) dikalikan dengan  $(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)$ , sehingga menjadi

$$\left(\frac{2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t - 2c^2l\Delta t^2 \cos kh - 8c^2\Delta t^2 \cos kh}{2}\right)\lambda^2 - (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)\lambda + (l\Delta x^2) = 0$$

atau

$$(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t - c^2l\Delta t^2 \cos kh - 4c^2\Delta t^2 \cos kh)\lambda^2 - (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)\lambda + (l\Delta x^2) = 0$$

Sehingga akar-akar persamaan dari persamaan tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)}{2(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t - c^2l\Delta t^2 \cos kh + 4c^2\Delta t^2 \cos kh)} \pm \frac{\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t - c^2l\Delta t^2 \cos kh - 4c^2\Delta t^2 \cos kh)(l\Delta x^2)}}{2(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t - c^2l\Delta t^2 \cos kh + 4c^2\Delta t^2 \cos kh)} \leq 1 \quad (3.11)$$

Terlihat bahwa persamaan (3.11) mengandung  $\cos kh$ , selanjutnya diambil titik diskritnya yaitu  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$ ,  $\cos kh = 1$ , hal ini dikarenakan nilai maksimum dari  $\cos$  adalah 1, sedangkan nilai minimum dari  $\cos$  adalah  $-1$ , sehingga dapat diuraikan sebagai berikut:

Untuk  $\cos kh = -1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.11) maka diperoleh

$$|\lambda_1| = \frac{\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 + (\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)(l\Delta x^2)})^2}}{(2(l\Delta x^2 + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t + c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2))^2} \leq 1$$

$$= \left( \frac{\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 + (\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)})^2}}{2(l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + k_d l\Delta x^2\Delta t)} \right)^2 \leq 1^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq \\
&1 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 + (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 8c^2 l\Delta t^2 + 32c^2 \Delta t^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Dan  $|\lambda_2|$  diperoleh

$$\begin{aligned}
|\lambda_2| &= \\
&\sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2))^2}} \leq 1 \\
&= \left( \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{2(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2}} \right)^2 \leq \\
&1^2 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq \\
&1 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= \frac{-4(l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= \frac{(4l\Delta x^2 + 8c^2 l\Delta t^2 + 32c^2 \Delta t^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= -\frac{(4l\Delta x^2 + 8c^2 l\Delta t^2 + 32c^2 \Delta t^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)} \leq 1 \\
&= -\frac{2(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)} \leq 1
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2l\Delta x^2}{2l\Delta x^2+4c^2l\Delta t^2+16c^2\Delta t^2+2k_d l\Delta x^2\Delta t} \leq 1 \quad (3.13)$$

Agar lebih sederhana, persamaan (3.13) dibagi dengan  $2l\Delta x^2$  sehingga menjadi

$$= -\frac{1}{2l\Delta x^2+4c^2l\Delta t^2+16c^2\Delta t^2+2k_d l\Delta x^2\Delta t} \leq 1 \quad (3.14)$$

Untuk  $\cos kh = 0$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.11), maka diperoleh

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \\ &= \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2(l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t))^2}} \leq 1 \\ &= \\ &= \left( \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2}} \right)^2 \leq \\ &= 1^2 \\ &= \frac{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2} \leq \\ &= 1 \\ &= \frac{(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 + (2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2} \leq 1 \\ &= \frac{2(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2} \leq 1 \\ &= \frac{2(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - (4l\Delta x^2+4c^2l\Delta t^2+16c^2\Delta t^2+4k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2} \leq 1 \\ &= \frac{2(2l\Delta x^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2 - (4l\Delta x^2+4c^2l\Delta t^2+16c^2\Delta t^2+4k_d l\Delta x^2\Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t)^2} \leq 1 \quad (3.15) \end{aligned}$$

Dan  $|\lambda_2|$  diperoleh

$$\begin{aligned}
|\lambda_2| &= \\
&= \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t))^2}} \leq 1 \\
&= \left( \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2}} \right)^2 \leq \\
&= 1^2 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq \\
&= 1 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= \frac{-4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2} \leq 1 \\
&= -\frac{(4l\Delta x^2 + 4c^2 l\Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)} \leq 1 \\
&= -\frac{2(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)} \leq 1 \\
&= -\frac{2l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \leq 1 \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Agar lebih sederhana, persamaan (3.16) dibagi dengan  $2l\Delta x^2$  sehingga menjadi

$$= -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \leq 1 \tag{3.17}$$

Untuk  $\cos kh = 1$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.11), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
|\lambda_1| &= \\
&= \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t - c^2 l\Delta t^2 - 4c^2 \Delta t^2)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t - c^2 l\Delta t^2 - 4c^2 \Delta t^2))^2}} \leq 1 \\
&= \left( \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2}} \right)^2 \leq 1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 + \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 + (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Dan  $|\lambda_2|$  diperoleh

$$\begin{aligned}
|\lambda_2| &= \\
&\sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t - c^2 l\Delta t^2 - 4c^2 \Delta t^2)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2(l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t - c^2 l\Delta t^2 - 4c^2 \Delta t^2))^2}} \leq 1 \\
&= \left( \sqrt{\frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2}} \right)^2 \leq 1^2 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - \left(\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}\right)^2}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - (2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= \frac{-4(l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= -\frac{(4l\Delta x^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)^2} \leq 1 \\
&= -\frac{(4l\Delta x^2 + 4k_d l\Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)} \leq 1 \\
&= -\frac{2(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2)} \leq 1 \\
&= -\frac{2l\Delta x^2}{2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2} \leq 1 \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Agar lebih sederhana, persamaan (3.19) dibagi dengan  $2l\Delta x^2$  sehingga menjadi

$$= -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t^2} \leq 1 \tag{3.20}$$

Setelah melakukan perhitungan pada saat  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$  dan  $\cos kh = 1$  diperoleh  $|\lambda_1|$

Saat  $\cos kh = -1$ , diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 8c^2 l \Delta t^2 + 32c^2 \Delta t^2 + 4k_d l \Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l \Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 0$ , diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 4c^2 l \Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 4k_d l \Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 1$ , diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 4k_d l \Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2} \right| \leq 1$$

Dan setelah melakukan perhitungan pada saat  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$  dan  $\cos kh = 1$  diperoleh  $|\lambda_2|$

Saat  $\cos kh = -1$ , diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 4c^2 l \Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 0$ , diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 1$ , diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right| \leq 1$$

Berdasarkan penguraian analisis kestabilan tersebut, jelas bahwa pembilang pada persamaan baik saat  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$  dan  $\cos kh = 1$  lebih kecil daripada penyebutnya, sehingga kesimpulan yang dapat diambil yaitu  $|\lambda_1|$  dan  $|\lambda_2| \leq 1$  selalu stabil tanpa syarat. Artinya skema BTCS akan tetap stabil tanpa syarat apapun untuk sembarang nilai jika dimasukkan parameter-parameternya pada model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik ini.

### 3.2.2 Analisis Konsistensi

Analisis konsistensi metode BTCS dapat dicari dengan menerapkan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan beda (3.8). Penerapan ekspansi deret Taylor pada persamaan beda (3.8) adalah sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots$$

$$u_j^{n-1} = u_j^n - \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n - \dots$$

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n + \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \dots$$

$$u_{j-1}^{n+1} = u_j^n - \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n - \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \dots$$

Perhitungan dilakukan pada persamaan (3.8) dengan cara menyederhanakan  $u_{j+1}^{n+1}$

dan  $u_{j-1}^{n+1}$  terlebih dahulu, yaitu:

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} &= \left( u_j^n + \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \dots \right) + \left( u_j^n - \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n - \right. \\ &\quad \left. \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n - \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} &= u_j^n + u_j^n + \Delta x u_x \Big|_j^n - \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \\
&\quad \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n - \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \\
&\quad \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \\
&\quad \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \\
&\quad \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \\
u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} &= 2u_j^n + 2\Delta t u_t \Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \\
&\quad \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n
\end{aligned}$$

Kemudian persamaan yang didapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8), sehingga

$$\begin{aligned}
&\left( u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) = \\
&\left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( u_j^n - \right. \\
&\Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n - \dots \left. \right) + \\
&\left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( 2u_j^n + 2\Delta t u_t \Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \right. \\
&\Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \left. \right) \\
&\left( u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) - \\
&\left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( u_j^n - \right. \\
&\Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n - \dots \left. \right) - \\
&\left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( 2u_j^n + 2\Delta t u_t \Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \right. \\
&\Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \left. \right) = 0
\end{aligned}$$

Menjadi

$$\begin{aligned}
& u_j^n - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) 2u_j^n + u_t - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_t - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) 2u_t \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} + \\
& \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{2} u_{tt} - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{6} u_{ttt} - \\
& \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{6} u_{ttt} - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_j^n - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \\
& \left( \frac{2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + u_t - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_t - \\
& \left( \frac{2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_t \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} + \\
& \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{2} u_{tt} - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - \\
& \left( \frac{c^2 l\Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l\Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{6} u_{ttt} -
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2+c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2+k_d l\Delta x^2\Delta t}\right)\frac{1}{6}u_{ttt} - \left(\frac{c^2l\Delta t^2+4c^2\Delta t^2}{2l\Delta x^2+2c^2l\Delta t^2+8c^2\Delta t^2+2k_d l\Delta x^2\Delta t}\right)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0 \quad (3.21)$$

Agar lebih sederhana, persamaan (3.21) dikalikan dengan  $2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t$  sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} & (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_j^n - (4l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_j^n + \\ & (2l\Delta x^2)u_j^n - (2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2)u_j^n + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + \\ & 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_t - (2l\Delta x^2)u_t - (2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2)u_t \Big|_j^n \Delta t + (2l\Delta x^2 + \\ & 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{2}u_{tt} + (2l\Delta x^2)\frac{1}{2}u_{tt} - (c^2l\Delta t^2 + \\ & 4c^2\Delta t^2)u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - (c^2l\Delta t^2 + \\ & 4c^2\Delta t^2)u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2\Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{6}u_{ttt} - \\ & (2l\Delta x^2)\frac{1}{6}u_{ttt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0 \\ & (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_t - (2l\Delta x^2)u_t - (2c^2l\Delta t^2 + \\ & 8c^2\Delta t^2)u_t \Big|_j^n \Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{2}u_{tt} + \\ & (2l\Delta x^2)\frac{1}{2}u_{tt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - (c^2l\Delta t^2 + \\ & 4c^2\Delta t^2)u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2\Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + \\ & 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{6}u_{ttt} - (2l\Delta x^2)\frac{1}{6}u_{ttt} - (c^2l\Delta t^2 + \\ & 4c^2\Delta t^2)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0 \quad (3.22) \end{aligned}$$

*Error* pemotongan yang telah ditemukan persamaan (3.22) memiliki orde  $(\Delta x^2, \Delta t^3)$  dan *error* pemotongan pertama dari persamaan (3.22) yaitu:

$$(c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + (2l \Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t) \frac{1}{6} u_{ttt} - (2l \Delta x^2) \frac{1}{6} u_{ttt} - (c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0$$

Dikatakan konsisten jika persamaan tersebut memenuhi kondisi:

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} (c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + (2l \Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t) \frac{1}{6} u_{ttt} - (2l \Delta x^2) \frac{1}{6} u_{ttt} - (c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0$$

Jumlah limit dari persamaan tersebut akan semakin kecil jika  $\Delta x^2$  dan  $\Delta t^3$  memiliki nilai sangat kecil, karena berapapun  $u_{ttt}$  dan  $u_{xxt}$  jika dikalikan dengan nilai  $\Delta x^2$  dan  $\Delta t^3$  yang sangat kecil, maka nilainya pun juga kecil, sehingga *error* pemotongan akan semakin mendekati nol. Untuk memperjelas keterangan tersebut, dapat dilihat pada tabel berikut ini

**Tabel 3. 1** Nilai *Error* untuk  $u(x, t)$  pada  $t \in [0,7]$  dan  $x \in [0,0.64]$  dengan  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t = 0,1$

$\Delta x$	Waktu ( $t$ )					
	5.5	5.7	5.9	6.1	6.3	6.5
0.01	0.0059	0.0039	0.0075	0.00096	0.0060	0.0044
0.05	0.0293	0.0194	0.0372	0.00478	0.0300	0.0219
0.1	0.0568	0.0377	0.0722	0.0093	0.0582	0.0424

Perhitungan *error* ini dikerjakan dengan formula  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$ , dimana nilai  $u_j^n$  adalah nilai  $u(x, t)$  yang ditampilkan pada iterasi metode *Backward Time Central Space* (BTCS) untuk suatu  $\Delta x$  dan  $u_j^{n-1}$  adalah nilai yang ditampilkan oleh

*OCTAVE* untuk suatu  $\Delta x$ . Selisih nilai  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$  ditampilkan di setiap titik diskrit  $x$  pada interval waktu  $t \in [0,7]$ . Selanjutnya untuk  $\Delta x \in [0.01, 0.1]$  maka dapat dihitung bahwa nilai  $\left(\frac{0.0059}{0.0293}\right)^2 = 0.04$  ekuivalen dengan  $\left(\frac{0.01}{0.05}\right)^2$ , hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) memenuhi kriteria  $\Delta x^2$ .

Selanjutnya untuk analisis orde *error* pada suatu  $\Delta t$  pada  $t \in [0,7]$  merujuk pada tabel berikut:

**Tabel 3. 2** Nilai Error untuk  $u(x, t)$  pada  $t \in [0,7]$  dan  $x \in [0,0.64]$  dengan  $\Delta t \rightarrow 0$  dan  $\Delta x = 0.05$

$\Delta t$	Spasial ( $x$ )					
	5.5	5.7	5.9	6.1	6.3	6.5
0.05	0.0047	0.0035	0.0013	0.0035	0.0012	0.0020
0.1	0.0091	0.0069	0.0026	0.0068	0.0022	0.0037
0.2	0.0157	0.0118	0.0044	0.0117	0.0040	0.0063

Perhitungan *error* ini dikerjakan dengan formula  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$ , dimana nilai  $u_j^n$  adalah nilai  $u(x, t)$  yang ditampilkan pada iterasi skema BTCS untuk suatu  $\Delta t$  dan  $u_j^{n-1}$  adalah nilai yang ditampilkan oleh *OCTAVE* untuk suatu  $\Delta t$ . Selanjutnya selisih nilai  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$  ditampilkan di setiap titik diskrit  $x$  pada interval waktu  $t \in [0,7]$ . Selanjutnya untuk  $\Delta t \in [0.05, 0.2]$  maka dapat dihitung bahwa nilai  $\left(\frac{0.0047}{0.0091}\right)^3 = 0.125$  ekuivalen dengan  $\left(\frac{0.05}{0.1}\right)^3$  hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema BTCS memenuhi kriteria  $\Delta t^3$ .

### 3.3 Prinsip Mencari Solusi dalam Al-Quran

Allah telah menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran. (Abdussakir, 2007:79) menyatakan bahwa bentuk-bentuk dan konsep matematika banyak termuat pada alam semesta, meskipun matematika itu ada setelah alam semesta tercipta. Segala isi dari alam semesta ini tercipta dengan ukuran-ukuran yang cermat, perhitungan-perhitungan yang tepat, dan rumus-rumus yang seimbang.

Penelitian ini membahas tentang vibrasi dawai, persamaan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu persamaan gelombang. Permasalahan yang terjadi dalam bidang matematika yaitu suatu sistem persamaan diferensial parsial nonlinier umumnya sangat sulit untuk mencari solusi eksak atau solusi analitiknya. Salah satu contoh kejadian yang mencerminkan kehidupan manusia dalam dunia nyata yaitu menemukan solusi. Dalam kehidupan manusia, pasti memiliki permasalahan yang berbeda-beda. Selagi kita berusaha, pasti akan ada solusi disetiap permasalahan yang datang. Ketika seorang manusia sedang ditimpa masalah, Al-Quran dapat dijadikan motivasi untuk menyelesaikan atau mencari solusi dari permasalahan, khususnya surat Al-Insyirah ayat 5 yang artinya:

*“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan ada dua kemudahan.”*

Tafsir dari ayat ini menurut Syeikh Muhyiddin ad-Darwisy, Imam al-Ma’iny, Imam al-Baghawi dan menyimpulkan dari struktur gaya bahasa ayat tersebut yaitu dengan sebuah kaidah kebahasaan, “Jika isim makrifat (khusus) disebut dua kali maka yang kedua sama dengan yang pertama, tetapi jika isim nakirah (umum) disebut dua kali maka yang kedua tidaklah sama dengan yang pertama”. Kesimpulan yang bisa diambil dari kaidah tafsir tersebut yaitu bahwa terdapat dua kemudahan dalam setiap satu kesulitan. Kemudahan tersebut bisa

berupa solusi terbaik dari permasalahan, atau pahala kebaikan. Oleh karena itu, selalu ada kemudahan yang menyertai dibalik permasalahan yang dirasa sangat sulit. Perlu juga diketahui oleh setiap manusia, bahwa Allah SWT tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Hal ini sesuai dalam surat al-Qomar ayat 49 yang artinya:

*“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”*

Setiap permasalahan akan selalu ada kemudahan bagi manusia. Manusia diwajibkan untuk bersabar dan terus berusaha dengan semangat dari permasalahan yang datang dan meyakini bahwa permasalahan pasti ada jalan keluar, serta senantiasa belajar untuk menjadi manusia yang lebih baik lagi. Begitu juga permasalahan dalam penelitian-penelitian sebelumnya dan penelitian ini, munculah metode pendekatan untuk mencari solusi yang mendekati solusi sebenarnya. Pendekatan ini yaitu pendekatan numerik. Terdapat berbagai macam metode dalam pendekatan numerik yang dapat digunakan, yaitu metode beda hingga eksplisit dan metode beda hingga implisit. Penelitian ini menggunakan metode beda hingga skema implisit.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik diselesaikan dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS), diperoleh bahwa perilaku gerak dawai pada alat musik petik semakin lama bergerak kembali ke keadaan semula yakni pada posisi setimbang dawai. Hal ini sesuai dengan keadaan riil untuk gerak dawai pada alat musik petik dalam dunia nyata yakni gerak dawai tidak berlangsung selama-lamanya artinya dapat berhenti pada suatu waktu tertentu. Sehingga dapat dikatakan metode BTCS dalam penyelesaian model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik yang diperoleh sudah bersifat *reliable*.
2. Analisis keabsahan solusi metode *Backward Time Central Space* (BTCS) melalui analisis kestabilan yaitu dinyatakan stabil tanpa syarat, serta untuk *error* pemotongan pertama dari model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) yang dihasilkan yaitu:

$$(c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + (2l \Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t) \frac{1}{6} u_{ttt} - (2l \Delta x^2) \frac{1}{6} u_{ttt} - (c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0$$

## **4.2 Saran**

Pada penelitian selanjutnya, diharapkan untuk mengkonstruksi model matematika pada alat musik lainnya dan mencari solusi analitik ataupun mencari solusi numerik dari model yang telah diperoleh menggunakan metode yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Al-Qur'an Terjemah. 2015. *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah
- Giordano, Nicholas. 1998. *The Physics of Vibrating Strings*. Amerika: American Institute of Physics
- Gulla, Jan. "Modelling the Wave Motion of a Guitar String", Essay tidak dipublikasikan, 2011
- Haeberli, Willy. 2009. *Laboratory Exercises on Oscillation Modes of Pipes*. Amerika: AAPT
- Johnson, Water. 2016. *The Physics of Guitar String Vibrations*. Amerika: American Journal of Physics
- Kusumastuti, dkk. 2017. *Analisis Konstruksi Model Gerak Dawai pada Alat Musik Sasando*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
- Kusumastuti, dkk. 2018. *Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
- Kusumastuti, dkk. 2019. *Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando dengan Metode CTCS*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
- Morton, K. W. & Mayers David. 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equation Second Edition*. New York: Cambridge University Press
- Purwanto, Agus. 2006. *Analisis dan Sintesa Bunyi Dawai pada Gitar Semi-Akustik*. Seminar Nasional MIPA, (240-246)
- Romano, Joseph D. 2020. *A Simple Graphical Method for Calculating the Standing Wave Frequencies on a Rectangular Membrane*. Amerika: AAPT
- Sandoval, J. L. 1985. *Fourier Analysis for Vibrating String's Profile using Optical Detection*. Amerika: AAPT
- Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: Andi
- Strauss, A. W.. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. Amerika: John Wiley & Sons, Ltd

- Sukarasa, I Made. 2018. *Analisis Kestabilan Numerik Metode Beda Hingga pada Persamaan Getaran Membran dan Simulasinya*. Bali: SENAPATI
- Tafsir Kementerian Agama RI. 2019. Risalah Muslim. Makalah. Dikutip dari <https://risalahmuslim.id/>
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset
- Whitfield, Scott B. 2014. *An Experimental Analysis of a Vibrating Guitar String using High-Speed Photography*. Amerika: AAPT
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc

## LAMPIRAN

### Lampiran 1: Simulasi *OCTAVE* untuk $u(x, t)$

```
clc,clear all; close all;
disp('Metode BTCS pada Vibrasi Dawai Alat Musik Petik');
dx=0.01;
dt=0.1;

x=0:dx:0.64;
t=0:dt:7;

M=0.64/dx;
N=7/dt;

px=length(x);
pt=length(t);

c=1;
kd=1.5;
l=0.64;
h=1;

aa=((c^2)*1*(dt^2)+4*(c^2)*(dt^2))/(2*(l^2)*(dx^2)+2*(c^2)*1*(dt^2)
)+8*(c^2)*(dt^2)+2*kd*1*(dx^2)*dt);
bb=((2*1*(dx^2)+kd*1*(dx^2)*dt)/(1*(dx^2)+2*(c^2)*1*(dt^2)+4*(c^2)
*(dt^2)+kd*1*(dx^2)*dt));
cc=(1*(dx^2))/(1*(dx^2)+(c^2)*1*(dt^2)+4*(c^2)*(dt^2)+kd*1*(dx^2)*
dt);

%Nilai Awal
for j=1:px
    if x(j)<=0.5*1 && x(j)>=0;
        u(j,1)=2*h*x(j)/l;
    else
        u(j,1)=2*h-2*h*x(j)/l;
    end
end
end
```

```

%Nilai Batas
for n=2:pt
    u(1,n)=0;
    u(px,n)=0;
end

%Skema Implisit
xx(1:M-2)=-aa;
yy(1:M-1)=1;
zz(1:M-2)=-aa;
A=diag(yy,0)+diag(xx,-1)+diag(zz,1);

for n=3:N+1
    B=bb*u(2:M,n-1)-cc*u(2:M,n-2);
    u(2:M,n)=inv(A)*B;
end

for j=1:N+1
    figure(1)
    plot(x,u(:,j))
    xlabel('x')
    ylabel('u')
    hold on
end
disp('      t          x          u          ')
for n=1:N
    for j=1:M
        fprintf('%12.10f %12.10f %12.10f \n',x(j) ,t(n) ,u(j,n))
    end
end

figure(2)
surf(x,t,u')
title('grafik 3D solusi numerik u(x,t) yang berubah terhadap nilai
x dan waktu t')
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u')
title('Grafik Vibrasi dengan Metode Implisit BTCS')

```

## RIWAYAT HIDUP



Atik Damayanti, lahir di Kota Batu, Malang pada 22 Maret 1999, biasa dipanggil Atik. Bertempat tinggal di Jalan Wukir Gg 6B Temas Kecamatan Batu Kota Batu. Anak keempat dari empat bersaudara dari pasangan Alm. Bapak Sutrisno dan Ibu Lastriningsih. Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu Taman Kanak-Kanak Nurul Iman Temas Kota Batu, kemudian melanjutkan pendidikan pada tingkat dasar di SDN Temas 02 Kota Batu dan lulus pada tahun 2011. Melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah pertama di MTs Hasyim Asy'ari Kota Batu dan lulus pada tahun 2014. Melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah atas di MAN Kota Batu dan lulus pada tahun 2017. Kemudian tahun 2017 melanjutkan studi pada jenjang perkuliahan strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Atik Damayanti  
NIM : 17610016  
Fakultas/ Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Metode *Backward Time Central Space* dalam Penyelesaian Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.  
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	01 Januari 2021	Konsultasi Bab I	1.
2	04 Januari 2021	Revisi Bab I	2.
3	27 Januari 2021	Konsultasi Bab II	3.
4	01 Februari 2021	Revisi Bab II	4.
5	11 Maret 2021	Konsultasi Agama Bab I & II	5.
6	14 Maret 2021	Revisi Agama Bab I & II	6.
7	29 April 2021	Konsultasi Bab III	7.
8	03 Mei 2021	Revisi Bab III	8.
9	07 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan	9.
10	09 Juni 2021	Revisi Agama Bab II	10.
11	21 Agustus 2021	Konsultasi Bab III	11.
12	9 November 2021	Revisi Bab III	12.
13	13 November 2021	Konsultasi Bab IV & Abstrak	13.
14	24 November 2021	Konsultasi Agama Bab III	14.
15	25 November 2021	ACC Keseluruhan untuk disidangkan	15.

Malang, 10 Desember 2021  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

