

**IMPLEMENTASI METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR
UNTUK MODEL PENYEBARAN CAMPAK**

SKRIPSI

**OLEH
ILFA WARDATUL RIZQYAH
NIM. 17610054**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**IMPLEMENTASI METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR
UNTUK MODEL PENYEBARAN CAMPAK**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Ilfa Wardatul Rizqyah
NIM. 17610054**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**IMPLEMENTASI METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR
UNTUK MODEL PENYEBARAN CAMPAK**

SKRIPSI

Oleh
Ilfa Wardatul Rizqyah
NIM. 17610054

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 November 2021

Pembimbing 1



Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing 2



Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**IMPLEMENTASI METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR
UNTUK MODEL PENYEBARAN CAMPAK**

SKRIPSI

**Oleh
Ilfa Wardatul Rizqyah
NIM. 17610054**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 2 Desember 2021

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd

Anggota Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ilfa Wardatul Rizqyah

NIM : 17610054

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Implementasi Skema Beda Hingga Tak Standar untuk Model Penyebaran Campak.

menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 November 2021
Yang membuat pernyataan



Ilfa Wardatul Rizqyah
NIM.17610054

MOTO

“Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan” (Q.S Al-Insyirah:5)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Anwar, Ibu Ismatul Izzah, serta adik tersayang Alvira Hilmiyatul Kamilah yang telah memberikan dukungan, kasih sayang, do'a dan biaya pendidikan bagi penulis. Segenap keluarga khususnya pendamping hidup saya M. Fatih Nizam yang senantiasa memberikan do'a, semangat, dan motivasi kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang telah memberikan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana keilmuan matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Bidang Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan motivasi, arahan, dan berbagai ilmu yang bermanfaat bagi penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen penguji dalam seminar proposal penulis yang telah memberikan banyak saran dan arahan untuk perkembangan skripsi penulis
7. Bapak Anwar , Ibu Ismatul Izzah, dan adik tersayang Alvira Hilmiyatul Kamilah yang senantiasa memberikan doa, semangat, motivasi, kasih sayang, materi yang begitu besar serta pengorbanan yang tak ternilai harganya kepada penulis hingga saat ini.
8. Mohammad Fatih Nizam sebagai pendamping hidup penulis yang telah memberikan motivasi, tempat keluh kesah serta sebagai sumber inspirasi yang mengingatkan untuk belajar dan berikhtiar.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangannya. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun terus penulis harapkan supaya skripsi ini dapat lebih baik lagi. Selain itu, penulis juga berhadap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas dan bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 17 November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1 Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu	8
2.2 Model Matematika Penyebaran Campak	9
2.3 Nilai Parameter dan Nilai Awal Model Penyebaran Campak	11
2.4 Sistem Dinamik	12
2.5 Sistem Dinamik Diskret	12
2.5.1 Sistem Dinamik Diskret Linier	13
2.5.2 Sistem Dinamik Diskret Non Linier	14
2.5.3 Titik Tetap	17
2.5.4 Kestabilan Titik Tetap	17
2.6 Kriteria Kestabilan Schur-Cohn	18

2.7	Bilangan Reproduksi Dasar R_0	18
2.8	Nilai Bilangan Reproduksi Dasar R_0 pada Model Matematika Penyebaran Campak	19
2.9	Metode Beda Hingga	22
2.9.1	Metode Beda Hingga Standar	22
2.9.2	Metode Beda Hingga Tak Standar	24
2.10	Keberadaan Penyakit dalam AlQur'an dan Hadist	26
BAB III PEMBAHASAN		29
3.1	Diskritisasi Model	29
3.2	Titik Tetap Model	30
3.2.1	Titik Tetap Bebas Penyakit	31
3.2.2	Titik Tetap Endemik	32
3.3	Kestabilan Titik Tetap	34
3.3.1	Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit T_0^*	35
3.3.1	Kestabilan Titik Tetap Endemik	38
3.4	Simulasi Numerik	41
3.5	Keterkaitan Antara Kajian Penyakit Menular dalam AlQur'an dan Hadist dengan Konsep Model Matematika Penyebaran Campak	45
BAB IV PENUTUP		48
4.1	Kesimpulan	48
4.2	Saran	49
DAFTAR PUSTAKA		50
LAMPIRAN		
RIWAYAT HIDUP		

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Nilai variabel model penyebaran penyakit campak	11
Tabel 2.2 Nilai Parameter (Momoh, dkk 2013)	12
Tabel 3.1 Nilai Variabel Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit	37
Tabel 3.2 Nilai Variabel Kestabilan Titik Tetap Endemik	40

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Campak	9
Gambar 3.1 Simulasi Numerik untuk $R_0 < 1$	42
Gambar 3.2 Solusi Numerik untuk $R_0 > 1$	44
Gambar 3.3 Solusi Numerik untuk populasi SEIR untuk beberapa variasi h	44
Gambar 3.4 Reprerentasi Pemisahan Orang Sakit dan Orang Sembuh	46

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1: Kestabilan dan Titik Tetap Skema Beda Hingga tak Standar	52
Lampiran 2: Program Maple Menghitung Determinan Matriks Jacobi	57
Lampiran 3: Program Maple Menentukan Nilai Syarat Kestabilan Bebas Penyakit	58
Lampiran 4: Program Maple Menentukan Nilai Syarat Kestabilan Endemik ...	60
Lampiran 5: Program Skema Beda Hingga Tak Standar Untuk $R_0 < 1$	62
Lampiran 6: Program Skema Beda Hingga Tak Standar Untuk $R_0 > 1$	63

ABSTRAK

Rizqyah, Ilfa Wardatul. 2021. **Implementasi Metode Beda Hingga Tak-Standar Untuk Model Penyebaran Campak**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Dr. Heni Widayani, M.Si.

Kata kunci: dinamik diskret, model penyebaran campak, metode beda hingga tak standar, kestabilan.

Model penyebaran campak Ashraf, dkk (2019) merupakan salah sistem persamaan diferensial yang termasuk dalam sistem dinamik kontinu. Pada penelitian ini difokuskan untuk mengubah bentuk kontinu ke dalam bentuk diskrit dengan diskritisasi menggunakan beda hingga tak standar dan analisis kestabilan yang kemudian dilakukan simulasi numerik untuk membuktikan kestabilannya secara grafik. Berdasarkan analisis diperoleh bahwa model penyebaran campak yang diasumsikan mempunyai dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit ($R_0 < 1$) dan titik tetap endemik ($R_0 > 1$) bersifat stabil. Kestabilan kedua titik tetap tersebut dibuktikan dengan kriteria schur-cohn dan didapat stabil dengan syarat $0 < \phi(h) \leq 5$ yang memenuhi nilai $h > 0$. Hasil simulasi numerik diperlihatkan bahwa model penyebaran campak terlihat konsisten secara dinamik dan menuju ke titik tetapnya. Selain itu juga simulasi numerik menunjukkan bahwa jika nilai h yang semakin besar maka grafik akan semakin menuju ke titik tetap.

ABSTRACT

Rizqyah, Ilfa Wardatul. 2021. **Implementation On the Non-Standard Finite Difference Method for the Measles Distribution Model.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Dr. Heni Widayani, M.Si.

Keyword: discrete dynamics, measles distribution model, nonstandard finite difference method, stability.

The measles distribution model Ashraf, et al (2019) is a system of differential equations that is included in a continuous dynamic system. This research focuses on transforming the continuous form into discrete form by discretization using non-standard finite difference and stability analysis which is then carried out by numerical simulations to prove its stability graphically. Based on the analysis, it is found that the measles distribution model which is assumed to have two fixed points, namely the disease-free fixed point ($R_0 < 1$) and the endemic fixed point ($R_0 > 1$), is stable. The stability of the two fixed points is proven by the Schur-Cohn criteria and is obtained stable with the condition $0 < \phi(h) \leq 5$ which meets the value of $h > 0$. The results of the numerical simulation show that the measles distribution model is dynamically consistent and tends to the fixed point. In addition, numerical simulations show that the larger the value of h , the more the graph tends to the fixed point.

ملخص

رزقية. إلف ورده. ٢٠٢١. تطبيق طريقة التمييز حتى غير المعيار لنموذج نشر الحصبة. البحث العلمي. دراسة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) أري كوسوماستوتي، الماجستير، (٢) الدكتورة هيني ويداياني، الماجستير.

الكلمات الأساسية: الديناميك المنفصل، نموذج نشر الحصبة، طريقة التمييز حتى المعيار، الاستقرار

إن نموذج نشر الحصبة لأشرف وآخرين (٢٠١٩) هو من إحدى تسوية التفاضل تحت نظام الديناميك المستمر. يركز هذا البحث لتغيير صيغة الاستمرار إلى الصيغة المنفصلة باستخدام طريقة التمييز حتى غير المعيار وتحليل الثبات مما أجري فيه المحاكاة الرسمية لتصديق استقراها رسمياً. وانطلاقاً من عملية التحليل المحسولة دلت على أن نموذج نشر الحصبة المسلمة لها نقطتان ثابتتان وهي نقطة الثبات الحرة من المرض ($R_0 < 1$) ونقطة الثبات المتوطنة ($R_0 > 1$) وهي مستقرة. فاستقرار تلكما نقطتا الثبات مصدقة بمعايير سچور-جوهن "schur-cohn" ويحصل منه الاستقرار بشرط أن يكون $0 < \phi(h) \leq 5$ الذي تتوفر فيه نتيجة $h > 0$. فدلّت المحاكاة الرقمية على أن نموذج نشر الحصبة متسقاً ديناميكياً وتشير إلى نقطة ثباته. ومن ثم، فقد دلت المحاكاة الرقمية على إذا كانت نتيجة h أكبر فدل هذا الرسم يشير إلى نقطة الثبات.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit campak adalah suatu penyakit menular yang memiliki angka cukup tinggi di berbagai negara termasuk Indonesia. Oleh karena itu, beberapa penelitian berusaha untuk memecahkan permasalahan ini dengan cara memodelkan secara matematis. Salah satu peneliti yang memodelkan penyebaran campak adalah Ashraf, dkk (2019). Penelitian tersebut menggunakan populasi *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) dan menggunakan vaksinasi sebagai strategi untuk mengontrol transmisi dinamik pada penyebarannya (Ashraf dkk, 2019).

Model matematika penyebaran campak yang dikemukakan oleh Ashraf, dkk (2019) mengasumsikan populasi *SEIR* sebagai variabel dari model dan interaksi antar variabelnya disajikan dalam diagram kompartemen. Total populasi manusia dibagi menjadi empat dengan karakteristik masing-masing yaitu populasi yang rentan terhadap penyakit campak (S), kemudian populasi yang mulai menampilkan tanda-tanda terinfeksi suatu penyakit campak (E), populasi yang terinfeksi (I), dan populasi orang yang sembuh dimana manusia yang terinfeksi pulih atau manusia yang mendapat kekebalan vaksinasi permanen (R),. Suatu parameter menunjukkan hubungan antar populasi *SEIR*. Disini diasumsikan bahwa β adalah laju kerentanan populasi S menuju populasi E , α laju infeksi populasi E menuju suatu populasi I , parameter γ laju penyembuhan populasi I untuk menjadi populasi sembuh, selanjutnya σ menunjukkan laju kesembuhan

populasi E menuju populasi sembuh dengan pengaruh kekebalan vaksinasi permanen. Selain parameter-parameter tersebut, terdapat suatu B yang menunjukkan laju kelahiran populasi S dan setiap variabel populasi $SEIR$ diikuti oleh parameter μ yang menunjukkan laju kematian alami.

Penelitian Ashraf, dkk (2019) membahas interaksi sosial antar populasi dengan simulasi numerik menggunakan metode Rungke-Kutta orde 4 dan Skema Bada Hingga tak Standar dengan kajian analitik pada titik tetap dan kajian *basic reproductive ratio*. Penelitian ini mengubah sistem persamaan model kontinu ke dalam model diskrit dengan menggunakan skema beda hingga tak-standar yang kemudian dianalisis pada sistem dinamik diskrit yang melibatkan titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik dengan kedua keadaan *basic reproductive ratio* *basic reproductive ratio* (R_0). Penggunaan metode skema beda hingga tak-standar menunjukkan hasil-hasil numerik konsisten secara dinamik.

Sementara itu seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan khususnya di bidang pemodelan matematika adalah kontrol penyebaran campak dengan vaksinasi. Dari penelitian sebelum-sebelumnya sudah banyak diperkenalkan model matematika penyebaran campak, kemudian dilakukan konstruksi model dan analisis dinamik oleh Bolarin (2004) dan pada penelitian selanjutnya dilakukan Suryanto (2012) dengan analisis numerik untuk populasi SIR . Pada penelitian kali ini akan membahas penyelesaian metode numerik untuk model populasi $SEIR$ Ashraf, 2019 yang menggunakan nilai parameter dan nilai awal berdasarkan penelitian Momoh, dkk (2013). Model penyakit campak dengan pemodelan populasi $SEIR$ merupakan model epidemi yang lebih komplrit karena

melibatkan populasi $E(Exposed)$ dimana populasi yang menunjukkan tanda-tanda terinfeksi dianggap berpengaruh. Dalam kenyataannya, penyakit campak adalah penyakit menular dengan gejala muncul setelah infeksi awal sekitar 9 sampai 11 hari sehingga dalam pemodelannya terdapat populasi $E(Eksposed)$.

Metode numerik yang terkenal seperti Euler maju, Runge-Kutta orde 4 dan yang lain, terkadang tidak berhasil membangkitkan osilasi, bifurkasi, *chaos*, dan kesalahan titik tetap (Lapidus, 1999). Salah satu alternatif untuk mencegah ketidakstabilan numerik adalah menggunakan metode beda hingga tak standar yang dikemukakan oleh Mickens. Penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga tak standar seringkali dibandingkan dengan penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, tetapi kesimpulan yang dapat diambil adalah metode Runge-Kutta orde empat tidak bisa menjaga sifat kestabilan ketika ukuran langkah waktu berubah dan keadaan tersebut berbanding terbalik dengan skema beda hingga tak standar (Nugroho, 2018).

Nabi Muhammad SAW memerintahkan agar menghindar dari penyakit menular sebagaimana hadist berikut:

“Hindarilah orang yang berpenyakit kusta seperti kamu menghindar dari seekor singa.” (HR. Bukhori)

Hadist tersebut memberikan pemahaman bahwa seseorang harus sekuat tenaga untuk menghindar dari hal-hal yang menyebabkan terjangkitnya penyakit. Seperti halnya kasus campak yang dapat dihindari dengan cara mengurangi laju populasi terinfeksi sehingga tingkat penularan menjadi kecil.

Berdasarkan uraian di atas, penulis mengangkat sebuah masalah mengenai solusi numerik model penyebaran campak dengan skema beda hingga tak standar dikarenakan metode tersebut dapat mempertahankan sifat kestabilan pada ukuran

langkah waktu berapapun dengan judul “Implementasi Skema Beda Hingga Tak- Standar Untuk Model Penyebaran Campak”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka permasalahan dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana diskritisasi model penyebaran campak kontinu menggunakan metode beda hingga tak standar?
2. Bagaimana analisis kestabilan skema beda hingga tak standar pada model penyebaran campak diskrit?
3. Bagaimana simulasi numerik berdasarkan hasil analisis kestabilan skema beda hingga tak standar pada model penyebaran campak diskrit dan interpretasinya?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai berdasarkan rumusan masalah adalah

1. Untuk mengetahui hasil diskritisasi model penyebaran campak kontinu menggunakan metode beda hingga tak standar.
2. Untuk mengetahui analisis kestabilan skema beda hingga tak standar pada model penyebaran campak diskrit.
3. Untuk mengetahui simulasi numerik berdasarkan hasil analisis kestabilan skema beda hingga tak standar pada model penyebaran campak diskrit dan interpretasinya.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh bentuk diskritisasi model penyebaran campak dengan skema beda hingga tak standar.
2. Memperoleh pembuktian kestabilan skema beda hingga tak standar pada model penyebaran campak diskrit.
3. Menginformasikan simulasi numerik model penyebaran campak dengan skema beda hingga tak standar untuk ukuran langkah waktu (h) berapapun sehingga dapat ditarik kesimpulan.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Sistem persamaan model epidemiologi penyebaran penyakit campak yang digunakan adalah :

$$\frac{dS}{dt} = B - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \mu E - \alpha E - \sigma E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - \mu I - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \alpha E - \mu R$$

dengan $t > 0$ (Farah Ashraf, 2019 , 79-85)

2. Parameter dalam penelitian ini diambil dari jurnal Momoh dkk, (2013).
3. Terdapat nilai paramater laju populasi terinfeksi β dalam populasi yang yang diubah-ubah pada simulasi numeriknya dengan tujuan mendapat nilai $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$.

4. Pada simulasi numeriknya, Ukuran langkah waktu h didekati untuk $h > 0$ sampai dengan $h < \infty$.

1.6 Metode Penelitian

Terdapat tiga metode penelitian dalam menyelesaikan ketiga rumusan masalah dalam penelitian ini dan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1.6.1 Diskritisasi Model dengan Skema Beda Hingga Tak Standar

Subbab ini menjelaskan perubahan bentuk model penyebaran campak kontinu dari jurnal Farah Ashraf (2019) ke dalam bentuk diskrit menggunakan skema beda hingga tak standar.

1.6.2 Analisis Kestabilan dari Titik Tetap Model

Subbab ini berisi analisis dinamik dari model penyebaran penyakit campak yaitu (Farah Ashraf dkk, 2019):

1. Menentukan titik tetap pada model penyebaran penyakit campak.
2. Melakukan linierisasi model penyebaran penyakit campak diskrit menggunakan matriks Jacobi.
3. Menganalisis kestabilan dari titik tetap model penyebaran penyakit campak diskrit menggunakan kriteria kestabilan Schur-Cohn.

1.6.3 Penyelesaian Solusi Numerik dan Interpretasinya pada Model Penyebaran

Campak dengan Skema Beda Hingga tak Standar.

Subbab ini akan membahas mengenai simulasi numerik dari model penyebaran penyakit campak yang telah didiskritisasi dengan skema beda hingga tak standar untuk dua kondisi yaitu kondisi bebas penyakit atau $R_0 < 1$ dan kondisi endemik atau $R_0 > 1$.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab, masing-masing dibagi ke dalam subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bagian ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini berisi materi-materi yang menjadi landasan teori yang terkait dengan masalah yang akan dibahas, yaitu persamaan diferensial biasa bergantung waktu, model matematika penyebaran campak, sistem dinamik, kriteria kestabilan Schur-Cohn, bilangan reproduksi dasar, metode beda hingga tak standar serta kajian agama tentang keberadaan penyakit dalam AlQur'an.

Bab III Pembahasan

Bagian ini berisi penjelasan mengenai diskritisasi model penyebaran campak dengan metode beda hingga tak standar, menentukan titik tetap, analisis kestabilan model penyebaran campak diskrit berdasarkan titik tetap serta melakukan simulasi dan menginterpretasikannya.

Bab IV Penutup

Bagian ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca untuk melanjutkan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu

Persamaan diferensial biasa bergantung waktu disebut juga dengan persamaan diferensial biasa *autonomous*. Persamaan diferensial biasa *autonomous* adalah persamaan yang memuat variabel t secara eksplisit. Berikut adalah contoh persamaan diferensial biasa *autonomous*:

$$\frac{dS}{dt} = B - \mu S(t) \quad (2.1)$$

dengan S merupakan variabel terikat sedangkan t merupakan variabel bebas dan B, μ adalah nilai parameter yang diberikan. Persamaan (2.1) termasuk dalam persamaan diferensial linier dan *autonomous* karena pada ruas kanan tidak memuat t secara eksplisit.

Dalam persamaan diferensial biasa, jika persamaan tersebut memiliki variabel-variabel terikat dan turunannya dengan paling tinggi berpangkat satu dan mengandung perkalian antar variabel terikatnya maka disebut persamaan diferensial biasa linier. Sedangkan menurut Marwan dan Said (2009) untuk persamaan diferensial biasa non linier merupakan bentuk persamaan diferensial yang variabel terikatnya berbentuk polinom atau terdapat bentuk perkalian. Berikut adalah contoh persamaan diferensial biasa nonlinier:

$$\frac{dS(t)}{dt} = B - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \quad (2.2)$$

persamaan diferensial biasa (2.2) termasuk nonlinear dengan variabel-variabel terikatnya yaitu $S(t)$ dan $I(t)$, sedangkan parameternya B, β dan μ . Dikatakan

nonliner karena terjadi interaksi antar variabel terikat $S(t)$ dengan $I(t)$ yang ditandai adanya perkalian antar kedua variabel tersebut.

2.2 Model Matematika Penyebaran Campak

Penyakit campak termasuk dalam penyakit menular yang diakibatkan oleh virus rubelle dan ditemukan di lendir tenggorokan hidung orang dewasa maupun anak. Virus tumbuh pada sistem limfatik dan paru paru setelah memasuki tubuh.. Dalam dunia biologis, mekanisme terjadinya penyebaran penyakit campak mengikuti urutan *susceptible, exposed, infected dan recovered*.

Dalam menjelaskan deskripsi model penyebaran penyakit campak yang digunakan, terlebih dahulu akan dijelaskan variabel dari diagram kompartemen sebagai berikut:

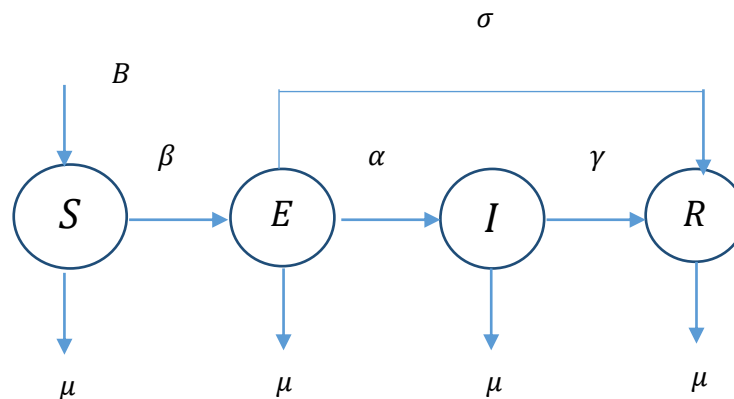
$S(t)$: Populasi yang rentan terhadap penyakit campak

$E(t)$: Populasi laten (muncul tanda terinfeksi penyakit)

$I(t)$: Populasi yang terinfeksi penyakit campak

$R(t)$: Populasi sembuh (orang pulih dan yang mendapat kekebalan vaksin)

Interpretasi model penyakit campak S, E, I, R yang digambarkan oleh (Ashraf dkk, 2019) adalah sebagai berikut



Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Campak

Identifikasi awal model menjelaskan model populasi S atau *Susceptible*. Populasi S adalah besarnya laju populasi rentan terhadap penyakit yang dipengaruhi oleh jumlah populasi lahir B dan akan mengalami penurunan dengan adanya laju kematian alami μS juga adanya laju populasi rentan ke masa laten βSI .

$$\frac{dS}{dt} = B - \beta SI - \mu S \quad (2.3)$$

Selanjutnya untuk populasi *Exposed*, populasi yang menunjukkan besarnya populasi laten atau muncul tanda terinfeksi yang dipengaruhi oleh laju populasi rentan menuju populasi laten βSI dan menurun sebesar laju kematian alami μE , laju populasi laten menjadi terinfeksi αE dan laju populasi sembuh akibat vaksinasi σE .

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \mu E - \alpha E - \sigma E \quad (2.4)$$

Setelah terjadi tanda-tanda terinfeksi penyakit campak, populasi *Exposed* memasuki populasi *Infected* dimana orang tersebut dinyatakan terinfeksi campak dengan pengaruh dari populasi laten αE dan akan menurun sebesar laju kematian alami μI serta laju populasi yang sembuh γI .

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - \mu I - \gamma I \quad (2.5)$$

Populasi terakhir adalah populasi R (*Recovered*) atau kesembuhan, dalam penyakit campak tidak ada istilah kambuh sehingga model ini berhenti pada populasi *Recovered*. Istilah *Recovered* adalah besarnya populasi sembuh yang dipengaruhi oleh laju kesembuhan populasi laten sebesar αE dan laju kesembuhan populasi terinfeksi γI dan akan menurun dengan adanya laju kematian alami μR .

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \alpha E - \mu R \quad (2.6)$$

Jika persamaan (2.3) sampai persamaan (2.6) dijumlahkan maka diperoleh persamaan diferensial parsial total populasi

$$\frac{dN}{dt} = B - \mu N \quad (2.7)$$

yang memiliki solusi

$$N(t) = \frac{1}{\mu} [B - (B - \mu N_0)e^{-\mu t}] \quad (2.8)$$

Dimana $N_0 = S(0) + E(0) + I(0) + R(0)$. Sehingga dapat disusun sebagai suatu sistem persamaan model matematika penyebaran penyakit campak berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= B - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \mu E(t) - \alpha E(t) - \sigma E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha E(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) + \alpha E(t) - \mu R(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Persamaan (2.7) merupakan hukum konservasi (hukum populasi konstan) terkait sistem persamaan (3.9).

2.3 Nilai Parameter dan Nilai Awal Model Penyebaran Campak

Momoh, dkk (2013) dalam penelitian Ashraf, dkk (2019) telah memberikan nilai masing-masing parameter dari model matematika penyebaran campak untuk menyelesaikan secara numerik model campak. Nilai-nilai parameter dan nilai awal variabel yang digunakan pada model tersebut diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 2. 1 Nilai awal model penyebaran penyakit campak (Momoh dkk, 2013)

Parameter	Keterangan	Nilai
$S(0)$	Nilai awal untuk populasi <i>Susceptible</i>	0.6 orang
$E(0)$	Nilai awal untuk populasi <i>Exposed</i>	0.25 orang
$I(0)$	Nilai awal untuk populasi <i>Infected</i>	0.1 orang
$R(0)$	Nilai awal untuk populasi <i>Recovered</i>	0.05 orang

Tabel 2. 2 Nilai Parameter (Momoh, dkk 2013)

Parameter	Keterangan	Nilai
μ	Laju kematian alami	0,2 <i>perhari</i>
σ	Laju kesembuhan populasi E karena pengaruh vaksin	0,25 <i>perhari</i>
γ	Laju kesembuhan populasi I	0.2 <i>perhari</i>
B	Laju kelahiran populasi S	0.32 <i>perhari</i>
α	Laju populasi laten E menjadi populasi terinfeksi I	0.01 <i>perhari</i>

2.4 Sistem Dinamik

Menurut Arrowsmith dan Place (1990), suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t) disebut sistem dinamik. Terdapat dua macam sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskrit dinyatakan dalam persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

apabila t kontinu, maka sistem dinamik tersebut merupakan suatu persamaan diferensial sebagaimana berikut

$$\frac{dx}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}$$

2.5 Sistem Dinamik Diskret

Persamaan beda menggambarkan fenomena yang berkaitan dengan waktu berjalan secara diskrit. Contohnya, jika suatu populasi berkembang secara diskrit, maka populasi ke $(t + 1)$ merupakan fungsi dari populasi ke t . Apabila terdapat interaksi antara dua spesies, populasi keduanya pada waktu ke $(t + 1)$ dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan beda sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

titik (x^*, y^*) disebut titik tetap persamaan (2.11) jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$ dan $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$ dimana f dan g keduanya fungsi pembangkit sistem (Elaydi, 2005).

2.5.1 Sistem Dinamik Diskret Linier

Suatu sistem dinamik diskret dapat dikatakan linier jika dalam persamaan sistem tidak terdapat perkalian antar variabel bebasnya. Bentuk sistem dinamik diskret biasanya dihubungkan dengan bentuk umum sistem persamaan beda linier. Sebagai contoh, pada sistem persamaan beda linier yang terdiri atas k persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1k}x_k(t) \\ x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2k}x_k(t) \\ &\vdots \\ x_k(t+1) &= a_{k1}x_1(t) + a_{k2}x_2(t) + \cdots + a_{kk}x_k(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

sistem persamaan (2.10) dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t+1) &= \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1k}x_k(t) \\ a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2k}x_k(t) \\ \vdots \\ a_{k1}x_1(t) + a_{k2}x_2(t) + \cdots + a_{kk}x_k(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix} \\ &= \vec{A}(\vec{x}(n)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dengan demikian diperoleh bahwa persamaan (2.13) sebagai persamaan sistem dinamik diskret dengan $\vec{x}(n) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)]^T$ dan fungsi pembangkit

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Dari persamaan (2.1) dapat ditentukan nilai eigen yang memenuhi persamaan karakteristik (2.1) dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$|\vec{A} - \lambda I| = 0 \quad (2.14)$$

kemudian jika dimisalkan $\vec{x}^*(t)$ sebagai titik tetap pada persamaan (2.10), maka berdasarkan definisi (2.10) dapat dibentuk:

$$\vec{A}(\vec{x}^*(t)) = \vec{x}^*(t)$$

$$\vec{A}(\vec{x}^*(t)) - \vec{x}^*(t) = 0$$

$$|\vec{A} - I| \vec{x}^*(t) = 0$$

diasumsikan $(\vec{A} - I)$ tidak singular sehingga diperoleh $\vec{x}^*(t) = 0$ merupakan titik tetap sistem. Jika λ adalah nilai-nilai eigen dari persamaan (2.13) maka diperoleh bentuk solusi umumnya sebagai berikut:

$$\vec{x}(n) = c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 + \cdots c_k \lambda_k^n \vec{v}_k \quad (2.15)$$

dengan c_i adalah konstanta dan \vec{v}_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i dimana $i = 1, 2, \dots, k$ (Elaydi, 2005).

2.5.2 Sistem Dinamik Diskret Non Linier

Jika sistem dinamik diskret memuat perkalian antar variabel terikat, maka sistem (2.10) disebut sebagai sistem dinamik diskrit nonlinier. Suatu sistem

diskret nonlinier dapat ditentukan jenis kestabilan titik tetapnya melalui proses linierisasi, kemudian dicari pendekatan sistem linier di sekitar \vec{x}^* dengan melakukan ekspansi deret *Taylor* dan menghilangkan suku non liniernya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\vec{A}_1(\vec{x}(t)) &= \vec{A}_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(t) - x_k^*) \\ &\quad + \eta_1(\vec{x}(t)) \\ \vec{A}_2(\vec{x}(t)) &= \vec{A}_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(t) - x_k^*) \\ &\quad + \eta_2(\vec{x}(t)) \\ &\quad \vdots \\ \vec{A}_k(\vec{x}(t)) &= \vec{A}_k(\vec{x}^*) + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(t) - x_k^*) \\ &\quad + \eta_k(\vec{x}(t))\end{aligned}$$

dimana $\eta_1(\vec{x}(t)), \eta_2(\vec{x}(t)), \dots, \eta_k(\vec{x}(t))$ adalah suku sisa yang memenuhi

$$\lim_{\vec{x}(n) \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_j(\vec{x}(t))}{\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\|} = 0,$$

untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$ sedemikian sehingga $\eta_j(\vec{x}(t))$ dapat diabaikan, karena

\vec{x}^* merupakan titik tetap, maka sistem (2.10) dapat didekati dengan

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1^* + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(t) - x_k^*) \\ x_2(t+1) &= x_2^* + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(t) - x_k^*) \\ &\quad \vdots \\ x_k(t+1) &= x_k^* + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(t) - x_k^*)\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
 x_1(t+1) - x_1^* &= \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(t) - x_k^*) \\
 x_2(t+1) - x_2^* &= \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(t) - x_k^*) \\
 &\vdots \\
 x_k(t+1) - x_k^* &= \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(t) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(t) - x_k^*)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan memisalkan $u_j(t+1) = x_j(t+1) - x_j^*$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$

maka sistem (2.16) menjadi

$$\begin{aligned}
 u_1(t+1) &= \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(t) + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(t) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(t) \\
 u_2(t+1) &= \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(t) + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(t) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(t) \\
 &\vdots \\
 u_k(n+1) &= \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial \vec{A}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n)
 \end{aligned}$$

dan dapat dibentuk suatu matriks:

$$\vec{u}(n+1) = A\vec{u}(n)$$

dengan Matriks A merupakan matriks Jacobi di titik \vec{x}^* (Elaydi, 2005)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{F}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{F}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \vec{F}_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \vec{F}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{F}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \vec{F}_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{F}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{F}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \vec{F}_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

2.5.3 Titik Tetap

Titik tetap dalam ruang *state* dimana sistem dinamis akan tetap ada apabila dimulai dari titik tersebut. Secara matematis definisi titik ekuilibrium dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Titik Tetap)

Titik $x^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium sistem (titik tetap) jika sistem $f(x^*) = 0$ (Perko, 1991).

Istilah lain yang banyak digunakan adalah titik stationer, titik kritis, dan titik singular.

2.5.4 Kestabilan Titik Tetap

Titik (x^*, y^*) disebut titik tetap sistem nonlinier. Kestabilan titik tersebut dapat ditentukan dengan menganalisis sistem hasil linearisasi. Untuk suatu persamaan beda dengan orde k berikut

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + \dots + p_kx(n) = 0 \quad (2.17)$$

dimana p_i bernilai konstan $\forall i = 1, 2, \dots, k$ dan $p_k \neq 0$, persamaan karakteristik untuk persamaan (2.17) adalah

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \dots + p_k \quad (2.18)$$

misalkan λ_i merupakan akar-akar karakteristik persamaan (2.17), maka berlaku semua solusi dari persamaan (2.18) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika $|\lambda_i| < 1$ (Elaydi, 2005).

2.6 Kriteria Kestabilan Schur-Cohn

Solusi dari persamaan karakteristik (2.18) dikatakan stabil asimtotik jika memenuhi syarat-syarat berikut

- (i). $P(1) > 0$,
- (ii). $(-1)^k P(-1) > 0$,
- (iii). Matriks $(k-1) \times (k-1)$ merupakan positif *innerwise*

$$\mathbf{B}_{k-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{k-3} & & & 1 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 1 & & & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & p_k & & & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

matriks B dikatakan positif *innerwise* jika sub determinan di dalam matriks tersebut bernilai positif (Elaydi, 2005).

2.7 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi, dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan disebut bilangan reproduksi dasar (Giesecke, 2002). Kemungkinan dari kondisi yang timbul adalah sebagai berikut:

- a. Jika $R_0 < 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun, sehingga penyakit akan menghilang.
- b. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap
- c. Jika $R_0 > 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat dan penyakit mewabah.

Cara untuk menentukan bilangan reproduksi dasar R_0 lebih jauh dapat dilihat pada buku karangan Driessche dan Watmough tahun 2002.

2.8 Nilai Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) pada Model Matematika Penyebaran Campak

Nilai harapan banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat dari satu kasus primer dalam suatu populasi rentan disebut sebagai bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar merupakan kondisi ambang batas dalam menentukan apakah suatu populasi terjadi endemik atau akan bebas penyakit. Dalam menentukan R_0 digunakan sistem persamaan (2.9) dengan titik ekuilibrium bebas penyakit $T_0^* = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$.

Bilangan reproduksi dasar dapat dicari dengan menggunakan metode matriks *next generation*. Dalam model penyebaran penyakit campak, sistem persamaan (2.9) yang merupakan subpopulasi kelas terinfeksi adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \mu E(t) - \alpha E(t) - \sigma E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha E(t) - \mu I(t) - \gamma I(t)\end{aligned}$$

Berdasarkan materi yang ada pada penjelasan bab sebelumnya, maka didapat matriks φ sebagai laju infeksi individu yang mengakibatkan bertambahnya populasi terinfeksi dan ψ sebagai laju perpindahan keluarnya populasi terinfeksi atau berkurangnya infeksi sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}\varphi &= \begin{bmatrix} \beta SI \\ \alpha E \end{bmatrix} \\ \psi &= \begin{bmatrix} (\mu + \alpha + \sigma)E \\ (\mu + \gamma)I \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.19}$$

dari persamaan (2.19) tersebut kemudian dibentuk matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_E}{\partial E} & \frac{\partial \varphi_E}{\partial I} \\ \frac{\partial \varphi_I}{\partial E} & \frac{\partial \varphi_I}{\partial I} \end{bmatrix} \text{ dan } J(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_E}{\partial E} & \frac{\partial \psi_E}{\partial I} \\ \frac{\partial \psi_I}{\partial E} & \frac{\partial \psi_I}{\partial I} \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$J(F) = \begin{bmatrix} 0 & \beta S_0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, J(V) = \begin{bmatrix} (\mu + \alpha + \sigma) & 0 \\ 0 & (\mu + \gamma) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

selanjutnya dilakukan substitusi persamaan (2.20) pada titik bebas penyakit $T_0^* = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$. Sehingga persamaan (2.34) menjadi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{B}{\mu} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} (\mu + \alpha + \sigma) & 0 \\ 0 & (\mu + \gamma) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Matriks *next generation* diperoleh dengan menggunakan perkalian F dan V^{-1} . Sebagai langkah awal perlu mencari invers matriks V , dan dapat ditentukan dengan

$$V^{-1} = \frac{1}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)} \begin{bmatrix} (\mu + \alpha + \sigma) & 0 \\ 0 & (\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu + \gamma)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\mu + \alpha + \sigma)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

diperoleh matriks *next generation* yaitu :

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{B}{\mu} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mu + \gamma)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\mu + \alpha + \sigma)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta \frac{B}{\mu}}{(\mu + \alpha + \sigma)} \\ \frac{\alpha}{(\mu + \gamma)} & 0 \end{bmatrix}$$

nilai eigen yang dihasilkan adalah:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)\alpha\beta^{\frac{B}{\mu}}}}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)\alpha\beta^{\frac{B}{\mu}}}}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)}$$

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks *next generation* (Diekmann dan Geesterbeek, 2002). Sesuai dengan definisi dari radius spektral nilai eigen yang dihasilkan dari matriks ini jika dihangamutlakkan tidak memperoleh hasil yang dominan, sehingga dilakukan perkalian antara $|\lambda_1|$ dan $|\lambda_2|$ dan didapat

$$R_0 = |\lambda_1||\lambda_2|$$

$$R_0 = \left| \frac{\sqrt{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)\alpha\beta^{\frac{B}{\mu}}}}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)} \right| \left| \frac{\sqrt{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)\alpha\beta^{\frac{B}{\mu}}}}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)} \right|$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, bilangan reproduksi dasar dari sistem persamaan (2.9) adalah:

$$R_0 = \frac{B\alpha\beta}{\mu(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)}$$

2.9 Metode Beda Hingga

2.9.1 Metode Beda Hingga Standar

Dalam mengaproksimasi turunan, metode beda hingga didasari pada ekspansi deret Taylor. Ekspansi deret Taylor untuk fungsi $u(x_j + h)$ di sekitar titik $x = x_j$ dapat ditulis sebagai berikut

$$u(x_j + h) = u(x_j) + \frac{h}{1!}u_x(x_j) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_j) + \dots \quad (2.23)$$

dari persamaan tersebut diperoleh

$$u(x_j + h) = u(x_j) + hu'(x_j) + O(h),$$

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j) + hu'(x_j)}{h} + O(h),$$

dengan demikian diperoleh pendekatan turunan pertama pada titik $x = x_j$ yaitu

$$u'(x_j) = \frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \quad (2.24)$$

Pendekatan turunan pada persamaan di atas disebut pendekatan beda maju yang telah dilakukan pemotongan suku-suku sisa. Dengan menggunakan prosedut seperti sebelumnya, jika ekspansi deret Taylor dilakukan untuk $u(x_j - h)$ didapat

$$u(x_j - h) = u(x_j) - \frac{h}{1!}u_x(x_j) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_j) + \dots \quad (2.25)$$

berdasarkan persamaan (2.24) tersebut diperoleh

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j) - hu'(x_j)}{h} + O(h),$$

dan diperoleh pendekatan turunan pertama pada titik $x = x_j$ yaitu

$$u'(x_j) = \frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \quad (2.26)$$

Berdasarkan persamaan (2.26) diperoleh pendekatan turunan yang disebut beda mundur. Jika persamaan (2.24) dikurangkan dengan persamaan (2.26) maka diperoleh

$$u(x_j + h) - u(x_j - h) = 2hu_x(x_j) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_j) + \dots \quad (2.27)$$

$$u'(x_j) \approx \frac{u(x_j + h) - u(x_j - h)}{2h} + O(h^2) = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} \quad (2.28)$$

pendekatan turunan pada persamaan (2.28) disebut pendekatan beda pusat yang memuat kesalahan pemotongan orde dua yang dituliskan sebagai $O(\Delta x^2)$ (Suryanto, 2012).

Metode beda hingga yang sering digunakan untuk pendekatan turunan pertama adalah metode Euler maju. Sebagai contoh, sistem persamaan diferensial (2.11) dengan ruas kirinya didekati oleh beda maju sehingga menjadi

$$\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} \approx f(x(t_n), y(t_n))$$

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} \approx g(x(t_n), y(t_n))$$

kemudian didiskritisasi dengan metode Euler dan diperoleh bentuk

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n))$$

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n))$$

atau

$$x_{t+1} = x_t + hf(x_t, y_t),$$

$$y_{t+1} = y_t + hf(x_t, y_t),$$

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.9.2 Metode Beda Hingga Tak Standar

Mickens (1999) dan Mickens (2005) menjabarkan metode beda hingga tak standar dalam bentuk skema eksak yang kemudian dikembangkan kembali menjadi skema beda hingga tak standar. Skema beda hingga eksak didefinisikan sebagai salah satu skema yang memiliki solusi yang tepat sama dengan solusi persamaan diferensialnya. Dalam persamaan diferensial berikut ini, misalkan

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u, u(0) = u_0 \quad (2.29)$$

persamaan (2.29) memiliki bentuk solusi sebagai berikut

$$u(t) = u_0 e^{-\lambda t} \quad (2.30)$$

Berdasarkan Mickens (1999) skema eksak dari persamaan diferensial biasa linier orde N dapat dibentuk dengan matriks determinan berikut

$$\begin{bmatrix} u_j & u_j^{(1)} & \dots & u_j^{(N)} \\ u_{j+1} & u_{j+1}^{(1)} & \dots & u_{j+1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j+N} & u_{j+N}^{(1)} & \dots & u_{j+N}^{(N)} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.31)$$

dengan $u_j^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N$ merupakan fungsi bebas linier dari fungsi $u_j^{(i)} = u^{(i)}(t_j)$.

Skema eksak dari persamaan (2.29) dapat dikonstruksi dengan menggunakan persamaan (2.31) sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} u_j & e^{-\lambda t_j} \\ u_{j+1} & e^{-\lambda t_{j+1}} \end{bmatrix} = e^{-\lambda t_j} \begin{bmatrix} u_j & 1 \\ u_{j+1} & e^{-\lambda t} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

sehingga didapat skema eksak untuk persamaan (2.32) yaitu

$$u_{j+1} = e^{-\lambda t} u_j \quad (2.33)$$

jika kedua sisi pada persamaan (2.33) dikurangkan dengan u_j , maka diperoleh persamaan berikut

$$u_{j+1} - u_j = (e^{-\lambda t} - 1)u_j = -\lambda \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) u_j \quad (2.34)$$

dengan menyederhanakan persamaan (2.34), diperoleh skema beda hingga eksak untuk persamaan (2.29) adalah

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)} = -\lambda u_j$$

Pada persamaan (2.29), jika diskritisasi menggunakan beda maju seperti persamaan (2.24) diperoleh

$$\frac{du}{dt} \rightarrow \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \quad (2.35)$$

namun untuk turunan diskrit pertama persamaan (2.29) diberikan

$$\frac{du}{dt} \rightarrow \frac{u_{j+1} - u_j}{\phi} \quad (2.36)$$

dengan ϕ adalah fungsi denominator sebagai berikut

$$\phi = \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right) \quad (2.37)$$

Pendekatan beda hingga pada persamaan (2.34) merupakan pengembangan dari pendekatan beda maju dan beda pusat untuk persamaan (2.29). Dalam hal ini ukuran langkah Δt diganti dengan fungsi denominator ϕ . Suatu skema dikatakan sebagai skema beda hingga tak standar, jika skema tersebut memenuhi salah satu pernyataan berikut (Mickens, 2005):

1. Orde dari turunan diskrit harus tepat sama dengan orde dari turunan pada persamaan diferensial yang bersangkutan.
2. Ukuran langkah pada turunan diskrit dinyatakan sebagai fungsi denominator. Sebagai contoh

$$u_t(x, t) \cong \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Gamma(\Delta t, \lambda)},$$

$$u_x(x, t) \cong \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Phi(\Delta x, \lambda)}$$

$$u_x(x, t) \cong \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Phi(\Delta x, \lambda)}$$

dengan fungsi denominator $\Gamma(\Delta t, \lambda) = \Delta t + O(\Delta t^2)$ dan $\Phi(\Delta x, \lambda) = \Delta x + O(\Delta x^2)$.

3. Bagian nonlinier harus secara umum dimodelkan secara lokasi pada grid atau kisi komputasi. Sebagai contoh

$$\begin{aligned}(u_j^n)^2 &\approx u_{j+1}^n u_j^n \\(u_j^n)^2 &\approx \left(\frac{u_{j-1}^n + u_j^n + u_{j+1}^n}{3} \right) u_j^n \\(u_j^n)^3 &\approx (u_j^n)^2 \left(\frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} \right) \\(u_j^n)^3 &\approx u_{j-1}^n u_j^n u_{j+1}^n\end{aligned}$$

Dalam mengimplementasikan metode beda hingga tak standar, fungsi denominator dimodifikasi sesuai bentuk solusi yang diharapkan.

2.10 Keberadaan Penyakit dalam AlQur'an dan Hadist

Pada hakikatnya ujian mencerminkan kasih sayang Allah pada hambaNya.. Allah mengujinya dengan kemiskinan maupun dengan penyakit dalam kurun waktu tertentu tak lain agar manusia senantiasa mengingatNya. Salah satu ujian Allah yang banyak menimpa manusia adalah wabah penyakit. Keberadaan penyakit pada manusia sudah ada sejak zaman Nabi Ayyub A.S yang telah dijelaskan dalam al-Quran surah AlAnbiyaa ayat ke 83-84 yang berbunyi :

“dan (ingatlah kisah) Ayub, ketika ia menyeru Tuhannya, "(Ya Tuhanku), sesungguhnya aku telah ditimpa penyakit dan Engkau adalah Tuhan Yang Maha Penyayang di antara semua penyayang.” Maka Kami pun memperkenankan seruannya itu, lalu Kami lenyapkan penyakit yang ada padanya dan Kami kembalikan keluarganya kepadanya, dan Kami lipat gandakan bilangan mereka, sebagai suatu rahmat dari sisi Kami dan untuk menjadi peringatan bagi semua yang menyembah Allah.”

Menurut Syaikh Wahbah az-Azuhaile, ayat di atas menafsirkan bahwa Allah SWT menguji Nabi Ayyub dan memberikan kekuasaan kepada setan terhadap jasadnya sebagai cobaan baginya, setan kemudian meniup ke dalam jasad sehingga keluarlah bisul yang buruk dan menjijikkan. Beliau menderita penyakit penyakit kulit. Kulit sang nabi mengeluarkan nanah hingga rambutnya pun rontok dalam kurun waktu yang sangat lama (kurang lebih 18 tahun). Lebih dari itu anak-anaknya wafat, hartanya binasa dan manusia menjauhinya selain istrinya, maka Allah mendapatkannya dalam keadaan sabar dan ridha terhadap musibah itu, dan setelah sekian lama, ia pun berdoa seperti yang disebutkan dalam ayat di atas. Karena sikap nabi ayub yang sabar, berserah dan bertawakal kepada Allah dalam menyikapi penyakit yang menimpa dirinya, maka kami mengabulkan doa-Nya, lalu kami melenyapkan berbagai penyakit yang ada padanya sehingga penyakitnya sembuh lahir batin.

Surat AlAnbiyaa ayat 83-84 memiliki korespondensi dengan permasalahan yang diteliti, Allah SWT memberikan penyakit kepada manusia untuk menjelaskan segala cobaan berasal dari Allah, dan tidaklah sesuatu itu ditimpakan pada manusia kecuali ada hikmah di dalamnya. Selain itu juga, hendaklah manusia tidak berputus asa dalam menerima cobaan Allah. Misalnya dalam keadaan sakit, manusia hendaknya berusaha mencari kesembuhan lalu bertawakkal kepada Allah dan senantiasa berdoa. Seperti halnya penyakit campak yang bersifat menular, manusia dapat berusaha mengurangi interaksi dengan penderita dan mencegah laju penularan.

Pembahasan mengenai penyakit lebih mendalam yang disebutkan dalam Hadits adalah penyakit menular sebagaimana Rasulullah bersabda yang artinya

“Tha'un (wabah penyakit menular) adalah suatu peringatan dari Allah Subhanahu Wa Ta'ala untuk menguji hamba-hamba-Nya dari kalangan manusia. Maka, apabila kamu mendengar penyakit itu berjangkit di suatu negeri, janganlah kamu masuk ke negeri itu. Apabila wabah itu berjangkit di negeri tempat kamu berada, jangan pula kamu lari darinya.” (HR Bukhari dan Muslim dari Usamah bin Zaid).

Kalimat “Dahulu, tha’un adalah azab yang Allah kirimkan kepada siapa saja yang Dia kehendaki, tetapi Allah menjadikannya sebagai rahmat bagi orang beriman”, menunjukkan bahwa wabah penyakit merupakan bentuk peringatan atau ujian dari Allah SWT. Namun, bagi orang beriman, wabah penyakit ini dapat menjadi bentuk rahmat atau kasih sayang Allah. Maka, Rasulullah pun memberikan tuntunan untuk menghadapi penyebaran penyakit dengan tidak keluar rumah untuk menghindari orang-orang yang terinfeksi dan Sabar dalam arti menahan diri untuk tidak keluar dari wilayah yang terkena wabah sampai berakhir semata-mata mengharap rida Allah, serta menyakini bahwa wabah tersebut adalah suratan takdir Allah SWT tanpa mengeluh dan putus asa.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Diskritisasi Model

Sistem persamaan (2.32) didiskritisasi menggunakan metode beda hingga tak standar seperti yang telah dijelaskan pada subbab (2.5). Penggantian dari turunan orde pertama diskrit didekati dengan beda maju tetapi dengan menggunakan fungsi penyebut $\phi(h)$ sehingga dikenal dengan perluasan beda maju. Fungsi penyebut tersebut digunakan agar total populasi eksak tetap terjaga, yaitu dengan cara mendiskritisasi persamaan (2.30) dan didapat persamaan berikut:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^{n+1} - N^n}{\phi(h)} = B - \mu N^n \quad (3.1)$$

persamaan di atas merupakan bentuk diskritisasi tak standar dari persamaan konservasi populasi (2.30) sehingga fungsi penyebut $\phi(h)$ dapat diperoleh dengan membandingkan solusi persamaan (2.30) yaitu solusi pada persamaan (2.31) pada saat $t = t^{n+1}$ yaitu $N^{n+1} = \frac{1}{\mu} [B - (B - \mu N^n) e^{-\mu h}]$. Dengan cara ini diperoleh bahwa fungsi penyebut harus memenuhi

$$\phi(h) = \frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu} \quad (3.2)$$

persamaan (3.2) dapat ditentukan nilainya yaitu saat $h > 0$ dan $h \leq \infty$ sedemikian sehingga diperoleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu} = 0 \text{ dan } \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

dari pendekatan tersebut, dapat disimpulkan nilai $\phi(h)$ adalah $0 \leq \phi(h) \leq \frac{1}{\mu}$.

Oleh karena itu, proses diskretisasi menggunakan Skema beda hingga tak standar pada model penyebaran campak dapat dipaparkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{S^{n+1} - S^n}{\phi(h)} &= B - \beta S^{n+1} I^n - \mu S^{n+1} \\
 \frac{E^{n+1} - E^n}{\phi(h)} &= \beta S^{n+1} I^n - (\mu + \alpha + \sigma) E^{n+1} \\
 \frac{I^{n+1} - I^n}{\phi(h)} &= \alpha E^{n+1} - (\mu + \gamma) I^{n+1} \\
 \frac{R^{n+1} - R^n}{\phi(h)} &= \gamma I^{n+1} + \alpha E^{n+1} - \mu R^{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Skema beda hingga tak standar di atas memenuhi total populasi konstan $\dot{S}(t) + \dot{E}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0$ sehingga memenuhi hukum konservasi. Dari persamaan (3.3) diperoleh bentuk persamaan eksplisit sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 S^{n+1} &= \frac{Bh + S^n}{(1 + \beta\phi(h)I^n + \mu\phi(h))} \\
 E^{n+1} &= \frac{\phi(h)\beta S^{n+1}I^n + E^n}{1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma)} \\
 I^{n+1} &= \frac{\phi(h)\alpha E^{n+1} + I^n}{1 + \phi(h)(\mu + \gamma)} \\
 R^{n+1} &= \frac{\phi(h)\gamma I^{n+1} + \phi(h)\alpha E^{n+1} + R^n}{1 + \phi(h)\mu}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2 Titik Tetap Model

Titik tetap pada sistem persamaan (2.32) diperoleh berdasarkan definisi pada subbab (2.1) , dengan demikian memenuhi kondisi $S^{n+1} = S^n = S^*$ dan analog dengan $E^{n+1}, I^{n+1}, R^{n+1}$ sehingga

$$\frac{S^* - S^*}{\phi(h)} = B - \beta S^* I^* - \mu S^*$$

$$\frac{E^* - E^*}{\phi(h)} = \beta S^* I^* - (\mu + \alpha + \sigma) E^*$$

$$\frac{I^* - I^*}{\phi(h)} = \alpha E^* - (\mu + \gamma) I^*$$

$$\frac{R^* - R^*}{\phi(h)} = \gamma I^* + \alpha E^* - \mu R^*$$

diperoleh bentuk sederhana

$$B - \beta S^* I^* - \mu S^* = 0 \quad (3.5)$$

$$\beta S^* I^* - (\mu + \alpha + \sigma) E^* = 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha E^* - (\mu + \gamma) I^* = 0 \quad (3.7)$$

$$\gamma I^* + \alpha E^* - \mu R^* = 0 \quad (3.8)$$

berdasarkan persamaan (3.7) diperoleh dua kemungkinan nilai I^* , yaitu saat $I^* = 0$ disebut dengan titik tetap bebas penyakit, dan saat $I^* \neq 0$ disebut titik tetap endemik.

3.2.1 Titik Tetap Bebas Penyakit

Titik tetap bebas penyakit artinya dalam populasi tersebut tidak terjadi penyebaran penyakit menular atau belum ada individu yang terinfeksi pada saat t sehingga ($I(t) = 0$). Tahapannya adalah sebagai berikut:

Pertama, substitusikan $I(t) = 0$ ke dalam persamaan (3.5)

$$B - \beta S^* I^* - \mu S^* = 0$$

$$B - \beta S^* 0 - \mu S^* = 0$$

$$B - 0 - \mu S^* = 0$$

$$B - \mu S^* = 0$$

$$\mu S^* = B$$

$$S^* = \frac{B}{\mu}$$

dan untuk persamaan (3.6)

$$\alpha E^* - \mu I^* - \gamma I^* = 0$$

$$\alpha E^* - 0 - 0 = 0$$

$$\alpha E^* = 0$$

$$E^* = 0$$

setelah itu, tahap kedua adalah substitusi $E^* = 0$ ke persamaan (3.7)

$$\gamma I^* + \alpha E^* - \mu R^* = 0$$

$$0 + 0 - \mu R^* = 0$$

$$\mu R^* = 0$$

$$R^* = 0$$

maka diperoleh titik tetap bebas penyakit $T_0^* = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$. Dalam hal ini, tidak ada populasi laten dan terinfeksi sama atau bernilai nol sehingga menyebabkan banyaknya populasi sembuh atau pulih juga sama dengan nol. Namun, terdapat populasi rentan yang memiliki nilai sebesar $\frac{B}{\mu}$. Dimana $\frac{B}{\mu} \rightarrow N$ atau dengan artian dalam populasi masih belum ada yang terjangkit penyakit.

3.2.2 Titik Tetap Endemik

Suatu ekuilibrium endemik artinya suatu kondisi dimana terjadi penularan penyakit dengan asumsi terdapat individu terinfeksi penyakit atau $I(t) \neq 0$. Dari persamaan (3.7) diperoleh

$$\alpha E^* - (\mu + \gamma)I^* = 0$$

$$E(t) = \frac{(\mu + \gamma)I^*}{\alpha} \quad (3.9)$$

substitusikan persamaan (3.9) ke persamaan (3.8)

$$\gamma I^* + \alpha E^* - \mu R^* = 0$$

$$\gamma I^* + \alpha \frac{(\mu + \gamma)I^*}{\alpha} - \mu R^* = 0$$

$$\gamma I^* + (\mu + \gamma)I^* - \mu R^* = 0$$

$$\gamma I^* + \mu I^* + \gamma I^* - \mu R^* = 0$$

$$\mu I^* + 2\gamma I^* - \mu R^* = 0$$

$$R^* = \frac{\mu I^* + 2\gamma I^*}{\mu}$$

substitusikan persamaan (3.9) ke persamaan (3.6) .

$$\beta S^* I^* - (\mu + \alpha + \sigma)E^* = 0$$

$$\beta S^* I^* - \frac{(\mu + \gamma)I^*}{\alpha}(\mu + \alpha + \sigma) = 0$$

$$\left(\beta S^* - \frac{(\mu + \gamma)}{\alpha}(\mu + \alpha + \sigma) \right) I^* = 0$$

terdapat dua kemungkinan yaitu $I^* = 0$ atau $\left(\beta S^* - \frac{(\mu + \gamma)}{\alpha}(\mu + \alpha + \sigma) \right) = 0$.

Karena titik ekuilibrium endemik mengisyaratkan $I^* \neq 0$ maka

$$\beta S^* - \frac{(\mu + \gamma)}{\alpha}(\mu + \alpha + \sigma) = 0$$

maka

$$\beta S^* = \frac{(\mu + \gamma)}{\alpha}(\mu + \alpha + \sigma)$$

$$S^* = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

dari persamaan (3.5) diperoleh

$$B - \beta S^* I^* - \mu S^* = 0$$

$$B - (\beta I^* + \mu) S^* = 0 \quad (3.11)$$

$$S^* = \frac{B}{\beta I^* + \mu}$$

dari persamaan (3.10) dan persamaan (3.11) diperoleh

$$\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}{\alpha\beta} = \frac{B}{\beta I^* + \mu}$$

$$(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)(\beta I^* + \mu) = B\alpha\beta$$

$$(\beta I^* + \mu) = \frac{B\alpha\beta}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha + \sigma)}$$

$$I^* = \frac{B\alpha}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)} - \frac{\mu}{\beta}$$

$$I^* = \frac{\mu}{\beta} \frac{\left(\frac{B\alpha}{(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)} - \frac{\mu}{\beta} \right)}{\frac{\mu}{\beta}}$$

$$I^* = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{B\alpha\beta}{\mu(\mu + \alpha + \sigma)(\mu + \gamma)} - 1 \right)$$

$$I^* = \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1)$$

sehingga titik tetap endemik terpenuhi jika dan hanya jika $R_0 > 1$.

3.3 Kestabilan Titik Tetap

Diskritisasi persamaan (3.4) menggunakan skema beda hingga tak standar kemudian digunakan untuk menganalisa konvergensi dari model *SEIR* penyebaran campak. Matriks Jacobi dari sistem persamaan (3.4) secara umum sebelum dievaluasi di titik kesetimbangan berbentuk sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial S^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial S^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial S^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial S^{n+1}}{\partial R^n} \\ \frac{\partial E^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial E^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial E^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial E^{n+1}}{\partial R^n} \\ \frac{\partial I^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial I^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial I^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial I^{n+1}}{\partial R^n} \\ \frac{\partial R^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial R^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial R^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial R^{n+1}}{\partial R^n} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

dengan bentuk elemen matriks J sebagaimana ditulis pada Lampiran 1.

3.3.1 Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit (T_0^*)

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (3.12) tersebut berupa polinom berderajat empat yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 \quad (3.13)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{k}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\ A_2 &= -\frac{k}{cd} - \frac{k}{bc} - \frac{k}{ac} + \frac{el^2p}{a^2b^2c} + \frac{el^2p}{a^3bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{ab} \\ A_3 &= \frac{k}{bcd} + 2\frac{k}{acd} - \frac{el^2p}{a^2b^2cd} - \frac{el^2p}{a^2bcd} - \frac{3el^2p}{a^3b^2c} - \frac{1}{abd} \\ A_4 &= \frac{3el^2p}{a^3b^2cd} - \frac{k}{abcd} \end{aligned}$$

proses perhitungan koefisien polinom (3.11) secara lengkap terdapat pada Lampiran 1

Titik tetap bebas penyakit $T_0^* = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$ disubstitusikan ke persamaan karakteristik (3.13) sedemikian hingga menghasilkan nilai koefisien sebagai berikut

$$A_1 = \frac{\frac{pl^2 \left(\left(B\phi(h) + \frac{B}{\mu} \right) \right)}{(\phi(h)\mu+1)^2 b}}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{\phi(h)\mu + 1}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{\frac{pl^2\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)}{(\phi(h)\mu+1)^2b}}{cd} - \frac{\frac{pl^2\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)}{(\phi(h)\mu+1)^2b}}{bc} - \frac{\frac{pl^2\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)}{(\phi(h)\mu+1)^2b}}{(\phi(h)\mu+1)c} + \frac{\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)l^2p}{(\phi(h)\mu+1)^2b^2c} \\
&\quad + \frac{\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)l^2p}{(\phi(h)\mu+1)^3bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{(\phi(h)\mu+1)d} + \frac{1}{(\phi(h)\mu+1)b} \\
A_3 &= \frac{\frac{pl^2\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)}{(\phi(h)\mu+1)^2b}}{bcd} + 2\frac{\frac{pl^2\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)}{(\phi(h)\mu+1)^2b}}{(\phi(h)\mu+1)cd} - \frac{\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)l^2p}{(\phi(h)\mu+1)^2b^2cd} \\
&\quad - \frac{\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)l^2p}{(\phi(h)\mu+1)^2bcd} - \frac{3\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)l^2p}{(\phi(h)\mu+1)^3b^2c} - \frac{1}{(\phi(h)\mu+1)bd} \\
A_4 &= \frac{3\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)l^2p}{(\phi(h)\mu+1)^3b^2cd} - \frac{\frac{pl^2\left(B\phi(h)+\frac{B}{\mu}\right)}{(\phi(h)\mu+1)^2b}}{(\phi(h)\mu+1)bcd}
\end{aligned}$$

Pembuktian kriteria kestabilan Schur-Cohn untuk titik T_0^* cukup rumit untuk diturunkan secara umum sehingga digunakan kasus khusus dengan nilai parameter pada Tabel 2.1. Nilai parameter tersebut akan disubsitusikan ke dalam kriteria kestabilan Schur-Cohn untuk melihat sifat kestabilan titik T_0^* secara khusus. Bentuk koefisien A_1, A_2, A_3 , dan A_4 sebagai fungsi dari h dapat dilihat di Lampiran 3. Fungsi $\phi(h)$ sebagaimana dituliskan pada persamaan (3.2) berada pada interval $0 \leq \phi(h) \leq \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.2} = 5$.

Lebih lanjut, digunakan nilai batas atas dari $\phi(h)$ yakni sebesar 5 untuk membuktikan kestabilan titik tetap bebas penyakit T_0^* . Nilai dari A_1, A_2, A_3 , dan A_4 dapat diperoleh dengan menggunakan bantuan aplikasi *Maple 2018* sebagaimana tabel berikut.

Tabel 3. 1 Nilai Variabel Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit

Variabel	Nilai
A_1	-0.9021
A_2	0.4332
A_3	-0.3301
A_4	0.0755

dari tabel 3.1 tersebut dapat dianalisa kestabilan secara khusus melalui kriteria kestabilan Schur-Cohn berikut:

$$1. P(1) = 1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= 0.2765 > 0$$

$$2. (-1)^k P(-1) = (-1)^4 (1 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4)$$

$$= 2.741 > 0$$

$$3. B_3^\pm = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & A_1 & 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_4 \\ 0 & A_4 & A_3 \\ A_4 & A_3 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$a. B_3^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & A_1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_4 \\ 0 & A_4 & A_3 \\ A_4 & A_3 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & A_4 \\ A_1 & 1 + A_4 & A_3 \\ A_2 + A_4 & A_1 + A_3 & 1 + A_2 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + A_2 + A_4 - A_3 A_1 - A_3^2 + A_4 A_1^2 + A_4 A_1 A_3 - A_4^2 A_2$$

$$- A_4^3$$

$$= 1.1773 > 0$$

$$b. B_3^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & A_1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_4 \\ 0 & A_4 & A_3 \\ A_4 & A_3 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A_4 \\ A_1 & 1-A_4 & -A_3 \\ A_2-A_4 & A_1-A_3 & 1-A_2 \end{bmatrix} \\
&= 1 - A_2 - A_4 + 2A_2A_4 - A_4A_1^2 + A_4A_1A_3 - A_4^2 - A_4^2A_2 \\
&\quad + A_4^3 + A_1A_3 - A_3^2 \\
&= 0.6987 > 0
\end{aligned}$$

(Bukti Penyelesaian ada di Lampiran 3) Dari ketiga syarat di atas dengan perhitungan menggunakan *software Maple 18* dengan cara substitusi parameter (dapat dilihat pada lampiran) didapat bahwa sistem persamaan model penyebaran penyakit campak pada titik tetap bebas penyakit stabil asimtotik dengan syarat $\phi(h) > 0$. Berdasarkan persamaan (3.2) dapat disimpulkan bahwa nilai $\phi(h)$ memenuhi $0 < \phi(h) \leq 5$ dengan $h > 0$.

3.3.1 Kestabilan Titik Tetap Endemik

Untuk kasus endemik, persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (3.12) tersebut berupa polinom berderajat empat yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4 \quad (3.14)$$

dengan

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(\frac{k}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\
D_2 &= -\frac{k}{cd} - \frac{k}{bc} - \frac{k}{ac} + \frac{el^2p}{a^2b^2c} + \frac{el^2p}{a^3bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{ab} \\
D_3 &= \frac{k}{bcd} + 2\frac{k}{acd} - \frac{el^2p}{a^2b^2cd} - \frac{el^2p}{a^2bcd} - \frac{3el^2p}{a^3b^2c} - \frac{1}{abd} \\
D_4 &= \frac{3el^2p}{a^3b^2cd} - \frac{k}{abcd}
\end{aligned}$$

$$\text{titik tetap endemik } T_e^* = \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu}, \frac{(\mu+\gamma)\mu(R_0-1)}{\alpha\beta}, \frac{\mu}{\beta}(R_0-1), \frac{(\mu+2\gamma)\mu(R_0-1)}{\beta\mu} \right)$$

disubstitusikan ke persamaan karakteristik (3.14) sedemikian sehingga didapat

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(\frac{pl^2 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right)}{\frac{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b}{c}} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1} \right) \\
D_2 &= -\frac{pl^2 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right)}{\frac{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b}{cd}} - \frac{pl^2 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right)}{\frac{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b}{bc}} \\
&\quad - \frac{\frac{pl^2 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right)}{\frac{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b}{c}}}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)c} \\
&\quad + \frac{\left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right) l^2 p}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b^2 c} \\
&\quad + \frac{\left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right) l^2 p}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^3 bc} + \frac{1}{bd} \\
&\quad + \frac{1}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)d} \\
&\quad + \frac{1}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)b} \\
D_3 &= \frac{pl^2 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right)}{\frac{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b}{bcd}} + 2 \frac{pl^2 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right)}{\frac{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)cd}} \\
&\quad - \frac{\left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right) l^2 p}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 b^2 cd} \\
&\quad - \frac{\left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right) l^2 p}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2 bcd} \\
&\quad - \frac{3 \left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu} \right) \right) l^2 p}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^3 b^2 c} \\
&\quad - \frac{1}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)bd}
\end{aligned}$$

$$D_4 = \frac{3\left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu}\right)\right)l^2p}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^3b^2cd} - \frac{pl^2\left(B\phi(h) + \left(\frac{B}{\mu(R_0-1)+\mu}\right)\right)}{(\phi(h)(\mu(R_0-1)+\mu)+1)^2b} \frac{1}{cd}$$

Sama halnya dengan titik tetap bebas penyakit, , digunakan nilai batas atas dari $\phi(h)$ yakni sebesar 5 untuk membuktikan kestabilan titik tetap endemik T_e^* . Nilai dari D_1, D_2, D_3 , dan D_4 dapat diperoleh dengan menggunakan bantuan aplikasi *Maple 2018* sebagaimana tabel berikut.

Tabel 3. 2 Nilai Variabel Kestabilan Titik Tetap Endemik

Variabel	Nilai
D_1	-0.4955
D_2	-0.0955
D_3	0.0466
D_4	-6.3050

Dari tabel 3.2 tersebut dapat dianalisa kestabilan secara khusus melalui kriteria kestabilan Schur-Cohn berikut:

$$1. P(1) = 1 + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 > 0$$

$$= 0.456 > 0$$

$$2. (-1)^k P(-1) = (-1)^4 (1 - D_1 + D_2 - D_3 + D_4)$$

$$= 1 - D_1 + D_2 - D_3 + D_4 > 0$$

$$= 1.353 > 0$$

$$3. B_3^\pm = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & 0 \\ D_2 & D_1 & 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_4 \\ 0 & D_4 & D_3 \\ D_4 & D_3 & D_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{a. } B_3^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & 0 \\ D_2 & D_1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_4 \\ 0 & D_4 & D_3 \\ D_4 & D_3 & D_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & D_4 \\ D_1 & 1+D_4 & D_3 \\ D_2+D_4 & D_1+D_3 & 1+D_2 \end{bmatrix} \\
&= 1 + D_2 + D_4 - D_3 D_1 - D_3^2 + D_4 D_1^2 + D_4 D_1 D_3 - D_4^2 D_2 - D_4^3 \\
&= 0.9254 > 0 \\
\text{b. } B_3^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & 0 \\ D_2 & D_1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_4 \\ 0 & D_4 & D_3 \\ D_4 & D_3 & D_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -D_4 \\ D_1 & 1-D_4 & -D_3 \\ D_2-D_4 & D_1-D_3 & 1-D_2 \end{bmatrix} \\
&= 1 - D_2 - D_4 + 2D_2 D_4 - D_4 D_1^2 + D_4 D_1 D_3 - D_4^2 - D_4^2 D_2 \\
&\quad + D_4^3 + D_1 D_3 - D_3^2 > 0 \\
&= 1.0702 > 0
\end{aligned}$$

(Bukti Penyelesaian ada di Lampiran 4) Dari ketiga syarat di atas dengan perhitungan menggunakan *software* Maple 18 didapat bahwa sistem persamaan model penyebaran penyakit campak pada titik tetap endemik stabil asimtotik dengan syarat $\phi(h) > 0$. Berdasarkan persamaan (3.2) dapat disimpulkan bahwa nilai $\phi(h)$ memenuhi $0 < \phi(h) \leq 5$ dengan $h > 0$.

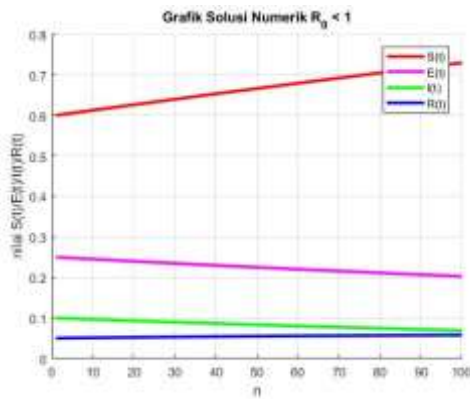
3.4 Simulasi Numerik

Dalam simulasi numerik ini, nilai awal mengacu pada Tabel 2.1 dan nilai parameter mengacu pada Tabel 2.2 dengan

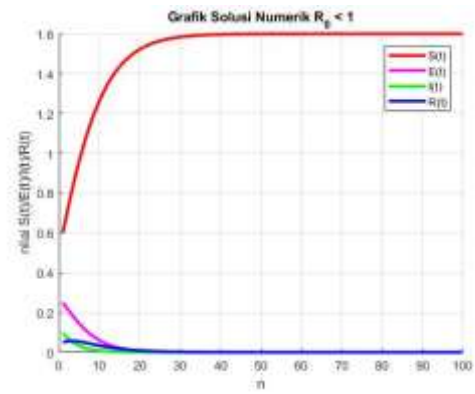
$$\phi(h) = \frac{1-e^{-\mu h}}{\mu}.$$

a. Tiik Tetap Bebas Penyakit ($R_0 < 1$)

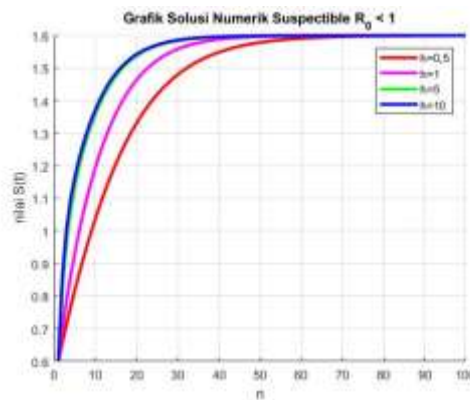
Pada simulasi dengan $R_0 < 1$ diperoleh ketika digunakan laju interaksi $\beta = 1$. Grafik $S(t), E(t), I(t)$ dan $R(t)$ untuk $h = 0.01$ dan $h = 1$ dengan formula $\phi(h) = \frac{1-e^{-\mu h}}{\mu}$ adalah sebagai berikut.



(a) Solusi Numerik $S(t), E(t), I(t)$ dan $R(t)$ untuk $h = 0.01$



(b) Solusi Numerik $S(t), E(t), I(t)$ dan $R(t)$ untuk $h = 1$



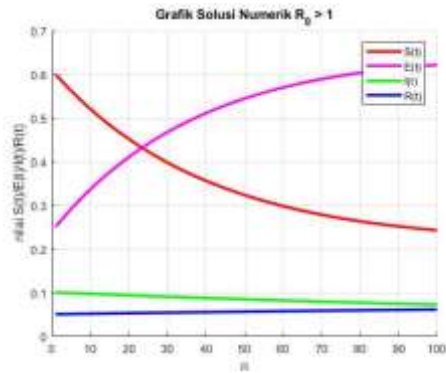
(c) Solusi Numerik ntuk populasi $S(t)$ untuk beberapa variasi h

Gambar 3. 1 Simulasi Numerik untuk $R_0 < 1$

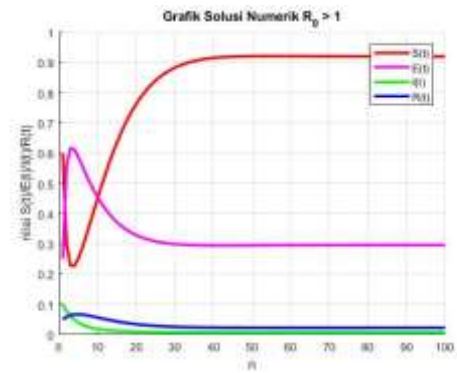
Gambar 3.1 (a) dan (b) menunjukkan bahwa solusi dengan ukuran langkah $\phi(0.01) = \frac{1-e^{-\mu(0.01)}}{0.2}$ lebih lambat menuju kondisi kesetimbangan dibandingkan solusi dengan ukuran langkah $(1) = \frac{1-e^{-\mu(1)}}{0.2}$. Namun simulasi numerik menggunakan metode beda hingga tak standar menunjukkan konvergensi ke titik kesetimbangan. Pada gambar di atas, grafik pertumbuhan banyaknya manusia rentan (S) dimulai dari hari ke 0 bergerak naik menuju titik tetap diakibatkan adanya kelahiran alami (B). Kemudian manusia laten (E), manusia terinfeksi (I) dan manusia yang sembuh (R) mengalami penurunan dan mendekati 0. Hal tersebut sesuai dengan keadaan bebas penyakit dimana populasi (I) bernilai 0 dan mengakibatkan populasi (R) juga bernilai 0. Pada gambar 3.1(c) perbedaan grafik populasi *susceptible* terletak pada waktu mencapai titik tetapnya. Untuk $h = 0.5$ grafik mencapai di titik tetap ketika $n = 60$ sedangkan untuk $h = 1$ mencapai titik tetap ketika $n = 40$. Kemudian untuk $h = 5$ mencapai titik tetap saat $n = 30$ dan untuk $h = 10$ menuju titik tetap saat $n = 28$.

b. Titik Tetap Endemik ($R_0 > 1$)

Sama halnya dengan cara memperoleh grafik pada keadaan bebas penyakit, berdasarkan metode beda hingga tak standar dengan menggunakan nilai parameter pada tabel 2.1 diperoleh grafik $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ dan $R(t)$ untuk $h = 0.01$ dan $h = 1$ adalah sebagai berikut.

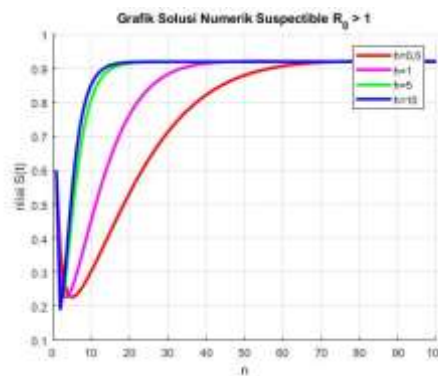


(a) Solusi Numerik $S(t), E(t), I(t)$ dan $R(t)$ untuk $h = 0.01$

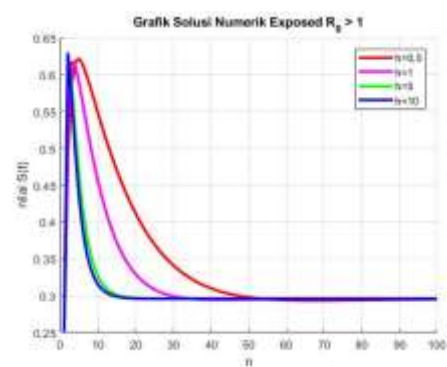


(b) Solusi Numerik $S(t), E(t), I(t)$ dan $R(t)$ untuk $h = 1$

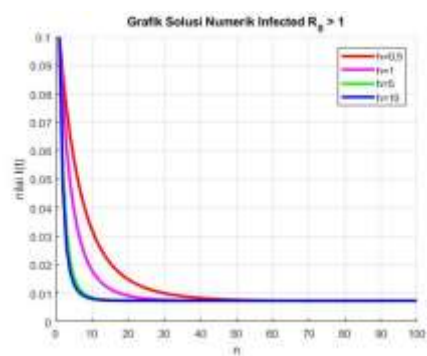
Gambar 3.2 Solusi Numerik untuk $R_0 > 1$



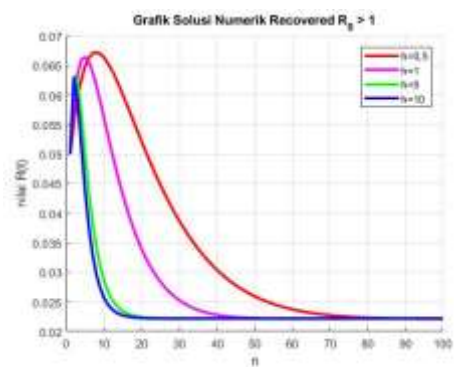
(a) Solusi Numerik $S(t)$ untuk $R_0 > 1$



(b) Solusi Numerik $E(t)$ untuk $R_0 > 1$



(c) Solusi Numerik $I(t)$ untuk $R_0 > 1$



(d) Solusi Numerik $R(t)$ untuk $R_0 > 1$

Gambar 3.3 Solusi Numerik untuk populasi $S(t), E(t), I(t), R(t)$ untuk beberapa variasi h

Gambar 3.2 (a) dan (b) menunjukkan bahwa solusi dengan ukuran langkah $\phi(0.01) = \frac{1-e^{-\mu(0.01)}}{0.2}$ lebih lambat menuju kondisi kesetimbangan dibandingkan solusi dengan ukuran langkah $(1) = \frac{1-e^{-\mu(1)}}{0.2}$. Namun simulasi numerik menggunakan metode beda hingga tak standar menunjukkan konvergensi ke titik kesetimbangan dengan nilai β yang cukup besar yaitu $\beta = 20$ untuk menghasilkan $R_0 > 1$. Hal tersebut berarti masih terjadi penyebaran penyakit campak. Pada gambar di atas, grafik pertumbuhan banyaknya manusia rentan (S) dimulai dari waktu ke 0 bergerak turun kemudian naik kembali menuju titik tetap diakibatkan adanya kelahiran alami (B). Kemudian manusia laten (E) mengalami kenaikan dari waktu ke 0 kemudian turun menuju titik tetap. Untuk manusia terinfeksi (I) dan manusia yang sembuh (R) mengalami penurunan dan mendekati titik tetap. Hal tersebut sesuai dengan keadaan endemik dimana populasi (I) bernilai lebih dari nol atau tidak sama dengan nol. Dari keempat gambar 3.3(a) sampai gambar (d) menunjukkan bahwa semakin besar nilai h yang digunakan maka grafik akan cepat menuju titik tetapnya.

3.5 Keterkaitan Antara Kajian Penyakit Menular dalam AlQur'an dan Hadist dengan Konsep Model Matematika Penyebaran Campak.

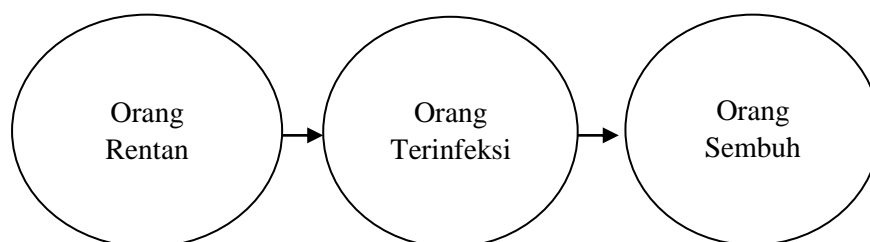
Al-Qur'an merupakan sumber dari segala macam ilmu pengetahuan. Beberapa konsep disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an termasuk salah satunya adalah keilmuan matematika serta berbagai cabangnya terdapat dalam Al-Qur'an seperti halnya masalah statistik, logika, pemodelan, graf, dan lain-lain. Pemodelan matematika yang merupakan salah satu cabang keilmuan matematika

tersebut telah banyak dikaji sebagai suatu cara sederhana untuk menerjemahkan suatu masalah ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi. Dalam kehidupan terdapat beberapa masalah yang telah dibangun secara matematis diantaranya pemodelan kontruksi jembatan, pemodelan air dangkal dan pemodelan penyakit menular.

Dalam teori Islam penyakit menular sudah dipercayai sejak zaman para Nabi. Nabi Muhammad SAW menganjurkan untuk menjaga jarak, menjauhi kerumunan, tetap melakukan aktivitas dari rumah, menaati anjuran pemerintah sebagai otoritas yang berwenang, serta berdoa agar terhindar dari penyebaran penyakit menular merupakan ikhtiar yang bisa kita lakukan untuk mencegah agar terhindar dari wabah penyakit menular seperti dalam Hadistnya yang berbunyi

“Janganlah yang sakit dicampurbaurkan dengan yang sehat” (HR Bukhari dan Muslim dari Abu Hurairah).

Sebagai contoh representasi dari hadist tersebut adalah pemodelan penyakit menular. Pemodelan penyakit banyak dimodelkan dengan pemisahan populasi orang rentan (*Suspectible*), terinfeksi (*Infected*), sampai dengan populasi sembuh (*Recovered*). Pemisahan populasi bertujuan untuk mengetahui laju penularan sehingga tingkat penyebarannya dapat diperkecil.



Gambar 3. 4 Reprerentasi Pemisahan Orang Sakit dan Orang Sembuh

Secara matematis gambar 3.4 disebut sebagai diagram kompartemen penyebaran suatu penyakit dengan arah panah menunjukkan adanya hubungan antar populasi dan dirumuskan dalam suatu parameter laju atau tingkat perpindahan jumlah masing-masing populasi. Hadist Rasulullah yang telah disebutkan bersesuaian dengan proses pemodelan penyakit yang semakin populer dalam ilmu matematika. Setelah dilakukan pemisahan populasi, selanjutnya dibentuk suatu persamaan diferensial yang menggambarkan laju penularan yang kemudian dianalisis secara matematis.

Dalam penelitian ini pemodelan penyebaran campak juga menggunakan diagram kompartemen yang ditunjukkan pada gambar 2.1. pembaruan ilmu matematika dan kedokteran menemukan populasi baru yaitu *Exposed* atau populasi orang dalam keadaan laten, sehingga pemisahan populasi tidak hanya terbatas pada populasi orang sembuh dan sakit, tetapi lebih dalam lagi dimodelkan dalam *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya maka kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Model penyebaran penyakit campak yang digunakan adalah model S, E, I, R dan dianalisis dengan menggunakan metode skema beda hingga tak standar. Berikut hasil dikritisasi model dengan metode skema beda hingga tak standar yaitu:

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\phi(h)} = B - \beta S^{n+1} I^n - \mu S^{n+1}$$

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\phi(h)} = \beta S^{n+1} I^n - (\mu + \alpha + \sigma) E^{n+1}$$

$$\frac{I^{n+1} - I^n}{\phi(h)} = \alpha E^{n+1} - (\mu + \gamma) I^{n+1}$$

$$\frac{R^{n+1} - R^n}{\phi(h)} = \gamma I^{n+1} + \alpha E^{n+1} - \mu R^{n+1}$$

dengan fungsi $\phi(h) = \frac{1 - e^{-\mu h}}{\mu}$.

2. Berdasarkan hasil analisis kestabilan menggunakan kriteria Schur-Cohn menunjukkan bahwa model beda hingga tak standar penyebaran penyakit campak stabil secara numerik untuk dua kondisi yaitu kondisi bebas penyakit dan endemik dengan $0 \leq \phi(h) \leq \frac{1}{\mu}$ untuk $h \geq 0$.

3. Hasil simulasi numerik untuk model beda hingga tak standar penyebaran penyakit campak dengan ukuran langkah $\phi(h) = \frac{1-e^{-\mu h}}{\mu}$ menunjukkan bahwa semakin besar nilai h yang digunakan maka grafik akan cepat konvergen menuju titik tetapnya.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini telah ditunjukkan hasil metode beda hingga tak standar dalam menyelesaikan sistem dinamik yang mengarah pada analisis kestabilan titik tetap yang didasarkan pada parameter tertentu. Hal tersebut berarti analisis yang dilakukan bersifat khusus. Maka dari itu, bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya agar dapat dikembangkan lebih lanjut untuk mendapat kestabilan pada kasus yang lebih umum.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemahan*. Cetakan ke-7: Al-Mizan Publishing House.
- Arrowsmith, D.R. dan C.M Place. 1990. *Dynamical System Differential Equation,. Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall Mathematic. London.
- Bolarin. 2014. *On the Dynamical Analysis of a New Model for Measles Infection*. International Journal of Mathematics Trends and Technology. Vol 7, No 2.
- Boyce, W. E., & Diprima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth edition. John Wiley & Sons, Inc. United State of America.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J., & Metz, J. 1990. On the Definiton and Computation of The Basic Reproduction Ratio R_0 in Models for Infections Dieses in Heterogeneuses Population. *J Math* 28(4), 365-382.
- Driessche, P. v., & Watmough. K. 2002. Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartemenal Models of Disease Transmission. *Mathematical Bioscience*, 180, 29-48.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third edition. Springer. United State of America.
- Farah, Ashraf dkk. 2019. *Nonstandard Finite Difference Scheme for Control of Measles Epidemiology*. Departemen of Mathematics and Statistics, University of Lahore, Pakistan.
- Giesecke, J. 2002. *Modern Infectious Disease Epidemiology*, 2nd edition. Florida: CRC Press.
- Hadits riwayat Bukhari dan Muslim dari Abu Hurairah no. 827.
- Hadits riwayat Bukhari, Muslim, dan Ahmad no. 828.
- Humairoh, Nur. 2016. *Skema Beda Hingga Tak Standar Pada Model Epidemi SIRC*. Skripsi Universitas Brawijaya. Malang.
- Hardiningsih, A. Y. 2010. *Kajian Model Epidemi SIR Deterministik dan Stokastik Pada Waktu Diskrit*. Surabaya: Bidang Studi Matematika ITS.

- Nugroho, Sapto. 2018. *Analisis Dinamik Model SIR dengan Skema Beda Hingga Tak Standar*. Universitas Jendral Soedirman.
- Lapidus, L., Dan G. F. Pinder. 1999. *Nemurical Solution of Partial Differential Equation in Science abd Engineering*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Lestari, Putri. 2020. *Kontrol Optimal Mchen odel Dinamika Merokok dengan Kampanye Anti Rokok, Permen Karet Nikotin, dan Pengobatan*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang : ethesis.uin-malang.ac.id
- Marwan dan Said. 2009. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Mickens, R., E. 2005. *Advances in the Application of Nonstandard Finite Difference Schemes*. World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd. Singapore.
- Momoh AA. 2013. *Mathematical model for control of measles epidemiology*. Jurnal Internasional Matematika Murni dan Terapan. 87(5) : 707-717.
- Munandar, Aris. 2017. *Analisis Konsistensi dan Kestabilan Model Dinamik Dikret pada Masalah Predator-Prey dengan Fungsi Respon Ratio Dependemt dan Permanen pada Predator* . Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang : ethesis.uin-malang.ac.id
- Perko, Lawrence. 1991. *Differential Equation and Dynamical System : Third Edition*. New York : Springer.
- Suryanto, Agus. 2012. *Skema Beda Hingga Tak-Standar untuk Model Epidemi dengan Penularan Tersaturasi yang dimodifikasi*. Universitas Brawijaya, Malang.
- Wahbah az-Zuhaili. 1991. *Tafsir al-Munir fi al-`aqidah wa asySyar`iah wa al-Manhaj*, Suriah, (Damaskus : Darul Fikri), Juz. 22, h. 26

LAMPIRAN

Lampiran 1: Kestabilan Titik Tetap Skema Beda Hingga tak Standar

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial S^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial S^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial S^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial S^{n+1}}{\partial R^n} \\ \frac{\partial E^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial E^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial E^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial E^{n+1}}{\partial R^n} \\ \frac{\partial I^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial I^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial I^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial I^{n+1}}{\partial R^n} \\ \frac{\partial R^{n+1}}{\partial S^n} & \frac{\partial R^{n+1}}{\partial E^n} & \frac{\partial R^{n+1}}{\partial I^n} & \frac{\partial R^{n+1}}{\partial R^n} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\frac{\partial S^{n+1}}{\partial S^n} = \frac{1}{\beta\phi(h)I + \mu\phi(h) + 1} = \frac{1}{\phi(h)(\beta I + \mu) + 1}$$

$$\frac{\partial S^{n+1}}{\partial E^n} = 0$$

$$\frac{\partial S^{n+1}}{\partial I^n} = -\frac{(B\phi(h) + S)\phi(h)\beta}{(\beta\phi(h)I + \mu\phi(h) + 1)^2} = -\frac{(B\phi(h) + S)\phi(h)\beta}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)^2}$$

$$\frac{\partial S^{n+1}}{\partial R^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^{n+1}}{\partial S^n} &= \frac{\phi(h)\beta}{(\beta\phi(h)I + \mu\phi(h) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \\ &= \frac{\phi(h)\beta}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E^{n+1}}{\partial E^n} = \frac{1}{1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^{n+1}}{\partial I^n} &= -\frac{\phi(h)^2\beta^2(B\phi(h) + S)}{(\beta\phi(h)I + \mu\phi(h) + 1)^2(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \\ &= -\frac{\phi(h)^2\beta^2(B\phi(h) + S)}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)^2(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E^{n+1}}{\partial R^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{n+1}}{\partial S^n} &= \frac{\alpha \phi(h)^2 \beta}{(\beta \phi(h)I + \mu \phi(h) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} \\ &= \frac{\alpha \phi(h)^2 \beta}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I^{n+1}}{\partial E^n} = \frac{\alpha \phi(h)}{(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))}$$

$$\frac{\partial I^{n+1}}{\partial I^n} = \frac{-\frac{\alpha \phi(h)^3 \beta^2 (B \phi(h) + S)}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)^2 (1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} + 1}{1 + \phi(h)(\mu + \sigma)}$$

$$\frac{\partial I^{n+1}}{\partial R^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{n+1}}{\partial S^n} &= \frac{\frac{\gamma \alpha \beta \phi(h)^3}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} + \frac{\alpha \phi(h)^2 \beta}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))}}{\mu \phi(h) + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \left(\frac{\gamma \alpha \beta \phi(h)^3}{(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} + \alpha \phi(h)^2 \beta \right)}{\mu \phi(h) + 1} \\ &= \frac{\left(\frac{\gamma \alpha \beta \phi(h)^3}{(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} + \alpha \phi(h)^2 \beta \right)}{(\mu \phi(h) + 1)(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \\ &= \frac{\gamma \alpha \beta \phi(h)^3 + \alpha \phi(h)^2 \beta (1 + \phi(h)(\gamma + \mu + \sigma))}{(\mu \phi(h) + 1)(\phi(h)(\beta I + \mu) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{n+1}}{\partial E^n} &= \frac{\frac{\gamma \alpha \phi(h)^2}{(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} + \frac{\alpha \phi(h)}{(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))}}{\mu \phi(h) + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \left(\frac{\gamma \alpha \phi(h)^2}{(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))} + \alpha \phi(h) \right)}{\mu \phi(h) + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\gamma\alpha\phi(h)^2}{(1+\phi(h)(\mu+\sigma))} + \alpha\phi(h)}{(\mu\phi(h) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))} \\
&= \frac{\gamma\alpha\phi(h)^2 + \alpha\phi(h)(1 + \phi(h)(\gamma + \mu + \sigma))}{(\mu\phi(h) + 1)(1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma))(1 + \phi(h)(\mu + \sigma))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R^{n+1}}{\partial I^n} \\
&= \frac{\gamma\phi(h) \frac{\left(\frac{\alpha\phi(h)^3\beta^2(B\phi(h)+S)}{(\phi(h)(\beta I+\mu)+1)^2(1+\phi(h)(\mu+\alpha+\sigma))} + 1 \right)}{1+\phi(h)(\mu+\sigma)} - \frac{\alpha\phi(h)^3\beta^2(B\phi(h)+S)}{(\phi(h)(\beta I+\mu)+1)^2(1+\phi(h)(\mu+\alpha+\sigma))}}{\mu\phi(h) + 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R^{n+1}}{\partial I^n} = \frac{1}{\mu\phi(h) + 1}$$

Dengan memisalkan

$$a = \phi(h)(\beta I + \mu) + 1$$

$$b = 1 + \phi(h)(\mu + \alpha + \sigma)$$

$$c = 1 + \phi(h)(\mu + \sigma)$$

$$d = \mu\phi(h) + 1$$

$$e = B\phi(h) + S^*$$

$$j = 1 + \phi(h)(\gamma + \mu + \sigma)$$

$$k = \frac{pl^2e}{a^2b}$$

$$l = \phi(h)\beta$$

$$m = \phi(h)\gamma$$

$$p = \phi(h)\alpha$$

$$q = p\alpha(m + j)$$

$$W = \frac{l(k + 1) - kc}{cd}$$

Didapat matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{el}{a^2} & 0 \\ l & 1 & l^2 e & 0 \\ \frac{ab}{pl} & \frac{1}{b} & -\frac{l^2 e}{a^2 b} & 0 \\ \frac{abc}{ql} & \frac{p}{bc} & -\frac{k}{c} & 0 \\ \frac{abcd}{q} & \frac{q}{bcd} & W & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobi tersebut akan ditentukan persamaan karakteristik nilai eigen yang diperoleh dari $\det(\lambda I - J) = 0$

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{a} & 0 & -\frac{el}{a^2} & 0 \\ l & \lambda - \frac{1}{b} & l^2 e & 0 \\ \frac{ab}{pl} & \frac{p}{bc} & \lambda + \frac{k}{c} & 0 \\ \frac{abc}{ql} & \frac{q}{bcd} & W & \lambda - \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan bantuan aplikasi Maple 18 didapat

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J) = & \lambda^4 + \frac{k\lambda^3}{c} - \frac{\lambda^3}{d} - \frac{\lambda^3}{b} - \frac{\lambda^3}{a} - \frac{k\lambda^2}{cd} - \frac{k\lambda^2}{bc} - \frac{k\lambda^2}{ac} + \frac{el^2\lambda^2 p}{a^2 b^2 c} + \frac{el^2\lambda^2 p}{a^3 bc} \\ & + \frac{\lambda^2}{bd} + \frac{\lambda^2}{ad} + \frac{\lambda^2}{ab} + \frac{k\lambda}{bcd} + 2\frac{k\lambda}{acd} - \frac{el^2\lambda p}{a^2 b^2 cd} - \frac{el^2\lambda p}{a^2 bcd} - \frac{3el^2\lambda p}{a^3 b^2 c} \\ & - \frac{\lambda}{abd} - \frac{k}{abcd} + \frac{3el^2 p}{a^3 b^2 cd} \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks tersebut berupa polinom berderajat empat yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4$$

dengan

$$A_1 = \left(\frac{k}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$A_2 = -\frac{k}{cd} - \frac{k}{bc} - \frac{k}{ac} + \frac{el^2 p}{a^2 b^2 c} + \frac{el^2 p}{a^3 bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{ab}$$

$$A_3 = \frac{k}{bcd} + 2\frac{k}{acd} - \frac{el^2p}{a^2b^2cd} - \frac{el^2p}{a^2bcd} - \frac{3el^2p}{a^3b^2c} - \frac{1}{abd}$$

$$A_4 = \frac{3el^2p}{a^3b^2cd} - \frac{k}{abcd}$$

Lampiran 2 : Program Maple Menghitung Determinan Matriks Jacobi

>with(linalg) :

> z := Matrix(4, 4, [[$\lambda - \frac{1}{a}, 0, -\frac{e \cdot l}{a^2}, 0$], [$\frac{l}{a \cdot b}, \lambda - \frac{1}{b}, -\frac{l^2 \cdot e}{a^2 \cdot b}, 0$], [$\frac{p \cdot l}{a \cdot b \cdot c}, \frac{p}{b \cdot c}, \lambda + \frac{k}{c}, 0$], [$\frac{q \cdot l}{a \cdot b \cdot c \cdot d}, \frac{q}{b \cdot c \cdot d}, W, \lambda - \frac{1}{d}$]]);

$$z := \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{a} & 0 & -\frac{el}{a^2} & 0 \\ \frac{l}{ab} & \lambda - \frac{1}{b} & -\frac{l^2 e}{a^2 b} & 0 \\ \frac{pl}{abc} & \frac{p}{bc} & \lambda + \frac{k}{c} & 0 \\ \frac{ql}{abcd} & \frac{q}{bcd} & W & \lambda - \frac{1}{d} \end{bmatrix}$$

>det(z);

$$\frac{1}{a^3 b^2 c d} \left((\lambda d - 1) (a^3 b^2 c \lambda^3 + a^3 b^2 k \lambda^2 - a^3 b c \lambda^2 - a^2 b^2 c \lambda^2 - a^3 b k \lambda - a^2 b^2 k \lambda + a e l^2 \lambda p + b e l^2 \lambda p + a^2 b c \lambda + a^2 b k - 3 p l^2 e) \right)$$

>expand(det(z));

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \frac{k \lambda^3}{c} - \frac{\lambda^3}{d} - \frac{\lambda^3}{b} - \frac{\lambda^3}{a} - \frac{k \lambda^2}{cd} - \frac{k \lambda^2}{bc} - \frac{k \lambda^2}{ac} + \frac{e l^2 \lambda^2 p}{a^2 b^2 c} + \frac{e l^2 p \lambda^2}{a^3 b c} + \frac{\lambda^2}{bd} \\ & + \frac{\lambda^2}{ad} + \frac{\lambda^2}{ab} + \frac{k \lambda}{bcd} + \frac{k \lambda}{acd} + \frac{k \lambda}{abc} - \frac{e l^2 \lambda p}{a^2 b^2 cd} - \frac{e l^2 p \lambda}{d a^3 b c} - \frac{3 \lambda e l^2 p}{a^3 b^2 c} - \frac{\lambda}{abd} \\ & - \frac{k}{abcd} + \frac{3 e l^2 p}{d a^3 b^2 c} \end{aligned}$$

>

Lampiran 3: Program Maple Menentukan Nilai Syarat Kestabilan Bebas Penyakit

```

> >restart :
> m := 0.2 : p := 0.25 : g := 0.2 : B := 0.32 : a1 := 0.01 : b1 := 1 : Phi(h) := 5 :
> %keterangan — m melambangkan mu, p melambangkan phi, g melambangkan gamma,
    a1 melambangkan alpha, b melambangkan beta :
> a := (Phi(h)·m) + 1;
                                a := 2.0
> b := (Phi(h)·m) + (Phi(h)·p) + (Phi(h)·a1) + 1;
                                b := 3.30
> c := (Phi(h)·m) + (Phi(h)·p) + 1;
                                c := 3.25
> d := (Phi(h)·m) + 1;
                                d := 2.0
> e := (Phi(h)·B) +  $\frac{B}{m}$ ;
                                e := 3.200000000
> j := (Phi(h)·m) + (Phi(h)·p) + (Phi(h)·g) + 1;
                                j := 4.25
> k :=  $\frac{pl \cdot l^2 \cdot e}{a^2 \cdot b} + 1$ ;
                                k := 0.2424242424 pl l2 + 1
> l := (Phi(h)·b1);
                                l := 5
> ml := (Phi(h)·g);
                                ml := 1.0
> pl := (Phi(h)·a1);
                                pl := 0.05
> q := pl·a1·(ml + j);
                                q := 0.002625
> W :=  $\frac{l \cdot (k + 1) - k \cdot c}{c \cdot d}$ ;
                                W := 1.120046621
>
> A1 :=  $\frac{k}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ ;
                                A1 := -0.9020979021
>
> A2 :=  $-\frac{k}{c \cdot d} - \frac{1}{b \cdot c} - \frac{k}{a \cdot c} + \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^2 \cdot b^2 \cdot c} + \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^3 \cdot b \cdot c} + \frac{1}{b \cdot d} + \frac{1}{a \cdot d} + \frac{1}{a \cdot b}$ ;
                                A2 := 0.4332309106

```

$$>A3 := \frac{k}{b \cdot c \cdot d} + 2 \cdot \frac{k}{a \cdot c \cdot d} - \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^2 \cdot b^2 \cdot c \cdot d} - \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^2 \cdot b \cdot c \cdot d} - 3 \cdot \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^3 \cdot b^2 \cdot c} - \frac{1}{a \cdot b \cdot d};$$

$$A3 := -0.3301900120$$

$$>A4 := 3 \cdot \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^3 \cdot b^2 \cdot c \cdot d} - \frac{k}{a \cdot b \cdot c \cdot d};$$

$$A4 := 0.07558098466$$

$$>hasil1 := 1 + A1 + A2 + A3 + A4 :$$

>

$$>factor(hasil1);$$

$$0.2765239812$$

$$>hasil2 := 1 - A1 + A2 - A3 + A4 :$$

$$>factor(hasil2);$$

$$2.741099810$$

$$>hasil3 := A1^2 A4 + A1 A4 A3 - A2 A4^2 - A4^3 - A3 A1 - A3^2 - A4^2 + A2 + A4 + 1 :$$

$$>factor(hasil3);$$

$$1.177322842$$

$$> hasil4 := -A1^2 A4 + A1 A4 A3 - A2 A4^2 + A4^3 + A1 A3 + 2 A4 A2 - A3^2 - A4^2 - A2 - A4 + 1 :$$

$$>factor(hasil4);$$

$$0.6987653525$$

>

>

>

Lampiran 4 : Program Maple Menentukan Nilai Syarat Kestabilan Endemik

$\>m := 0.2 : p := 0.25 : g := 0.2 : B := 0.32 : a1 := 0.01 : b1 := 20 : \Phi(h) := 5 :$

$\>\%$ keterangan — m melambangkan μ , p melambangkan ϕ , g melambangkan γ ,
 $a1$ melambangkan α , b melambangkan β :

$$\>R0 := \frac{B \cdot a1 \cdot b1}{m \cdot (m + a1 + p) \cdot (m + g)};$$

$$R0 := 1.739130435$$

$$\>i := \frac{b1 \cdot (R0 - 1)}{m};$$

$$i := 73.91304350$$

$\>$

$$\>a := (\Phi(h) \cdot m) + (\Phi(h) \cdot b1 \cdot i) + 1;$$

$$a := 7393.304350$$

$$\>b := (\Phi(h) \cdot m) + (\Phi(h) \cdot p) + (\Phi(h) \cdot a1) + 1;$$

$$b := 3.30$$

$$\>c := (\Phi(h) \cdot m) + (\Phi(h) \cdot p) + 1;$$

$$c := 3.25$$

$$\>d := (\Phi(h) \cdot m) + 1;$$

$$d := 2.0$$

$$\>e := (\Phi(h) \cdot B) + \frac{B}{m \cdot R0};$$

$$e := 2.520000000$$

$$\>j := (\Phi(h) \cdot m) + (\Phi(h) \cdot p) + (\Phi(h) \cdot g) + 1;$$

$$j := 4.25$$

$$\>k := \frac{p1 \cdot l^2 \cdot e}{a^2 \cdot b} + 1;$$

$$k := 1.397041900 \cdot 10^{-8} p1 l^2 + 1$$

$$\>l := (\Phi(h) \cdot b1);$$

$$l := 100$$

$$\>m1 := (\Phi(h) \cdot g);$$

$$m1 := 1.0$$

$$\>p1 := (\Phi(h) \cdot a1);$$

$$p1 := 0.05$$

$$\>q := p1 \cdot a1 \cdot (m1 + j);$$

$$q := 0.002625$$

$$\>W := \frac{l \cdot (k + 1) - k \cdot c}{c \cdot d};$$

$$W := 30.26933474$$

$\>$

$$\>D1 := \frac{k}{c} - \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a};$$

$$D1 := -0.4954711036$$

>

$$>D2 := -\frac{k}{c \cdot d} - \frac{1}{b \cdot c} - \frac{k}{a \cdot c} + \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^2 \cdot b^2 \cdot c} + \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^3 \cdot b \cdot c} + \frac{1}{b \cdot d} + \frac{1}{a \cdot d} + \frac{1}{a \cdot b};$$

$$D2 := -0.09550191421$$

$$>D3 := \frac{k}{b \cdot c \cdot d} + 2 \cdot \frac{k}{a \cdot c \cdot d} - \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^2 \cdot b^2 \cdot c \cdot d} - \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^2 \cdot b \cdot c \cdot d} - 3 \cdot \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^3 \cdot b^2 \cdot c} - \frac{1}{a \cdot b \cdot d};$$

$$D3 := 0.04663449388$$

$$>D4 := 3 \cdot \frac{e \cdot l^2 \cdot p}{a^3 \cdot b^2 \cdot c \cdot d} - \frac{k}{a \cdot b \cdot c \cdot d};$$

$$D4 := -6.305095164 \cdot 10^{-6}$$

$$>hasil1 := 1 + D1 + D2 + D3 + D4 ;$$

>

$$>hasil1;$$

$$0.4556551710$$

$$>hasil2 := 1 - D1 + D2 - D3 + D4 ;$$

$$>factor(hasil2);$$

$$1.353328391$$

$$>hasil3 := D1^2 D4 + D1 D4 D3 - D2 D4^2 - D4^3 - D3 D1 - D3^2 - D4^2 + D2 + D4 + 1 ;$$

$$>factor(hasil3);$$

$$0.9254216467$$

$$> hasil4 := -D1^2 D4 + D1 D4 D3 - D2 D4^2 + D4^3 + D1 D3 + 2 D4 D2 - D3^2 - D4^2 - D2 - D4 + 1 ;$$

$$>factor(hasil4);$$

$$1.070230296$$

Lampiran 5 : Program Skema Beda Hingga Tak Standar Untuk $R_0 < 1$

```

clear all;
clc;
S0=0.6;
E0=0.25;
I0=0.1;
R0=0.05;
alpha=0.01;
gamma=0.2;
B=0.32;
miu=0.2;
sigma=0.25;
h=input('masukkan h= ');
n=100;
fd=(1-exp(-miu*h))/miu;
fprintf('nilai fd= %f ', fd);
S1(1)=S0;
E1(1)=E0;
I1(1)=I0;
R1(1)=R0;
b=input('masukkan beta= ');
r0=b*alpha*B/(miu*(miu+alpha+sigma)*(miu+gamma));
fprintf('nilai r0= %f ', r0);
fprintf('\n');
for i=1:n-1
    S1(i+1)=(B*fd+S1(i))/(1+b*fd*I1(i)+miu*fd);
    E1(i+1)=((fd*b*S1(i+1)*I1(i))+E1(i))/(1+fd*(miu+alpha+sigma));
    I1(i+1)=((fd*alpha*E1(i+1))+I1(i))/(1+fd*(miu+gamma));
    R1(i+1)=(R1(i)+(fd*gamma*I1(i+1)+fd*alpha*E1(i+1)))/(1+fd*miu);
end
Sn=S1(n);
En=E1(n);
In=I1(n);
Rn=R1(n);
fprintf('\n');
fprintf('hasil iterasi');
fprintf('\n');
fprintf('titik tetap yang dihasilkan dari iterasi: ');
fprintf('\n');
fprintf(' S*=%8.20f\n', Sn);
fprintf(' E*=%8.20f\n', En);
fprintf(' I*=%8.20f\n', In);
fprintf(' R*=%8.20f\n', Rn);
figure(1)
hold on;
plot(1:n,S1(:),'-r',1:n,E1(:),'-m',1:n,I1(:),'-g',1:n,R1(:),'-b','linewidth',2.5);
title('Grafik Solusi Numerik R_0 < 1','fontweight','bold')
xlabel('n');
ylabel('nilai S(t)/E(t)/I(t)/R(t)');
legend('S(t)', 'E(t)', 'I(t)', 'R(t)');
grid on;

```

Lampiran 6: Program Skema Beda Hingga Tak Standar Untuk $R_0 > 1$

```

clear all;
clc;
S0=0.6;
E0=0.25;
I0=0.1;
R0=0.05;
alpha=0.01;
gamma=0.2;
B=0.32;
miu=0.2;
sigma=0.25;
h=input('masukkan h= ');
n=100;
fd=(1-exp(-miu*h))/miu;
fprintf('nilai fd= %f ', fd);
S1(1)=S0;
E1(1)=E0;
I1(1)=I0;
R1(1)=R0;
b=input('masukkan beta= ');
r0=b*alpha*B/(miu*(miu+alpha+sigma)*(miu+gamma));
fprintf('nilai r0= %f ', r0);
fprintf('\n');
for i=1:n-1
    S1(i+1)=(B*fd+S1(i))/(1+b*fd*I1(i)+miu*fd);
    E1(i+1)=((fd*b*S1(i+1)*I1(i))+E1(i))/(1+fd*(miu+alpha+sigma));
    I1(i+1)=((fd*alpha*E1(i+1))+I1(i))/(1+fd*(miu+gamma));
    R1(i+1)=(R1(i)+(fd*gamma*I1(i+1)+fd*alpha*E1(i+1)))/(1+fd*miu);
end
Sn=S1(n);
En=E1(n);
In=I1(n);
Rn=R1(n);
fprintf('\n');
fprintf('hasil iterasi');
fprintf('\n');
fprintf('titik tetap yang dihasilkan dari iterasi: ');
fprintf('\n');
fprintf(' S*=%8.20f\n', Sn);
fprintf(' E*=%8.20f\n', En);
fprintf(' I*=%8.20f\n', In);
fprintf(' R*=%8.20f\n', Rn);
figure(1)
hold on;
plot(1:n,S1(:),'-r',1:n,E1(:),'-m',1:n,I1(:),'-g',1:n,R1(:),'-b','linewidth',2.5);
title('Grafik Solusi Numerik R_0 > 1','fontweight','bold')
xlabel('n');
ylabel('nilai S(t)/E(t)/I(t)/R(t)');
legend('S(t)', 'E(t)', 'I(t)', 'R(t)');
grid on;

```


RIWAYAT HIDUP



Ilfa Wardatul Rizqyah, lahir di Pasuruan pada tanggal 8 Juli 1999. Biasa dipanggil Ilfa. Putri pertama dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Anwar dan Ibu Ismatul Izzah. Selama menempuh kuliah di Malang bertempat tinggal di Jl. Sunan Drajat No.3 kec. Lowokwaru Kota Malang. Status sudah menikah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Kandang sapi 1 Kota Pasuruan dan lulus pada tahun 2011. Pendidikan selanjutnya yang ditempuh adalah SMP Negeri 2 Pasuruan lulusan tahun 2014, kemudian berada dalam jenjang sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Pasuruan lulus tahun 2017. Setelah lulus SMA, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan prodi Matematika.

Selama menjadi mahasiswi, tidak pernah aktif dalam organisasi sama sekali baik intra maupun ekstra kampus, akan tetapi aktif dalam kegiatan sosial di lingkungan masyarakat rumah yakni Karang Taruna mulai tahun 2017 sampai sekarang



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ilfa Wardatul Rizqyah
NIM : 17610054
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Implementasi Metode Beda Hingga Tak Standar Untuk Model Penyebaran Campak.
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Pembimbing II : Dr. Heni Widayani, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	14 April 2021	Konsultasi Bab I & II	1.
2	21 April 2021	Revisi Bab I & II	2.
3	28 April 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan Bab I	3.
4	30 April 2021	Revisi Kajian Agama Bab I	4.
5	3 Mei 2021	Konsultasi Bab I, II & III	5.
6	7 Mei 2021	Revisi Bab I, II & III	6.
7	16 Mei 2021	Konsultasi Kajian Agama Bab II	7.
8	22 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan	8.
9	13 Juli 2021	Konsultasi BAB III	9.
10	21 Agustus 2021	Revisi BAB III	10.
11	27 September 2021	Konsultasi Bab IV & Abstrak	11.
12	21 Oktober 2021	ACC Keseluruhan untuk disidangkan	12.

Malang, November 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005