

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
DENGAN FAKTOR KANIBALISME PADA *PREDATOR***

SKRIPSI

**OLEH
DWI SAFITRI
NIM. 17610015**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
DENGAN FAKTOR KANIBALISME PADA *PREDATOR***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH
DWI SAFITRI
NIM.17610015**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY*
DENGAN FAKTOR KANIBALISME PADA *PREDATOR***

SKRIPSI

**OLEH
DWI SAFITRI
NIM.17610015**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 21 Oktober 2021

Pembimbing I,


Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Pembimbing II,


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi


Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY
DENGAN FAKTOR KANIBALISME PADA PREDATOR**

SKRIPSI

**OLEH
DWI SAFITRI
NIM.17610015**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

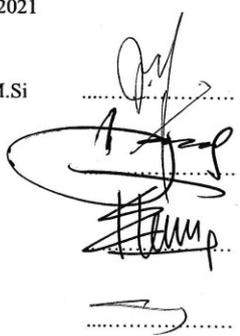
Tanggal, 25 November 2021

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Ketua Penguji : Prof. Dr. Turmudi, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



Mengetahui,
Ketua Program Studi



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Dwi Safitri
NIM : 17610015
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* dengan Faktor
Kanibalisme pada *Predator*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 21 Oktober 2021
Yang membuat pernyataan,



Dwi Safitri
NIM.17610015

MOTTO

“Untuk meraih kesuksesan, keinginanmu untuk sukses harus lebih besar daripada ketakutanmu terhadap kegagalan”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Isya Ansori, Ibu Sumarlik, kakak Khoirun Nisa,S.Pd., dan adek Nadzifah Aprilia yang selalu mendoakan, memberi dukungan dan kasih sayangnya kepada penulis. Segenap keluarga dan sahabat-sabihat yang senantiasa memberi semangat dan doanya kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah atas nikmat, rahmat, taufik dan hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan, arahan serta motivasi dari berbagai pihak. Dengan demikian, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, sebagai Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, arahan, motivasi, nasihat serta berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, sebagai Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, sebagai Dosen Penguji Seminar proposal dan Sidang skripsi yang telah memberikan saran dan kritikan yang bermanfaat bagi penulis.
7. Prof. Dr. Turmudi, M.Si, sebagai Dosen Penguji Sidang skripsi yang telah memberikan kritikan beserta saran yang sangat bermanfaat bagi penulis.
8. Segenap sivitas akademik Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama kepada seluruh dosen yang telah memberikan ilmunya.

9. Orang tua, saudara dan seluruh keluarga yang selalu memberikan doa, motivasi, semangat, kasih sayang, serta materi yang begitu besar serta pengorbanannya kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan-kekurangan. Dengan demikian, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan agar skripsi ini dapat lebih baik lagi. Disamping itu, penulis juga mengharapkan semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan kepada para pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr, Wb.

Malang, Oktober 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1 Persamaan Diferensial.....	8
2.1.1 Persamaan Diferensial Linier.....	9
2.1.2 Persamaan Diferensial Non Linier	10
2.2 Model <i>Predator-Prey</i>	10
2.3 Titik Kesetimbangan	12
2.4 Linierisasi	13

2.5 Fungsi Lyapunov	15
2.6 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	17
2.7 Bifurkasi Hopf.....	19
2.8 Lingkungan Hidup Menurut Perspektif Islam.....	20
BAB III PEMBAHASAN.....	22
3.1 Analisis Model <i>Predator-prey</i> (3.4) Tanpa Kanibalisme.....	27
3.2 Analisis Model <i>Predator-prey</i> (3.4) dengan Kanibalisme	35
3.2.1 Eksistensi dan Sifat Kestabilan Titik Keseimbangan	35
3.2.2 Sensitivitas Titik Keseimbangan Terhadap β dan ε	54
3.2.3 Simulasi Numerik	60
3.3 Peran Manusia dalam Melindungi Ekosistem Menurut Islam	71
BAB IV PENUTUP	73
4.1 Kesimpulan.....	73
4.2 Saran.....	73
DAFTAR PUSTAKA	74
LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Stabilitas Sistem Linier	13
Tabel 3.1	Definisi Parameter Pada Model (3.1).....	23
Tabel 3.2	Parameter Hasil Penskalaan	26
Tabel 3.3	Nilai Parameter untuk Gambar 3.4 dan 3.5.....	60
Tabel 3.4	Nilai Parameter untuk Gambar 3.6 dan 3.7.....	63
Tabel 3.5	Nilai Parameter untuk Gambar 3.8 dan 3.9.....	66

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Alir dari Model <i>Predator-prey</i> dengan Kanibalisme	11
Gambar 2.2	Bifurkasi Hopf.....	19
Gambar 3.1	Daerah Eksistensi dan Kestabilan Lokal E_0	55
Gambar 3.2	Daerah Eksistensi dan Kestabilan Lokal E^* Ketika $\sigma \leq b_1$	56
Gambar 3.3	Daerah Eksistensi dan Kestabilan Lokal E^* Ketika $\sigma > b_1$	58
Gambar 3.4	Limit Cycle Stabil Pada Solusi Sistem (3.4).....	62
Gambar 3.5	Potret Fase Solusi Sistem (3.4) dengan Limit Cycle Stabil	62
Gambar 3.6	Limit Cycle Tidak Stabil Pada Solusi Sistem (3.4).....	65
Gambar 3.7	Potret Fase Solusi Sistem (3.4) dengan Limit Cycle Tidak Stabil	65
Gambar 3.8	Solusi Sistem (3.4) dengan Syarat Awal $P_1 = (0.25, 1.32, 1.33)$	68
Gambar 3.9	Solusi Sistem (3.4) dengan Syarat Awal $P_2 = (0.25, 1.5, 1.7)$.	70

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini memiliki makna sebagai berikut:

$x(t)$:	Populasi <i>predator</i> dewasa terhadap waktu t
$y(t)$:	Populasi <i>predator</i> remaja terhadap waktu t
$z(t)$:	Populasi <i>prey</i> terhadap waktu t
d_1	:	Laju kematian alami dari <i>predator</i> dewasa
d_2	:	Laju kematian alami dari <i>predator</i> remaja
b_1	:	Laju kelahiran <i>predator</i> dewasa
b_2	:	Tingkat pertumbuhan <i>prey</i>
μ	:	Laju transisi <i>predator</i> remaja menjadi dewasa
α	:	Persaingan antar individu spesies <i>prey</i>
θ	:	Tingkat penangkapan <i>prey</i> oleh <i>predator</i> dewasa
c	:	Laju peningkatan populasi <i>predator</i> dewasa akibat memangsa <i>prey</i>
β	:	Tingkat penangkapan <i>predator</i> remaja oleh <i>predator</i> dewasa
ε	:	Laju peningkatan populasi <i>predator</i> dewasa akibat memangsa <i>predator</i> remaja
Ω_0	:	Himpunan invarian positif dari model dinamika <i>predator</i> dewasa, <i>predator</i> remaja dan <i>prey</i>

ABSTRAK

Safitri, Dwi. 2021. **Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* dengan Faktor Kanibalisme Pada *Predator***. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata Kunci: model *predator-prey*, kanibalisme, stabilitas lokal, *limit cycles*, bifurkasi hopf.

Kajian dinamik populasi *predator-prey* disuatu ekosistem dengan adanya kanibalisme pada *predator* dilakukan pada penelitian ini. Ketika ada kanibalisme di tingkat *predator* di khawatirkan populasi *predator* itu akan menurun atau terjadi kepunahan, sehingga populasi *prey* menjadi tidak terkontrol dan akan terjadi ketidakseimbangan ekosistem. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibangunlah model matematika *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator* berbentuk sistem persamaan diferensial biasa non linier dengan tiga persamaan yang membentuk sistem dinamik. Pada model *predator-prey* tersebut ditemukan dua titik kesetimbangan yang memiliki kemungkinan stabil yaitu titik kesetimbangan ketika bebas *prey* dan titik kesetimbangan ketika kedua spesies eksis di ekosistem tersebut. Hasil sensitivitas analisis menunjukkan bahwa sifat kestabilan lokal dari titik ketika bebas *prey* maupun titik dimana kedua spesies eksis bergantung pada parameter pemangsaan dan konversi mangsa karena kanibalisme. Lebih lanjut, untuk titik ketika kedua spesies eksis telah dibuktikan sifat kestabilan global menggunakan fungsi lyapunov. Hasil simulasi numerik mengilustrasikan hasil analisis yang sudah diperoleh, sehingga ditemukan kemungkinan terjadinya *limit cycles* yang menandakan adanya bifurkasi hopf.

ABSTRACT

Safitri, Dwi. 2021. **On The Analysis of Predator-Prey Model with Cannibalism Factors in Predators.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keywords: predator-prey model, cannibalism, local stability, limit cycles, hopf bifurcation.

The study of predator-prey population dynamics in an ecosystem in the presence of cannibalism in predators is carried out in this study. When there is cannibalism at the predator level, it is feared that the predator population will decrease or extinction will occur. Consequently the prey population becomes uncontrolled and there will be an ecosystem imbalance. In this study, a predator-prey mathematical model was built with the cannibalism factor in predators in the form of a system of non-linear ordinary differential equations with three equations that make up the dynamic system. In the predator-prey model, there are two equilibrium points that have a stable possibility, namely the equilibrium point when free of prey and the equilibrium point when both species exist in the ecosystem. The results of the sensitivity analysis show that the local stability properties of the point when free of prey and the point where both species exist depend on the parameters of predation and prey conversion due to cannibalism. Furthermore, to the point where both species exist, global stability properties have been demonstrated using the lyapunov function. The results of the numerical simulation illustrate the results of the analysis that have been obtained, so that the possibility of limit cycles is found which indicates the existence of a hopf bifurcation.

ملخص

سافترى. دوى. ٢٠٢١. تحليل نموذج المفترس-الضحية الديناميك بعوامل كانيبالزم (*kanibalisme*) على المفترس. بحث علمي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الدكتورة هيني ويديايني الماجستير. (٢) الدكتور عثمان باغالي الماجستير

الكلمات الأساسية: نموذج المفترس-الضحية، كانيبالزم (*kanibalisme*)، الاستقرار الداخلي، دورة محددة، بفوركاس هوبف (*bifurkasi hopf*).

إن دراسة ديناميك سكان المفترس-الضحية في أية الوحدة الطبيعية ومع وجود كانيبالزم (*kanibalisme*) على المفترس أجريت في هذا البحث. وإذا حدث كانيبالزم (*kanibalisme*) في الدرجة المفترسة يفرع ويوشك منه أن يكون ذلك سكان المفترس منخفضا مما يسبب إلى الدمار فيكون سكان الضحية غير مراقبة مما يسبب إلى عدم الاستقرار في الوحدة الطبيعية. ولذا، بني في هذا البحث نموذج رياضية المفترس-الضحية بعوامل كانيبالزم (*kanibalisme*) على المفترس بصيغة نظام تشبه التفاضل العادي غير الغطي بثلاث تشبهات التي تشكل النظام الديناميكي. وكان في نموذج المفترس-الضحية نوعان من الاستقرار مما تحتل على احتمال الاستقرار وهما نقط الاستقرار أثناء عدم الضحية عندما تكون الضحية ونقطة الاستقرار عندما ذلكما نوعان يوجدان في تلك الوحدة الطبيعية الافتراض وتحويل الفريسة بسبب . تظهر نتائج تحليل الحساسية أن خصائص الاستقرار المحلية للنقطتين عندما تكون الضحية حرة و عند وجود كلا النوعين تعتمد على معلمات أكل الافتراض وتحويل الفريسة بسبب كانيبالزم (*kanibalisme*). علاوة على ذلك ، بالنسبة للنقطة عند وجود كلا النوعين ، تم توضيح خصائص الاستقرار العالمي باستخدام وظيفة (*lyapunov*) . فنتائج التظاهر الرقمي تصور نتائج التحليل المحسولة مما يوجد الاحتمال على وجود الدورة المحددة التي دلت على وجود بفوركاس هوبف (*bifurkasi hopf*).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika memiliki peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta salah satu cabangnya yaitu pemodelan matematika yang sangat penting dan banyak manfaatnya. Merepresentasikan keadaan nyata ke dalam bentuk persamaan diferensial merupakan proses memodelkan matematika. Sistem persamaan tersebut berguna untuk memudahkan dalam proses menganalisa permasalahan di muka bumi ini.

Model matematika sering membahas masalah-masalah fenomena alam yang terjadi diantara makhluk hidup. Salah satunya adalah masalah di ekosistem makhluk hidup. Semua makhluk hidup melakukan interaksi untuk bertahan hidup, baik sesama spesies maupun berbeda spesies. Interaksi saling memangsa antara satu spesies dengan spesies lainnya merupakan bentuk interaksi demi mempertahankan kelangsungan hidup. Dalam matematika model interaksi tersebut diperkenalkan oleh Vito Volterra dan Alfred J. Lotka pada tahun 1980 disebut sebagai model *Lotka-Voltera* atau model *Predator-Prey* (Olinick, 2014).

Populasi pada ekosistem mengalami peningkatan dan penurunan seiring perkembangan zaman. Faktor-faktor yang memicu pertumbuhan populasi antara lain kematian, kelahiran, dan lingkungan. Sifat-sifat perilaku pada *predator* salah satunya yaitu Predasi intraspesifik disebut sebagai kanibalisme, yaitu proses membunuh dan kemudian memakan individu dari spesies yang sama (Zhang, 2019).

Ekosistem dengan lingkungan hidup adalah suatu kesatuan yang tidak bisa dipisahkan. Dengan demikian keteraturan tersebut menunjukkan bahwa ekosistem itu seimbang. Ekosistem dikatakan seimbang apabila komponen ekosistem yaitu komponen biotik dan abiotik dalam keadaan seimbang artinya jumlah dan peranannya dalam lingkungan berada pada porsi yang seharusnya. Ekosistem adalah hubungan timbal balik antara komponen biotik dan abiotik, untuk komponen biotik yaitu berupa makhluk hidup yang dapat dilihat dari keterkaitan antar komponennya melalui rantai makanan. Dalam penelitian ini dibahas mengenai komponen biotiknya, karena komponen abiotiknya mendukung keberlangsungan makhluk hidup tersebut. Al-Quran telah menerangkan tentang alam ini diciptakan oleh Allah SWT dalam keadaan seimbang, yaitu didalam Al-Quran Surat Al-Mulk ayat 3 yang artinya:

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?”

Bumi telah menyediakan semua kebutuhan makhluk didalamnya, selain sebagai tempat tinggal. Oleh karena itu, manusia sudah sepatutnya untuk mensyukuri nikmat tersebut dan menjaga ekosistem agar menjadi stabil. Alam raya ini Allah ciptakan dalam suatu sistem yang sangat sepadan saling melengkapi dan sesuai dengan kehidupan makhluk-makhluknya. Disamping itu, manusia perlu menyadari bahwa mereka harus berfungsi sebagai pelaku ekosistem dalam kata lain sebagai subjek.

Beberapa penelitian sebelumnya, telah membahas model *predator-prey* dengan kanibalisme. Penelitian itu diantaranya yang pertama yaitu penelitian (Biswas, 2015) yang menganalisis kanibalisme model *predator-prey* dengan

penyakit yang dapat ditularkan pada populasi predator yang dipertimbangkan dengan penundaan inkubasi. Hasilnya menunjukkan bahwa penundaan inkubasi membuat sistem tidak stabil dan dapat menghasilkan kekacauan. Penelitian kedua (Basheer, 2016) yang membahas tentang kanibalisme mangsa dapat mengubah dinamika model *predator-prey* tipe Holling-Tanner. Hasilnya menunjukkan bahwa kanibalisme mangsa dapat mengarah pada pembentukan pola dinamika turing. Penelitian yang ketiga (Basheer, 2017) yang membahas tentang efek kanibalisme pada *predator* dalam model predator-prey yang terstruktur dengan tiga spesies, hasilnya menunjukkan bahwa kanibalisme dapat menyebabkan ketidakstabilan turing.

Peneliti menganalisis dinamik model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator* dengan menentukan titik kesetimbangan, kestabilan lokal dan kestabilan global dari setiap titik kesetimbangan tersebut kemudian diilustrasikan menggunakan simulasi numerik. *Predator* yang terlibat dalam penelitian ini yaitu satu spesies *predator* dengan dua kelompok umur yaitu *predator* remaja dengan umur antara 0 sampai 5 tahun dan *predator* dewasa dengan umur antara 5 tahun sampai kurang lebih 50 tahun serta satu spesies *prey*, sehingga terdapat tiga persamaan. Makanan utama dari *predator* dewasa berbeda dengan *predator* remaja yaitu spesies *prey* dan dari spesiesnya sendiri.

Pada model *predator-prey* yang akan digunakan pada penelitian ini, spesies *prey* hanya dimakan oleh spesies *predator* dewasa. *Predator* remaja tidak memakan dari spesies *prey*, namun memakan spesies yang lain. Karena *predator* remaja tidak dapat berkembang biak sehingga sekalipun melakukan proses memakan maka tidak ada penambahan jumlah. Pada penelitian ini persaingan

antar spesies mangsa (kepadatan populasi mangsa) tidak ada, artinya tidak ada interaksi dalam populasi mangsa (*prey*). Peneliti menggunakan model matematika pada penelitian Fengqin Zhang, Yuming Chen dan Jiangquan Li tahun 2019 bahwa dalam jurnal tersebut membahas model matematika *predator-prey* terstruktur usia dan kanibalisme.

Dengan demikian, pada penelitian ini peneliti mengambil judul “*Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Faktor Kanibalisme pada Predator*” yang akan mengkaji ulang model *predator-prey* dengan adanya kanibalisme pada spesies *predator* pada penelitian Fengqin Zhang tahun 2019 dan menganalisis dinamik model *predator-prey* beserta simulasi numeriknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dari penelitian ini yaitu

1. Bagaimana analisis dinamik dari model *predator-prey* tanpa kanibalisme?
2. Bagaimana analisis dinamik dari model *predator-prey* dengan kanibalisme?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui analisis dinamik dari model *predator-prey* tanpa kanibalisme.
2. Untuk mengetahui analisis dinamik dari model *predator-prey* dengan kanibalisme.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Memberikan informasi tentang keadaan jangka panjang pada model *predator-prey* dengan kanibalisme yang dapat membantu dalam bidang ekologi serta pentingnya menjaga ekosistem.
2. Sebagai bahan literasi untuk pengembangan pada penelitian berikutnya dan sebagai bahan rujukan untuk menghindari terjadinya kepunahan pada rantai makanan dengan kanibalisme.

1.5 Batasan Masalah

Model yang digunakan dalam penelitian ini memiliki tiga persamaan diferensial. Penulis membuat batasan masalah dalam penelitian ini, yaitu:

1. Model *predator-prey* yang diambil dari penelitian Fengqin Zhang, Yuming Chen dan Jiangquan Li tahun 2019 beserta nilai parameternya.
2. Hanya terdapat satu spesies *predator* dan satu spesies *prey*, yang di lihat dinamika populasi akibat keterkaitan kedua spesies melalui proses mangsa-memangsa.
3. Tidak ada kematian karena penyakit atau bencana, namun hanya ada kematian alami pada spesies *predator*.
4. Pada *predator* remaja tidak hanya mengalami kematian alami, tetapi juga mengalami kematian akibat kanibalisme.
5. Spesies *prey* hanya mengalami kematian akibat dimangsa oleh predator dewasa.
6. Tidak ada persaingan antar spesies *prey*.

7. Ekosistem mendukung pertumbuhan *predator* dan *prey*, artinya makanan dan tempat mendukung keberlangsungan kehidupan *predator* dan *prey*. Dengan demikian pertumbuhannya konstan sehingga tidak memakai pertumbuhan logistik.
8. Kematian pada spesies *predator* bergantung pada umur.
9. Terbatas oleh sistem dinamik persamaan diferensial biasa orde satu.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan yaitu dengan pendekatan literatur. Pendekatan literatur dilakukan dengan membaca, memahami, menelaah dan menerapkan konsep yang berada diliteratur tersebut. Literatur utama dalam penelitian ini yaitu artikel jurnal oleh Fengqin Zhang dkk tahun 2019. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dari penelitian ini:

1. Analisis dinamik model *predator-prey* tanpa kanibalisme
 - a. Menentukan titik kesetimbangan
 - b. Melinierisasi model *predator-prey* tanpa kanibalisme
 - c. Menentukan jenis kestabilan dari setiap titik kesetimbangan
2. Analisis dinamik model *predator-prey* dengan kanibalisme
 - a. Menentukan titik kesetimbangan
 - b. Melinierisasi model *predator-prey* dengan kanibalisme
 - c. Menentukan jenis kestabilan dari setiap titik kesetimbangan
 - d. Mensimulasikan solusi sistem numerik menggunakan metode runge kutta orde 4

1.7 Sistematika Penulisan

Penelitian ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri atas empat bab utama. Hal ini bertujuan agar mempermudah memahami dan penulisan lebih terarah. Masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab, antara lain:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Bab kajian pustaka berisi teori, konsep serta literatur-literatur yang berkaitan dengan penelitian penulis dan pokok pembahasannya. Kajian pustaka dari penelitian ini antara lain persamaan diferensial linier dan nonlinier, sistem persamaan diferensial linier dan non linier, model *predator-prey*, titik kesetimbangan, linierisasi, fungsi Lyapunov, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, dan bifurkasi Hopf. Selain itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai ekosistem di bumi ini menurut perspektif Islam.

BAB III Pembahasan

Bab pembahasan akan membahas analisis dinamik dari model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator*, penyelesaian numerik dari modelnya sampai dengan simulasi menggunakan software Maple. Selanjutnya akan dianalisis dan interpretasi hasil yang diperoleh.

BAB IV Penutup

Bab penutup berisi kesimpulan dari hasil analisis dinamik dan saran yang akan membantu peneliti maupun pembaca untuk mengembangkan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial yaitu persamaan dalam bidang matematika yang terdiri dari fungsi beserta turunannya. Persamaan diferensial memiliki dua bentuk, yakni persamaan diferensial linier dan non-linier. Persamaan diferensial juga diartikan sebagai suatu persamaan yang memiliki turunan dari satu atau lebih fungsi yang tidak ketahui dikatakan juga variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Zill, 2013). Orde persamaan diferensial merupakan orde tertinggi turunan yang didapatkan dalam persamaan. Secara umum, persamaan diferensial biasa orde ke- n yaitu berbentuk

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^n(t)) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) menunjukkan hubungan antara variabel bebas x dengan nilai-nilai fungsi y beserta turunannya (Boyce & Diprima, 2001).

Sistem persamaan diferensial yaitu sistem persamaan yang terdiri oleh dua atau lebih persamaan diferensial yang menerangkan suatu fenomena. Bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_2}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

Sistem persamaan diferensial yang mendeskripsikan ketergantungan waktu atau derivatif waktu maka disebut sebagai sistem dinamik. Analisis yang dilakukan pada sistem dinamik di namakan analisis dinamik. Analisis dinamik adalah suatu metode yang dilakukan untuk mendeskripsikan, memodelkan dan mensimulasikan suatu sistem yang dinamik (dari waktu ke waktu terus berubah). Pada proses menyelesaikan suatu masalah tidak dilihat pada satu pokok bagian saja, tetapi harus dilihat semua pengaruhnya yang berhubungan dengan masalah tersebut. Ciri-ciri sistem dinamik adalah mencakup lintasan waktu, sehingga status variabel berubah saat waktu berubah (Strogatz, 1994).

2.1.1 Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial $f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0$ dikatakan linier jika f adalah linier dalam variabel-variabel $y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}$. Jadi secara umum persamaan diferensial biasa linier orde n yaitu: (Waluya, 2006)

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t) \tag{2.3}$$

Persamaan tersebut disebut persamaan diferensial homogen jika $g(t) = 0$. Sedangkan disebut persamaan diferensial non homogen jika $g(t) \neq 0$ (Hariyanto, 1992).

2.1.2 Persamaan Diferensial Non Linier

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan differensial linier tersebut merupakan persamaan differensial non linier.

Bentuk umum persamaan differensial non linier orde 2 yaitu: (Hariyanto, 1992)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f \left[x, \frac{dx}{dt} \right] \quad (2.4)$$

x dan $\frac{dx}{dt}$ merupakan variabel yang mempunyai interpretasi x menunjukkan posisi dan $\frac{dx}{dt}$ kecepatan. Bidang yang memuat variabel x dan $\frac{dx}{dt}$ disebut bidang

fase. Jika $y = \frac{dx}{dt}$ maka $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, y)$ atau

$$\text{Sistem persamaan differensial non linier} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y) \end{cases}$$

Atau dalam bentuk umum sistem persamaan differensial non linier dapat ditulis

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \text{ dan } \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

P dan Q mempunyai turunan parsial yang kontinyu untuk semua (x, y) .

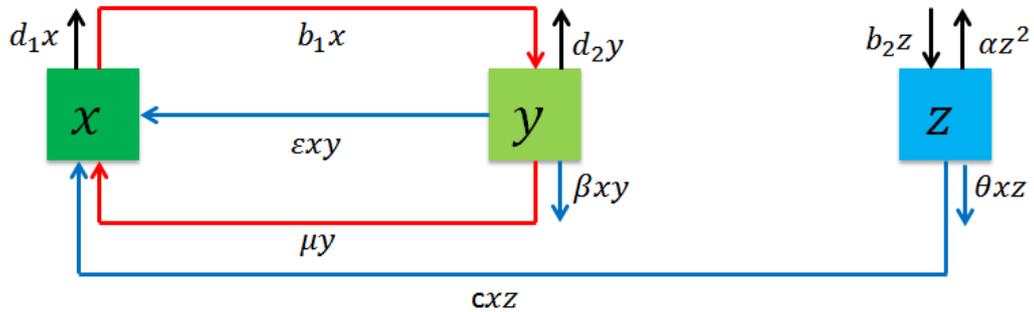
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

2.2 Model *Predator-Prey*

Salah satu ekosistem dua spesies pertama yang secara matematis dimodelkan melibatkan *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Model *predator-prey* (pemangsa-mangsa) tersusun oleh persamaan differensial yang menggambarkan fenomena alam *predator-prey* dalam suatu kasus yang sangat

sederhana. Berikut konstruksi model matematika predator-prey dengan kanibalisme pada penelitian Fengqin Zhang, dkk tahun 2019



Gambar 2.1 Diagram Alir dari Model *Predator-prey* dengan Kanibalisme

Berdasarkan diagram alir tersebut maka laju pertumbuhan *predator* dewasa akan mengalami penurunan ketika mengalami kematian secara alami. Sedangkan akan meningkat ketika *predator* remaja mengalami pematangan sehingga menjadi *predator* dewasa, serta ketika *predator* dewasa memakan *predator* remaja dan mangsa (*prey*), maka membentuk

$$\frac{dx}{dt} = -d_1x + \mu y + \varepsilon xy + cxz \quad (2.6)$$

Laju pertumbuhan dari populasi *predator* remaja akan mengalami peningkatan ketika *predator* dewasa berkembang biak, karena akan melahirkan *predator* remaja. Sedangkan ketika terjadi pematangan *predator* remaja menjadi *predator* dewasa, *predator* remaja mengalami kematian secara alami dan *predator* remaja dimakan oleh *predator* dewasa maka laju pertumbuhannya akan mengalami penurunan membentuk

$$\frac{dy}{dt} = b_1x - \mu y - d_2y - \beta xy \quad (2.7)$$

Pada populasi mangsa (*prey*) akan mengalami kenaikan laju peningkatan populasi ketika terjadi peningkatan pertumbuhan pada populasi mangsa (*prey*).

Sedangkan akan mengalami penurunan laju pertumbuhan ketika terdapat persaingan antar spesies mangsa dan ketika mangsa dimakan oleh predator dewasa, sehingga membentuk

$$\frac{dz}{dt} = (b_2 - \alpha z - \theta x)z \quad (2.8)$$

Berdasarkan penjelasan dari diagram alir tersebut maka model pemangsa-mangsa (*Predator-Prey*) dengan kanibalisme dalam populasi pemangsa adalah

$$\frac{dx}{dt} = -d_1x + \mu y + \varepsilon xy + cxz$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1x - \mu y - d_2y - \beta xy \quad (2.9)$$

$$\frac{dz}{dt} = (b_2 - \alpha z - \theta x)z$$

2.3 Titik Kestimbangan

Analisis kestabilan titik tetap merupakan salah satu tahapan didalam memodelkan matematika. Dengan demikian, pada bagian ini akan dijelaskan tentang teori analisis kestabilan. Sebelumnya, akan dibahas dahulu mengenai beberapa denifisi titik tetap dan analisis kestabilan. (Ndii, 2018)

Definisi Titik Kestimbangan dan Kestabilan: misalkan diberikan sebuah sistem linier $y' = f(y(t))$. Asumsikan bahwa c adalah titik tetap dari sistem linier tersebut jika c adalah solusi konstan dari sistem tersebut. Maka dikatakan bahwa $f(c) = 0$.

Contoh:

Tentukan titik tetap dari persamaan berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad \text{dimana } r, K > 0$$

Penyelesaian:

Dengan menyatakan bahwa $\frac{dx}{dt} = 0$ dan memanipulasi aljabar, maka diperoleh $rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0$. Artinya bahwa $rx = 0$ atau $\left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0$, sehingga didapatkan titik tetapnya yaitu $x = 0$ atau $x = k$.

Persamaan yang berisi akar-akar karakteristik dari pencarian titik tetap selanjutnya ditentukan sifat kestabilan dari bagian realnya. Beberapa sifat kestabilan sistem linier yaitu sebagai berikut (Boyce & Diprima, 2001):

Nilai Eigen	Tipe Titik Kritis	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Node	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Node	Stabil asimtotik
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik Saddle	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Node sejati atau tidak sejati	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Node sejati atau tidak sejati	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = k \pm ih$	Titik spiral	
$k > 0$		Tidak stabil
$k < 0$		Stabil asimtotik
$\lambda_1 = ih, \lambda_2 = -ih$	Titik tengah	Stabil

Tabel 2.1 Stabilitas Sistem Linier

2.4 Linierisasi

Untuk pendekatan linier di suatu sistem persamaan non linier digunakanlah linierisasi. Pendekatan ini akan mendapatkan sistem persamaan linier yang sesuai sehingga dapat berfungsi untuk menemukan solusi dari sistem persamaan non linier tersebut. Misalkan suatu sistem dapat ditulis

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = f(x, y) \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = g(x, y)$$

Akan dimisalkan bahwa (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan dari sistem (2.10). Maka sistem (2.10) merupakan sistem non-linier, oleh karena itu diperlukan pendekatan sistem linier jika (x, y) disekitar (x_0, y_0) . Menurut deret Taylor dengan melakukan ekspansi di sekitar titik (x_0, y_0) sehingga suku tak liniernya dapat dihilangkan. Misalkan menggunakan titik kesetimbangan yang pertama, maka (x_0, y_0) adalah titik $(0,0)$. Berikut linierisasi pada sistem (2.10),

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.11)$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Linierisasi tersebut adalah hasil dari pendekatan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ dengan deret Taylor yang terbatas. $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ akan selalu bernilai nol pada titik yang setimbang, sehingga (2.11) dapat disederhanakan sebagai berikut

$$f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.12)$$

$$g(x, y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Apabila melakukan substitusi $x - x_0 = u$ dan $y - y_0 = v$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$

dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$. Maka sistem (2.12) akan menjadi sistem persamaan yang linier

berikut

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v \quad (2.13)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v$$

Sistem (2.13) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks yaitu,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dimana } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Atau

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dimana } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ \gamma y & -c + \gamma y \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Mensubstitusikan nilai $x = x_0 = 0$ dan $y = y_0 = 0$ pada matriks \mathbf{A} sehingga didapatkan,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Matriks (2.16) disebut dengan matriks jacobian. Ukuran matriks mengikuti banyaknya persamaan yang membentuk sistem persamaan diferensial. Akar-akar yang dihasilkan dari matriks jacobian dapat menentukan sifat kestabilan dari sistem tersebut.

2.5 Fungsi Lyapunov

Fungsi Lyapunov merupakan fungsi skalar yang dapat digunakan untuk membuktikan stabilitas keseimbangan persamaan diferensial biasa (ODE). Pada sistem dinamis otonom, fungsi Lyapunov adalah (Lina, 2014)

$$g = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.17)$$

$$\dot{y} = g(y)$$

Dengan titik kesetimbangan di $y = 0$ adalah fungsi skalar $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang kontinu, dan memiliki turunan pertama yang kontinu. Karena bersifat lokal-positif maka dengan itu $-\nabla V \cdot g$ juga pasti positif secara lokal. Sedangkan untuk $\nabla V \cdot g$ pasti bernilai negatif secara lokal (Lina, 2014).

Fungsi Lyapunov muncul dalam pembelajaran titik kesetimbangan sistem dinamik. Di \mathbb{R}^n , sistem dinamik otonom dapat ditulis sebagai (Lina, 2014)

$$\dot{y} = g(y) \quad (2.18)$$

Untuk beberapa $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Titik kesetimbangan merupakan titik y^* seperti $g(y^*) = 0$. Ketika diberi titik kesetimbangan y^* , selalu ada transformasi koordinat $x = y - y^*$, seperti:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{y} = g(y) = g(x + y^*) = f(x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Jadi, dalam mempelajari titik-titik kesetimbangan, cukup untuk mengasumsikan titik kesetimbangan terjadi pada 0.

Dengan aturan rantai, untuk fungsi apapun $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, turunan waktu dari fungsi yang dievaluasi sepanjang solusi dari sistem dinamik adalah (Lina, 2014)

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}H(x(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla H \cdot \dot{x} = \nabla H \cdot f \quad (2.19)$$

Sebuah fungsi H didefinisikan sebagai fungsi pasti positif secara lokal (dalam arti sistem dinamik) jika keduanya $H(0) = 0$ dan ada lingkungan asal B , seperti:

$$H(x) > 0 \quad \forall x \in B \setminus \{0\}$$

Dikatakan fungsi lyapunov ketika fungsi tersebut memenuhi tiga kondisi berikut:

Definisi (Fungsi Lyapunov): diberikan suatu fungsi $V: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $x_e \in D$ yaitu titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinier. Fungsi V dikatakan sebagai fungsi lyapunov jika memenuhi persyaratan berikut ini: (Sundari, 2017)

- a. Fungsi V kontinu dan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada D .

- b. Fungsi $V(x) > 0$ untuk $x \in D$ dengan $x \neq x_e$ dan $V(x_e) = 0$ dengan $x = x_e$ (titik kesetimbangan x_e adalah titik minimum global).
- c. Fungsi $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in D$.

2.6 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria Routh adalah suatu metode untuk menentukan kestabilan dari sistem kontinu, untuk sistem dari persamaan karakteristik orde ke- n yaitu:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.20)$$

Kriteria tersebut diterapkan dengan tabel routh sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccccc} \lambda^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ \vdots & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{array}$$

Dimana a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 adalah koefisien dari persamaan karakteristik dan

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad \text{dll,}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \quad \text{dll,}$$

Tabel tersebut dapat dilanjutkan secara vertikal dan horizontal hingga hanya nol yang diperoleh. Setiap baris dapat dikalikan dengan konstanta positif sebelum baris selanjutnya dihitung tanpa mengubah sifat dari tabel.

Kriteria Kestabilan Routh: semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika elemen-elemen kolom pertama tabel Routh

bernilai positif. Sebaliknya, akar persamaan karakteristik mempunyai bagian real positif jika dan hanya jika elemen-elemen kolom pertama bernilai negatif.

(DiStefano, 1990).

Kriteria Hurwitz adalah metode yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan karakteristik dari sistem persamaan kontinu yang memiliki bagian real negatif. Kriteria ini diterapkan menggunakan determinan yang dibentuk dari koefisien persamaan karakteristik (2.20). Dari polinomial derajat n (2.20) diketahui bahwa a_n adalah koefisien persamaan (2.20) dengan $n = 1, 2, 3 \dots n$, asumsikan bahwa $a_n > 0$. Untuk polinomial derajat n (2.20), akan diperoleh n buah matriks Hurwitz dengan bentuk sebagai berikut:

$$\Delta_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \begin{matrix} [a_0 & \text{jika } n \text{ genap}] \\ [a_1 & \text{jika } n \text{ ganjil}] \end{matrix} & 0 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{matrix} [a_1 & \text{jika } n \text{ genap}] \\ [a_0 & \text{jika } n \text{ ganjil}] \end{matrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Maka terbentuk determinan sebagai berikut:

$$\Delta_{1 \times 1} = a_{n-1}$$

$$\Delta_{2 \times 2} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}$$

$$\Delta_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + a_n a_{n-1}a_{n-5} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-4}a_{n-1}^2$$

$$\Delta_{4 \times 4} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

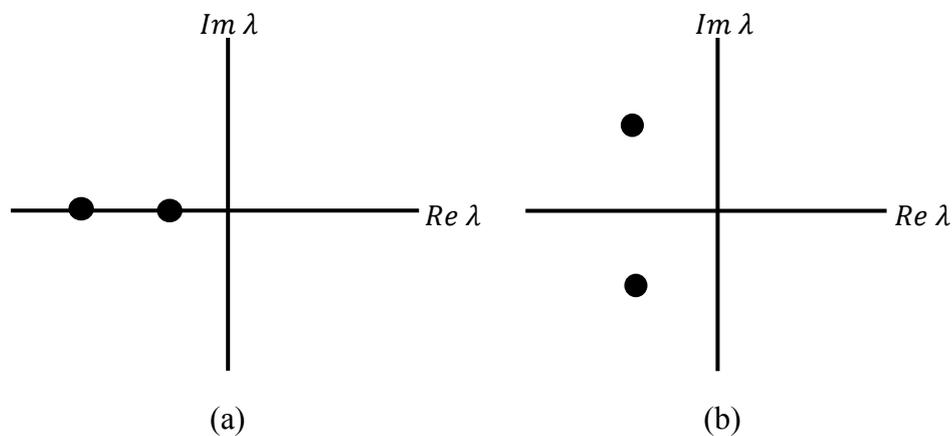
$$\begin{aligned}
&= a_{n-1}a_{n-2}(a_{n-3}a_{n-4} - a_n a_{n-7} + a_{n-1}a_{n-6} - a_{n-2}a_{n-5}) + \\
&\quad a_n a_{n-3}(a_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}a_{n-6} + a_n a_{n-7} - a_{n-3}a_{n-4}) + \\
&\quad a_{n-1}a_{n-4}a_{n-5}(1 + a_n) - a_{n-1}^2 a_{n-4}^2 - a_n^2 a_{n-5}^2
\end{aligned}$$

Kriteria Kestabilan Hurwitz: menyatakan bahwa semua akar persamaan karakteristik mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\Delta_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots, n$.

(DiStefano, 1990).

2.7 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi hopf yaitu bifurkasi lokal dimana titik kesetimbangan dari sistem dinamik kehilangan kestabilannya, dikarenakan sepasang nilai eigen real dan negatif (gambar 2.1(a)) atau konjugat kompleks (gambar 2.1(b)) dari hasil linierisasi disekitar titik kesetimbangan (Strogatz, 1994).



Gambar 2.2 Bifurkasi Hopf

Dalam kasus lain, ketika gerakan yang dihasilkan adalah osilasi siklus batas (*limit cycles*) dan jika *limit cycles* tersebut stabil artinya semua lintasan disekitar *limit cycles* mendekati *limit cycles* maka bifurkasi hopf dikatakan superkritis. Sedangkan ketika *limit cycles* tidak stabil artinya jika lintasan disekitar *limit*

cycles menjauhi *limit cycles* maka bifurkasi hopf dikatakan subkritis (Strogatz, 1994).

2.8 Lingkungan Hidup Menurut Perspektif Islam

Lingkungan hidup adalah kesatuan sistem antara satu dengan lainnya yang saling berkaitan seperti makhluk hidup dan keadaan sekitarnya. Dalam lingkungan hidup juga termasuk bagaimana perilaku manusia untuk menjaga kesejahteraan manusia itu sendiri dan makhluk lainnya. Allah berfirman dalam QS. Al-An'am ayat 165 yang artinya:

“Dan Dialah yang menjadikan kamu sebagai khalifah-khalifah di Bumi dan Dia mengangkat (derajat) sebagian kamu di atas yang lain, untuk menguji atas (karunia) yang diberikan-Nya kepadamu. Sesungguhnya Tuhanmu sangat memberi hukuman dan Sungguh Dia Maha Pengampun, Maha Penyayang”

Peran manusia sebagai khalifah Allah di muka bumi ini yaitu untuk mengatasi lingkungan hidup. Manusia bertanggung jawab atas dirinya serta hartanya, namun selain itu manusia juga harus bertanggung jawab kepada sesama makhluk hidup lainnya serta seluruh alam. Manusia sebagai khalifah di muka bumi ini yaitu agar dapat memakmurkan muka bumi ini.

Manusia merupakan makhluk yang paling mulia di antara makhluk-makhluk Allah yang lainnya. Allah menjadikan manusia dalam sebaik-baiknya bentuk, baik secara fisik maupun psikisnya serta memiliki alat potensial dan potensi dasar atau fitrah yang bisa dikembangkan seoptimal mungkin melalui pendidikan. Demikianlah maka manusia layak mengemban tugas sebagai khalifah di muka bumi ini. Salah satu tugas khalifah yaitu tugas terhadap alam yang meliputi membudayakan alam dan ketahanan lingkungan.

Ketahanan lingkungan adalah suatu kekuatan untuk mengatur suatu pertumbuhan agar tidak melampaui batas terhadap daya dukung lingkungan.

Proses ketahanan akan terlaksana dengan dua konsep antara lain yang pertama yaitu Homeostatis artinya bahwa sistem di dalam kehidupan terdapat kecenderungan untuk melawan perubahan dalam kata lain mengusahakan agar berada di dalam keadaan yang seimbang. Konsep tersebut berjalan dengan kestabilan ekosistem yang memiliki makna dinamika. Kemudian konsep keduanya yaitu Resilience artinya bahwa ketika ada suatu gangguan maka sistem akan memberikan tanggapan, baik disengaja maupun tidak yang akan disesuaikan dengan keadaan. Meskipun sistem tersebut mengalami perubahan akan tetapi lebih ke penyesuaian (Ilyas, 2008)

Pelestarian lingkungan termasuk salah satu dari pembangunan karena termasuk bagian terpenting dalam pengelolaan lingkungan hidup. Pelestarian lingkungan dalam pembangunan kehidupan di muka bumi ini yaitu menanam tanaman, menjaga ekosistem serta melindungi satwa-satwa agar tidak mengalami kepunahan di habitatnya (Ilyas, 2008).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi pembahasan mengenai analisis dinamik model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator*. Model *predator-prey* tersebut yang kemudian dianalisis tanpa kanibalisme dan dengan kanibalisme. Pembahasan selanjutnya berlanjut pada sensitivitas titik kesetimbangan terhadap parameter ε dan β yaitu parameter kanibalisme. Kemudian dilakukan simulasi numerik model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator*.

Berdasarkan penjelasan dari diagram alir pada bab 2 maka model pemangsa-mangsa (*Predator-Prey*) dengan kanibalisme dalam populasi pemangsa adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -d_1x + \mu y + \varepsilon xy + cxz \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \mu y - d_2y - \beta xy \\ \frac{dz}{dt} &= (b_2 - \alpha z - \theta x)z\end{aligned}\tag{3.1}$$

Disini spesies *predator* dibagi menjadi dua tahap yaitu dewasa dan remaja, dengan biomassa *predator* pada waktu t dilambangkan dengan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$, biomassa *prey* pada waktu t dilambangkan dengan $z = z(t)$.

Parameter	Satuan	Deskripsi
d_1	Per satuan waktu	Laju kematian alami dari <i>predator</i> dewasa
d_2	Per satuan waktu	Laju kematian alami dari <i>predator</i> remaja
b_1	Per satuan waktu	Laju kelahiran <i>predator</i> dewasa
b_2	Per satuan waktu	Tingkat pertumbuhan <i>prey</i>
μ	Per satuan waktu	Laju transisi <i>predator</i> remaja menjadi dewasa
α	Per satuan waktu	Persaingan antar individu spesies <i>prey</i>
θ	Per satuan waktu	Tingkat penangkapan <i>prey</i> oleh <i>predator</i> dewasa
c	Per satuan waktu	Laju peningkatan populasi <i>predator</i> dewasa akibat memangsa <i>prey</i>
β	Per satuan waktu	Tingkat penangkapan <i>predator</i> remaja oleh <i>predator</i> dewasa
ε	Per satuan waktu	Laju peningkatan populasi <i>predator</i> dewasa akibat memakan <i>predator</i> remaja

Tabel 3.1. Definisi Parameter Pada Model (3.1)

Pada penelitian ini akan difokuskan untuk melihat pengaruh kanibalisme pada populasi predator, sehingga akan dikaji kondisi ketika tidak ada interaksi antar mangsa ($\alpha = 0$). Untuk memudahkan analisa dinamik selanjutnya, digunakan penskalaan variabel sebagai berikut

$$x = \frac{d_1 \bar{x}}{\theta}, \quad y = \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu}, \quad z = \frac{d_1 \bar{z}}{c}, \quad t = \frac{\bar{t}}{d_1}, \quad (3.2)$$

dari pemisalan tersebut, dengan menetapkan bahwa $x > 0, y > 0$ dan $z \geq 0$

Laju *predator* dewasa yang diskalakan dengan pemisalan tersebut maka menjadi

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{t}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{d_1} (-d_1 x + \mu y + \varepsilon xy + cxz) \frac{1}{d_1} \\
&= \frac{\theta}{d_1^2} \left(-d_1 \frac{d_1 \bar{x}}{\theta} + \mu \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu} + \varepsilon \frac{d_1 \bar{x}}{\theta} \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu} + c \frac{d_1 \bar{x}}{\theta} \frac{d_1 \bar{z}}{c} \right) \\
&= \frac{\theta}{d_1^2} \left(-\frac{d_1^2}{\theta} \bar{x} + \frac{d_1^2}{\theta} \bar{y} + \frac{d_1^3 \varepsilon}{\theta^2 \mu} \bar{y} + \frac{d_1^2}{\theta} \bar{x} \bar{z} \right) \\
&= -\bar{x} + \bar{y} + \frac{d_1 \varepsilon}{\theta \mu} \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{z}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dimisalkan

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d_1 \varepsilon}{\theta \mu}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = -\bar{x} + \bar{y} + \bar{\varepsilon} \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{z}$$

Pada laju *predator* remaja yang diskalakan dengan pemisalan tersebut maka didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \frac{d\bar{y}}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{t}} \\
&= \frac{\theta \mu}{d_1^2} (b_1 x - \mu y - d_2 y - \beta xy) \frac{1}{d_1} \\
&= \frac{\theta \mu}{d_1^3} \left(b_1 \frac{d_1 \bar{x}}{\theta} - \mu \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu} - d_2 \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu} - \beta \frac{d_1 \bar{x}}{\theta} \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu} \right) \\
&= \frac{b_1 \mu}{d_1^2} \bar{x} - \frac{\mu}{d_1} \bar{y} - \frac{d_2}{d_1} \bar{y} - \frac{\beta}{\theta} \bar{x} \bar{y}
\end{aligned}$$

Kemudian dimisalkan bahwa

$$\bar{b}_1 = \frac{b_1 \mu}{d_1^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{d_1}, \quad \bar{d}_2 = \frac{d_2}{d_1}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\theta}$$

Sehingga didapatkan

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{b}_1\bar{x} - \bar{\mu}\bar{y} - \bar{d}_2\bar{y} - \bar{\beta}\bar{x}\bar{y}$$

Selanjutnya dimisalkan untuk

$$\bar{\sigma} = \bar{\mu} + \bar{d}_2$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{b}_1\bar{x} - \bar{\sigma}\bar{y} - \bar{\beta}\bar{x}\bar{y}$$

Pada laju *prey* yang diskalakan dengan pemisalan tersebut maka didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= \frac{d\bar{z}}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{t}} \\ &= \frac{c}{d_1} (b_2z - \alpha z - \theta xz) \frac{1}{d_1} \\ &= \frac{c}{d_1^2} \left(b_2 \frac{d_1\bar{z}}{c} - \alpha \frac{d_1\bar{z}}{c} - \theta \frac{d_1\bar{x}}{\theta} \frac{d_1\bar{z}}{c} \right) \\ &= \frac{b_2}{d_1} \bar{z} - \frac{\alpha}{d_1} \bar{z} - \bar{x}\bar{z} \end{aligned}$$

Kemudian dimisalkan bahwa

$$\bar{b}_2 = \frac{b_2}{d_1}$$

Karena tidak ada persaingan antar mangsa sehingga $\alpha = 0$, maka diperoleh

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \bar{b}_2\bar{z} - 0 - \bar{x}\bar{z}$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = (\bar{b}_2 - \bar{x})\bar{z}$$

Dengan demikian didapatkan laju *predator* dewasa, *predator* remaja dan *prey* sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= -\bar{x} + \bar{y} + \bar{\varepsilon}\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \bar{b}_1\bar{x} - \bar{\sigma}\bar{y} - \bar{\beta}\bar{x}\bar{y} \\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= (\bar{b}_2 - \bar{x})\bar{z}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Tabel parameter sistem hasil penskalaan yaitu sebagai berikut:

Parameter	Kaitan dengan Parameter		Nilai
	Model Awal		
$\bar{\varepsilon}$	$\frac{d_1\varepsilon}{\theta\mu}$		1.25 dan 0.02
\bar{b}_1	$\frac{b_1\mu}{d_1^2}$		2.5
$\bar{\beta}$	$\frac{\beta}{\theta}$		5.2 dan 0.025
$\bar{\sigma}$	$\bar{\mu} + \bar{d}_2$, dimana $\bar{\mu} = \frac{\mu}{d_1}$ dan $\bar{d}_2 = \frac{d_2}{d_1}$		4.4
\bar{b}_2	$\frac{b_2}{d_1}$		1.5

Tabel 3.2. Parameter Hasil Penskalaan

Sistem (3.3) memiliki parameter yang lebih sedikit dibandingkan sistem (3.1), sehingga analisa dinamik dari sistem (3.3) akan lebih mudah dibandingkan sistem (3.1). Untuk mempermudah penjelasan selanjutnya, maka simbol dari $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\varepsilon}, \bar{b}_1, \bar{\sigma}, \bar{\beta}$ dan \bar{b}_2 masing-masing diubah ke bentuk simbol $x, y, z, \varepsilon, b_1, \sigma, \beta$ dan b_2 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x + y + \varepsilon xy + xz \\
\frac{dy}{dt} &= b_1 x - \sigma y - \beta xy \\
\frac{dz}{dt} &= (b_2 - x)z
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Menurut arti parameter dalam model (3.1), parameter ε dan β dalam sistem (3.4) adalah nonnegatif dan parameter lainnya positif. Secara khusus, $\beta = \varepsilon = 0$ menunjukkan bahwa tidak ada kanibalisme dalam populasi pemangsa. Untuk sistem (3.4), jelas bahwa $\frac{dx}{dt}|_{x=0} = y > 0$ untuk $y > 0$, $\frac{dy}{dt}|_{y=0} = b_1 x > 0$ untuk $x > 0$, dan bahwa bidang $x - y$ (yaitu $z = 0$) adalah invarian positif. Oleh karena itu, himpunan $\Omega_0 = \{(x, y, z): x > 0, y > 0, z \geq 0\}$ adalah invarian positif dari (3.4).

3.1 Analisis Model *Predator-prey* (3.4) Tanpa Kanibalisme

Pada bagian ini, mempertimbangkan kestabilan titik kesetimbangan pada sistem (3.4) dengan tidak adanya kanibalisme. Hasil yang diperoleh disini sangat membantu dalam memahami efek kanibalisme dalam kasus ini.

Ketika tanpa adanya kanibalisme, yaitu $\beta = \varepsilon = 0$, maka sistem (3.4) menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x + y + xz \\
\frac{dy}{dt} &= b_1 x - \sigma y \\
\frac{dz}{dt} &= (b_2 - x)z
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ketika tidak ada mangsa ($z = 0$), maka sistem (3.5) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \sigma y\end{aligned}\tag{3.6}$$

Ketika $\sigma < b_1$, titik kesetimbangan dari sistem (3.6) merupakan titik asal yaitu titik dimana $(x = 0, y = 0)$, maka didapatkan matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_1 & -\sigma \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari $J(\mathbf{0})$ adalah

$$\det(\lambda I - J(\mathbf{0})) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b_1 & -\sigma \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b_1 & -\sigma \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -b_1 & \lambda + \sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$\det J(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -b_1 & \lambda + \sigma \end{bmatrix}$$

$$\det J(\mathbf{0}) = (\lambda + 1)(\lambda + \sigma) - (-b_1)(-1)$$

$$= \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - b_1$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac} \\ &= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\sigma - b_1)}}{2 \cdot 1 \cdot (\sigma - b_1)} \\ &= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2(\sigma - b_1)} \\ &= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2(\sigma - b_1)} \cdot (\sigma - b_1) \\ &= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

Ketika $\sigma < b_1$ maka nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$ sehingga titik kesetimbangan tersebut merupakan pelana (*Saddle*). Pembuktiannya yaitu sebagai berikut:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Ketika $\sigma < b_1$, maka $\sigma < b_1 < 2b_1$

$$\Leftrightarrow \sigma < 2b_1$$

$$0 < 2b_1 - \sigma \quad (\text{dikali 2})$$

$$0 < 4b_1 - 2\sigma$$

Sehingga $\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1} > 0$

1. $\lambda_1 > 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1} \\ &= \frac{1}{2}\left(-(\sigma + 1) + \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-(\sigma + 1) + \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma + 1 + 4b_1 - 4\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(b_1 - \sigma)}\right) > \frac{1}{2}(-(\sigma + 1) + \\ &\quad \sqrt{(\sigma + 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Sehingga benar bahwa $\lambda_1 > 0$

2. $\lambda_2 < 0$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) - \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) - \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma + 1 + 4b_1 - 4\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(b_1 - \sigma)} \right) < \frac{1}{2} (-(\sigma + 1) - \\
&\quad \sqrt{(\sigma + 1)^2}) < 0
\end{aligned}$$

Sehingga benar bahwa $\lambda_2 < 0$

Ketika $\sigma > b_1$ memiliki titik $E_0(x = 0, y = 0, z = 0)$ yang merupakan kesetimbangan dari sistem (3.5) maka didapatkan matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari $J(E_0)$ adalah

$$\det(\lambda I - J(E_0)) = 0$$

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ -b_1 & \lambda + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det J(E_0) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ -b_1 & \lambda + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det J(E_0) &= (\lambda + 1)(\lambda + \sigma)(\lambda - b_2) + (-1)(0)(0) + (0)(-b_1)(0) - \\
&\quad (0)(\lambda + \sigma)(0) - (\lambda + 1)(0)(0) - (-1)(-b_1)(\lambda - b_2) \\
&= (\lambda + 1)(\lambda + \sigma)(\lambda - b_2) + 0 + 0 - 0 - 0 - b_1(\lambda - b_2) \\
&= (\lambda + 1)(\lambda + \sigma)(\lambda - b_2) - b_1(\lambda - b_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma)(\lambda - b_2) - b_1(\lambda - b_2) \\
&= (\lambda - b_2)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - b_1) \\
\lambda_{2,3} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac} \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\sigma - b_1)}}{2 \cdot 1 \cdot (\sigma - b_1)} \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2(\sigma - b_1)} \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2(\sigma - b_1)} \cdot (\sigma - b_1) \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = b_2$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

Karena memiliki nilai eigen yang positif b_2 , $\lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dimana sudah dibuktikan pada titik kesetimbangan dari model (3.6) sehingga titik kesetimbangan E_0 selalu tidak stabil.

Ketika $\sigma > b_1$, sistem (3.5) juga memiliki titik ekuilibrium positif $E^*(x^*, y^*, z^*)$ yaitu ketika laju pertumbuhan prey sama dengan nol

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = (b_2 - x^*)z^* = 0$$

$$z^* = 0$$

Atau

$$b_2 - x^* = 0$$

$$-x^* = -b_2$$

$$x^* = b_2$$

Kemudian substitusikan nilai x^* ke laju pertumbuhan *predator* remaja serta di sama dengankan nol, sehingga didapatkan sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 x^* - \sigma y^* = 0$$

$$b_1 b_2 - \sigma y^* = 0$$

$$-\sigma y^* = -b_1 b_2$$

$$y^* = \frac{b_1 b_2}{\sigma}$$

Selanjutnya nilai dari x^* dan y^* disubstitusikan di laju pertumbuhan *predator* dewasa, sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -x^* + y^* + x^* z^* = 0$$

$$-b_2 + \frac{b_1 b_2}{\sigma} + b_2 z^* = 0$$

$$b_2 \left(-1 + \frac{b_1}{\sigma} + z^* \right) = 0$$

$$-1 + \frac{b_1}{\sigma} + z^* = 0$$

$$z^* = 1 - \frac{b_1}{\sigma}$$

Maka titik ekuilibrium $E^* \left(x^* = b_2, y^* = \frac{b_1 b_2}{\sigma}, z^* = 1 - \frac{b_1}{\sigma} \right)$. Dengan menggunakan fungsi

$$V_1 = \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + \frac{1}{\sigma} \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) + \left(z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right)$$

Fungsi V_1 dapat dikatakan sebagai fungsi lyapunov karena memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Fungsi V_1 kontinu dan turunan parsial pertama kontinu pada $\Omega_0 = \{(x, y, z): x > 0, y > 0, z \geq 0\}$
2. Fungsi $V_1(x, y, z) > 0$ untuk $x, y, z \in \Omega_0$ dengan $x \neq x^*, y \neq y^*, z \neq z^*$ dan $V_1(E^*) = 0$ dengan $x = x^*, y = y^*, z = z^*$.
3. Fungsi $V_1 \leq 0$ untuk setiap $x, y, z \in \Omega_0$. Ketika kesetimbangan positif $E^*(x^*, y^*, z^*)$ ada, maka sistem (3.5) dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{dx}{dt} = x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + (z - z^*) \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 y \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = -z(x - x^*)$$

Maka turunan dari fungsi V_1 sepanjang solusi sistem (3.5) adalah

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = (x - x^*) \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + (z - z^*) \right] + \frac{1}{\sigma} b_1 (y - y^*) \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) -$$

$$(z - z^*)(x - x^*)$$

$$= (x - x^*) \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + (x - x^*)(z - z^*) + \frac{1}{\sigma} b_1 (y - y^*) \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) -$$

$$(z - z^*)(x - x^*)$$

$$\begin{aligned}
&= (x - x^*) \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \frac{1}{\sigma} b_1 (y - y^*) \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \\
&= y - \frac{xy^*}{x^*} - \frac{x^*y}{x} + y^* + \left(\frac{b_1}{\sigma} y - \frac{b_1}{\sigma} y^* \right) \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \\
&= y - \frac{xy^*}{x^*} - \frac{x^*y}{x} + y^* + \frac{b_1x}{\sigma} - \frac{b_1x^*y}{\sigma y^*} - \frac{b_1xy^*}{\sigma y} + \frac{b_1x^*}{\sigma} \\
&= y - \frac{xy^*}{x^*} - \frac{x^*y}{x} + y^* + \frac{b_1x}{\sigma} - \frac{b_1x^*y}{\sigma y^*} - \frac{b_1xy^*}{\sigma y} + \frac{b_1x^*}{\sigma} \\
&= y - \frac{xy^*}{x^*} - \frac{x^*y}{x} + y^* + \frac{b_1x}{\sigma} - \frac{b_1x^*y}{\sigma y^*} - \frac{b_1xy^*}{\sigma y} + y^* \\
&= 2y^* + y - \frac{b_1x}{\sigma} - \frac{x^*y}{x} + \frac{b_1x}{\sigma} - y - \frac{b_1x \frac{b_1b_2}{\sigma}}{\sigma y} \\
&= 2y^* - \frac{x^*y}{x} - \frac{b_1x \frac{b_1b_2}{\sigma}}{\sigma y} \\
&= 2y^* - \frac{x^*y}{x} - \frac{b_1^2 b_2 x}{\sigma^2 y} \\
&= 2y^* - \frac{x^*y}{x} - \frac{xy^{*2}}{x^*y}
\end{aligned}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = y^* \left(2 - \frac{xy^*}{x^*y} - \frac{x^*y}{xy^*} \right)$$

Pertidaksamaan tersebut memenuhi bahwa $\frac{dV_1}{dt} \leq 0$ untuk $x > 0$ dan $y > 0$.

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\frac{dV_1}{dt} = 0, \text{ ketika } x = x^* \text{ dan } y = y^*$$

$$\frac{dV_1}{dt} = y^* \left(2 - \frac{xy^*}{x^*y} - \frac{x^*y}{xy^*} \right)$$

$$= y^* \left(2 - \frac{x^*y^*}{x^*y^*} - \frac{x^*y^*}{x^*y^*} \right)$$

$$= y^* (0)$$

$$= 0 \text{ (terbukti)}$$

$$\frac{dV_1}{dt} < 0, \text{ ketika } x > 0 \text{ dan } y > 0$$

$$\frac{dV_1}{dt} = y^* \left(2 - \frac{xy^*}{x^*y} - \frac{x^*y}{xy^*} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2y^* - \frac{xy^{*2}}{x^*y} - \frac{x^*y}{x} \\
&= 2\left(\frac{b_1b_2}{\sigma}\right) - \left(\frac{xb_1}{\sigma y}\right)\left(\frac{b_1b_2}{\sigma}\right) - \frac{b_2y}{x} \\
&= \left(\frac{2b_1}{\sigma} - \frac{xb_1^2}{\sigma^2y} - \frac{y}{x}\right)b_2 \\
&= \left(\frac{2b_1\sigma xy - x^2b_1^2 - y^2\sigma^2}{\sigma^2xy}\right)b_2 \\
&= \left(-\frac{x^2b_1^2 - 2b_1\sigma xy + y^2\sigma^2}{\sigma^2xy}\right)b_2 \\
&= \left(-\frac{(xb_1 - y\sigma)^2}{\sigma^2xy}\right)b_2 < 0
\end{aligned}$$

Sehingga $\frac{dV_1}{dt} \leq 0$. Maka ekuilibrium positif E^* dari sistem (3.5) stabil asimtotik global dalam Ω_0 jika eksis.

Singkatnya, kita telah sampai pada deskripsi lengkap tentang dinamika (3.5).

Teorema 1. Untuk sistem (3.5), dua pernyataan berikut berlaku.

- (i) Jika $\sigma < b_1$, maka terdapat titik asal O yang merupakan pelana (*saddle*)
- (ii) Jika $\sigma > b_1$, maka titik E_0 eksis tetapi tidak stabil, dan E^* stabil secara global asimtotik di Ω_0 .

3.2 Analisis Model *Predator-prey* (3.4) dengan Kanibalisme

3.2.1 Eksistensi dan Sifat Kestabilan Titik Keseimbangan

Selain titik asal $O(0,0,0)$, sistem (3.4) memiliki titik keseimbangan $E_0(x_0, y_0, 0)$ ketika $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$ atau $\sigma < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ dan ada titik keseimbangan positif $E^*(x^*, y^*, z^*)$ ketika $b_1 < \frac{\sigma + \beta b_2}{1 + \varepsilon b_2}$ atau ekuivalen ketika $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta) := \frac{\sigma + \beta b_2 - b_1}{b_1 b_2}$, dimana titik keseimbangan E_0 yaitu pertama dengan memisalkan laju pertumbuhan *predator* dewasa sama dengan nol dan $z_0 = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -x_0 + y_0 + \varepsilon x_0 y_0 + x_0 z = 0$$

$$-x_0 + y_0 + \varepsilon x_0 y_0 = 0$$

$$x_0(-1 + \varepsilon y_0) = -y_0$$

$$x_0 = \frac{y_0}{1 - \varepsilon y_0}$$

Kemudian substitusikan nilai x_0 ke laju pertumbuhan *predator* remaja dengan memisalkan laju pertumbuhan *predator* remaja sama dengan nol

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 x_0 - \sigma y_0 - \beta x_0 y_0 = 0$$

$$x_0(b_1 - \beta y_0) = \sigma y_0$$

$$x_0 = \frac{\sigma y_0}{b_1 - \beta y_0}$$

$$\frac{y_0}{1 - \varepsilon y_0} = \frac{\sigma y_0}{b_1 - \beta y_0}$$

$$y_0(b_1 - \beta y_0) = \sigma y_0(1 - \varepsilon y_0)$$

$$b_1 - \beta y_0 = \sigma - \sigma \varepsilon y_0$$

$$-\beta y_0 + \sigma \varepsilon y_0 = \sigma - b_1$$

$$y_0(-\beta + \sigma \varepsilon) = \sigma - b_1$$

$$y_0 = \frac{\sigma - b_1}{\sigma \varepsilon - \beta}$$

Kemudian substitusikan nilai y_0 ke x_0

$$x_0 = \frac{y_0}{1 - \varepsilon y_0}$$

$$x_0 = \frac{\left(\frac{\sigma - b_1}{\varepsilon\sigma - \beta}\right)}{1 - \varepsilon\left(\frac{\sigma - b_1}{\varepsilon\sigma - \beta}\right)}$$

$$x_0 = \frac{\left(\frac{\sigma - b_1}{\varepsilon\sigma - \beta}\right)}{\frac{(\sigma\varepsilon - \beta) - \varepsilon(\sigma - b_1)}{\sigma\varepsilon - \beta}}$$

$$x_0 = \frac{\sigma - b_1}{(\sigma\varepsilon - \beta) - \varepsilon(\sigma - b_1)}$$

$$x_0 = \frac{\sigma - b_1}{\sigma\varepsilon - \beta - \varepsilon\sigma + b_1\varepsilon}$$

$$x_0 = \frac{\sigma - b_1}{b_1\varepsilon - \beta}$$

$$\text{Maka } E_0 = \left(x_0 = \frac{\sigma - b_1}{b_1\varepsilon - \beta}, y_0 = \frac{\sigma - b_1}{\sigma\varepsilon - \beta}, z_0 = 0\right)$$

Selanjutnya untuk titik kesetimbangan E^* yaitu pertama dengan memisalkan laju pertumbuhan *prey* sama dengan nol, sehingga didapatkan

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = (b_2 - x^*)z^* = 0$$

$$z^* = 0$$

atau

$$b_2 - x^* = 0$$

$$x^* = b_2$$

Selanjutnya substitusikan x^* ke laju pertumbuhan *predator* remaja dan memisalkan laju pertumbuhan *predator* remaja sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1x^* - \sigma y^* - \beta x^*y^* = 0$$

$$b_1b_2 - \sigma y^* - \beta b_2y^* = 0$$

$$b_1b_2 - y^*(\sigma + \beta b_2) = 0$$

$$-y^*(\sigma + \beta b_2) = -b_1b_2$$

$$y^* = \frac{b_1b_2}{\sigma + \beta b_2}$$

Kemudian substitusikan x^* dan y^* ke laju pertumbuhan *predator* dewasa dan memisalkan laju pertumbuhan *predator* dewasa sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -x^* + y^* + \varepsilon x^*y^* + x^*z = 0$$

$$-b_2 + y^*(1 + \varepsilon b_2) + b_2z^* = 0$$

$$y^*(1 + \varepsilon b_2) = -b_2z^* + b_2$$

$$y^* = \frac{b_2(1 - z^*)}{1 + \varepsilon b_2}$$

$$\frac{b_1b_2}{\sigma + \beta b_2} = \frac{b_2(1 - z^*)}{1 + \varepsilon b_2}$$

$$\frac{b_1b_2}{\sigma + \beta b_2}(1 + \varepsilon b_2) = b_2(1 - z^*)$$

$$\frac{b_1(1 + \varepsilon b_2)}{\sigma + \beta b_2} = 1 - z^*$$

$$\frac{-1 + b_1(1 + \varepsilon b_2)}{\sigma + \beta b_2} = -z^*$$

$$z^* = 1 - \frac{b_1(1 + \varepsilon b_2)}{\sigma + \beta b_2}$$

Maka didapatkan titik kesetimbangan E^* sebagai berikut

$$E^* \left(x^* = b_2, y^* = \frac{b_1 b_2}{\sigma + \beta b_2}, z^* = 1 - \frac{b_1(1 + \varepsilon b_2)}{\sigma + \beta b_2} \right) \quad (3.7)$$

Disini batas kesetimbangan (ekuilibrium) E_0 melambangkan persistensi dari populasi *predator* dan tidak adanya populasi *prey*, sedangkan ekuilibrium positif E^* berarti bahwa populasi *predator* dan populasi *prey* tetap ada.

Sehubungan dengan stabilitas lokal maka kesetimbangan (3.4) memiliki hasil sebagai berikut.

Teorema 2. Pernyataan berikut tentang stabilitas lokal kesetimbangan dari (3.4).

- (i) Ekuilibrium O selalu tidak stabil
- (ii) Batas ekuilibrium E_0 stabil secara lokal asimtotik jika $\varepsilon_1(\beta) < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ dan tidak stabil jika $\sigma < b_1 < \varepsilon_1(\beta)$ atau $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$.
- (iii) Ekuilibrium positif E^* tidak stabil jika $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon_2(\beta) < \varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, sedangkan stabil secara lokal asimtotik jika salah satu dari dua kondisi, (C1): $\sigma \leq b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, dan (C2): $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$, dimana

$$\varepsilon_2(\beta) = \frac{1}{\sigma} \left[\beta + \frac{(\sigma - b_1)(\sigma + \beta b_2)}{\sigma(\sigma + \beta b_2)^2 + b_1(\sigma + b_2)} \right].$$

Bukti.

Dari sistem (3.4) maka dicari matrik jacobinya yaitu dengan proses linierisasi dahulu dimana

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + \varepsilon xy + xz = f(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 x - \sigma y - \beta xy = g(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = (b_2 - x)z = h(x, y, z)$$

Kemudian dilakukan linierisasi pada masing-masing titik kesetimbangan.

(i) Linierisasi sistem (3.4) pada titik asal O

Pada titik $O(0,0,0) = O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ hanya sebagai simbol agar memudahkan penjelasan pada proses linierisasi, sehingga

$$f(x, y, z) \approx f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z})$$

$$g(x, y, z) \approx g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z})$$

$$h(x, y, z) \approx h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + \frac{\partial h}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) + \frac{\partial h}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z})$$

Nilai $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dan $h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ akan selalu nol pada titik setimbang sehingga

$$f(x, y, z) \approx 0 + (-1 + \varepsilon y + z)(x - \bar{x}) + (1 + \varepsilon x)(y - \bar{y}) + x(z - \bar{z})$$

$$g(x, y, z) \approx 0 + (b_1 - \beta y)(x - \bar{x}) + (-\sigma - \beta x)(y - \bar{y}) + 0$$

$$h(x, y, z) \approx 0 + (-z)(x - \bar{x}) + 0 + (b_2 - x)(z - \bar{z})$$

Misalkan $x - \bar{x} = u$, $y - \bar{y} = v$ dan $z - \bar{z} = w$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ dan

$\frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt}$, sehingga sistem tersebut menjadi suatu sistem persamaan linier

sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = (-1 + \varepsilon y + z)u + (1 + \varepsilon x)v + (x)w$$

$$\frac{dv}{dt} = (b_1 - \beta y)u + (-\sigma - \beta x)v$$

$$\frac{dw}{dt} = (-z)u + (b_2 - x)w$$

Kemudian dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{O}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ dimana } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y + z & 1 + \varepsilon x & x \\ b_1 - \beta y & -\sigma - \beta x & 0 \\ -z & 0 & b_2 - x \end{pmatrix}$$

Substitusikan titik kesetimbangan $O(0,0,0)$, yaitu $x = \bar{x} = 0, y = \bar{y} = 0$ dan

$z = \bar{z} = 0$ sehingga menjadi matriks Jacobi sebagai berikut

$$\mathbf{J}(\mathbf{O}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari $\mathbf{J}(\mathbf{O})$ adalah

$$\det(\lambda I - \mathbf{J}(\mathbf{O})) = 0$$

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ -b_1 & \lambda + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \mathbf{J}(\mathbf{O}) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ -b_1 & \lambda + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b_2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{J}(\mathbf{O}) = (\lambda + 1)(\lambda + \sigma)(\lambda - b_2) + (-1)(0)(0) + (0)(-b_1)(0) -$$

$$(0)(\lambda + \sigma)(0) - (\lambda + 1)(0)(0) - (-1)(-b_1)(\lambda - b_2)$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + \sigma)(\lambda - b_2) + 0 + 0 - 0 - 0 - b_1(\lambda - b_2)$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + \sigma)(\lambda - b_2) - b_1(\lambda - b_2)$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma)(\lambda - b_2) - b_1(\lambda - b_2) \\
&= (\lambda - b_2)(\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma - b_1) \\
\lambda_{2,3} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac} \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\sigma - b_1)}}{2 \cdot 1 \cdot (\sigma - b_1)} \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2(\sigma - b_1)} \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2(\sigma - b_1)} \cdot (\sigma - b_1) \\
&= \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}
\end{aligned}$$

Maka didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = b_2$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4b_1 - 2\sigma + 1}$$

Karena memiliki nilai eigen yang positif b_2 , $\lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dimana pembuktiannya sudah dijelaskan pada titik kesetimbangan tanpa kanibalisme sehingga titik kesetimbangan O selalu tidak stabil.

(ii) Linierisasi sistem (3.4) pada titik asal E_0

Pada titik $E_0(x_0, y_0, z_0)$ dimana $z_0 = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &\approx f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)
\end{aligned}$$

$$g(x, y, z) \approx g(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

$$h(x, y, z) \approx h(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ + \frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Nilai $f(x_0, y_0, z_0)$, $g(x_0, y_0, z_0)$ dan $h(x_0, y_0, z_0)$ akan selalu nol pada titik setimbang sehingga

$$f(x, y, z) \approx 0 + (-1 + \varepsilon y + z)(x - x_0) + (1 + \varepsilon x)(y - y_0) + x(z - z_0)$$

$$g(x, y, z) \approx 0 + (b_1 - \beta y)(x - x_0) + (-\sigma - \beta x)(y - y_0) + 0$$

$$h(x, y, z) \approx 0 + (-z)(x - x_0) + 0 + (b_2 - x)(z - z_0)$$

misalkan $x - x_0 = u$, $y - y_0 = v$ dan $z - z_0 = w$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ dan

$\frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt}$, sehingga sistem tersebut menjadi suatu sistem persamaan linier

sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = (-1 + \varepsilon y + z)u + (1 + \varepsilon x)v + (x)w$$

$$\frac{dv}{dt} = (b_1 - \beta y)u + (-\sigma - \beta x)v$$

$$\frac{dw}{dt} = (-z)u + (b_2 - x)w$$

Kemudian dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = J(E_0) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ dimana } J = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y + z & 1 + \varepsilon x & x \\ b_1 - \beta y & -\sigma - \beta x & 0 \\ -z & 0 & b_2 - x \end{pmatrix}$$

Subtitusikan titik kesetimbangan $E_0(x_0, y_0, z_0)$, yaitu $x = x_0$, $y = y_0$ dan $z = z_0 = 0$ sehingga menjadi matriks Jacobi sebagai berikut

$$J(\mathbf{E}_0) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y_0 & 1 + \varepsilon x_0 & x_0 \\ b_1 - \beta y_0 & -(\sigma + \beta x_0) & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - x_0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa x_0 dan y_0 memenuhi $-1 + \varepsilon y_0 = -\frac{y_0}{x_0}$, $1 + \varepsilon x_0 = \frac{x_0}{y_0}$, $b_1 -$

$\beta y_0 = \frac{\sigma y_0}{x_0}$, dan $\sigma + \beta x_0 = -\frac{b_1 x_0}{y_0}$. Kita bisa menulis ulang $J(\mathbf{E}_0)$ sebagai

$$J(\mathbf{E}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{y_0}{x_0} & \frac{x_0}{y_0} & x_0 \\ \frac{\sigma y_0}{x_0} & -\frac{b_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - x_0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari $J(\mathbf{E}_0)$ adalah

$$\det(\lambda I - J(\mathbf{E}_0)) = 0$$

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{y_0}{x_0} & \frac{x_0}{y_0} & x_0 \\ \frac{\sigma y_0}{x_0} & -\frac{b_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - x_0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{y_0}{x_0} & \frac{x_0}{y_0} & x_0 \\ \frac{\sigma y_0}{x_0} & -\frac{b_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - x_0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{y_0}{x_0} & -\frac{x_0}{y_0} & -x_0 \\ -\frac{\sigma y_0}{x_0} & \lambda + \frac{b_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b_2 + x_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det J(\mathbf{E}_0) = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{y_0}{x_0} & -\frac{x_0}{y_0} & -x_0 \\ -\frac{\sigma y_0}{x_0} & \lambda + \frac{b_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b_2 + x_0 \end{bmatrix}$$

$$\det J(\mathbf{E}_0) = \left(\lambda + \frac{y_0}{x_0} \right) \left(\lambda + \frac{b_1 x_0}{y_0} \right) (\lambda - b_2 + x_0) + 0 + 0 -$$

$$\left(-\frac{x_0}{y_0} \right) \left(-\frac{\sigma y_0}{x_0} \right) (\lambda - b_2 + x_0) - 0 - 0$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda - b_2 + x_0) \left(\left(\lambda + \frac{y_0}{x_0} \right) \left(\lambda + \frac{b_1 x_0}{y_0} \right) - \left(-\frac{x_0}{y_0} \right) \left(-\frac{\sigma y_0}{x_0} \right) \right) \\
&= (\lambda - b_2 + x_0) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{b_1 x_0}{y_0} + \lambda \frac{y_0}{x_0} + \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \left(\frac{b_1 x_0}{y_0} \right) - \sigma \right) \\
&= (\lambda - b_2 + x_0) \left(\lambda^2 + \lambda \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0} \right) + (b_1 - \sigma) \right)
\end{aligned}$$

Maka didapatkan nilai eigen

$$\lambda_1 = b_2 - x_0$$

Dua nilai eigen lainnya ditentukan oleh persamaan kuadrat $\lambda^2 + \lambda \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0} \right) + (b_1 - \sigma) = 0$ yaitu

$$\begin{aligned}
\lambda_{2,3} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac} \\
&= \frac{-\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b_1 - \sigma)}}{2 \cdot 1 \cdot (b_1 - \sigma)} \\
&= \frac{-\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0}\right) \pm \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 2b_1 + \frac{b_1^2 x_0^2}{y_0^2} - 4b_1 + 4\sigma}}{2(b_1 - \sigma)} \\
&= \frac{-\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{x_0^2 y_0^2} (b_1^2 x_0^4 - 2b_1 x_0^2 y_0^2 + 4\sigma x_0^2 y_0^2 + y_0^4)}}{2(b_1 - \sigma)} \cdot (b_1 - \sigma) \\
&= \frac{-\left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0}\right) \pm \frac{1}{x_0 y_0} \sqrt{b_1^2 x_0^4 - 2b_1 x_0^2 y_0^2 + 4\sigma x_0^2 y_0^2 + y_0^4}}{2} \cdot \frac{x_0 y_0}{x_0 y_0} \\
&= \frac{-b_1 x_0^2 - y_0^2 \pm \sqrt{b_1^2 x_0^4 - 2b_1 x_0^2 y_0^2 + 4\sigma x_0^2 y_0^2 + y_0^4}}{2x_0 y_0}
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{-b_1 x_0^2 - y_0^2 + \sqrt{b_1^2 x_0^4 - 2b_1 x_0^2 y_0^2 + 4\sigma x_0^2 y_0^2 + y_0^4}}{2x_0 y_0} \\
\lambda_3 &= -\frac{b_1 x_0^2 + y_0^2 + \sqrt{b_1^2 x_0^4 - 2b_1 x_0^2 y_0^2 + 4\sigma x_0^2 y_0^2 + y_0^4}}{2x_0 y_0}
\end{aligned}$$

Nilai eigen tersebut dikatakan stabil secara lokal asimtotik ketika $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$.

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\lambda_2 = \frac{-b_1x_0^2 - y_0^2 + \sqrt{b_1^2x_0^4 - 2b_1x_0^2y_0^2 + 4\sigma x_0^2y_0^2 + y_0^4}}{2x_0y_0}$$

Ketika $\sigma < b_1$ maka akan dibuktikan $-2b_1x_0^2y_0^2 + 4\sigma x_0^2y_0^2 < 0$

$$\sigma < b_1 \text{ maka } \sigma x_0^2y_0^2 < 2\sigma x_0^2y_0^2 < b_1x_0^2y_0^2$$

Sehingga didapatkan $2\sigma x_0^2y_0^2 < b_1x_0^2y_0^2 \dots$ dikali 2

$$4\sigma x_0^2y_0^2 < 2b_1x_0^2y_0^2 \Leftrightarrow 4\sigma x_0^2y_0^2 - 2b_1x_0^2y_0^2 < 0$$

Selanjutnya dibuktikan bahwa $\lambda_2 < 0$

$$\lambda_2 = \frac{-b_1x_0^2 - y_0^2 + \sqrt{b_1^2x_0^4 - 2b_1x_0^2y_0^2 + 4\sigma x_0^2y_0^2 + y_0^4}}{2x_0y_0} < \frac{-b_1x_0^2 - y_0^2 + \sqrt{b_1^2x_0^4 + y_0^4}}{2x_0y_0} = 0$$

Untuk λ_3 maka

$$\lambda_3 = -\frac{b_1x_0^2 + y_0^2 + \sqrt{b_1^2x_0^4 - 2b_1x_0^2y_0^2 + 4\sigma x_0^2y_0^2 + y_0^4}}{2x_0y_0} < -\frac{b_1x_0^2 + y_0^2 + \sqrt{b_1^2x_0^4 + y_0^4}}{2x_0y_0} < 0$$

Oleh karena itu, ketika E_0 ada dan $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$ maka stabil secara lokal asimtotik jika dan hanya jika $b_1 > \sigma$ dan $b_2 < x_0$.

Menurut syarat keberadaan dari E_0 , $b_1 > \sigma$ memenuhi bahwa $b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$.

Maka $b_2 < x_0 = \frac{b_1 - \sigma}{\beta - b_1\varepsilon}$ ekuivalen dengan $b_1 > \varepsilon_1(\beta)$ ketika E_0 ada.

Perhatikan bahwa $\sigma < \frac{\beta}{\varepsilon}$ memenuhi bahwa $\sigma < \varepsilon_1(\beta) < \frac{\beta}{\varepsilon}$. Hal ini, dikombinasikan dengan kondisi keberadaan E_0 , membuktikan bahwa E_0 stabil secara lokal asimtotik jika $\varepsilon_1(\beta) < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ dan tidak stabil jika $\sigma < b_1 < \varepsilon_1(\beta)$ atau $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$.

(iii) Linierisasi sistem (3.4) pada titik asal E^*

Pada titik $E^*(x^*, y^*, z^*)$ proses linierisasinya yaitu sebagai berikut

$$f(x, y, z) \approx f(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) (y - y^*) \\ + \frac{\partial f}{\partial z}(x^*, y^*, z^*) (z - z^*)$$

$$g(x, y, z) \approx g(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) \\ + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) (y - y^*) + \frac{\partial g}{\partial z}(x^*, y^*, z^*) (z - z^*)$$

$$h(x, y, z) \approx h(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial h}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) (x - x^*) + \frac{\partial h}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) (y - y^*) \\ + \frac{\partial h}{\partial z}(x^*, y^*, z^*) (z - z^*)$$

Nilai $f(x^*, y^*, z^*)$, $g(x^*, y^*, z^*)$ dan $h(x^*, y^*, z^*)$ akan selalu nol pada titik setimbang sehingga

$$f(x, y, z) \approx 0 + (-1 + \varepsilon y + z)(x - x^*) + (1 + \varepsilon x)(y - y^*) + x(z - z^*)$$

$$g(x, y, z) \approx 0 + (b_1 - \beta y)(x - x^*) + (-\sigma - \beta x)(y - y^*) + 0$$

$$h(x, y, z) \approx 0 + (-z)(x - x^*) + 0 + (b_2 - x)(z - z^*)$$

Misalkan $x - x^* = u$, $y - y^* = v$ dan $z - z^* = w$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ dan

$\frac{dz}{dt} = \frac{dw}{dt}$, sehingga sistem tersebut menjadi suatu sistem persamaan linier

sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = (-1 + \varepsilon y + z)u + (1 + \varepsilon x)v + (x)w$$

$$\frac{dv}{dt} = (b_1 - \beta y)u + (-\sigma - \beta x)v$$

$$\frac{dw}{dt} = (-z)u + (b_2 - x)w$$

Kemudian dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{E}^*) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ dimana } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y + z & 1 + \varepsilon x & x \\ b_1 - \beta y & -\sigma - \beta x & 0 \\ -z & 0 & b_2 - x \end{pmatrix}$$

Substitusikan titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*, z^*)$, yaitu $x = x^*$, $y = y^*$ dan $z = z^*$ sehingga menjadi matriks Jacobi sebagai berikut

$$\mathbf{J}(\mathbf{E}^*) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y^* + z^* & 1 + \varepsilon x^* & x^* \\ b_1 - \beta y^* & -(\sigma + \beta x^*) & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sebagai x^*, y^* dan z^* memenuhi $-1 + \varepsilon y^* + z^* = -\frac{y^*}{x^*}$, $1 + \varepsilon x^* = \frac{x^*(1-z^*)}{y^*}$, $b_1 - \beta y^* = \frac{\sigma y^*}{x^*}$ dan $-(\sigma + \beta x^*) = -\frac{b_1 x^*}{y^*}$, $\mathbf{J}(\mathbf{E}^*)$ dapat ditulis ulang sebagai

$$\mathbf{J}(\mathbf{E}^*) = \begin{pmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & x^* \\ \frac{\sigma y^*}{x^*} & -\frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari $\mathbf{J}(\mathbf{E}^*)$ adalah

$$\det(\lambda I - \mathbf{J}(\mathbf{E}^*)) = 0$$

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & x^* \\ \frac{\sigma y^*}{x^*} & -\frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & x^* \\ \frac{\sigma y^*}{x^*} & -\frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{y^*}{x^*} & -\frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & -x^* \\ -\frac{\sigma y^*}{x^*} & \lambda + \frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ z^* & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det J(\mathbf{E}^*) = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{y^*}{x^*} & -\frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & -x^* \\ -\frac{\sigma y^*}{x^*} & \lambda + \frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ z^* & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det J(\mathbf{E}^*) &= \left(\lambda + \frac{y^*}{x^*}\right) \left(\lambda + \frac{b_1 x^*}{y^*}\right) (\lambda) + 0 + 0 - (-x^*) \left(\lambda + \frac{b_1 x^*}{y^*}\right) (z^*) - 0 - \\ &\quad \left(-\frac{x^*(1-z^*)}{y^*}\right) \left(-\frac{\sigma y^*}{x^*}\right) (\lambda) \\ &= \left(\lambda^2 + \lambda \frac{b_1 x^*}{y^*} + \lambda \frac{y^*}{x^*} + \left(\frac{y^*}{x^*}\right) \left(\frac{b_1 x^*}{y^*}\right)\right) \lambda - \left(-\lambda x^* - \frac{x^{*2} b_1}{y^*}\right) z - \\ &\quad \sigma(1-z)\lambda \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{b_1 x^*}{y^*} + \frac{y^*}{x^*}\right) + \lambda b_1 + \lambda x^* z + \frac{z x^{*2} b_1}{y^*} - \sigma(1-z)\lambda \\ &= \lambda^3 + \left(\frac{y^*}{x^*} + \frac{b_1 x^*}{y^*}\right) \lambda^2 + (b_1 + x^* z - \sigma(1-z))\lambda + z \frac{x^{*2} b_1}{y^*} \\ &= \lambda^3 + \left(\frac{y^*}{x^*} + \frac{b_1 x^*}{y^*}\right) \lambda^2 + (z(\sigma + x^*) - (\sigma - b_1))\lambda + \frac{b_1 x^{*2} z}{y^*} \\ &= \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan karakteristik dari $J(\mathbf{E}^*)$ adalah

$$0 = |\lambda I - J(\mathbf{E}^*)| = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

Dimana

$$a_1 = \frac{y^*}{x^*} + \frac{b_1 x^*}{y^*}, \quad a_2 = z^*(\sigma + x^*) - (\sigma - b_1), \quad a_3 = \frac{b_1 x^{*2} z^*}{y^*}$$

Perhitungan selanjutnya mengikuti Kriteria Hurwitz, yaitu didapatkan

$$\begin{aligned} &a_1 a_2 - a_3 \\ &= \frac{(b_1 \sigma x^{*2} + \sigma y^{*2} + x^* y^{*2}) z^* + (b_1 - \sigma)(b_1 x^{*2} + y^{*2})}{x^* y^*} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Selanjutnya, substitusikan (3.7) ke (3.8) maka menghasilkan

$$a_1 a_2 - a_3 = \frac{b_1 b_2}{(\sigma + \beta b_2)^2} \{(\sigma + \beta b_2)[\beta(\sigma + \beta b_2)] + b_1(\beta - 1) - \varepsilon[\sigma(\sigma + \beta b_2)^2 + b_1(\sigma + b_2)]\} \quad (3.9)$$

Perhatikan bahwa

$$\varepsilon_1(\beta) - \varepsilon_2(\beta) = \frac{(\sigma - b_1)(\sigma + \beta b_2)[(\sigma + \beta b_2)^2 + b_1]}{b_1 b_2 [\sigma(\sigma + \beta b_2)^2 + b_1(\sigma + b_2)]} \quad (3.10)$$

jika $\sigma \leq b_1$ Maka $\varepsilon_1(\beta) \leq \varepsilon_2(\beta)$ dan jika $\sigma > b_1$ maka $\varepsilon_1(\beta) > \varepsilon_2(\beta)$. Oleh karena itu, ketika E^* ada, jika $\sigma \leq b_1$ atau $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$ maka $a_1 a_2 - a_3 > 0$, sedangkan jika $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon_2(\beta) < \varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$ maka $a_1 a_2 - a_3 < 0$. Selanjutnya dengan menggunakan Kriteria Hurwitz, kondisi stabil secara lokal asimtotik pada sistem (3.4) adalah ketika $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Hasil selanjutnya berkaitan dengan stabilitas global dari titik ekuilibrium E^* .

Teorema 3. Pernyataan berikut tentang sistem (3.4)

Ketika E^* eksis, maka akan stabil secara global jika $\beta \geq \varepsilon \sigma$.

Pembuktian.

Demikian pula, sehubungan dengan E^* , sistem (4) dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{dx}{dt} = x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \varepsilon(y - y^*) + (z - z^*) \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[b_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - \beta(x - x^*) \right]$$

$$\frac{dz}{dt} = -z(x - x^*)$$

Menetapkan fungsi sebagai berikut

$$V_2 = \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + n \frac{x^*}{y^*} \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) + \left(z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right)$$

$$\text{Dimana } n = \frac{b_1(\sigma - \varepsilon b_2 + 2\beta b_2)}{\sigma^2(\sigma + \beta b_2)}.$$

Fungsi V_2 dapat dikatakan sebagai fungsi lyapunov karena memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Fungsi V_2 kontinu dan turunan parsial pertama kontinu pada $\Omega_0 = \{(x, y, z): x > 0, y > 0, z \geq 0\}$.
2. Fungsi $V_2(x, y, z) > 0$ untuk $x, y, z \in \Omega_0$ dengan $x \neq x^*, y \neq y^*, z \neq z^*$ dan $V_2(E^*) = 0$ dengan $x = x^*, y = y^*, z = z^*$.
3. Fungsi $V_2 \leq 0$ untuk setiap $x, y, z \in \Omega_0$.

Maka turunan dari V_2 sepanjang solusi dari (3.4) diberikan

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \\
\frac{dV_2}{dt} &= (x - x^*) \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \varepsilon(y - y^*) + (z - z^*) \right] + n \frac{x^*}{y^*} (y - y^*) \\
&\quad \left[b_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - \beta(x - x^*) \right] - (z - z^*)(x - x^*) \\
&= (x - x^*) \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \varepsilon(y - y^*) \right] + n \frac{x^*}{y^*} (y - y^*) \left[b_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - \beta(x - x^*) \right] \\
&= (x - x^*) \left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + (x - x^*)(\varepsilon y - \varepsilon y^*) + n \frac{x^*}{y^*} (y - y^*) \left[\left(\frac{b_1 x}{y} - \frac{b_1 x^*}{y^*} \right) - (\beta x - \beta x^*) \right] \\
&= y - \frac{xy^*}{x^*} - \frac{x^*y}{x} + y^* + \varepsilon xy - \varepsilon xy^* - \varepsilon x^*y + \varepsilon x^*y^* + n \frac{x^*y}{y^*} \left(\frac{b_1 x}{y} - \frac{b_1 x^*}{y^*} \right) - n \frac{x^*y}{y^*} (\beta x - \beta x^*) - nx^* \left(\frac{b_1 x}{y} - \frac{b_1 x^*}{y^*} \right) + nx^* (\beta x - \beta x^*) \\
&= y - \frac{xy^*}{x^*} - \frac{x^*y}{x} + y^* + \varepsilon xy - \varepsilon xy^* - \varepsilon x^*y + \varepsilon x^*y^* + \frac{nb_1 xx^*}{y^*} - \frac{nb_1 x^2 y}{y^{*2}} - \frac{n\beta xx^* y}{y^*} + \frac{n\beta x^2 y}{y^*} - \frac{nb_1 xx^*}{y} + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^*} + n\beta xx^* - n\beta x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{xy}{x^*} \left[\frac{x^*}{x} - \frac{y^*}{y} + \frac{x^{*2}}{x^2} + \frac{x^*y^*}{xy} + \varepsilon x^* - \frac{\varepsilon x^*y^*}{y} - \frac{\varepsilon x^{*2}}{x} + \frac{\varepsilon x^{*2}y^*}{xy} + \frac{nb_1x^{*2}}{yy^*} - \right. \\
&\quad \left. \frac{nb_1x^{*3}}{xy^{*2}} - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*} + \frac{n\beta x^{*3}}{xy^*} - \frac{nb_1x^{*2}}{y^2} + \frac{nb_1x^{*3}}{xyy^*} + \frac{n\beta x^{*2}}{y} - \frac{n\beta x^{*3}}{xy} \right] \\
&= \frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(\frac{x^*}{x} - \frac{y^*}{y}\right) + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} \left(\frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x} - \frac{y^{*2}}{y^2} + \frac{x^*y^*}{xy}\right) + \left(\varepsilon x^* - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{n\beta x^{*2}}{y^*}\right) - \frac{y^*}{y} \left(\varepsilon x^* - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*}\right) - \frac{x^*}{x} \left(\varepsilon x^* - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*}\right) + \frac{x^*y^*}{xy} \left(\varepsilon x^* - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*}\right) \right] \\
&= \frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(\frac{x^*}{x} - \frac{y^*}{y}\right) + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \left(\frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x}\right) + \left(\varepsilon x^* - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{n\beta x^{*2}}{y^*}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x} + \frac{x^*y^*}{xy}\right) \right] \\
&= \frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(\frac{x^*}{x} - \frac{y^*}{y}\right) + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \left(\frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x}\right) + x^* \left(\varepsilon - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{n\beta x^*}{y^*}\right) \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right] \\
&= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^2 + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 - \left(\varepsilon x^* + 1 + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*}\right) \left(1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{x^*}{x}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right]
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\varepsilon x^* + 1 = \frac{x^*(1 - z^*)}{y^*} \quad \text{dan} \quad \beta x^* = \frac{b_1x^* - \sigma y^*}{y^*}$$

Maka

$$\varepsilon x^* + 1 + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*} = \frac{x^*(n\sigma + 1 - z^*)}{y^*}$$

Mengikuti keterangan tersebut maka

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^2 + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 - \frac{x^*(n\sigma + 1 - z^*)}{y^*} \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right] \\
&= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^2 + \frac{nb_1x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - 2\frac{y^*}{y} + \frac{y^{*2}}{y^2}\right) - \frac{x^*(n\sigma + 1 - z^*)}{y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{x^*y^*}{xy}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^2 + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{2nb_1 x^{*2}}{yy^*} + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^2} - \frac{x^*(n\sigma+1-z^*)}{y^*} + \right. \\
&\quad \left. \frac{x^*(n\sigma+1-z^*)}{y} + \frac{x^{*2}(n\sigma+1-z^*)}{xy^*} - \frac{x^{*2}(n\sigma+1-z^*)}{xy} \right] \\
&= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)^2 - 2 \left(\frac{(n\sigma+1-z^*)x^*}{2y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y} - \frac{x^*}{x} + \frac{x^*y^*}{xy}\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{(n\sigma+1-z^*)x^{*2}}{4y^{*2}} \left(1 - \frac{2y^*}{y} + \frac{y^{*2}}{y^2}\right) + \left(\frac{nb_1 x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{(n\sigma+1-z^*)^2 x^{*2}}{4y^{*2}} \right) \left(1 - 2\frac{y^*}{y} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{y^{*2}}{y^2} \right) \right] \\
&= -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \frac{(n\sigma+1-z^*)x^*}{2y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \frac{(n\sigma+1-z^*)x^*}{2y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[nb_1 - \frac{(n\sigma+1-z^*)^2}{4} \right] \frac{x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 \right\} \\
&= \\
&\quad -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \frac{(n\sigma+1-z^*)x^*}{2y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right]^2 + \right. \\
&\quad \left. \left[nb_1 - \frac{(n\sigma+1-z^*)^2}{4} \right] \frac{x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Substitusikan $n = \frac{b_1(\sigma - \varepsilon b_2 + 2\beta b_2)}{\sigma^2(\sigma + \beta b_2)}$ ke persamaan tersebut sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) - \frac{b_1 x^*}{\sigma y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_1^2 b_2 (\beta - \varepsilon \sigma)}{\sigma^2 (\sigma + \beta b_2)} \frac{x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Jadi ketika $\beta \geq \varepsilon \sigma$ maka $\frac{dV_2}{dt} < 0$, sedangkan ketika $x = x^*$ dan $y = y^*$

maka $\frac{dV_2}{dt} = 0$. Kemudian dapat dilihat bahwa ketika $\beta \geq \varepsilon \sigma$, himpunan

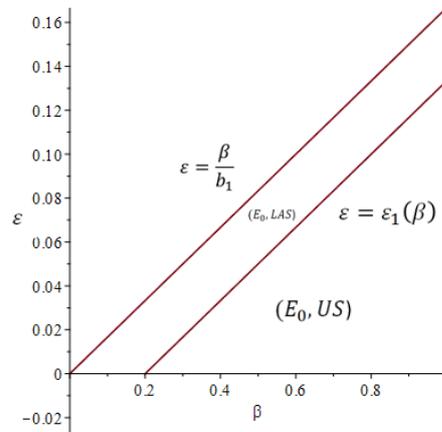
invariant terbesar dari (3.4) dalam himpunan $\{(x, y, z) \in \Omega_0 : \frac{dV_2}{dt} = 0\}$

adalah singleton $\{E^*\}$. Oleh karena itu, E^* stabil secara global jika $\beta \geq \varepsilon\sigma$ oleh prinsip Invarian La Salle.

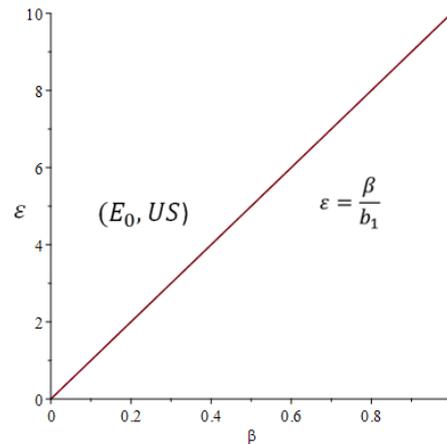
Pada kesetimbangan positif E^* , kondisi keberadaan E^* adalah $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$. Kondisi dalam Teorema 3 untuk stabilitas global adalah $\beta \geq \varepsilon\sigma$ sedangkan Teorema 2 menunjukkan bahwa kondisi stabilitas lokalnya adalah (C1): $\sigma \leq b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, atau (C2): $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$.

3.2.2 Sensitivitas Titik Kesetimbangan Terhadap β dan ε

Untuk memahami lebih jelas kondisi stabilitas lokal E_0 dan E^* dan sensitivitas pada parameter β dan ε , maka diilustrasikan secara geometris dengan menggunakan daerah yang sesuai di bidang $\beta - \varepsilon$. Nilai parameter untuk gambar 3.1 pada (a) $\sigma < b_1$ yaitu $\sigma = 1, b_1 = 6, b_2 = 25, \beta = [0,1]$; pada (b) $\sigma > b_1$ yaitu $\sigma = 6, b_1 = 0.1, b_2 = 25, \beta = [0,1]$ (Zhang, 2019).



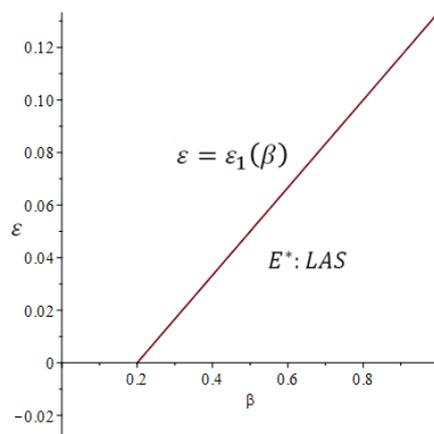
(a)



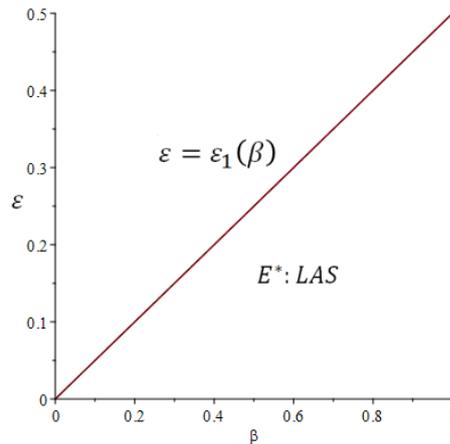
(b)

Gambar 3.1 Daerah Eksistensi dan Kestabilan Lokal E_0

Teorema 2 dan Gambar 3.1 menunjukkan bahwa jika $\sigma > b_1$, E_0 pasti tidak stabil asalkan ada. Berdasarkan stabilitas lokal E_0 dan keberadaan E^* , dengan kondisi $\sigma < b_1$, E_0 pasti tidak stabil selama E^* ada. Nilai parameter untuk gambar 3.2 pada (a) $\sigma < b_1$ yaitu $\sigma = 1, b_1 = 6, b_2 = 25, \beta = [0,1]$; pada (b) $\sigma = b_1$ yaitu $\sigma = 2, b_1 = 2, b_2 = 25, \beta = [0,1]$ (Zhang, 2019).



(a)

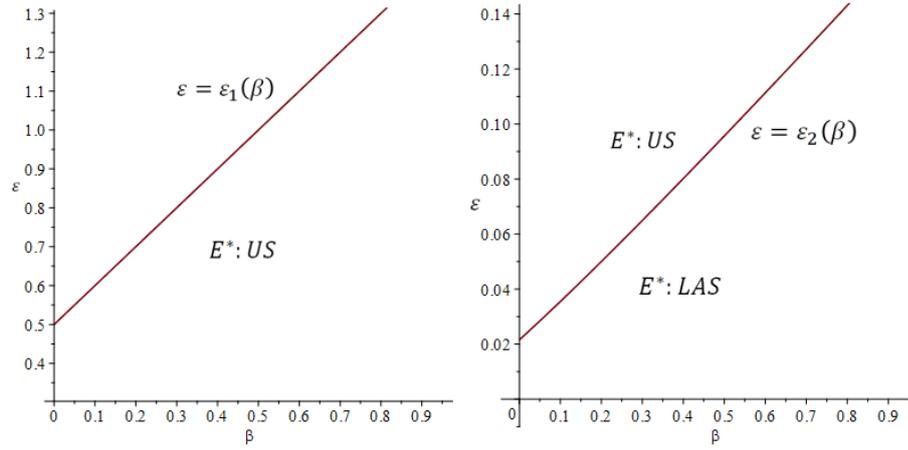


(b)

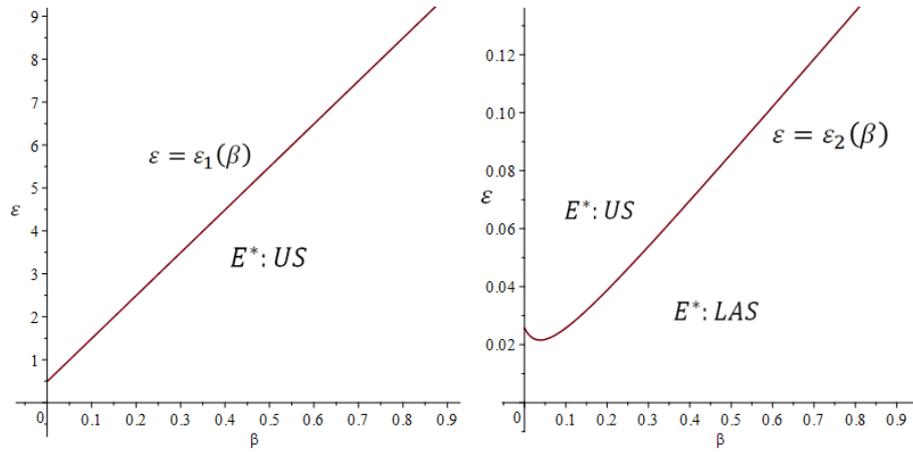
Gambar 3.2. Daerah Eksistensi dan Kestabilan Lokal E^* Ketika $\sigma \leq b_1$

Dalam Gambar 3.2 dan 3.3, enam kemungkinan kasus ditunjukkan sehubungan dengan keberadaan dan stabilitas E^* . Perhatikan bahwa jika $\sigma < b_1$ maka $\varepsilon_1(\beta) < \varepsilon_2(\beta)$ dan jika $\sigma = b_1$ maka $\varepsilon_1(\beta) = \varepsilon_2(\beta)$. Kemudian, untuk kasus pada Gambar 3.2 (a) dan (b), yang sesuai dengan $\sigma \leq b_1$, E^* pasti stabil secara lokal asimtotik selama eksis menurut Teorema 2.

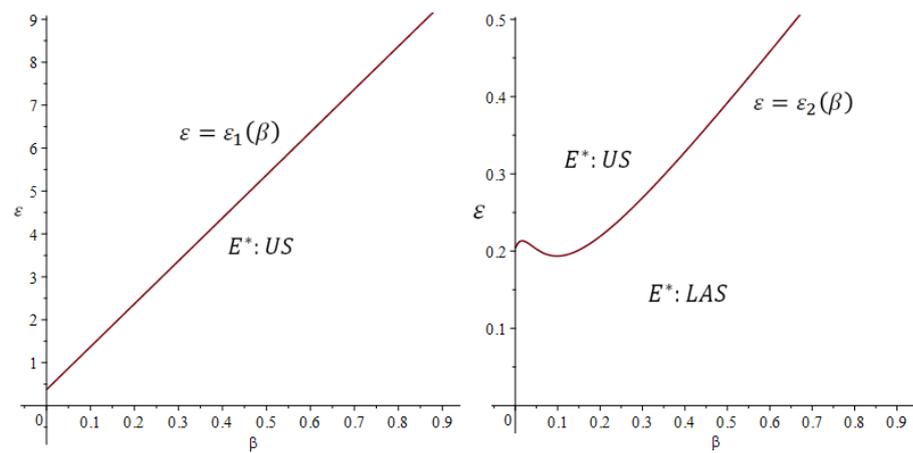
Untuk nilai parameter pada gambar 3.3 ketika $\sigma > b_1$, (c) $\sigma = 6, b_1 = 1, b_2 = 10, \beta = [0,1]$; (d) $\sigma = 6, b_1 = 0.1, b_2 = 120, \beta = [0,1]$; (e) $\sigma = 1.4, b_1 = 0.1, b_2 = 35, \beta = [0,1]$; (f) $\sigma = 1.2, b_1 = 0.1, b_2 = 60, \beta = [0,1]$ (Zhang, 2019).



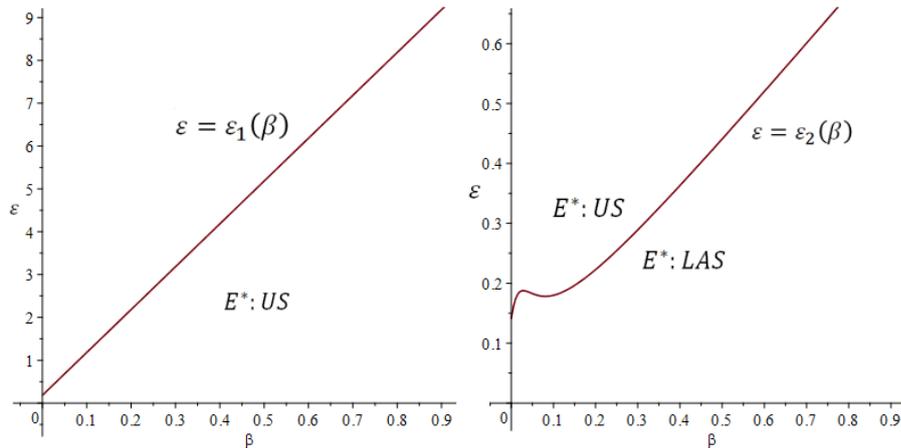
(c)



(d)



(e)



(f)

Gambar 3.3. Daerah Eksistensi dan kestabilan Lokal E^* Ketika $\sigma > b_1$

Namun, jika $\sigma > b_1$ maka $\varepsilon_2(\beta) < \varepsilon_1(\beta)$. Karenanya, ada empat situasi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3 (c) - (f). Dari ungkapan $a_1 a_2 - a_3$ dapat disimpulkan bahwa E^* tidak stabil jika titik (β, ε) terletak di antara kedua kurva $\varepsilon = \varepsilon_1(\beta)$ dan $\varepsilon = \varepsilon_2(\beta)$ sedangkan stabil jika titik (β, ε) berada di bawah kurva $\varepsilon = \varepsilon_2(\beta)$. Dari empat situasi tersebut kita tahu bahwa untuk β yang diberikan, jika E^* eksis maka E^* dapat kehilangan stabilitasnya dengan peningkatan ε . Namun, ketika ε adalah tetap, perubahan stabilitas E^* terhadap β berbeda dalam empat situasi.

Pada Gambar 3.3 (c), jika $\varepsilon \leq \varepsilon_2(0)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik, yang berarti bahwa stabilitas E^* tidak akan berubah; ketika $\varepsilon > \varepsilon_2(0)$, stabilitasnya dapat berubah dari tidak stabil menjadi stabil secara asimtotik lokal dengan peningkatan β .

Pada Gambar 3.3 (d), ada tiga jenis perubahan stabilitas E^* . (i) Ketika ε kurang dari minimum fungsi $\varepsilon_2(\beta)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik. (ii) Ketika ε berada di antara $\varepsilon_2(0)$ dan minimum, stabilitas berubah dari stabil

menjadi tidak stabil menjadi stabil, yaitu, perubahan stabilitas terjadi saat β meningkat. (iii) Ketika $\varepsilon > \varepsilon_2(0)$, stabilitas bisa hilang dengan peningkatan β .

Dalam Gambar 3.3 (e), ada empat kasus tentang perubahan stabilitas E^* , dua di antaranya akan memiliki perubahan stabilitas. (i) Ketika ε kurang dari minimum fungsi $\varepsilon_2(\beta)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik. (ii) Ketika ε berada di antara $\varepsilon_2(0)$ dan minimum, stabilitas berubah dari stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil. (iii) Jika ε berada di antara $\varepsilon_2(0)$ dan nilai maksimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil. (iv) Jika ε lebih besar dari nilai maksimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil.

Pada Gambar 3.3 (f), ada juga empat kemungkinan, yang berbeda dari yang ada pada Gambar 3.3 (e). perubahan stabilitas hanya dapat terjadi dalam satu kasus. (i) Ketika $\varepsilon \leq \varepsilon_2(0)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik. (ii) Jika ε berada di antara $\varepsilon_2(0)$ dan nilai minimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil. (iii) Jika ε berada di antara dua nilai ekstrim, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil. (iv) Jika ε lebih besar dari nilai maksimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil.

Pernyataan di atas tentang perubahan stabilitas kesetimbangan positif E^* dengan β menunjukkan kompleksitas pengaruh kanibalisme terhadap dinamika model (3.4). Ini juga menunjukkan bahwa, untuk ε yang diberikan, kesetimbangan positif E^* stabil untuk β yang cukup besar setiap kali ada.

3.2.3 Simulasi Numerik

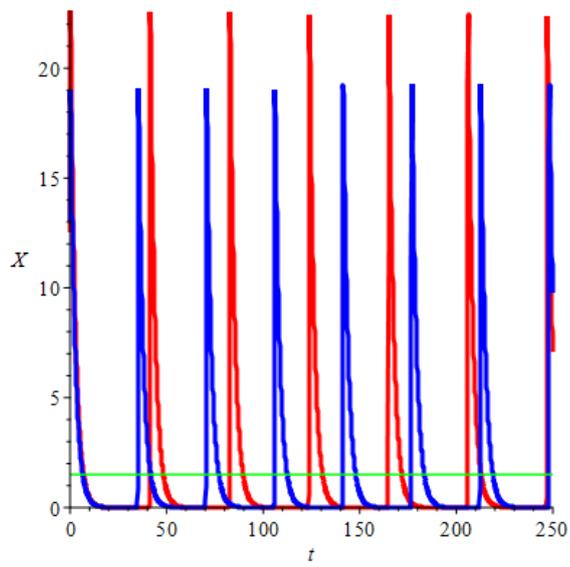
Pada subbab ini akan dibahas tentang simulasi dari persamaan (3.4) dengan nilai parameter yang diberikan oleh Fengqin Zhang, Yuming Chen dan Jiangquan Li tahun 2019. Menggunakan nilai parameter β dan ε yang berbeda dan dilakukan pada empat syarat awal. Kemudian simulasikan menggunakan Maple 2016 maka didapatkan grafik perilaku dari sistem tersebut.

Dimisalkan $\beta = 0.025$ dan $\beta = 5.2$. Oleh karena itu, pilih $\varepsilon = 0.02 < \varepsilon_2(0.025) = 0.0246$ dan $\varepsilon = 1.25 > \varepsilon_2(5.2) = 1.1897$. berikut adalah nilai parameter untuk gambar 3.4 dan 3.5 (Zhang, 2019)

Parameter	Deskripsi	Nilai
σ	Kematian alami dan tingkat kematangan <i>predator</i> dewasa	4.4
b_1	Laju kelahiran <i>predator</i> dewasa	2.5
b_2	Tingkat pertumbuhan <i>prey</i>	1.5
β	Tingkat penangkapan <i>predator</i> remaja oleh <i>predator</i> dewasa	5.2
ε	Laju peningkatan <i>predator</i> dewasa akibat memangsa <i>predator</i> remaja	1.25

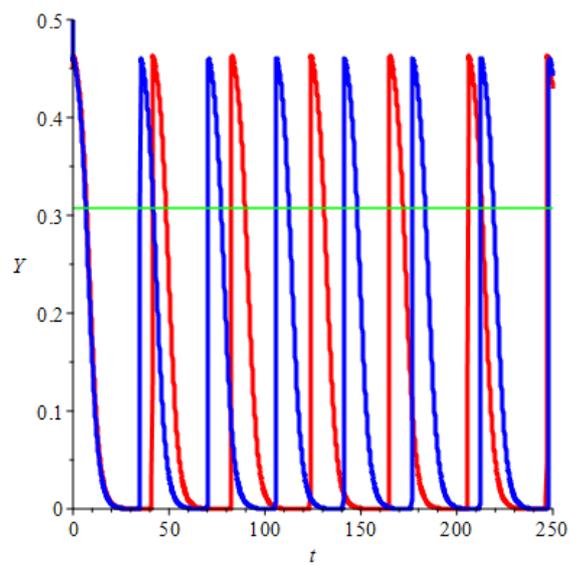
Tabel 3.3 Nilai Parameter untuk Gambar 3.4 dan 3.5

Sehingga didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* sebagai berikut:



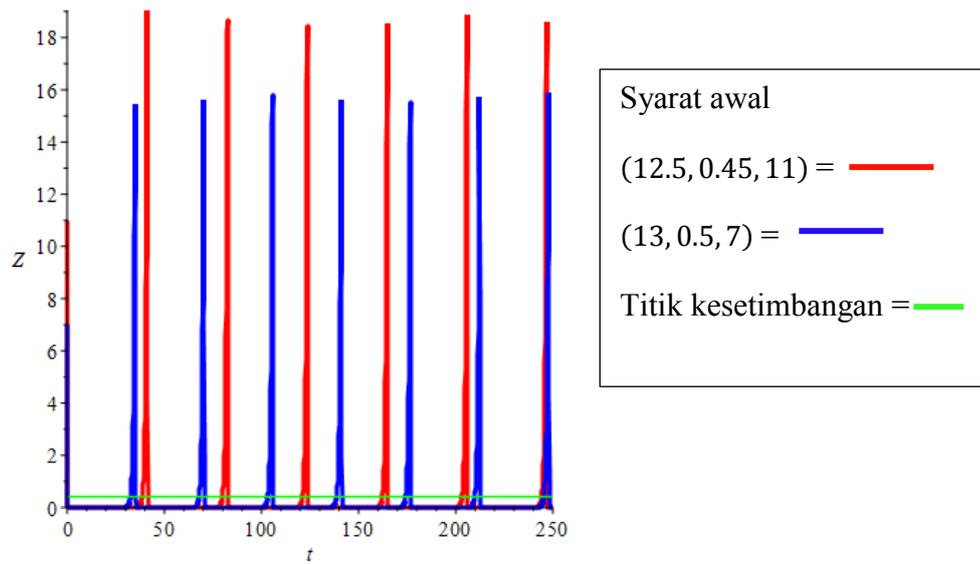
Syarat awal
 $(12.5, 0.45, 11) =$ ——— (red line)
 $(13, 0.5, 7) =$ ——— (blue line)
 Titik kesetimbangan = ——— (green line)

(a)



Syarat awal
 $(12.5, 0.45, 11) =$ ——— (red line)
 $(13, 0.5, 7) =$ ——— (blue line)
 Titik kesetimbangan = ——— (green line)

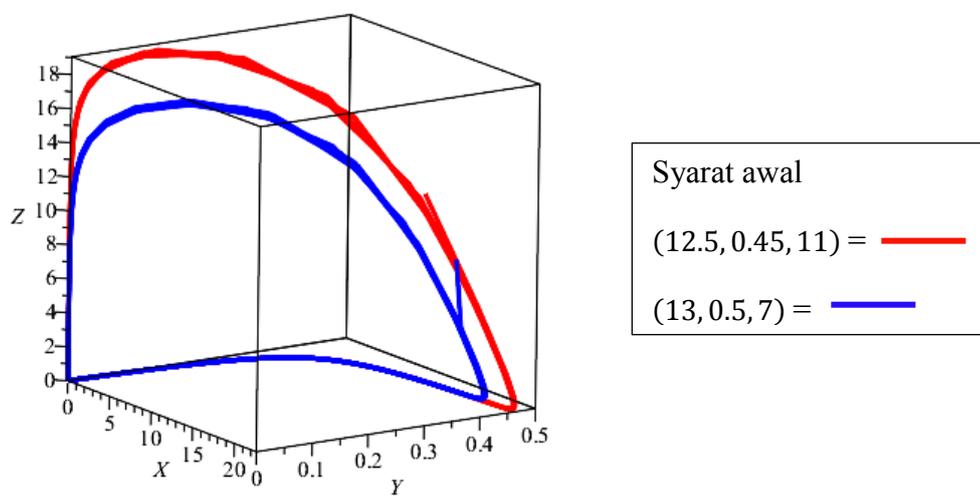
(b)



(c)

Gambar 3.4 *Limit Cycle* Stabil Pada Solusi Sistem (3.4)

Kemudian plot tiga dimensi diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.5 Potret Fase Solusi Sistem (3.4) dengan *Limit Cycle* Stabil

Gambar 3.4 (a) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* dewasa, gambar 3.4 (b) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* remaja, dan

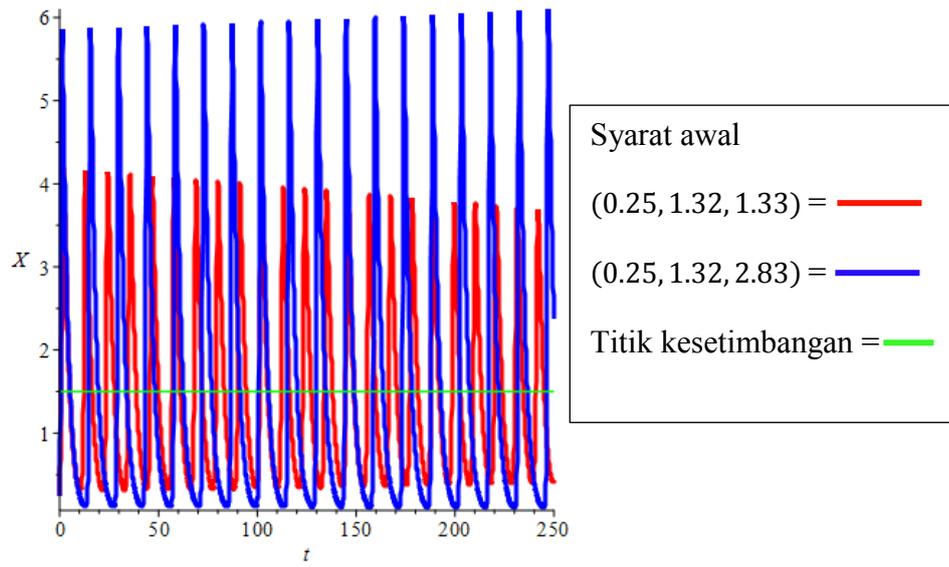
gambar 3.4 (c) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *prey*. Pada Gambar 3.4 dan 3.5, menggambarkan komponen dari solusi sistem (3.4) dengan $\sigma = 4.4$, $b_1 = 2.5$, $b_2 = 1.5$, $\beta = 5.2$, dan $\varepsilon = 1.25$. Dimana amplitudonya masing-masing naik dan turun, serta mengalami osilasi yang menjauhi dan tidak mencapai titik kesetimbangan sehingga gambar 3.4 dan 3.5 merupakan perilaku dari model *predator-prey* yang tidak stabil. Orbit 3-dimensi yang sesuai ditampilkan pada gambar 3.5. Pada kedua gambar, warna yang sama menunjukkan syarat awal yang sama. Pada hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa ada *limit cycle* yang stabil untuk sistem (3.4) artinya dua nilai syarat awal tersebut masing-masing berjalan mendekati *limit cycle* dan bifurkasi hopf bersifat superkritis.

Kemudian pada gambar 3.6 dan 3.7 nilai parameternya yaitu sebagai berikut (Zhang, 2019):

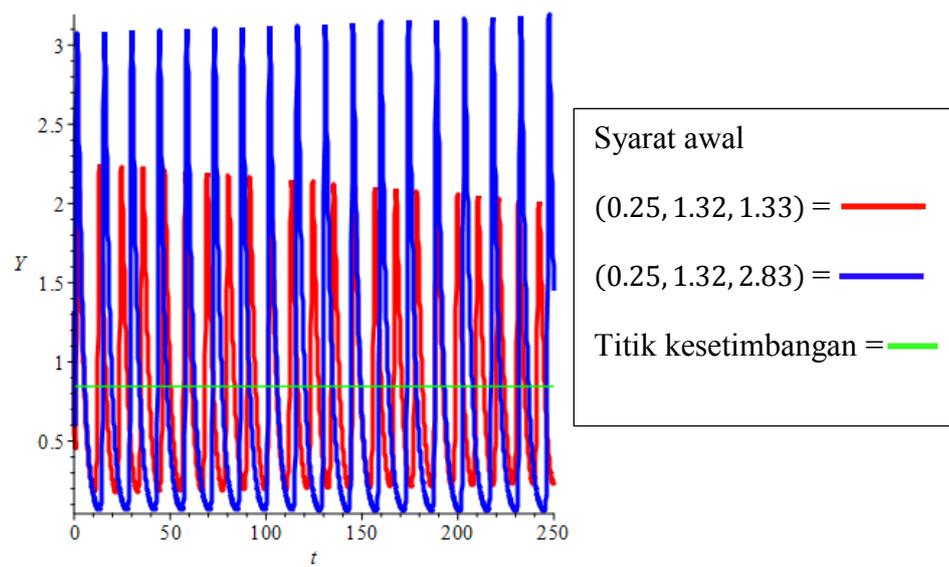
Parameter	Deskripsi	Nilai
σ	Kematian alami dan tingkat kematangan <i>predator</i> dewasa	4.4
b_1	Laju kelahiran <i>predator</i> dewasa	2.5
b_2	Tingkat pertumbuhan <i>prey</i>	1.5
β	Tingkat penangkapan <i>predator</i> remaja oleh <i>predator</i> dewasa	0.025
ε	Laju peningkatan populasi <i>predator</i> dewasa akibat memangsa <i>predator</i> remaja	0.02

Tabel 3.4 Nilai Parameter untuk Gambar 3.6 dan 3.7

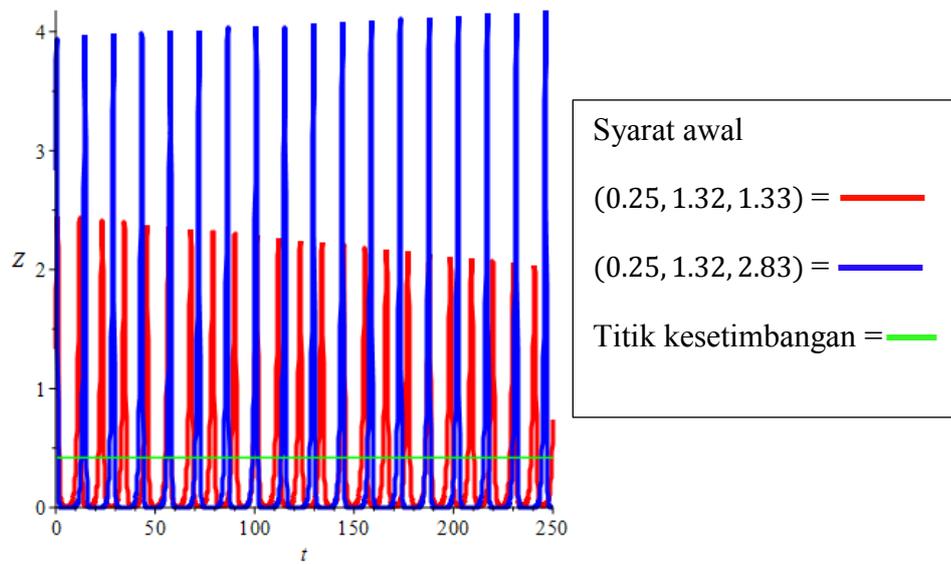
Sehingga didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* sebagai berikut:



(a)



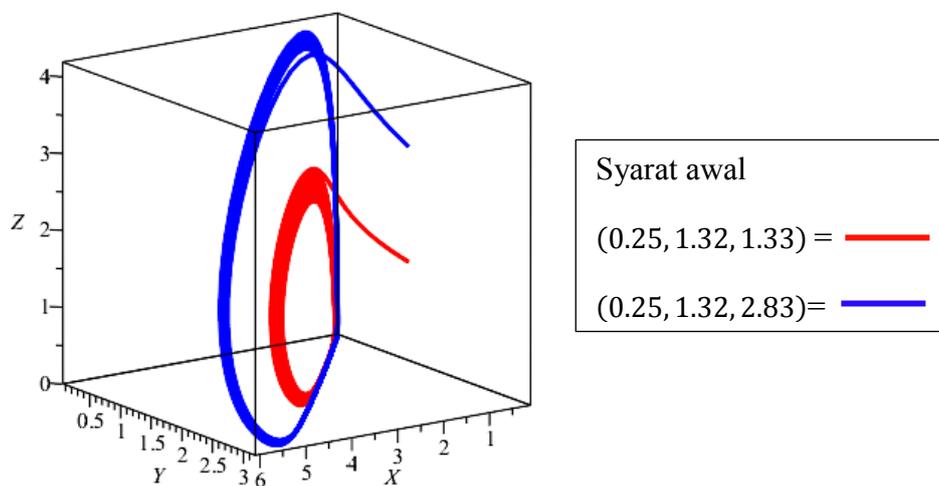
(b)



(c)

Gambar 3.6. *Limit Cycle* Tidak Stabil Pada Solusi Sistem (3.4)

Kemudian plot tiga dimensi diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Potret Fase Solusi Sistem (3.4) dengan *Limit Cycle* Tidak Stabil

Gambar 3.6 (a) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* dewasa, gambar 3.6 (b) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* remaja, dan

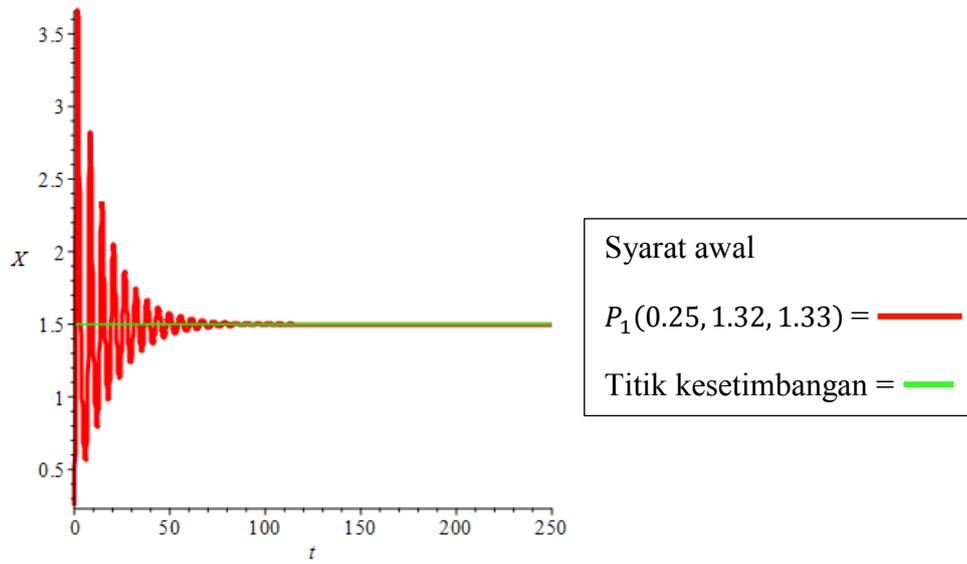
gambar 3.6 (c) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *prey*. Pada Gambar 3.6 dan 3.7, menggambarkan komponen dari solusi sistem (3.4) dengan $\sigma = 4.4$, $b_1 = 2.5$, $b_2 = 1.5$, $\beta = 0.025$, dan $\varepsilon = 0.02$. Dimana amplitudonya masing-masing naik dan turun, serta mengalami osilasi yang mendekati dan mencapai titik kesetimbangan sehingga gambar 3.6 dan 3.7 merupakan perilaku dari model *predator-prey* yang stabil. Orbit 3-dimensi yang sesuai ditampilkan pada gambar 3.7. Pada kedua gambar, warna yang sama menunjukkan Syarat awal yang sama. Pada hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa ada *limit cycle* yang tidak stabil untuk sistem (3.4) artinya dua nilai Syarat awal tersebut masing-masing berjalan menjauhi *limit cycle* dan bifurkasi hopf bersifat subkritis.

Kemudian pada gambar 3.8 dan 3.9 nilai parameternya yaitu sebagai berikut (Zhang,2019):

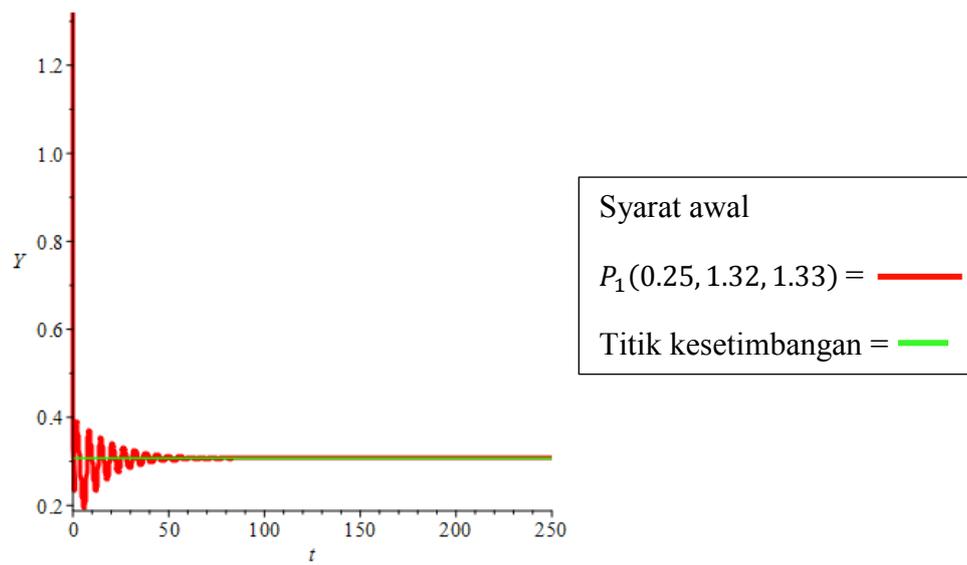
Parameter	Deskripsi	Nilai
σ	Kematian alami dan tingkat kematangan <i>predator</i> dewasa	4.4
b_1	Laju kelahiran <i>predator</i> dewasa	2.5
b_2	Tingkat pertumbuhan <i>prey</i>	1.5
β	Tingkat penangkapan <i>predator</i> remaja oleh <i>predator</i> dewasa	5.2
ε	Laju peningkatan <i>predator</i> dewasa akibat memangsa <i>predator</i> remaja	0.02

Tabel 3.5 Nilai Parameter untuk Gambar 3.8 dan 3.9

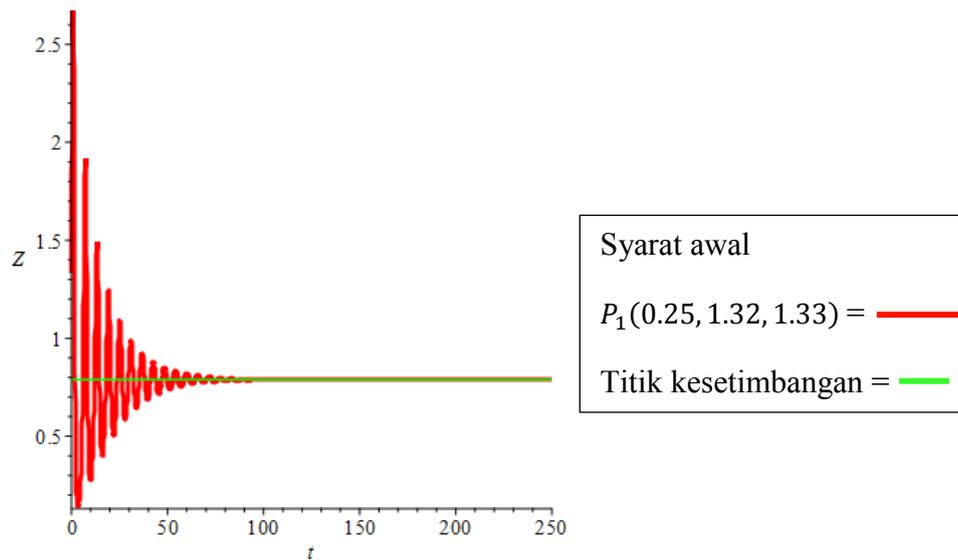
Sehingga didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* sebagai berikut:



(a)



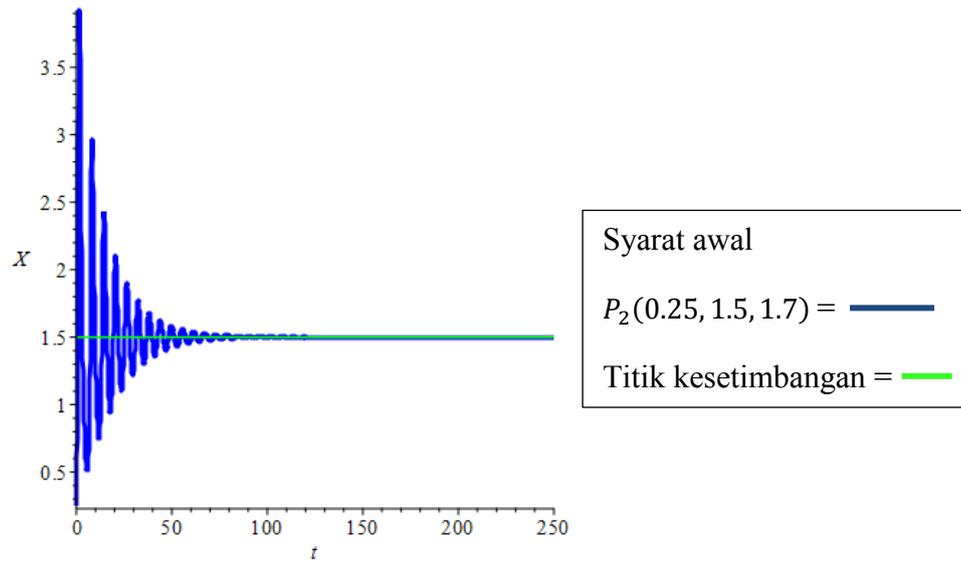
(b)



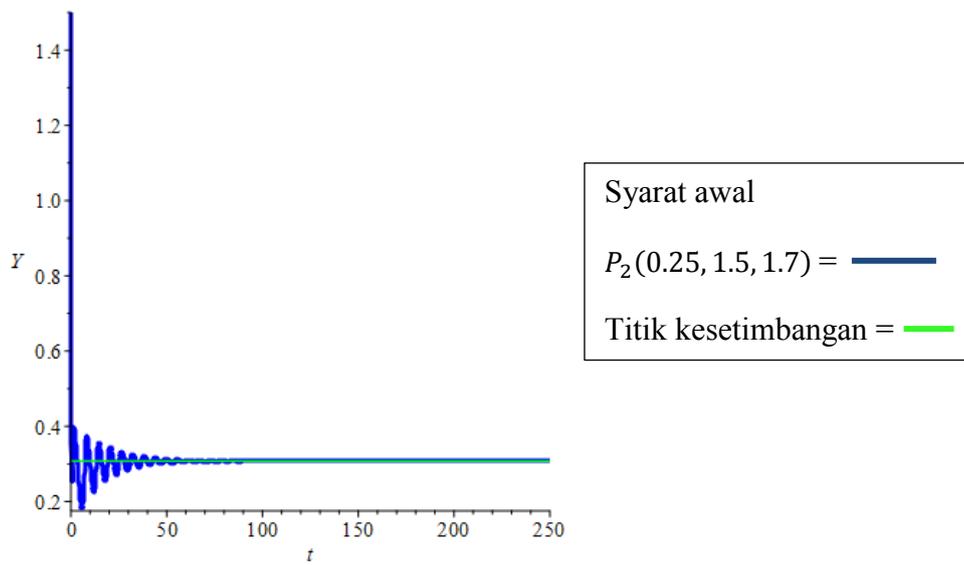
(c)

Gambar 3.8 Solusi Sistem (3.4) dengan Syarat Awal $P_1 = (0.25, 1.32, 1.33)$

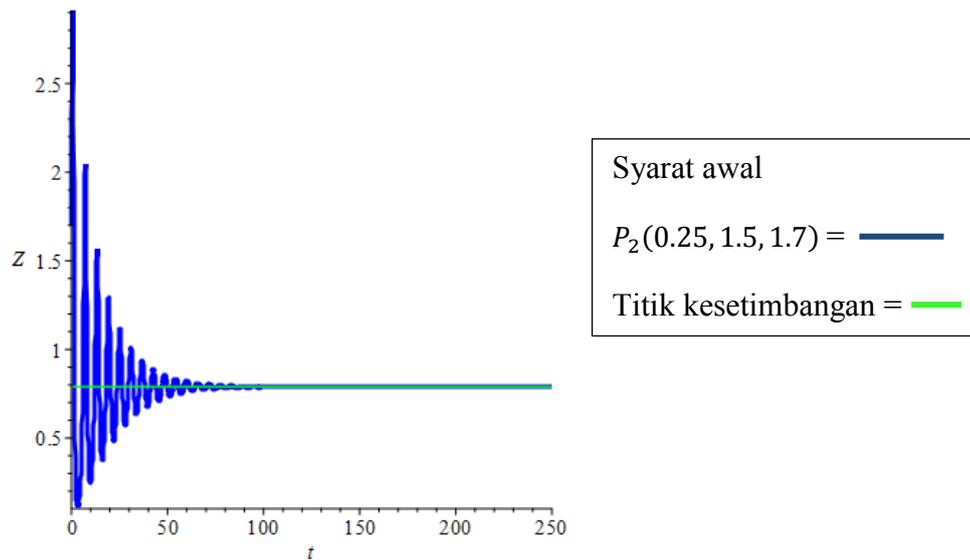
Gambar 3.8 (a) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* dewasa, gambar 3.8 (b) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* remaja, dan gambar 3.8 (c) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *prey*. Kemudian dengan kondisi awal yang berbeda yaitu ketika $P_1 = (x(0) = 0.25, y(0) = 1.5, z(0) = 1.7)$ didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* sebagai berikut:



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.9 Solusi Sistem (3.4) dengan Syarat Awal $P_2 = (0.25, 1.5, 1.7)$

Gambar 3.9 (a) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* dewasa, gambar 3.9 (b) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *predator* remaja, dan gambar 3.9 (c) menunjukkan *limit cycle* pada populasi *prey*. Gambar 3.8 dan 3.9 merupakan hasil simulasi numerik yang menunjukkan dinamika model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator* remaja dengan dua kondisi awal yang berbeda. Berdasarkan hasil simulasi, dengan syarat awal $P_1 = (x(0) = 0.25, y(0) = 1.32, z(0) = 1.33)$ dan $P_2 = (x(0) = 0.25, y(0) = 1.5, z(0) = 1.7)$ mengalami osilasi masing-masing naik dan turun pada waktu $t = 0 - 50$. Pada akhirnya yaitu pada $t = 100$ dan seterusnya, osilasi menuju ke titik kesetimbangan. Sehingga dapat dikatakan dengan nilai parameter dan kondisi tersebut yang mengikuti kondisi kestabilan titik kesetimbangan E^* yaitu ketika $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$ stabil secara lokal asimtotik. Dapat dilihat bahwa hasil terbaik yaitu ketika jumlah populasi *prey* lebih besar dari pada jumlah

populasi *predator* dan jumlah populasi *predator* remaja lebih besar dari pada jumlah populasi *predator* dewasa.

3.3 Peran Manusia dalam Melindungi Ekosistem Menurut Islam

Manusia diciptakan sebagai khalifah dimuka bumi ini untuk bertanggung jawab terhadap keberlangsungan ekosistem. Menurut UU RI Nomor 23 Tahun 1997 yang menyatakan bahwa pengertian lingkungan hidup dimana didalamnya telah melibatkan peranan manusia serta perilakunya untuk menyejahterahkan makhluk hidup dan dirinya. Allah memberi akal kepada manusia dan Allah menurunkan agama sebagai pedoman dan petunjuk dalam kehidupan, sehingga manusia berperan sebagai khalifah di muka bumi ini (Watsiqotul, 2018). Allah berfirman dalam Surat Al-Baqarah ayat 30 yang artinya:

“Dan (ingatlah) ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat, “Aku hendak menjadikan khalifah di bumi.” Mereka berkata, “Apakah Engkau hendak menjadikan orang yang merusak dan menumpahkan darah di sana, sedangkan kami bertasbih memuji-Mu dan menyucikan nama-Mu?” Dia berfirman, “Sungguh, Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui.”

Arti khalifah dalam islam yaitu sebagai pemimpin satu-satunya diseluruh dunia, sehingga pemimpin seluruh umat islam di dunia ini yakni khalifah. Interaksi antara manusia dengan alam sekitar dan makhluk-makhluk hidup lainnya harus berlangsung berdasarkan kaidah-kaidah yang diatur oleh Allah SWT. Bahkan Allah mengamanahkan bumi ini kepada manusia untuk menyikapi hukum dan ketentuan-ketentuannya (Watsiqotul, 2018). Berbagai peran khalifah dimuka bumi ini salah satunya yaitu melindungi makhluk hidup didunia ini salah satunya dengan meningkatkan pendidikan diseluruh penjuru dunia. Pada kehidupan ini, terdapat tingkatan pendidikan yang berperan penting yang mentransformasikan ilmu pengetahuan dan teknologi, bahkan termasuk juga konsep ekologi dan lingkungan hidup kepada masyarakat dan peserta didik. Sehingga karena ilmu dan

upaya manusia ekosistem di muka bumi ini dapat terselamatkan dari kerusakan alam atau kepunahan flora dan faunanya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Untuk model *predator-prey* tanpa kanibalisme diperoleh tiga titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan O, E_0 dan E^* dimana sifat kestabilan dari setiap titik kesetimbangan tersebut bergantung pada kaitan antara σ dan b_1 . Ketika $\sigma < b_1$ maka titik O bersifat saddle. Kemudian ketika $\sigma > b_1$ hanya titik kesetimbangan E^* yang bersifat stabil secara global asimtotik, sedangkan E_0 tidak stabil.
2. Untuk model *predator-prey* dengan kanibalisme diperoleh tiga titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan O, E_0 dan E^* dimana sifat kestabilan dari setiap titik kesetimbangan tersebut bergantung pada kaitan antara setiap parameter serta $\varepsilon(\beta)$. Titik kesetimbangan O selalu tidak stabil, titik kesetimbangan E_0 stabil secara lokal asimtotik ketika $\varepsilon_1(\beta) < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$. Titik kesetimbangan E^* stabil secara lokal asimtotik ketika salah satu dari dua kondisi yaitu (C1) $\sigma \leq b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, dan (C2) $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$ serta akan stabil secara global asimtotik ketika $\beta \geq \varepsilon\sigma$.

4.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai analisis dinamik model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator* beserta sensitivitas stabilitas pada parameter kanibalisme dan simulasi numerik, namun ada kemungkinan terjadi bifurkasi hopf. Oleh karena itu, penulis menyarankan pada pembaca yang ingin melakukan penelitian lebih lanjut agar pada penelitian selanjutnya dibuktikan adanya bifurkasi hopf yang terjadi secara analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Quran Terjemahan. (2015). *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah.
- Basheer, Aladeen, dkk. (2016). Prey Cannibalism Alters The Dynamics of Holling-Tanner-Type Predator-Prey Models. *Nonlinier Dyn Springer and Business Media Dordrecht*, DOI 10.1007/s11071-016-2844-8.
- Basheer, Aladeen, Jingjing Lyu, dkk. (2017). The “Destabilizing” Effect of Cannibalism in a Spatially Explicit Three-Species Age Structured Predator-Prey Model. *Wiley Hindawi*, Volume Article ID 3896412, 15 pages.
- Biswas, Santosh dkk. (2015). Cannibalistic Predator-Prey Model with Disease in Predator- A Delay Model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(10), 31 pages.
- Boyce, W.E., & Diprima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem (7th ed.)*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Chou, Ching-Shan, & Avner Friedman. (2016). *Introduction to Mathematical Biology Modeling, Analysis, and Simulations*. Switzerland: Springer International Publishing.
- DiStefano III, J. J., Stubberud, A. R., & Williams, I. J. (1990). *Feedback and Control System (Second Ed.)*. United States: McGraw-Hill Education.
- Hariyanto. (1992). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Ilyas, M. Muhatrom. (2008). Lingkungan Hidup Dalam Pandangan Islam. *Jurnal Sosial Humaniora*, 1(2), 154-166.
- K.G. Magnusson. (1999). Destablizing Effect On Cannibalism On A Structured Predator-Prey System. *Mathematical Biosciences*, 155, 61-75.
- Lina, Oktavia L. (2014). Penggunaan Metode Lyapunov untuk Menguji Kestabilan Sistem Linier. *Jurnal Matematika UNAND*, 3(2), 29-33.
- Ndii, Meksianis Zadrak. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi Dan Penyebaran Penyakit*. Yogyakarta: DEEPUBLISH.
- Olinick, Michael. (2014). *Mathematical Modeling in The Social and Life Sciences*. America: Wiley.
- Sundari, Reni & Erna Apriliani. (2017). Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 6(1), 28-32.

- Strogatz, Steven H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. New York: Perseus Books Group.
- Waluya, S.B. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Watsiqotul, Sunardi, & Leo Agung. (2018). Peran Manusia Sebagai Khalifah Allah di Muka Bumi Perspektif Ekologis dalam Ajaran Islam. *Jurnal Penelitian IAIN Kudus*, 12(2), 355-378.
- Zhang, Fengqin, Yuming Chen, and Jianquan Li. (2019). Dynamical Analysis of A Stage-Structured Predator-Prey Model with Cannibalism. *Mathematical Biosciences*, 307, 33-41.
- Zill, D., Wright, W., & Cullen, M. (2013). *Differential Equations with Boundary Value Problems (8th ed.)*. New York: Cengage Learning.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Titik Tetap, Matriks Jacobi, Nilai Eigen Model Matematika *Predator-Prey* Tanpa Kanibalisme

> *restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):*

> *dx := x · z - x + y:*

> *dy := b1 · x - sigma · y:*

> *dz := (b2 - x) · z:*

> *TTK := solve({dx, dy, dz}, {x, y, z});*

> *A := Matrix(jacobian([dx, dy, dz], [x, y, z]));*

> *DFE := TTK[1];*

> *END := TTK[2];*

> *JacA := subs(DFE, A); eigenvalues(JacA);*

> *JacB := subs(END, A); eigenvalues(JacB);*

Lampiran 2

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Titik Tetap, Matriks Jacobi, Nilai Eigen dan Simulasi Numerik Model Matematika *Predator-Prey* dengan Kanibalisme Gambar 3.4 dan Gambar 3.5

```
> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):  
> dX := X · Y · varepsilon + X · Z - X + Y:  
> dY := -X · Y · beta + X · b1 - Y · sigma:  
> dZ := (b2 - X) · Z:  
> TTK := solve({dX, dY, dZ}, {X, Y, Z});  
> DFE := TTK[1];  
> END := TTK[2];  
> A := Matrix(jacobian([dX, dY, dZ], [X, Y, Z]));  
> JacA := subs(DFE, A); eigenvalues(JacA);  
> JacB := subs(END, A); charpoly(JacB, lambda);  
> b1 := 2.5: b2 := 1.5: varepsilon := 1.25: beta := 5.2: sigma := 4.4:  
> DFE;  
> END;  
> x := b2;  
> y :=  $\frac{b_1 \cdot b_2}{\sigma + \beta \cdot b_2}$ ;  
> z :=  $1 - \frac{b_1 \cdot (1 + \varepsilon \cdot b_2)}{\sigma + \beta \cdot b_2}$ ;  
> x1 := plot(x, t = 0..250, color = green);  
> y1 := plot(y, t = 0..250, color = green);  
> z1 := plot(z, t = 0..250, color = green);  
> ode1 := diff(X(t), t) = -X(t) + Y(t) + varepsilon · X(t) · Y(t) + X(t) · Z(t):  
> ode2 := diff(Y(t), t) = b1 · X(t) - sigma · Y(t) - beta · X(t) · Y(t):
```

```

> ode3 := diff(Z(t), t) = (b2 - X(t)) · Z(t):

> inits1 := [X(0) = 12.5, Y(0) = 0.45, Z(0) = 11]:

> inits2 := [X(0) = 13, Y(0) = 0.5, Z(0) = 7]:

> myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE:

> plot0 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =
[t, X], linecolor = red, myopts):

> plot1 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =
[t, X], linecolor = blue, myopts):

> plot2 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =
[t, Y], linecolor = red, myopts):

> plot3 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =
[t, Y], linecolor = blue, myopts):

> plot4 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =
[t, Z], linecolor = red, myopts):

> plot5 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =
[t, Z], linecolor = blue, myopts):

> display(plot0, plot1, x1);

> display(plot2, plot3, y1);

> display(plot4, plot5, z1);

> PLOT1 :=
DEplot3d([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..250, [inits1], scene =
[X, Y, Z], stepsize = 0.05, linecolor = red);

> PLOT2 :=
DEplot3d([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..250, [inits2], scene =
[X, Y, Z], stepsize = 0.05, linecolor = blue);

> display(PLOT1, PLOT2);

```

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Titik Tetap, Matriks Jacobi, Nilai Eigen dan Simulasi Numerik Model Matematika *Predator-Prey* dengan Kanibalisme Gambar 3.6 dan Gambar 3.7

```

> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):

> dX := X · Y · varepsilon + X · Z - X + Y:

> dY := -X · Y · beta + X · b1 - Y · sigma:

> dZ := (b2 - X) · Z:

> TTK := solve({dX, dY, dZ}, {X, Y, Z});

> DFE := TTK[1];

> END := TTK[2];

> A := Matrix(jacobian([dX, dY, dZ], [X, Y, Z]));

> JacA := subs(DFE, A); eigenvalues(JacA);

> JacB := subs(END, A); charpoly(JacB, lambda);

> b1 := 2.5: b2 := 1.5: varepsilon := 0.02: beta := 0.025: sigma := 4.4:

> DFE;

> END;

> x := b2;

> y :=  $\frac{b_1 \cdot b_2}{\sigma + \beta \cdot b_2}$ ;

> z :=  $1 - \frac{b_1 \cdot (1 + \varepsilon \cdot b_2)}{\sigma + \beta \cdot b_2}$ ;

> x1 := plot(x, t = 0..250, color = green);

> y1 := plot(y, t = 0..250, color = green);

> z1 := plot(z, t = 0..250, color = green);

> ode1 := diff(X(t), t) = -X(t) + Y(t) + varepsilon · X(t) · Y(t) + X(t) · Z(t):

> ode2 := diff(Y(t), t) = b1 · X(t) - sigma · Y(t) - beta · X(t) · Y(t):

> ode3 := diff(Z(t), t) = (b2 - X(t)) · Z(t):

```

```

> inits1 := [X(0) = .25, Y(0) = 1.32, Z(0) = 1.33]:
> inits2 := [X(0) = .25, Y(0) = 1.32, Z(0) = 2.83]:
> myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE:

> plot0 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =
[t, X], linecolor = red, myopts):

> plot1 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =
[t, X], linecolor = blue, myopts):

> plot2 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =
[t, Y], linecolor = red, myopts):

> plot3 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =
[t, Y], linecolor = blue, myopts):

> plot4 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =
[t, Z], linecolor = red, myopts):

> plot5 :=
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =
[t, Z], linecolor = blue, myopts):

> display(plot0, plot1, x1);
> display(plot2, plot3, y1);
> display(plot4, plot5, z1);

> PLOT1 :=
DEplot3d([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..250, [inits1], scene =
[X, Y, Z], stepsize = 0.05, linecolor = red);

> PLOT2 :=
DEplot3d([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..250, [inits2], scene =
[X, Y, Z], stepsize = 0.05, linecolor = blue);

> display(PLOT1, PLOT2);

```

**Program MAPLE 2016 untuk Simulasi Numerik Model Matematika
Predator-Prey dengan Kanibalisme Gambar 3.8 dan Gambar 3.9**

```
> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):  
> b1 := 2.5: b2 := 1.5: varepsilon := 0.02: beta := 5.2: sigma := 4.4:  
> DFE;  
> END;  
> x := b2;  
> y :=  $\frac{b_1 \cdot b_2}{\sigma + \beta \cdot b_2}$ ;  
> z :=  $1 - \frac{b_1 \cdot (1 + \varepsilon \cdot b_2)}{\sigma + \beta \cdot b_2}$ ;  
> x1 := plot(x, t = 0..250, color = green);  
> y1 := plot(y, t = 0..250, color = green);  
> z1 := plot(z, t = 0..250, color = green);  
> ode1 := diff(X(t), t) = -X(t) + Y(t) + varepsilon · X(t) · Y(t) + X(t) ·  
Z(t):  
> ode2 := diff(Y(t), t) = b1 · X(t) - sigma · Y(t) - beta · X(t) · Y(t):  
> ode3 := diff(Z(t), t) = (b2 - X(t)) · Z(t):  
> inits1 := [X(0) = 0.25, Y(0) = 1.32, Z(0) = 1.33]:  
> inits2 := [X(0) = 0.25, Y(0) = 1.5, Z(0) = 1.7]:  
> myopts := stepsize = 0.1, arrows = NONE:  
> plot0 :=  
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =  
[t, X], linecolor = red, myopts):  
> plot1 :=  
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits2], scene =  
[t, X], linecolor = blue, myopts):  
> plot2 :=  
DEplot([ode1, ode2, ode3], [X, Y, Z], t = 0..50, [inits1], scene =  
[t, Y], linecolor = red, myopts):
```

```
> plot3 :=  
  DEplot([ode1,ode2,ode3],[X,Y,Z],t = 0..50,[inits2],scene =  
  [t,Y],linecolor = blue,myopts):  
  
> plot4 :=  
  DEplot([ode1,ode2,ode3],[X,Y,Z],t = 0..50,[inits1],scene =  
  [t,Z],linecolor = red,myopts):  
  
> plot5 :=  
  DEplot([ode1,ode2,ode3],[X,Y,Z],t = 0..50,[inits2],scene =  
  [t,Z],linecolor = blue,myopts):  
  
> display(plot0,,x1);  
  
> display(plot1,x1);  
  
> display(plot2,y1);  
  
> display(plot3,y1);  
  
> display(plot4,z1);  
  
> display(plot5,z1);
```

Lampiran 3

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Ketergantungan dari Stabilitas Lokal pada Parameter β dan ε untuk Gambar 3.2 (a)

> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):

> e(1a) := plot $\left(\frac{\beta}{6}, \beta = 0..1\right);$

> e1(1a) := plot $\left(\frac{\beta}{1} - \frac{(1+\beta \cdot 25) \cdot (6-1)}{1 \cdot 6 \cdot 25}, \beta = 0..1\right);$

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Ketergantungan dari Stabilitas Lokal pada Parameter β dan ε untuk Gambar 3.2 (b)

> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):

> e(1b) := plot $\left(\frac{\beta}{0.1}, \beta = 0..1\right);$

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Ketergantungan dari Stabilitas Lokal pada Parameter β dan ε untuk Gambar 3.3 (a) dan 3.3 (b)

> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):

> e1(2a) := plot $\left(\frac{\beta}{1} - \frac{(1+\beta \cdot 25) \cdot (6-1)}{1 \cdot 6 \cdot 25}, \beta = 0..1\right);$

> e1(2b) := plot $\left(\frac{\beta}{2} - \frac{(2+\beta \cdot 25) \cdot (2-2)}{2 \cdot 2 \cdot 25}, \beta = 0..1\right);$

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Ketergantungan dari Stabilitas Lokal pada Parameter β dan ε untuk Gambar 3.4 (c-f) Bagian ε_1

> restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):

> e1(2c) := plot $\left(\frac{\beta}{6} - \frac{(6+\beta \cdot 10) \cdot (1-6)}{6 \cdot 1 \cdot 10}, \beta = 0..1\right);$

> e1(2d) := plot $\left(\frac{\beta}{6} - \frac{(6+\beta \cdot 120) \cdot (0.1-6)}{6 \cdot 0.1 \cdot 120}, \beta = 0..1\right);$

> e1(2e) := plot $\left(\frac{\beta}{1.4} - \frac{(1.4+\beta \cdot 35) \cdot (0.1-1.4)}{1.4 \cdot 0.1 \cdot 35}, \beta = 0..1\right);$

> e1(2f) := plot $\left(\frac{\beta}{1.2} - \frac{(1.2+\beta \cdot 60) \cdot (0.1-1.2)}{1.2 \cdot 0.1 \cdot 60}, \beta = 0..1\right);$

Program MAPLE 2016 untuk Menentukan Ketergantungan dari Stabilitas Lokal pada Parameter β dan ε untuk Gambar 3.4 (c-f) Bagian ε_2

> *restart: with(plots): with(DEtools): with(linalg):*

> $e2(2c) := \text{plot} \left(\frac{1}{6} \cdot \left(\beta + \frac{(6-1) \cdot (6+\beta \cdot 10)}{6 \cdot (6+\beta \cdot 10)^2 + 1 \cdot (6+10)} \right), \beta = 0..1 \right);$

> $e2(2d) := \text{plot} \left(\frac{1}{6} \cdot \left(\beta + \frac{(6-0.1) \cdot (6+\beta \cdot 120)}{6 \cdot (6+\beta \cdot 120)^2 + 0.1 \cdot (6+120)} \right), \beta = 0..1 \right);$

> $e2(2e) := \text{plot} \left(\frac{1}{1.4} \cdot \left(\beta + \frac{(1.4-0.1) \cdot (1.4+\beta \cdot 35)}{1.4 \cdot (1.4+\beta \cdot 35)^2 + 0.1 \cdot (1.4+35)} \right), \beta = 0..1 \right);$

> $e2(2f) := \text{plot} \left(\frac{1}{1.2} \cdot \left(\beta + \frac{(1.2-0.1) \cdot (1.2+\beta \cdot 60)}{1.2 \cdot (1.2+\beta \cdot 60)^2 + 0.1 \cdot (1.2+60)} \right), \beta = 0..1 \right);$

RIWAYAT HIDUP



Dwi Safitri, lahir di Kabupaten Pasuruan pada 27 Januari 1999, bisa dipanggil Fifi. Bertempat tinggal di Desa Baujeng, Kecamatan Beji, Kabupaten Pasuruan. Anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Isya Ansori dan Ibu Sumarlik.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu pendidikan di TK Al Khodijah 41 (2003-2005), sekolah dasar ditempuh di MI Tarbiyatus Shibyan (2005-2011). Setelah itu, melanjutkan ke jenjang SMP yaitu di SMP Negeri 2 Beji (2011-2014). Kemudian dilanjutkan ke jenjang SMA yaitu di MAN Bangil yang sekarang berganti menjadi MAN 1 Pasuruan (2014-2017). Pada tahun 2017 menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah menjadi asisten praktikum pemodelan matematika serta mengikuti beberapa komunitas dibawah naungan program studi matematika yaitu Mathematics English Club (MEC) dan Mathematics Arabic Club (MAC).



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dwi Safitri
NIM : 17610015
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Predator-prey* dengan Faktor Kanibalisme Pada *Predator*
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	26 Februari 2021	Konsultasi BAB I	1.
2	04 Maret 2021	Konsultasi Agama BAB I	2.
3	17 Maret 2021	Konsultasi BAB II	3.
4	29 Maret 2021	Revisi Agama BAB I	4.
5	27 April 2021	Revisi BAB II	5.
6	30 April 2021	Konsultasi Agama BAB II	6.
7	01 Mei 2021	Revisi Agama BAB II	7.
8	04 Mei 2021	ACC Draft Seminar Proposal	8.
9	04 Mei 2021	ACC Draft Seminar Proposal	9.
10	14 Juni 2021	Konsultasi BAB III	10.
11	05 Juni 2021	Konsultasi Agama BAB III	11.
12	19 Agustus 2021	Revisi BAB III	12.
13	10 September 2021	Revisi Agama BAB III	13.
14	24 September 2021	Konsultasi BAB IV & Abstrak	14.
15	08 Oktober 2021	ACC Keseluruhan Skripsi	15.
16	08 Oktober 2021	ACC Keseluruhan Skripsi	16.

Malang, 25 November 2021

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

