STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM STRUKTUR RUANG WAKTU SCHWARZSCHILD

SKRIPSI

Oleh:
IDA HERNANI
NIM 15640056

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM STRUKTUR RUANG WAKTU SCHWARZSCHILD

SKRIPSI

Diajukan kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IDA HERNANI
NIM. 15640056

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM
STRUKTUR RUANG WAKTU
SCHWARZSCHILD

SKRIPSI

Oleh:
Ida Hernani
NIM 15640056

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada Tanggal, 21 September 2021

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Drs. Abdul Basid, M. Si	Ahmad Abtokhi, M.Pd.
NIP. 19650504 199003 1 003	NIP. 19671003 200312 1 004

Menyetujui,
Ketua Jurusan Fisika

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM
STRUKTUR RUANG WAKTU
SCHWARZSCHILD

SKRIPSI

Oleh:
Ida Hernani
NIM. 15640056

Telah diperiksa dan disahkan
Pada tanggal, 28 Oktober 2021

Penguji Utama	Dr. Erna Hastuti, M. Si NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji	Muhammad Taufiqi, M. Si	
Sekretaris Peguji	Drs. Abdul Basid, M. Si NIP. 19650504 199003 1 003	
Anggota Penguji	Ahmad Abtokhi, M.Pd NIP. 19671003 200312 1 004	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	:	Ida Hernani
NIM	:	15640056
Jurusan	:	Fisika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Penelitian	:	Studi Persamaan Klein-Gordon dalam Struktur Ruang Waktu Schwarzschild

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan, maka saya berssedia untuk mempertanggungjawabkan serta menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Malang, 30 September 2021
Yang membuat pernyataan

METERAI
TEMPEL

Ida Hernani
NIM. 15640056

MOTTO

be the change you want to see in the world

Jadilah yang terbaik dari yang terbaik

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan rasa syukur sedalam-dalamnya kepada Allah SWT.
Penulis persembahkan maha karya tulis ini teruntuk kedua orang tua tercinta,

"Bapak Fadhillah, S.Pd dan Ibu Noor Laila"

Terimakasih atas do'a, restu, dan dukungan yang tiada hentinya

, I wanna thank me, I wanna thank me for believing in me, I wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having no days off, I wanna thank me for never quitting, for just being me at all times.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji syukur kepada tuhanku ialah Allah SWT. Tuhan pencipta alam semesta serta seisinya, atas segala nikmat dan anugrah-Nya yang telah diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi besar Muhammad SAW beserta segenap sahabat dan keluarganya serta para pengikutnya yang setia hingga hari kiamat nanti. Akhirnya atas rahmat-Nya serta dengan izin-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis bersyukur atas rahmat-Nya, yang telah diberikan kepada penulis untuk menempuh pendidikan dijenjang universitas, khususnya program studi Fisika.

Skripsi dengan judul "Studi Persamaan Klein-Gordon dalam Struktur Ruang Waktu Schwarzschild" ini tidak lain adalah karya kecil dari penulis, yang mungkin nanti dijadikan sumber perangsang tumbuhnya ilmuwan-ilmuwan baru. Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah membimbing, memberi arahan, bantuan, dan saran dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih sebanyak-banyaknya kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terimakasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Muhammad Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Erna Hastuti, M.Si dan Muhammad Taufiqi, M.Si., selaku Penguji Utama dan Ketua Penguji skripsi ini.
5. Drs. Abdul Basid, M.Si dan Ahmad Abthoki, M.Pd., selaku Sekretaris Penguji dan Anggota Penguji skripsi ini.
6. Erika Rani, M.Si dan Arista Romadani, M.Sc., selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
7. Bapak Fadhillah, S.Pd dan Ibu Noor Laila serta kakak adek di rumah yang selalu berdoa dan memberi dukungan.

8. Sahabat-sahabat fisika seperjuangan angkatan 2015, terkhususnya Lala, Risma, Rifa, Septi, Maratus, Rahmad, dan Luluk yang selalu menemani dan memberi semangat.
9. Semua pihak yang membantu secara langsung maupun tidak langsung yang tidak bisa disebutkan satu persatu demi kesuksesan penyelesaian skripsi ini.
10. *Last but not least, I wanna thank me, I wanna thank me for believing in me, i wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having no days off, I wanna thank me for never quitting, for just being me at all times.*

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak terdapat kesalahan, kekurangan, dan kelemahan untuk itulah penulis mohon maaf. Penulis berharap sebuah karya sederhana ini dapat memberikan sumbangan bagi ilmu pengetahuan nasional terlebih internasional. Penulis juga mohon saran dan kritik untuk penyempurnaan skripsi ini.

Malang, 30 September 2021

Ida Hernani

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR LAMBANG

δS	:	Prinsip variasi suatu aksi
Γ_{ji}^{k}	:	Simbol Cristoffel
A_{μ}	:	Potensial vektor empat
C	:	Kelajuan cahaya
d/dx	:	Diferensial
ds^2	:	Elemen garis
E_k	:	Energi kinetik
E	:	Energi partikel relativistik
$f(R)$	:	Fungsi skalar kelengkungan Ricci
G	:	Tetapan gravitasi universal
g	:	Tensor metrik
g^{ij}	:	Tensor metrik kontravarian
g_{ij}	:	Tensor metrik kovarian
$G_{\mu\nu}$	:	Tensor Einstein
h	:	Tetapan Plank ($6{,}63\ \times 10^{-34}$J.s)
$\mathcal{L}$	:	Rapat Lagrangan
λ	:	Lambda, panjang gelombang
m	:	Massa lubang hitam
n	:	Indeks untuk level energi
∇	:	Nabla, koneksi
p	:	Momentum partikel
p	:	Operator momentum partikel
$P(x,t)$	:	Rapat probabilitas partikel
R	:	Skalar kelengkungan Ricci
$R_{\mu\nu}$	:	Tensor Ricci
r	:	Jari-jari lubang hitam
$T_{\mu\nu}$	:	Tensor kovarian energi momentum
∂	:	Differensial parsial
$\Psi(x,t)$	:	Capital Psi, fungsi gelombang bergantung ruang dan waktu

ABSTRAK

Hernani, Ida. 2021. **Studi Persamaan Klein-Gordon dalam Struktur Ruang Waktu Schwarzschild.** Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Ahmad Abthoki, M.Pd.

Kata Kunci: Klein-Gordon, Medan Gravitasi, Persamaan Schwarzschild.

Relativitas Umum mengubah pandangan bahwa ruang-waktu bukanlah kuantitas absolut melainkan dapat melengkung oleh kehadiran massa dan energi masif. Hubungan antara massa dan energi terhadap struktur ruang-waktu tersebut ditunjukkan oleh persamaan medan Einstein. Dalam penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan persamaan Klein-Gordon kehadiran grativasi dalam ruang-waktu melengkung. Hal tersebut dilakukan dengan memuat lagrangian $\sqrt{-g},$ dan $\eta^{\mu\nu}$ kemudian diganti $g^{\mu\nu}$. Penelitian kemudian dilanjutkan dengan mencari nilai elemen garis ds^2 atau metrik yang menunjukkan perpaduan medan skalar dan medan gravitasi. Pada elemen garis tersebut ada pengaruh yang sangat besar selain massa, yaitu kehadiran medan skalar. Dengan kehadiran suku tambahan pada metrik tersebut menunjukkan metriks tidak menuju singularitas seperti pada solusi Schwarzschild.

ABSTRACT

Hernani, Ida. 2021. **Study of the Klein-Gordon Equation in Structure Schwarzschild SpaceTime.** Thesis. Departement of Physics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (1) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Ahmad Abthoki, M.Pd.

Kata Kunci: Klein-Gordon, Gravitational Field, Schwarzschild Equation.

General Relativity changes the view that space-time is not an absolute quantity but can be warped by the presence of massive mass and energy. The relationship between mass and energy to the structure of space time is sown by Einstein's field equations. This study aims obtain the Klein-Gordon equation for the presence of gravity in curved space-time. This is done by loading the lagrangian $\sqrt{-g}$ and $\eta^{\mu\nu}$. Then replaced with $g^{\mu\nu}$. The research is then continued by finding the value of the line element ds^2 or metric which shows a combination of scalar and gravitational fields. On the line element there is a very large influence besides mass, namely the presence of a scalar field. The presence of additional terms in the metric shows that the metric does not go to a singularity like in the Schwarzschild solution.

.

المستخلص

هيرناني، عدة. ٢٠٢١. دراسة معادلة كلاين-جوردون في معادلة الزمكان شوارزشيلد. البحث. قسم الفيزياء،كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم بمالانج.
المشرف: (١) عبد البسيط الماجستير (٢) أحمد أبطاخي الماجستير.

الكلمات المفتاحية : كلاين-جوردون، مجال الجاذبية ، معادلة شوارزشيلد

تغير النسبية العامة وجهة النظر القائلة بأن الزمكان ليس الكمية المطلقة ولكن يمكن أن يتشوه بوجود كتلة هائلة وطاقة جسيمة. تظهر العلاقة بين الكتلة والطاقة ببنية الزمكان من خلال معادلات المجال لآينشتاين. يهدف هذا البحث إلى الحصول على معادلة كلاين-جوردون لوجود الجاذبية في الزمكان المنحني. يتم ذلك عن طريق صنع لانجلاريان $\sqrt{-g}$ و $\eta^{\mu\nu}$ ثم نقل بـ $g^{\mu\nu}$. ثم يستمر البحث من خلال البحث عن قيم العناصر الخطية ds^2 أو المترية التي تُظهر مجموعة من المجال العددية والمجال الجاذبية. يوجد على عنصر الخط تأثير كبير جدًا إلى جانب الكتلة ، وهو وجود مجال عددي. يشير وجود المصطلحات الإضافية في المقياس إلى أن المقياس لا ينتقل إلى حالة فردية كما في حل شوارزشيلد.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori Relativitas Umum (TRU) mulai diperkenalkan pada tahun 1915 oleh Einstein yang secara fisis menyatakan bahwa medan gravitasi merupakan suatu konsekuensi dari geometri ruang-waktu, dan sebaliknya pula bahwa bentuk geometri ruang-waktu akan menentukan distribusi materi (*gravitation field source)*. Teori ini menggambarkan gravitasi sebagai struktur geometri dalam ruang-waktu (kelengkungan). Ruang-waktu dalam Teori Relativitas Umum diwakili oleh keragaman ruang-waktu dimensi u dan geometrinya ditentukan oleh metrik Riemann. Konsep Teori Relativitas Umum dapat ditemui jika cahaya bintang melewati suatu benda massif seperti matahari, maka cahaya bintang tersebut akan dibelokkan di sekitar matahari. Hal ini terjadi bukan karena adanya gaya antara dua benda melainkan ruang-waktu di sekitar matahari dapat melengkung (Anugraha, 2011).

Setahun setelahnya, ilmuan fisika Karl Schwarzschild mulai memperkenalkan salah satu solusi eksak pertama dari persamaan medan Einstein dalam vakum simetri bola. Lalu solusi tersebut diberi nama solusi Schwarzschild. Solusi yang mampu menggambarkan geometri ruang-waktu di sekitar massa statik yang sebagai pusat gravitasi. Dalam objek astrofisika, solusi ini sukses meramalkan kehadiran eksistensi suatu medan gravitasi sangat kuat, hal ini lebih dipopulerkan dengan istilah Lubang Hitam.

Istilah lubang hitam (*black hole*) mulai terdengar pada abad ke-18 pertama kali oleh John Wheeler, seorang fisikawan asal Amerika. Awalnya bintang yang ada di ruang angkasa dapat terlihat karena memiliki cahaya, namun lama kelamaan bintang-bintang tersebut akan meredup atau bahkan kehilangan cahayanya. Hal ini terjadi pada bintang yang tidak memiliki volume dengan medan magnet yang sangat kuat sehingga dapat hancur dan menjadi lubang hitam. Sebagaimana Allah SWT berfirman dalam Surat Al-Mursalat Ayat 8 :

فَإِذَا ٱلنُّجُومُ طُمِسَتۡ ﴿٨﴾

Artinya : *"Maka apabila bintang-bintang telah dihapuskan"*

Peristiwa bintang runtuh menyebabkan dampak yang ditimbulkan, seperti lekukan-lekukan di luar angkasa. Dengan massa yang cukup besar sehingga bintang-bintang membentuk lubang berwarna hitam dan ruang angkasa menjadi tidak datar lagi. Itulah mengapa bintang-bintang yang runtuh atau kehabisan bahan bakarnya disebut Lubang Hitam (Mulyono, 2006). Peristiwa tersebut sudah nyata adanya seperti yang dijelaskan dalam surat Al-Waaqi'ah ayat 75-76, Allah SWT bersumpah:

۞ فَلَآ أُقۡسِمُ بِمَوَٰقِعِ ٱلنُّجُومِ ﴿٧٥﴾ وَإِنَّهُۥ لَقَسَمٞ لَّوۡ تَعۡلَمُونَ عَظِيمٌ ﴿٧٦﴾

Artinya: *"Maka aku bersumpah dengan tempat beredarnya bintang-bintang. Sesungguhnya sumpah itu adalah sumpah yang besar kalau kamu mengetahuinya"*

Sumpah itu berkaitan dengan akhir kehidupan bintang-bintang. Dengan tarikan gravitasi yang sangat kuat sehingga tidak dapat dilihat keberadaannya menggunakan teropong. Gravitasi dapat menarik atau menangkap benda-benda disekitarnya, contohnya partikel-partikel tercepat sekalipun seperti *foton* (partikel cahaya). Misalnya, cahaya pada lubang hitam tidak dapat meloloskan dirinya dikarenakan dengan massa kerapatan yang tinggi di sebuah ruang yang kecil.

Persamaan Medan Einstein membentuk persamaan differensial parsial tidak linier (non-linier) sehingga muncullah solusi eksak maupun non eksak. Solusi yang mampu menggambarkan geometri ruang-waktu di sekitar massa statik yang sebagai pusat gravitasi. Solusi tersebut membentuk ruang metrik 4 dimensi berupa 3 dimensi ruang polar (r, θ, ϕ) dan satu dimensi koordinat waktu (t) akan membentuk simetri bola.

Akan tetapi, solusi Schwarzschild menyisakan beberapa kajian lanjut seperti geometri ruang-waktu yang menjadi tak terhingga mulai dari radius Schwarzschild (r_S) yang merupakan batas horizon peristiwa lubang hitam sampai pada pusat gravitasi atau yang lebih dikenal sebagai sigularitas lubang hitam. Biswas (2008) melakukan transformasi koordinat tertentu singularitas pada radius Schwarzschild $(r = r_S)$ tersebut dapat dihilangkan. Kemudian menghubungkan antara koordinat r dan koordinat t radial tak berdimensi u dan koordinat waktu tak berdimensi v sehingga menghasilkan metrik geometri Schwarzschild dalam koordinat Kruskal-Szekers.

Kemajuan pengamatan lubang hitam dalam spektrum gravitasi dan elektromagnetik menjadi kajian teoritis yang sangat menarik. Hal lain yang tak kalah menarik yaitu perpaduan skalar dan medan gravitasi. Menurut Konopla (2018) menyatakan setiap metrik lubang hitam yang simetri maupun asimetri dapat diwakilkan dengan istilah dari sejumlah parameter yang dapat diperbaiki melalui pengamatan di kedua wilayah. Pertama, dekat dengan horizon (dimana gravitasi sangat kuat) yaitu dimana segala peristiwa yang terjadi di dalam *event horizon* sehingga tidak dapat diamati dari luar dan kedua, jauh dengan horizon (dimana ekspansi pasca-newton tersirat). Karna nilai yang benar-benar umum adalah sejumlah besar parameter yang harus ditetapkan dengan data eksperimen. Eksperimen ini dikembangkan oleh Weyl pada tahun 1917 dengan memberikan informasi metriks dengan mengubah parameter r (jari-jari Schwarzschild).

Penelitian selanjutnya dikembangkan Banyal (2016) dilakukan pemisahan variabel dengan persamaan Klein-Gordon, penelitiannya merumuskan persamaan Klein-Gordon menjadi salah satu solusi eksak yang merupakan perpaduan medan skalar dan medan gravitasi. Dalam penelitian ini penulis terdorong utuk mengkaji ulang solusi persamaan Einstein dengan tensor energi-momentum yang mendeskripsikan medan skalar, sehingga memperoleh formulasi yang lebih tepat. Persamaan Klein-Gordon dalam struktur ruang-waktu Schwarzschild sangat penting dipelajari dalam bidang fisika kuantum maupun Astrofisika.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan-permasalahan yang muncul mengenai hal-hal dari latar belakang di atas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan Klein-Gordon kehadiran grativasi dalam ruang-waktu melengkung?
2. Bagaimana metrik interaksi medan skalar dan medan gravitasi bergantung waktu dalam geometri ruang-waktu Schwarzchild?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan-permasalahan di atas, tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui persamaan Klein-Gordon kehadiran grativasi dalam ruang-waktu melengkung.

2. Untuk mengetahui metrik interaksi medan skalar dan medan gravitasi bergantung waktu dalam geometri ruang-waktu Schwarzschild.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji secara teoritik mengenai persamaan Klein-Gordon dalam ruang waktu Schwarzschild.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini:

1. Hasil penelitian secara teoritikal ini diharapkan dapat bermanfaat kepada masyarakat umum untuk memahami teori-teori umum pada kajian struktur ruang-waktu lubang hitam atau fenomena-fenomena kosmologi lainnya.
2. Sebagai referensi dasar kepada pihak-pihak ang ingin melakukan penelitian serupa atau penelitian lanjutan, khususnya bidang fisika teori

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Relativitas Umum

Isaac Newton memperkenalkan percobaannya melalui sebuah persamaan antara dua buah benda yang saling tarik-menarik. Benda tersebut memiliki massa berbeda m_1 dan m_2 yang terpisah jarak sejauh r dan G sebagai ketetapan gravitasi universal.

$$\vec{F} = -(Gm_1 m_2)(\vec{r}/r^3) \tag{2.1}$$

Hukum ini kemudian lebih dikenal dengan sebutan Hukum Gravitasi Newton. Hukum gravitasi adalah hukum yang yang menjelaskan tentang gerak benda-benda yang dipengaruh karena adanya interaksi gravitasi antara benda dengan ketelitian tinggi. Keakuratan untuk menganalisis dinamika gerak benda langit adalah bagian hitungan dari hukum ini. Bose pada tahun 1980 menulis presesi orbit plane di sekitar matahari (sebagai benda masif), pembelokan cahaya ketika melewati benda masif (seperti cahaya bintang yang lewat di sekitar matahari) dan sebagainya, tak dapat diterangkan menggunakan Hukum Gravitasi Newton. Lawden pada penelitiannya ditahun 1982 juga berpendapat bahwa Hukum Gravitasi Newton hanya berlaku pada medan gravitasi lemah dan tidak konsisten dengan Teori Relativitas Khusus. Menurut Teori Relativitas Khusus, jika ada benda yang bergerak maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah atau efek dari gravitasi merambat dengan kelajuan tak terhingga. Sehingga dapat disimpulkan bahwa Hukum Gravitasi Newton tidak sejalan dengan Teori Relativitas Khusus.

Pada tahun 1915, Einstein menghasilkan suatu teori yang dinamakan dengan Teori Relativitas Umum (TRU). Teori yang menggambarkan gravitasi sebagai struktur geometri dalam ruang-waktu (kelengkungan). Einstein mengemukakan *Gravitation is not force* atau gravitasi bukanlah gaya melainkan efek dari kelengkungan ruang-waktu. Hal ini dikarenakan adanya penyebaran massa dan energi di dalam ruang-waktu tersebut. Dua asas yang terdapat dalam Teori Relativitas Umum, yaitu asas kesetaraan (*principle of equivalence*) dan asas kovariansi umum *(general covariance)* (Weinberg, 1972).

Asas kesetaraan (*principle of equivalence*) yang dikemukakan oleh Einstein berbunyi *"tidak ada percobaan yang dapat dilakukan dalam daerah kecil (lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara"*. Hal ini dimisalkan jika dua benda terpisah jarak sejauh r didekat permukaan bumi maka setiap benda yang bergerak disepanjang lintasan menuju pusat bumi, antara kedua benda tersebut makin lama atau makin dekat (Krane, 1992).

Massa inersia dan massa gravitasi menjadi implikasi dari asas kesetaraan dengan menggantikan efek dari gravitasi yang muncul dengan menggunakan kerangka acuan dipercepat. Menurut mekanika Newton, benda yang bermassa m jatuh di dalam medan gravitasi dengan percepatan gravitasi sebesar g dan koordinat (y, t) persamaan gerak benda tersebut adalah (Wospakrik, 1987):

$$m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = m_G g \tag{2.2}$$

Konsekuensi dari medan gravitasi yaitu semua benda yang berada di dalamnya akan merasakan percepatan yang sama serta tidak bergantung dari ukuran maupun massanya. Melalui persamaan transformasi:

$$y' = y - \frac{1}{2}gt^2 \text{ dan } t' = t \tag{2.3}$$

Pada koordinat $(y^{'}, t')$ persamaan gerak menjadi,

$$m_1 \frac{d^2y'}{dt'^2} + m_1 g = m_G g \tag{2.4}$$

Massa inersial m_1 sama dengan massa gravitasi m_G maka,

$$m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \tag{2.5}$$

Kerangka $(y,\ t)$ adalah kerangka dipercepat dengan percepatan sebesar g terhadap kerangka acuan inersial $(y^{'}, t')$. Kerangka acuan $(y^{'}, t')$ untuk menghilangkan efek gravitasi pada kerangka $(y,\ t)$. Dapat disimpulkan bahwa gerak pada kerangka inersial dalam daerah tanpa medan gravitasi sama dengan hukum gerak pada kerangka jatuh bebas di dalam medan gravitasi (non-inersial). Medan gravitasi dalam kerangka inersial dakan hilang ketika percepatan kerangkanya dihilangkan, sedangkan medan gravitasi dalam kerangka non-inersial tidak dapat dihilangkan oleh kerangka acuan manapun. Sehingga asas kovariansi Teori Relativitas Khusus berlaku pada kerangka inersial maupun non-inersial yang berbunyi, *"Hukum alam harus memiliki bentuk yang tetap terhadap sebarang pemilihan transformasi koordinat"* (Anugraha, 2011).

Teori Relativitas Umum meramalkan cahaya bintang yang melewati sebuah benda langit yang masif, maka cahaya bintang tersebut akan dibelokkan. Gravitasi bumi bukan menjadi pengaruh membeloknya cahaya bintang melainkan ruang-waktu di sekitar matahari tersebut melengkung. Perkembangan dalam dunia relativitas menghasilkan Teori Relativitas Umum yang mampu memberikan pandangan yang baru mengenai konsep ruang-waktu. Konsep yang menjelaskan ruang-waktu dapat melengkung jika didalamnya terdapat materi masif.

2.2 Teori Relativitas Umum dalam Tinjauan Al-Qur’an

Dalam menciptakan segala sesuatu dimuka bumi dan seluruh alam semesta dengan begitu sempurna, sesuai dengan penempatan dan kegunaannya. Hal ini menjadi bentuk kebesaran Allah SWT dalam menciptakan segala sesuatu. Baik matahari, bulan, begitupun dengan bintang. Matahari sebagai sumber cahaya di pagi hari, bulan sebagai satelit bumi serta penerang setelah tenggelamnya matahari, dan bintang sebagai petunjuk waktu, musim, dan arah di malam hari. Dalam QS. An-Nur ayat 35 juga menjelaskan kebesaran Allah dalam menciptakan bintang sebagai berikut:

۞ ٱللَّهُ نُورُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِۚ مَثَلُ نُورِهِۦ كَمِشۡكَوٰةٖ فِيهَا مِصۡبَاحٌۖ ٱلۡمِصۡبَاحُ فِي
زُجَاجَةٍۖ ٱلزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوۡكَبٞ دُرِّيّٞ يُوقَدُ مِن شَجَرَةٖ مُّبَٰرَكَةٖ زَيۡتُونَةٖ لَّا شَرۡقِيَّةٖ وَلَا
غَرۡبِيَّةٖ يَكَادُ زَيۡتُهَا يُضِيٓءُ وَلَوۡ لَمۡ تَمۡسَسۡهُ نَارٞۚ نُّورٌ عَلَىٰ نُورٖۗ يَهۡدِي ٱللَّهُ لِنُورِهِۦ مَن يَشَآءُۚ
وَيَضۡرِبُ ٱللَّهُ ٱلۡأَمۡثَٰلَ لِلنَّاسِۗ وَٱللَّهُ بِكُلِّ شَيۡءٍ عَلِيمٞ ٣٥

Artinya : *“Allah (Pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. Perumpamaan cahaya Allah adalah seperti sebuah lubang yang tak tembus, yang didalamnya ada pelita besar. Pelita itu di dalam kaca (dan) kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur (sesuatu) yang tidak pula di sebelah barat (nya), yang minyak (saja) hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. Cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis), Allah membimbing kepada cahaya-Nya siapa yang dia kehendaki, dan Allah memperbuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia, dan Allah maha mengetahui segala sesuatu.”*

Teori Relativitas Umum (TRU) banyak mengkaji fenomena-fenomena alam, salah satunya lubang hitam. Lubang hitam adalah bentuk bintang yang mulai meredup dikarenakan cahayanya nampak habis. Menurut Shihab, baik di darat manupun di laut, bintang merupakan petunjuk arah jalan manusia. Dengan hadirnya bintang (terutama bintang yang tidak bergerak) seseorang yang hendak berpergian dapat berpatokan dengan bintang sebagai penentu arah ke tempat yang ingin dituju. Hal ini sudah lebih dulu dibahas pada QS. Al-An’am ayat 97:

وَهُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ لَكُمُ ٱلنُّجُومَ لِتَهۡتَدُواْ بِهَا فِى ظُلُمَٰتِ ٱلۡبَرِّ وَٱلۡبَحۡرِۗ قَدۡ فَصَّلۡنَا ٱلۡأٓيَٰتِ لِقَوۡمٖ يَعۡلَمُونَ ٩٧

Artinya : *“Dan dialah yang menjadikan bintang*-*bintang bagimu, agar kamu menjadikan petunjuk dalam kegelapan di darat dan di laut. Sesungguhnya Kami telah menjelaskan tanda-tanda kebesaran (Kami) kepada orang-orang yang mengetahui”*

Bintang yang sudah kehabisan massanya serta cahayanya maka bintang tersebut sudah tidak dapat sebagai petunjuk arah lagi. Bintang tersebut memiliki gravitasi yang tinggi sehingga tidak dapat bergerak lagi dan tak nampak. Keberadaannya dapat diketahui karena mampu menarik benda-benda yang ada disekitarnya. Seperti sifat bintang yang memiliki gravitasi tinggi sehingga mampu menarik benda disekitarnya yang pernah dibahas di QS. At Takwir ayat 15-16 yang berbunyi:

فَلَآ أُقۡسِمُ بِٱلۡخُنَّسِ ١٥ ٱلۡجَوَارِ ٱلۡكُنَّسِ ١٦

Artinya : *“Sungguh, aku bersumpah dengan bintang*-*bintang. Yang beredar dan terbenam”*

Bintang dalam al-Quran dikenal dengan beberapa istilah تروج, نجم , dan كنكة . Ketiga Istilah tersebut digunakan secara bergantian untuk menggambarkan obyek yang berbeda. Kata ***kaukab*** (كنكة) digunakan untuk menggambarkan bintang sebagai benda langit yang memiliki cahaya, namun sebagai obyek perumpamaan. Dari sini dapat dipahami bahwa kata ***kaukab*** (كنكة) dalam Al-Quran digunakan untuk menggambarkan bintang sebagai benda langit yang berada dalam alam khayalan (angan-angan) atau sesuatu yang berada dalam dunia ide. Jadi kata ***kaukab*** (كنكة) bukan untuk menunjukkan bintang yang ada dalam dunia realitas, tetapi menunjuk pada bintang yang ada dalam ide QS. At Takwir ayat 2:

وَإِذَا ٱلنُّجُومُ ٱنكَدَرَتۡ ۝٢

Artinya : *"Dan apabila bintang-bintang berjatuhan"*

Berdasarkan ungkapan Hasan pada tahun 2015, beberapa ayat kata ***nujūm*** (نجم) memiliki makna bintang dalam arti yang hakiki. Ada yang untuk menggambarkan bintang sebagai benda langit untuk obyek sumpah (qasam). Pernyataan ini diperkuat oleh ayat diatas yang menggambarkan ciri hari kiamat dengan berjatuhannya bintang.

2.3 Ruang Datar dan Ruang Lengkung

Secara geometri, ruang datar (ruang euclid) itu dimana terdapat titik, garis dan permukaan. Sedangkan ruang lengkung (ruang Riemann) itu dimana geometri tidak lagi berfungsional sehingga Semua benda yang memiliki massa dapat melengkungkan ruang. Kuadrat jarak pada dua titik $A(x, y, z)$ dan titik $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ yang saling berdekatan dalam tiga dimensi adalah:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (2.6)$$

Persamaan di atas menggunakan koordinat kartesian. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi koordinat silinder. Dengan melalui transformasi, $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, $z = z$. Sehingga kuadrat jaraknya menjadi:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \qquad (2.7)$$

Ruang tiga dimensi pada persamaan 1 dinamakan ruang *Euclid* atau kadang disebut dengan Ruang Datar. Contoh bentuk ruang datar satu dimensi (dx^2) atau dua dimensi $(dx^2 + dy^2)$ masing-masing adalah garis lurus dan bidang datar. Sedangkan permukaan bola, ellipsoida, dan permukaan sadel kuda merupakan contoh ruang lengkung dua dimensi.

Ruang-waktu Minkowski terdiri dari ruang datar empat dimensi (3 dimensi ruang berkoordinat x, y, z dan satu dimensi waktu berkoordinat t) dengan invarian kuadrat elemen garis. Yang mana setiap ruang-waktu Minkowski menggambarkan peristiwa masa, masa lalu dan masa sekarang. Bentuk ruang-waktu Minkowski adalah:

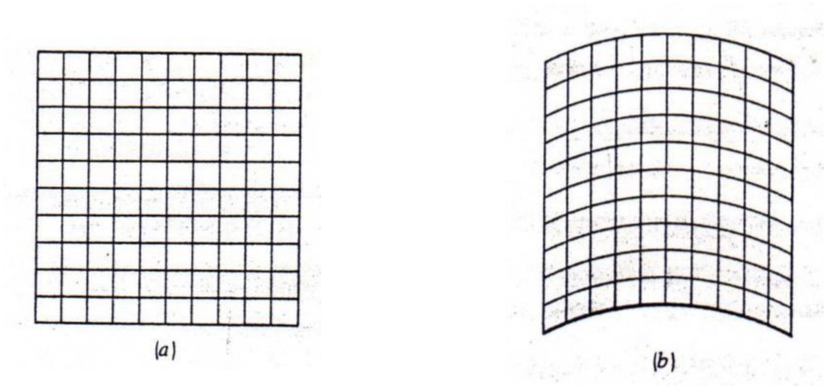
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (2.8)$$

Sedangkan pada ruang lengkung empat dimensi dinamakan ruang-waktu Schwarzschild dengan kuadrat elemen garis berbentuk:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta \, d\phi^2\right) \qquad (2.9)$$

Anugraha (2014) membedakan antara ruang Riemann (ruang lengkung) dan ruang Euclid (Ruang datar) dalam konsekuensi kelengkungan ruang yaitu:

1. Jumlah sudut dalam segitiga degan sisi-sisi segitiga merupakan penghubung terrpendek antara titik sudutnya tidak sama dengan 180^{o}.
2. Perbandingan antara keliling dengan diameter $\neq \pi$.
3. Garis penghubung terpendek antara dua titik tidak berbentuk garis lurus melainkan garis lengkung.
4. Dua garis sejajar lokal dapat terpotong.
5. Penggambaran ruang lengkung di dalam ruang datar memerlukan satu dimensi.



Gambar 2.1 Ruang Datar (Kiri) dan Ruang Lengkung (Kanan)
(Anugraha, 2014)

2.4 Aksi Hilbert Einstein

Berikut ini persamaan Einstein atau persamaan medan gravitasi yang diperoleh dari prinsip variasi dalam kondisi vakum sebagai berikut:

$$\delta S = \delta \int d\Omega \sqrt{-g}\mathcal{L} = 0 \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) digunakan untuk menurunkan persamaan-persamaan partikel dan persamaan medan. Dengan $\sqrt{-g}d\Omega$ merupakan elemen volum invarian dan $\mathcal{L}$ sebagai rapat Lagrangan. Alih ragam koordinat:

$$\overline{x}^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha} = x^{\alpha}(\overline{x}^{\alpha}) \tag{2.11}$$

Dengan $\overline{x}^{\alpha}$ sebagai koordinat lokal awal dan J sebagai determinan alih-ragam Jacobi.

$$d\Omega = \mathrm{J} d\bar{\Omega}, \quad J = det\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}}\right) \tag{2.12}$$

Jika diketahui juga

$$\eta_{\alpha\beta} = diag(-1{,}1{,}1{,}1) \tag{2.13}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial \overline{x}^{\beta}} g_{\mu\upsilon} \tag{2.14}$$

Agar mendapatkan nilai $\eta = -1 = J^2 g$, oleh karena itu

$$d\Omega = \frac{d\Omega}{J} = \sqrt{-g} d\Omega \tag{2.15}$$

Karena persamaan Euler-Lagrange diturunkan dari prinsip variasi menjadi orde dua, maka Lagrangan harus terbentuk kuadrat pada turunan orde pertama terhadap $g_{\mu\upsilon}$. Turunan orde pertama berisi simbol Christoffel yang tidak invarian terhadap koordinat. Oleh karena itu, rapat Lagrangan yang dipilih adalah skalar kelengkungan Ricci R, sehingga prinsip variasinya menjadi (Romadani, 2015):

$$\delta S = \delta \int d\Omega \sqrt{-g} R = 0 \tag{2.16}$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\upsilon} = -g_{\mu\upsilon} \delta g^{\mu\upsilon} \tag{2.17}$$

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{\delta g}{\delta\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \tag{2.18}$$

Selanjutnya disederhanakan persamaan (2.18) menggunakan (2.16) menghasilkan

$$\int d\Omega\sqrt{-g}R + \int d\Omega R\delta\sqrt{-g} = \int d\Omega\sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\delta R_{\mu\upsilon} + \int d\Omega\sqrt{-g}R_{\mu\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon}$$
$$-\frac{1}{2}\int d\Omega R\sqrt{-g}g_{\mu\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon},$$
$$= \int d\Omega\sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\delta R_{\mu\upsilon} + \int d\Omega\sqrt{-g}\delta g^{\mu\upsilon}$$
$$\left[R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\upsilon}\right] \qquad (2.19)$$

Suku integral pertama dapat dievaluasi pada kerangka inersia lokal (koordinat normal) yaitu:

$$R_{\mu\upsilon}(0) = \Gamma^{\alpha}_{\mu\upsilon,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\upsilon} \qquad (2.20)$$
$$\delta R_{\mu\upsilon}(0) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\upsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\upsilon}}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) \qquad (2.21)$$

Dan

$$g^{\mu\upsilon}(0)\delta R_{\mu\upsilon}(0) = g^{\mu\upsilon}(0)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\upsilon}\right) - g^{\mu\upsilon}(0)\frac{\partial}{\partial x^{\upsilon}}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)$$
$$= g^{\mu\upsilon}(0)\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\upsilon}\right) - g^{\mu\rho}(0)\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left[g^{\mu\upsilon}(0)\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\upsilon}\right) - g^{\mu\rho}(0)\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}[W^{\rho}] \qquad (2.22)$$

Agar dapat menyelesaikan suku pertama (2.19) W^{ρ} dianggap sebagai $W^{\rho} = g^{\mu\upsilon}(0)\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\upsilon}\right) - g^{\mu\rho}(0)\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)$:

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\delta R_{\mu\upsilon}d\Omega = \int \sqrt{-g}\frac{\partial W^{\rho}}{\partial x^{\rho}}d\Omega$$
$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\delta R_{\mu\upsilon}d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left(\sqrt{-g}W^{\rho}\right)\, d\Omega$$
$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\delta R_{\mu\upsilon}d\Omega = 0 \qquad (2.23)$$

Dan persamaan (2.19) memperoleh

$$\int \sqrt{-g}\delta g^{\mu\upsilon}\left[R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\upsilon}\right]d\Omega = 0 \tag{2.24}$$

$$G_{\mu\upsilon} \equiv R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\upsilon} = 0 \tag{2.25}$$

Keberadaan materi memberikan sumbangan terhadap bentuk Lagrangan yaitu Lagrangan materi $\mathcal{L}_{mat}$ berkaitan dengan tensor kovarian energi momentum $T_{\mu\upsilon}$ sehingga diperoleh bentuk umum:

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\upsilon} = \kappa T_{\mu\upsilon} \tag{2.26}$$

Persamaan di atas menyatakan bahwa hukum gravitasi Einstein dengan κ berupa suatu tetapan positif yang berhubungan dengan nilai konstanta gravitasi G. Persamaan Euler-Lagrange pada aksi Hilbert-Einstein. Keberadaan materi memberikan sumbangsih terhadap bentuk Lagrangan yaitu Lagrangan materi $\mathcal{L}_{mat}$ berkaitan dengan tensor kovarian energi momentum $T_{\mu\upsilon}$ sehingga diperoleh bentuk umum yaitu (Romadani, 2015):

$$G_{\mu\upsilon} = R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\upsilon} = \kappa T_{\mu\upsilon} \tag{2.27}$$

dengan:

$R_{\mu\upsilon}$	= Tensor Ricci
$g_{\mu\upsilon}$	= Tensor metric
R	= Skalar Ricci
$T_{\mu\nu}$	= Tensor Energi Momentum
G	= Konstanta Gravitasi

BAB III
PERSAMAAN KLEIN-GORDON DAN LUBANG HITAM SCHWARZCHILD

3.1 Lagrangian Medan Skalar

Sutopo (2005) berpendapat bahwa keadaan gerak sistem dideskripsikan sebagai Fungsi gelombang $\phi(x,t)$. Fungsi gelombang $\phi(x,t)$ pada persamaan schrodinger dapat digunakan untuk mengetahui nilai dalam berbagai besaran yang dimiliki sistem. Pendeskripsian fungsi gelombang $\phi(x,t)$ dapat diartikan guna memuat berbagai informasi seperti posisi, energi, momentum sudut, momentum linier, dan besaran-besaran dinamis lain. Fungsi gelombang Schrodinger pada kondisi relativistik juga dilambangkan dengan simbol ϕ (Sutopo, 2005).

$$i\hbar\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = \left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r,t)\right\}\phi(x,t)$$

Partikel skalar merupakan persamaan gelombang untuk sebuah partikel tanpa spin yang tidak memiliki putaran namun memiliki satu komponen, yakni ψ. persamaan ini diperoleh dari persamaan dengan mengganti operator diferensial untuk E dan p, dalam standar model teori kuantum (Ryder, 1985):

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ p &\rightarrow -i\hbar\nabla \end{aligned} \tag{3.1}$$

Menurut Plank, energi adalah $E = hf$ dan konstanta Plank adalah $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Sehingga persamaan dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2}\phi \tag{3.2}$$

Fungsi gelombang ϕ diturunkan terhadap ruang tiga dimensi secara parsial sebanyak dua kali, maka:

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

$$= -\frac{E^2}{\hbar^2}\phi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\phi \tag{3.3}$$

Gagasan de Broglie menyatakan panjang gelombang $\lambda = \frac{h}{p}$ dan konstanta Plank sehingga persamaan akan menjadi (Sugiyono, 2016):

$$\nabla^2\phi = -\frac{p^2}{h^2}\phi \tag{3.4}$$

Gelombang tersebut tersusun antara gagasan kuantum dan gagasan klasik pada kondisi relativistik menjadi Energi total relativistik partikel bebas bermassa m dengan fungsi gelombang ϕ, persamaan yang diperoleh (Ryder, 1985):

$$\boldsymbol{E}^2\phi = (\boldsymbol{p^2}c^2 + m^2c^4)\phi \tag{3.5}$$

Kemudian masing-masing ruas persamaan dikerjakan pada sembarang fungsi gelombang $\phi(x, t)$ sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$-\hbar^2\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\phi = \left(-\hbar^2\frac{1}{\phi}\nabla^2 c^2 + m^2c^4\right)\phi \tag{3.6}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2\nabla^2c^2 + m^2c^4\right)\phi \tag{3.7}$$

Persamaan di atas (3.7) dibagi dengan kuadrat kecepatan cahaya dan diperoleh

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + (\hbar^2\nabla^2 - m^2c^2)\phi = 0 \tag{3.8}$$

Diuraikan

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi-m^2c^2\phi=0 \qquad (3.9)$$

Persamaan di atas menggunakan operator **D'Alembert** sehingga dapat dinyatakan

$$\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3.10)$$

3.2 Persamaan Klein-Gordon

Perilaku elektron bahkan tingkat energi gelombang dapat dijelaskan dengan Persamaan Schrodinger. Keberhasilan Persamaan Schrodinger dalam merumuskan fungsi gelombang belum dapat dikatakan sebagai puncak kejayaan teori kuantum. Sebab, muncul pertanyaan bagaimana menjelaskan tentang objek mikro yang bergerak dengan kecepatan tinggi, misalnya elektron yang bergerak degan kecepatan 250 juta m/s. Dengan pertanyaan ini O. Klein, V. Fock, dan W. Gordon dengan upaya menggabungkan teori medan kuantum dan teori relativitas khusus dengan memodifikasi persamaan gelombang Schrodinger menjadi persamaan yang relevan untuk kasus relativistik ($v \approx c$). Persamaan tersebut diberi nama dengan sebutan persamaan Klein-Fock-Gordon atau lebih dikenal dengan persamaan Klein-Gordon. Sehingga dapat dikatakan persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan Schrodinger versi relativistik. Persamaan Klein-Gordon menggambarkan persamaan medan untuk partikel skalar (spin-0). Persamaan Klein-Gordon menjadi persamaan yang sering dipelajari untuk menggambarkan dinamika partikel dalam teori medan kuantum (Saadatmand dan Jadivan, 2017).

Menurut Humaidi (2016) fungsi gelombang, rapat probabilitas, dan tingkat-tingkat energi elektron merupakan solusi dari persamaan Klein-Gordon. Kemudian, persamaan (3.9) akan dikalikan dengan $\frac{1}{\hbar^2c^2}$ akan diperoleh persamaan:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \tag{3.11}$$

$\hbar = c = 1$,

$$\nabla^2\left(\square - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \tag{3.12}$$

Dengan k $= \frac{mc}{\hbar}$

$$\left(\square - k^2\right)\phi = 0 \tag{3.13}$$

Persamaan (3.13) seperti yang kita ketahui disebut dengan persamaan **Klein-Gordon** pertama kali dirumuskan oleh Oskar Klein, V. Fock, dan Walter Gordon. Substitusikan persamaan (3.1) ke dalam pendekatan non-relativistik dengan= $p^2/2m$ (E adalah energi kinetik) sehingga menghasilkan persamaan schrodinger (Ryder, 1985):

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi = -i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{3.14}$$

Persamaan Schrodinger adalah pendekatan non relativistik untuk persamaan Klein-Gordon (2.4) dikali dengan ϕ^*, sehingga:

$$\phi^*\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi = 0 \tag{3.15}$$

$$\phi\nabla^2\phi^* - \frac{1}{c^2}\phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi\phi^* = 0 \tag{3.16}$$

Hubungan persamaan (3.15) dan (3.16) adalah:

$$\left(\phi^*\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi^*\right) + \frac{1}{c^2}\left(\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = 0 \qquad (3.17)$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right) = 0 \qquad (3.18)$$

Dengan mengalikan $\frac{i\hbar}{2m}$ persamaan (2.8) akan menjadi:

$$\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right) = 0 \qquad (3.19)$$

Kepadatan probabilitas untuk persamaan schrodinger adalah:

$$\rho = \phi^*\phi \qquad (3.20)$$

Dan arus probabilitas j,

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*) \qquad (3.21)$$

sehingga persamaan tersebut memenuhi persamaan kontinyuitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\phi\right) - \frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right) \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} &= \phi^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi\right) + \phi\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi^*\right) \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Lalu pada persamaan Klein-Gordon untuk menjadi relativistik, mengubah ρ pada persamaan (3.20) sebagai skalar. Tetapi dengan komponen waktu dari vektor 4, yang komponen ruangnya adalah **j**, diberikan oleh (3.21). sehingga ρ diberikan:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi(x)\right) \qquad (3.23)$$

dan **j** adalah

$$\mathbf{j} = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{\hbar}{2m}(\phi^{*}\nabla\phi - (\nabla\phi^{*})\phi) \tag{3.24}$$

Tuntutan tersebut dipenuhi melalui proses:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\phi \tag{3.25}$$

Sehingga terdapat permasalahan lain pada dengan persamaan Klein-Gordon, sehingga persamaan (3.5) menjadi:

$$\boldsymbol{E}^{2} = \pm\left(p^{2}c^{2} + m^{2}c^{4}\right) \tag{3.26}$$

Solusi untuk persamaan Klein-Gordon mengandung istilah energi negatif dan juga energi positif untuk partikel bebas dengan energi bersarang, karena partikel yang memiliki energi positif dan keadaan energi negatif dapat diabaikan. Nainggolan (2012) dalam penelitiannya menyatakan bahwa persamaan Klein-Gordon dapat menjelaskan pergerakan elektron saat mengelilingi atom dalam lintasan (orbit) tertentu.

3.3 Persamaan Medan Gravitasi (Vakum)

Simbol Christofferl telah memproduksi suatu tensor yang dinamakan tensor Ricci. Terdapat beberapa simbol Christofferl tidak nol yang dirangkumkan sebagai berikut:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} \qquad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\nu' \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda' \qquad \Gamma^3_{32} = \cot\theta$$

$$\Gamma^1_{22} = re^{-\lambda} \qquad \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{33} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta$$

Dari beberapa komponen simbol Christofferl dapat menghasilkan tensor Ricci sebagai berikut:

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right] \tag{3.27}$$

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} \tag{3.28}$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda}\left[\frac{r(\lambda' - \nu')}{2} + 1\right] + 1 \tag{3.29}$$

$$R_{33} = -\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left[\frac{r(\lambda' - \nu')}{2} + 1\right] + \sin^2\theta \tag{3.30}$$

Adapun skalar Ricci diberikan:

$$R = e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{r} + \frac{2}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2} \tag{3.31}$$

3.4 Solusi Medan Schwarszchild dalam Ruang Kosong

Potensial newtonian di sekitar objek ditentukan oleh fungsi metrik yang berkaitan dengan objek tersebut. Untuk objek yang memiliki simetri bola, Schwarzschild menyatakan bahwa, metrik $g_{\mu\nu}$ merepresentasikan struktur ruang-waktu statik yang simetrik pada ruang kosong (*empty space*). Ruang waktu statik adalah ruang waktu yang memiliki sifat- sifat:

(a) semua komponen dari metrik tersebut tidak bergantung waktu; dan

(b) elemen panjang ds^2 invarian terhadap transformasi $t \rightarrow -t$.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, d\mathcal{X}^{\mu} d\mathcal{X}^{\nu} \tag{3.32}$$

Dimana metrik $g_{\mu\nu}$ tidak bergantung waktu dan elemen panjang ds^2 invarian terhadap transformasi $t \rightarrow -t$, sehingga metrik tersebut statik.

Persamaan wakilan metrik pada koordinat Schwarzschild merupakan proses akhir dari persamaan medan Einstein yang bersifat isotropik statik bermassa m yang dirumuskan dalam koordinat bola. Metrik ruang-waktu datar dalam koordinat bola diberikan oleh:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{3.33}$$

Persamaan bidang Einstein untuk ruang kosong dan mengisi dengan asumsi $G = e = 1$, sehingga metriknya menjadi:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{3.34}$$

Metrik yang *line element* nya invarian terhadap rotasi koordinat, namun masih bergantung terhadap waktu. Untuk membuat metrik tersebut isotropik statik (tidak bergantung waktu), maka tensor metrik komponen g_{tt}dan g_{rr} menjadi fungsi radial r, sehingga bentuk metrik menjadi

$$ds^2 = -f(\bar{r})dt^2 + g(\bar{r})d\bar{r}^2 + h(\bar{r})\bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad (3.35)$$

Dengan $r = \bar{r}\sqrt{h(\bar{r})}$, *line element* menjadi:

$$ds^2 = -A(\bar{r})dt^2 + B(\bar{r})d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad (3.36)$$

Mengubah fungsi $A(r)$ dan $B(r)$ menjadi fungsi eksponensial untuk mendapatkan tensor eistein. Diperoleh fungsi $\alpha(r)$ dan $\beta(r)$ dari $e^{2\alpha(r)} = A(r)$ dan $e^{2\beta(r)} = B(r)$ menjadi:

$$ds^2 = -e^{2\alpha}d\bar{t}^2 + e^{2\beta}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad (3.37)$$

Persamaan (3.37) memberi elemen tensor metrik kovarian

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

Tensor metriks kontravarian diberikan oleh

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

Koordinat ini merupakan koordinat Schwarzchild. Contohnya pada koordinat isotropik.

$$ds^2 = -e^{2A}dt^2 + e^{2B}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \quad (3.39)$$

Koordinat r dan t konstan dengan luas permukaan $4\pi r^2$. Penggunaan *Cartesian Formalism* untuk memperoleh solusi statik pada keadaan vakum $R_{\mu\nu} = 0$.

$$g_{tt} = e^{\alpha}\, dt \quad (3.40)$$

$$g_{rr} = e^{\beta}\, dr \quad (3.40)$$

$$g_{\theta\theta} = r\, d\theta \quad (3.40)$$

$$g_{\phi\phi} = r\, \sin\theta\, d\phi \quad (3.40)$$

Dengan komponen tensor metrik kontravarian bernilai,

$$g^{tt} = -\frac{1}{e^{\alpha}\, dt} \quad (3.41)$$

$$g^{rr} = \frac{1}{e^{\beta}\, dr} \quad (3.41)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r\, d\theta} \quad (3.41)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r\, \sin\theta\, d\phi} \quad (3.41)$$

Lambang Christoffel atau *affine connection* dapat dituliskan:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial \mathcal{X}^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial \mathcal{X}^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \mathcal{X}^{\rho}}\right) \quad (3.42)$$

Menggunakan definisi tensor Einstein,

$$E_{tt} = \frac{2}{r}\alpha e^{-2\alpha} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\alpha}) \quad (3.43)$$

$$E_{rr} = \frac{2}{r}\beta e^{-2\beta} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\beta}) \quad (3.44)$$

$$E_{\theta\theta} = E_{\phi\phi} = \frac{1}{r} e^{-2\beta}(r\alpha'' + r\alpha'^2 - r\alpha'\beta' + \alpha' - \beta') \quad (3.45)$$

Fungsi $\alpha(r)$ dan $\beta(r)$ dapat dicari untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein. Untuk daerah di sekitar (di luar) objek yang memiliki simetri bola, maka persamaan medan Einstein yang digunakan adalah persamaan medan pada *empty space* atau ruang kosong. Berlaku $E_{\mu\nu} = 0$ sebagai berikut:

$$\frac{2}{r} e^{-2\beta}(\alpha' + \beta') = 0 \tag{3.46}$$

Persamaan (3.46) dapat diintegrasikan menjadi

$$\alpha(r) + \beta(r) = K, \tag{3.47}$$

Dimana K adalah konstan, sehingga dapat mengubah ulang koordinat waktu, dengan menggeser nilai kontanta K dengan angka berapapun. Misalnya $K = 0$ sehingga didapatkan nilai $\alpha(r) = -\beta(r)$ sehingga tertulis:

$$\frac{1}{r^2}\left[(1 - e^{-2\beta})\right]' = 0 \tag{3.48}$$

Persamaan (3.48) dapat diintegrasikan menjadi:

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{3.49}$$

Dan

$$e^{-2\alpha} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{3.50}$$

Bentuk metrik isotropik adalah

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} d\bar{r}^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{3.51}$$

Dimana M merupakan *arbitrary constant*. Persamaan (3.37) disebut sebagai bentuk metriks Schwarzschild yang pertama kali ditemukan pada tahun 1916 oleh Karl Schwarzschild. Radius Schwarzchild cukup besar, hal ini jika M bernilai cukup besar sementara uji partikel cukup kecil, begitu yang terjadi pada lubang hitam (Anugraha, 2011).

Metriks Schwarzschild ini menggambarkan medan gravitasi di luar sumber yang bersimetri bola serta tidak bergantung pada distribusi materi di dalam sumber. Metriks tersebut akan bernilai tak hingga saat $r = 2M,$ jarak $r = 2M$ disebut sebagai jari-jari Schwarzschild.

3.5 Lubang Hitam Schawarzschild

Solusi schwarzschild untuk ruang kosong dapat diperluas menuju daerah $r < 2m$. Tetapi tidak dapat berkomunikasi dengan ruang $r > 2m$. Jari-jari Schwarzchild membentuk horizon peristiwa yang memisahkan dua daerah:

Wilayah I	$2m < r < \infty$
Wilayah II	$0 < r < 2m$

Wilayah I disebut wilayah lubang hitam sedangkan titik $r = 0$ disebut titik singularitas instrinsik. Anugraha (2014) menulis karakteristik solusi Schwarzschild

1. Partikel yang bergerak menuju titik sigularitas akan merasakan tarikan gravitasi yang sangat kuat.
2. Partikel (termasuk cahaya) tidak ada yang mampu keluar dari wilayah I (batas horizon peristiwa). Partikel atau cahaya yang bergerak radial keluar tidak akan pernah menembus horizon peristiwa.

3. Cahaya atau sinyal yang dipancarkan dari dekat horizon peristiwa (wilayah II) akan mengalami pergeseran ketika diterima oleh pengamat yang jauh.

Apabila Radius Schwarzschild untuk partikel bumi dimampatkan sekitar 9 mm cukup kecil dengan M yang besar sementara seperti yang terjadi pada lubang hitam (*black hole*). Radius Schwarzchild dalam lubang hitam dapat dilihat di bawah ini.

Gambar 3.1 Lubang Hitam Schwarchild Bermassa M Beradius rs
(Anugraha, 2014)

BAB IV
MEDAN SKALAR DAN MEDAN GRAVITASI

Medan skalar adalah persamaan gelombang untuk sebuah partikel tanpa spin yang tidak memiliki putaran namun memiliki satu komponen yakni, ψ. Penggabungan teori medan kuantum dan teori relativitas khusus dengan memodifikasi persamaan gelombang Schrodinger menjadi persamaan yang relevan untuk kasus relativistik ($v \approx c$) disebut dengan Persamaan Klein-Gordon. Dapat dikatakan pula bahwa persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan Schrodinger versi relativistik dengan menggambarkan persamaan medan untuk partikel skalar spin-0 (Saadatmand dan Jadivan, 2017).

Suatu kuantitas yang dapat menjelaskan atau mempresentasikan sistem fisis disebut dengan Lagrangian. Rapat Lagrangian dalam ruang-waktu datar tanpa kehadiran gravitasi (ruang Minkowski) dimana Lagragiannya diberikan oleh pengurangan energi kinetik dengan energi potensial. Yang mana dalam kasus ini $\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ menggambarkan energi kinetik karena terdapat turunnan posisi didalamnya dan $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ menggambarkan energi potensial. Untuk mendapatkan Klein-Gordon dengan kehadiran gravitasi, rapat Lagrangian akan diperluas untuk ruang-waktu yang melengkung sehingga energi kinetiknya harus memuat $\sqrt{-g}$, dan $\eta^{\mu\nu}$ kemudian diganti $g^{\mu\nu}$, hal tersebut dikarenakan rung-waktu melengkung akan mempengaruhi gerak benda.

4.1 Geometri Simetri Bola

Dalam merumuskan teori relativitas umum tentang gravitasi, Einstein mengemukakan pandangan yang sangat radikal. Gravitasi bukan lagi seperti gaya-

gaya lain "*Gravitation is not force*" melainkan efek dari kelengkungan ruang-waktu yang diakibatkan oleh kehadiran massa dan energi yang masif menurut pandangan Einstein. Atas dasar itu, kemudian Einstein menggunakan ruang-waktu empat dimensi yang melengkung (ruang Riemann) untuk mendeskripsikan bagaimana kontribusi materi-energi dalam ruang. Geometri suatu ruang diberikan dalam suatu tensor kelengkungan yang dikenal dengan tensor Ricci.

Tensor Ricci dibentuk oleh produk dari simbol Christofferl dan turunan pertamanya, sedangkan simbol Christofferl itu sendiri dibentuk oleh kombinasi linier dari tensor metrik dan turunan pertamanya. Dengan diketahui bentuk eksplisit dari tensor metrik, maka seluruh komponen simbol Christofferl dapat dihitung. telah melahirkan tensor Ricci. Berikut ini komponen tensor Ricci dan skalar Ricci:

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}\right] \tag{4.1}$$

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4} \tag{4.2}$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda}\left[\frac{r(\lambda'-\nu')}{2}+1\right]+1 \tag{4.3}$$

$$R_{33} = -\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left[\frac{r(\lambda'-\nu')}{2}+1\right]+\sin^2\theta \tag{4.4}$$

Dengan skalar Ricci

$$R = e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{2\nu'}{r}-\frac{2\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{\nu'^2}{r}+\frac{2}{r^2}\right)-\frac{2}{r^2} \tag{4.5}$$

Tensor Ricci (4.1) dan skalar Ricci (4.2) di atas bersimetri bola. Hal ini dapat dilakukan untuk menghitung tensor Einstein mengunakan tensor Campuran G_{v}^{μ}.

Aksen pada persamaan di bawah menandakan bahwa persamaan tersebut turunan terhadap r, sehingga bentuk persamaan menjadi:

$$G_0^0 = -e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r}\right] + \frac{1}{r} \tag{4.6}$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right] - \frac{1}{r^2} \tag{4.7}$$

$$G_2^2 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) \tag{4.8}$$

$$G_3^3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right)$$

$$G_3^3 = G_2^2 \tag{4.9}$$

4.2 Tensor Energi-Momentum Medan Skalar

Tensor energi-momentum yang tidak sama dengan nol adalah kontribusi dari medan skalar. Kehadiran dari medan skalar merupakan konsekuensi dari suatu potensial yang termuat dari persamaan Lagrangian. Bentuk tensor energi momentum sebagai berikut:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi - m^2\phi^2\right] \tag{4.10}$$

Diperoleh empat tensor energi-momentum yang tidak sama nol adalah sebagai berikut:

$$T_{00} = -\frac{1}{2}e^{\nu}\left[-e^{-\lambda}\partial_r\phi\partial_r\phi - m^2\phi^2\right] \tag{4.11}$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 e^{\lambda} \tag{4.12}$$

$$T_{22} = -\frac{1}{2}r^2 e^{-\lambda}\partial_r\phi\partial_r\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 r^2 \tag{4.13}$$

$$T_{33} = -\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\phi'^2 - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\, m^2\phi^2 \tag{4.14}$$

Dalam persamaan (4.11) – (4.14) merupakan tensor energi momentum sehingga hubungan antar tensor energi-momentum tidak sama nol sehingga mereduksi dalam tensor campuran menjadi:

$$T_0^0 = g^{00}T_{00}$$

$$T_0^0 = e^{-\nu}\left(\frac{1}{2}e^{\nu}\left[-e^{-\lambda}\partial_r\phi\partial_r\phi - m^2\phi^2\right]\right)$$

$$T_0^0 = -\frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda}\right] \tag{4.15}$$

$$T_1^1 = g^{11}T_{11}$$

$$T_1^1 = e^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 e^{\lambda}\right]$$

$$T_1^1 = \frac{1}{2}\left[\phi'^2 e^{-\lambda} - m^2\phi^2\right] \tag{4.16}$$

$$T_2^2 = g^{22}T_{22}$$

$$T_2^2 = -r^{-2}\left[= -\frac{1}{2}r^2 e^{-\lambda}\partial_r\phi\partial_r\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 r^2\right]$$

$$T_2^2 = \frac{1}{2}\left[\phi'^2 e^{-\lambda} + m^2\phi^2\right] \tag{4.17}$$

$$T_3^3 = g^{33}T_{33}$$

$$T_3^3 = -r^2 sin^{-2}\theta\left[-\frac{1}{2}r^2\sin^2 \text{è}\, e^{-\lambda}\phi'^2 - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\, m^2\phi^2\right]$$

$$T_3^3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\phi'^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{4.18}$$

4.3 Persamaan Medan Einstein-Klein-Gordon

Gravitasi berkaitan erat dengan geometri ruang-waktu di sekitar objek, yang ditentukan oleh parameter-parameter fisis di dalam objek tersebut (*geometry is merged with physics*). Medan Gravitasi menyebabkan melengkungnya lintasan cahaya atau diartikan sifat ruang ditentukan ditentukan oleh distribusi materi dan berlaku sebaliknya. Potensial medan gravitasi sebanding dengan rapat massa sumber medan, maka dapat dilakukan perluasan bahwa kelengkungan ruang-waktu sebanding dengan tensor energi-momentum seperti yang dijelaskan dalam persamaan (2.27) sebagai berikut:

$$G_{\mu}^{\mu} = \kappa T_{\nu}^{\mu}$$

dimana geometri ruang-waktu (gravitasi) ditunjukkan pada G_{μ}^{μ} sebagai tensor Einstein. Dan materi-energi (medan skalar) ditunjukkan pada T_{ν}^{μ} sebagai tensor energi-momentum. Selanjutnya hubungan antara persamaan (4.6)-(4.9) dan (4.15)-(4.18) dapat disubstitusikan menjadi persamaan

$$G_0^0 = \kappa T_0^0$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r}\right] + \frac{1}{r} = -\kappa\frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda}\right] \tag{4.19}$$

$$G_1^1 = \kappa T_1^1$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\upsilon}{r} + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2} = \kappa\frac{1}{2}\left[{\phi'}^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{4.20}$$

$$G_2^2 = \kappa T_2^2$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\upsilon'' + \frac{{\upsilon'}^2}{2} - \frac{\upsilon'\lambda'}{2} + \frac{\upsilon' - \lambda'}{r}\right) = \kappa\frac{1}{2}\left[{\phi'}^2 e^{-\lambda} + m^2\phi^2\right] \tag{4.21}$$

$$G_3^3 = \kappa T_3^3$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\upsilon'' + \frac{{\upsilon'}^2}{2} - \frac{\upsilon'\lambda'}{2} + \frac{\upsilon' - \lambda'}{r}\right) = \kappa\frac{1}{2}\left[e^{-\lambda}{\phi'}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{4.22}$$

Sehingga dapat dirumuskan persamaan Klein-Gordon dengan kehadiran gravitasi dalam ruang-waktu melengkung, yakni:

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right)\phi' - m^2\phi e^{\lambda} = 0 \tag{4.23}$$

4.4 Penyelesaian Persamaan Medan

Berdasarkan perluasan kelengkungan ruang-waktu sebanding dengan distribusi materi-energi seperti persamaan (2.13) dan dihasilkan persamaan (4.19)-(4.22). Selanjutnya dilakukan perhitungan (4.19) dan (4.20) yakni $\left(G_0^0 \pm G_1^1 = \kappa T_0^0 \pm \kappa T_1^1\right)$ maka diperoleh hasil:

Untuk penjumlahan

$$G_0^0 + G_1^1 = \kappa T_0^0 + \kappa T_1^1$$

$$G_0^0 + G_1^1 = \kappa\left(T_0^0 + T_1^1\right)$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r}\right] + \frac{1}{r} - e^{-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right] + \frac{1}{r} = \frac{\kappa}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda} - {\phi'}^2 e^{-\lambda} + m^2\phi^2\right]$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right] + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\kappa}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda} - {\phi'}^2 e^{-\lambda} + m^2\phi^2\right]$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{2}{r^2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] + \frac{2}{r} = \frac{\kappa}{2}\left[2m^2\phi^2\right]$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right] + \frac{2}{r} = \kappa\left(m^2\phi^2\right) \qquad (4.24)$$

Untuk pengurangan

$$G_0^0 - G_1^1 = \kappa T_0^0 - \kappa T_1^1$$

$$G_0^0 - G_1^1 = \kappa\left(T_0^0 - T_1^1\right)$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r}\right] + \frac{1}{r} - e^{-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right] + \frac{1}{r} = \frac{\kappa}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda} - {\phi'}^2 e^{-\lambda} - m^2\phi^2\right]$$

$$\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r}\right] + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{\kappa}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda} - {\phi'}^2 e^{-\lambda} - m^2\phi^2\right]$$

$$\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] = \frac{\kappa}{2}\left[2{\phi'}^2\right]$$

$$\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] = \kappa\phi'^{2} \qquad (4.25)$$

Jika persamaan (4.25) dibandingkan dengan persamaan Klein-Gordon dengan kehadiran gravitasi dalam ruang-waktu melengkung (4.23) untuk partikel yang tidak bermassa, maka seharusnya:

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right)\phi' - m^2\phi e^{\lambda} = 0$$

Partikel skalar tidak bermassa ($m = 0$) dan dibagi ϕ'

$$\frac{\phi''}{\phi'} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\phi''}{\phi'} = \left(-\frac{2}{r} + \frac{\lambda' + \nu'}{2}\right) \qquad (4.26)$$

Kemudian persamaan (4.26) dapat dibagi r

$$r\frac{\phi''}{\phi'} = \frac{\lambda' + \nu'}{2}r - 2$$

$$r\frac{\phi''}{\phi'} + 2 = \frac{\lambda' + \nu'}{2}r \qquad (4.27)$$

Kembali ke persamaan (4.24) pada ($m = 0$)

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right] + \frac{2}{r^2} = 0$$

$$-e^{-\lambda} = \frac{-\frac{2}{r^2}}{\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right]}$$

$$e^{\lambda} = \frac{\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right]}{-\frac{2}{r^2}}$$

Atau diubah menjadi,

$$e^{\lambda} = -\frac{\lambda' - \nu'}{r} r + 1 \tag{4.28}$$

Substitusi persamaan (4.28) kedalam persamaan (4.27) untuk mendapatkan nilai e^{λ} sebagai berikut:

$$e^{\lambda} = -\left(r\frac{\phi''}{\phi'} + 2 \right) + 1$$

$$e^{\lambda} = -r\frac{\phi''}{\phi'} - 2 + 1$$

$$e^{\lambda} = -r\frac{\phi''}{\phi'} - 1 \tag{4.29}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai $e^{í}$ digunakan hubungan persamaan (4.24) yang tidak bermassa dengan persamaan (4.29) maka akan mendapatkan:

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right] + \frac{2}{r^2} = 0$$

$$\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right] = -\frac{2}{r^2}e^{\lambda}$$

$$\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2}e^{\lambda}$$

$$\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2}\left(-r\frac{\phi''}{\phi'} - 1\right) \tag{4.30}$$

Sehingga dari persamaan (4.30) diperoleh nilai

$$\nu' = \frac{4}{r} - \frac{2\phi''}{\phi'^2} + \lambda' \tag{4.31}$$

Kemudian pada kondisi g_{00} pada persamaan (4.31) memberikan nilai í dengan cara mengintegralkan menjadi:

$$\nu = g\frac{e^{\lambda}}{\phi'^2 r^4} \tag{4.30}$$

Selanjutnya persamaan Klein-Gordon (4.23) akan direduksi dalam ruang-waktu datar (ruang Minkowski) menjadi:

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r}\right)\phi' - m^2\phi = 0 \tag{4.31}$$

Persamaan (4.31) disebut Persamaan Differensial Bessel. Persamaan differensial bessel merupakan persamaan biasa yang mempunyai koefisien yang berupa variabel. Persamaan differensial bessel termasuk persamaan differensial linier. Persamaan differensial bessel disini mempunyai solusi berupa kombinasi linier dari $[sin(imr)]/imr$ dan $[cos(imr)]/imr$. Persamaan (4.31) akan menghasilkan suatu potensial ϕ dalam bentuk:

$$\phi = g\frac{e^{-mr}}{r} \tag{4.32}$$

dengan ϕ adalah potensial Yukawa dan g merupakan interaksi kuat. Selanjutnya hubungan tensor energi-momentum dalam limit medan lemah dari persamaan

$$T_0^0 = -\frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda}\right] \tag{4.33}$$

$$T_1^1 = \frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 - \phi'^2 e^{-\lambda}\right] \tag{4.34}$$

$$T_2^2 = -\frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda}\right] \tag{4.35}$$

$$T_3^3 = -\frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 + {\phi'}^2 e^{-\lambda}\right] \tag{4.36}$$

Kemudian dari persamaan (4.33) sampai (4.36) direduksi menjadi

$$T_0^0 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 \tag{4.37}$$

$$T_1^1 = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}\phi'^2 \quad (4.38)$$

Agar mendapatkan nilai penyelesaian medan dalam bentuk $e^{-\lambda}$ dan ν', maka persamaan (4.37) dan (4.38) disubstitusikan kedalam persamaan (2.13)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\kappa g^2}{2}\frac{e^{-2mr}}{r^2} \quad (4.38)$$

dan

$$\nu' = -\frac{1}{r} + \left[\frac{1}{r} + \kappa(m + \frac{1}{2r})\frac{g^2 e^{-2mr}}{r^2}\right]e^{\lambda} \quad (4.39)$$

dengan M merupakan konstanta integrasi yang kemudian dapat didefinisikan sebagai massa gravitasi benda dari titik sumber. Pada partikel skalar $m = 0$ dan $g \neq 0$ untuk $M \neq \frac{\kappa g^2}{2}$ didapatkan:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa g^2}{2r^2} \quad (4.40)$$

$$\nu = \frac{2M}{\sqrt{\frac{\kappa g^2}{2} - M^2}}\tan^{-1}\frac{r - M}{\frac{\kappa g^2}{2} - M^2} \quad (4.41)$$

untuk $M = \frac{\kappa}{2}$ didapatkan:

$$e^{\nu} = \left(\frac{r - M - \sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}{r - M + \sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}\right)^{\frac{M}{\sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}} \quad (4.42)$$

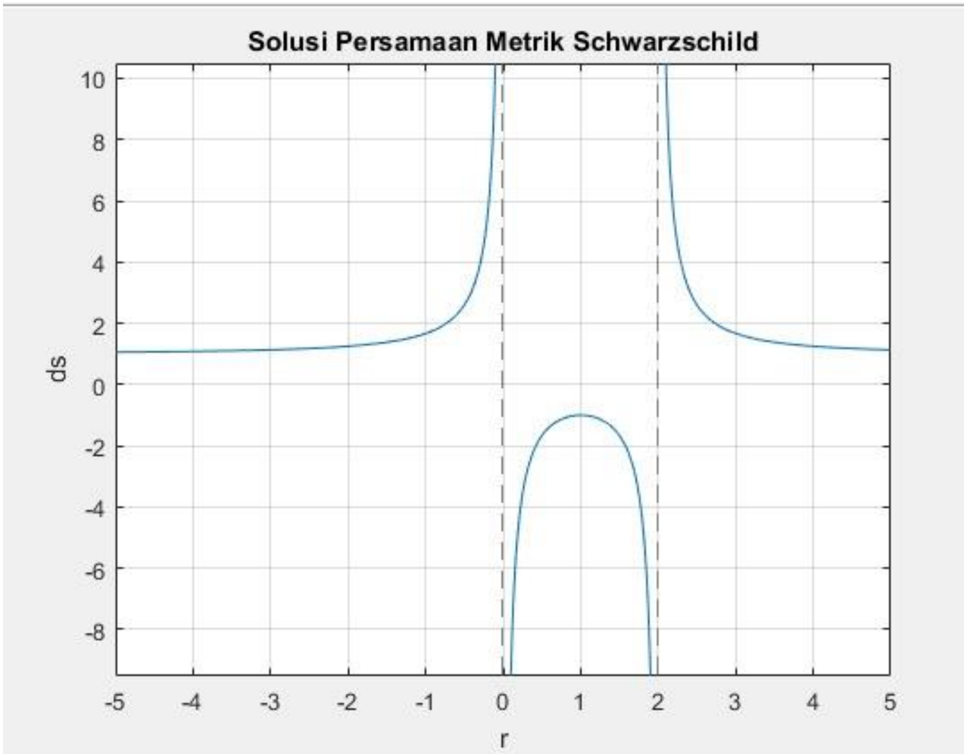
$$\nu = \frac{2M}{r - M} \quad (4.43)$$

Dengan κ sebagai konstanta dari persamaan medan Einstein dan g sebagai konstanta dari medan skalar. Dari persamaan (4.42) yang dapat terlihat kontribusi massa pada suku kedua dan adanya pengaruh medan skalar pada suku ketiga sehingga didapatlah solusi persamaan medan gravitasi Klein-Gordon dalam metrik schwarzschild.

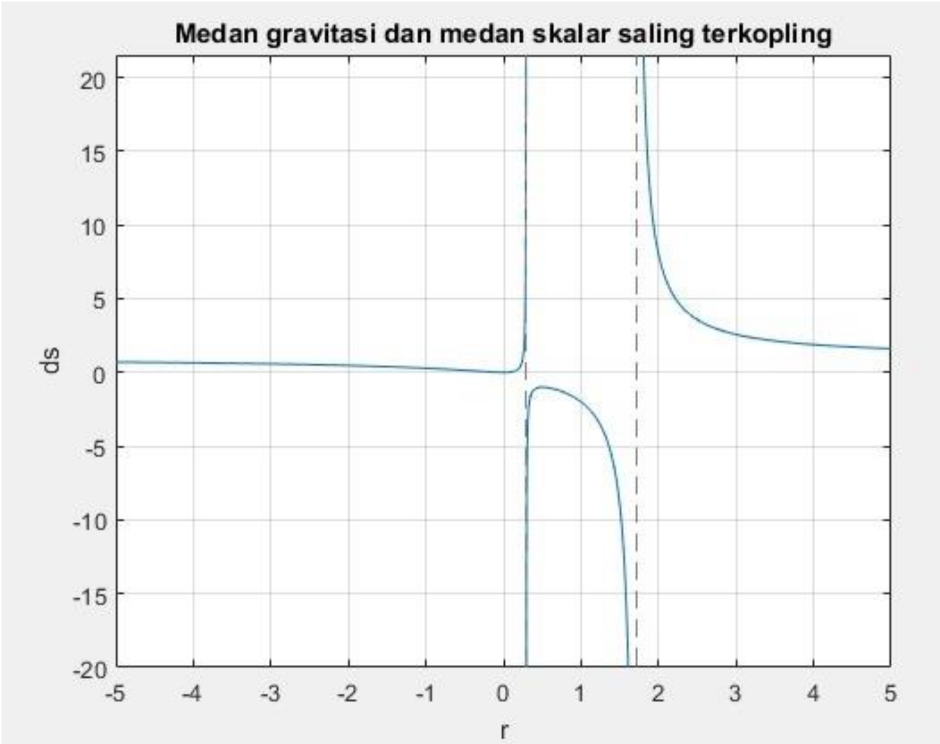
$$ds^2 = \left(\frac{r - M - \sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}{r - M + \sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}\right)^{\frac{M}{\sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}} dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa g^2}{r^2}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

(4.44)

Dengan demikian, ditemukan persamaan medan gravitasi untuk partikel skalar tidak bermassa yang dinyatakan dalam elemen garis pada persamaan (4.44). Metrik tersebut menyatakan gravitasi mempunyai peran yang lebih dominan dibandingkan medan skalar. Dengan adanya suku tambahan pada metrik tersebut menunjukkan bahwa metriknya tidak menuju singularitas seperti pada metrik Schwarzschild.

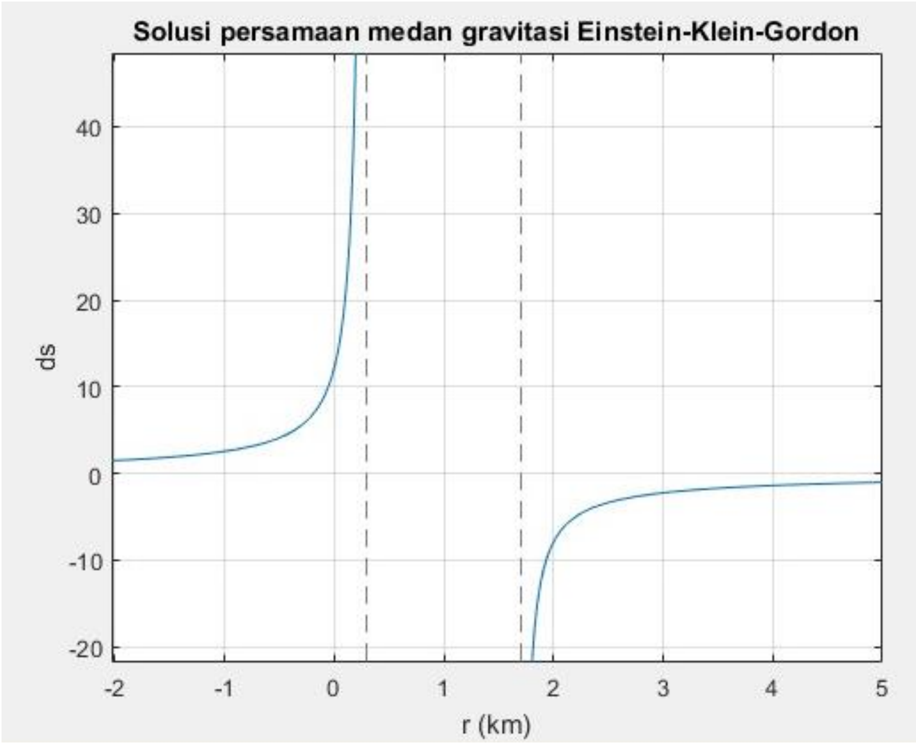


Gambar 4.1 Solusi Persamaan Metrik Schwarzschild untuk $M = 1$.



Gambar 4.2 Medan Gravitasi dan Medan Skalar untuk $M = \kappa = g = 1$.

Gambar (4.1) merupakan visualisasi dari persamaan (3.51) yaitu persamaan metrik Schwarzschild yang mana merupakan bentuk isotropik statik ruang-waktu 4 dimensi berkoordinat bola dengan memvariasikan nilai Radiusnya. Sehingga dalam persamaan tersebut hampir sama dengan solusi persamaan gravitasi medan Klein-Gordon seperti pada persamaan (4.40) pada suku kedua menjelaskan kontribusi massa sebagaimana pada metrik Schwarzschild, sedangkan suku ketiga memberikan gambaran pengaruh medan skalar dalam ruang-waktu di sekitar benda bermassa sehingga divisualisasikan pada Gambar (4.2).



Gambar 4.3 Solusi Persamaan Medan Gravitasi Einstein-Klein-Gordon untuk variasi nilai r dan $M = \kappa = g\ = 1$.

Pada solusi persamaan (4.44) dengan adanya suku tambahan pada metrik tersebut menunjukkan bahwa metriknya tidak menuju singularitas seperti pada solusi Schwarszchild, yang mana jika divisiualisasi dan merubah atau memvarasikan nilai Radiusnya didapatkan Gambar (4.3).

Ketika melihat berbagai hamparan yang ada di langit dan di bumi, maka akan mengantarkan manusia melihat keagungan Allah dan sebagai bukti bahwa Allah merupakan satu-satunya Tuhan seluruh alam. Tidak sedikit ayat-ayat Al-Qur’am yang menyadarkan manusia agar menggunakan akalnya untuk melihat, memikirkan, dan merenungi segala bentuk ciptaan Allah. Dengan ini dapat dilihat dalam firman-Nya yang terdapat pada QS. Al-Mulk Ayat 3;

ٱلَّذِى خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٍ طِبَاقًاۖ مَّا تَرَىٰ فِى خَلۡقِ ٱلرَّحۡمَٰنِ مِن تَفَٰوُتٍۖ فَٱرۡجِعِ ٱلۡبَصَرَ هَلۡ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ٣

Artinya : *"Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang.Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah."*

Allah telah menciptakan semua dengan sangat sempurna dan tidak ada cacat sedikitpun. Dia satu-satunya yang mengatur semua makhluk, dan semua yang ada di langit dan di bumi harus tunduk, taat, dan mensyukuri-Nya. Harus di Esakan dan tidak mensyirikan-Nya karena Allah maha kuasa yang menciptakan langit dan bumi, kemudian mengatur segala sesuatu yang berkaitan dengan makhluk-Nya.

Posisi-posisi bintang digambarkan al-Quran tentang kehancuran alam semesta, yaitu keadaan bintang pada akhir zaman, bintang dipakai sebagai alat sumpah, penghias langit, alat pelempar setan yang hendak mencari informasi dari langit. Bintang juga dijelaskan sebagai penunjuk arah. Bintang disebut sebagai makhluk ciptaan Allah yang tunduk dan patuh kepada-Nya. Dan bintang sebagai bahan perumpamaan.

Para ilmuwan menyebut *Khunnas* sebagai *Black hole* (lubang hitam). *Black hole* merupakan bintang yang berat massanya tidak dapat dilihat, berjalan dengan kecepatan mencapai puluhan ribu kilometer perdetik. *Black hole* dapat menarik, menekan, dan membersihkan setiap sesuatu yang ditemui dalam perjalanannya. *Black Hole* seberat bumi dengan diameternya kurang dari satu sentimeter dan *Black Hole* yang seberat matahari itu memiliki diamenter sebesar 3 kilometer. *Black Hole* berukuran sedang memiliki berat 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

kilogram, atau 10 pangkat 31. Hal ini seperti firman Allah dalam QS. Al-takwir ayat (2), Al-Mursalat ayat (8), dan al-Infitar ayat (2);

وَإِذَا ٱلنُّجُومُ ٱنكَدَرَتۡ ٢

Artinya : *"Dan apabila bitang-bintang berjatuhan"*

فَإِذَا ٱلنُّجُومُ طُمِسَتۡ ٨

Artinya : *"Maka apabila bintang-bintang telah dihapuskan"*

وَإِذَا ٱلۡكَوَاكِبُ ٱنتَثَرَتۡ ٢

Artinya : *"Dan apabila bintang-bintang jatuh berserakan"*

Bintang-bintang menjadi seperti api raksasa di alam semesta dengan serangkaian reaksi nuklir di dalamnya atau yang dikenal sebagai fusi nuklir, Disanalah semua elemen diperlukan bagi kehidupan di bumi dan di langit diciptakan. Selain itu gravtasi akan menghubungkan bintang-bintang, ada sejumlah kekuatan yang menahan isi didalam setiap benda angkasa, baik di langit maupun di bumi. Mengingat gravitasi bintang-bintang sangat besar, mendominasi semua planet, planetoid, satelit, komet, dan benda langit lainnya. Bahkan bintang tersebut dihubungkan melalui sebuah gravitasi yang membentuk unit lebih besar dari semesta dan semua terhubung satu sama lain.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Secara umum, persamaan Klein-Gordon adalah

$$(\Box - m^2)\phi = 0$$

dengan $\Box = \nabla^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial^\mu \partial_\mu$. Selanjutnya, untuk persamaan Klein-Gordon dengan kehadiran gravitasi dalam ruang-waktu melengkung diperoleh dengan memuat lagrangian dengan $\sqrt{-g}$, dan $\eta^{\mu\nu}$ kemudian diganti $g^{\mu\nu}$.

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) + m^2\sqrt{-g}\phi = 0$$

Sehingga dalam penelitian ini, Persamaan Klein-Gordon untuk ruang-waktu melengkung dapat diperluas lagi dengan menurunkan persamaan diatas menjadi seperti berikut

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\right)\phi' - m^2 e^\lambda \phi = 0$$

2. Gravitasi pada suku kedua dari persamaan (4.44) lebih dominan dibanding medan skalar pada suku ketiga, sehingga metriknya tidak menuju singularitas seperti pada solusi Schwarzschild.

$$ds^2 = \left(\frac{r - M - \sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}{r - M + \sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}\right)^{\frac{M}{\sqrt{M^2 - \frac{\kappa g^2}{2}}}} dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa g^2}{r^2}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

5.2 Saran

Setelah melakukan kajian dalam penelitian ini terdapat hal yang penulis recomendasikan untuk penelitian selanjutnya yaitu perpanduan gravitasi dengan medan elektromagnetik yakni menggunakan solusi Reissner-Nordstrom.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Quran dan Terjemahan. 2008. *Departemen Agama Republik Indonesia*. Bandung: Diponegoro.

Anugraha, R. 2011. *Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Anugraha, R. 2014. *Teori Relativitas dan Aplikasi pada Elektrodinamika, Lubang Hitam, dan Jagat Raya.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Banyal, A. M. 2016. *Solusi Persamaan Medan Gravitasi Einstein-Klein-gordon Simetri Bola*. Makassar: Universitas Hasanuddin.

Bayin, Selcuk. 2006. *Mathematical Methods in Science and Engineering*. Canada: John Willey & Sons, Inc.

Biswas, T. 2008. *Physical Iterpretation of Coordinates for the Schwarzschild Metric*. arXiv.org>gr-qc>arXiv:0809.1452, (2008).

Humaidi, Syahrul, dkk. 2016. *Analisis dan Visualisasi Persamaan Klein-Gordon pada Elektron dalam Summur Potensial dengan Menggunakan Program Mathematic 10. SNF 2016-TPN-19*, Vol. 5.

Konopla, A. R. Dkk. 2018. *Axisymmetric Black Holes allowing for Separation of Variables in the Klein-Gordon and Hamiltonian-Jacobi Equation*. ArXiv:1801.07195v3 [gr-qc].

Krane, K. S. 1992. *Fisika Modern (terjemahan)*. Jakarta: UI Press.

Lawden. 1982. *Introduction to Tensor Calculus Relativity and Cosmology*. New York: Dover Publication.

Mulyono, A. 2006. *Fisika dan Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang-Press.

Nainggolan, R. D. 2012. *Penerapan Persamaan Klein-Gordon untuk Menentukan Tingkat Energi Atom Pion* . *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Medan: Universitas Sumatra Utara.

Ryder, L. H. 1985. *Quantum Field Theory 1sted*. Cambridge: Univ. Of Cambridge.

Romadani, A. 2015. *Schwarzschild Black Hole on the Extended of General Relativity Theory.* Thesis. Yogyakarta: Gadjah Mada University.

Saadatmand, D dan Javidan, K. 2017. *Soliton-Potential Interaction in the Nonlinear Klein-Gordon Model*. ArXiv: 1107.1340v4 [nlin. PS] 13 Jan 2012.

Sugiono, Vani. 2016. *Mekanika Kuantum "Indra Keenam untuk Menjelajahi Dunia Atom yang Tak Kasat Mata"*. Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service).

Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM Press.

Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology "Principle and Aplications of The General Theory of Relativity"*. New York: John Wiley and Sons.

Weyl, H. 2017. *Zur Gravitationstheorie*, Ann. d. Physk, 54, 117. Terjemahan Bahasa Inggris oleh Nutto, C., Crothers, S.J. 2012. *On the Theory of Gravitation. Gen.* Rel. Grav. 44, 779-810.

Woapakrik, H.J. 1987. *Berkenalan dengan Teoori Kerelatifan Umum Einstein dan Biografi Albert Einstein*. Bandung: ITB Press.

LAMPIRAN 1
PERSAMAAN MEDAN GRAVITASI

1. Simbol Christofferl

Untuk $\alpha = \mu = \nu$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_{\mu} g_{\mu\mu}$$

Untuk $\alpha \neq \mu = \nu$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\mu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \partial_{\alpha} g_{\mu\mu}$$

Untuk $\alpha = \mu \neq \nu$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_{\nu} g_{\mu\mu}$$

Untuk $\alpha = \mu = \nu \longrightarrow \Gamma^{\mu}_{\mu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_{\mu} g_{\mu\mu}$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} \lambda'$$

2. Tensor Ricci

Sehingga didapatkan beberapa simbol Christofferl tidak nol. Selanjutnya mencari tensor Ricci sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}$$

3. Skalar Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

LAMPIRAN 2
GEOMETRI SIMETRI BOLA

1. Tensor Einstein

$$G_0^0 = g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}g^{00}g_{00}R$$

2. Tensor Energi Momentum Medan Skalar

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi - m^2\phi^2\right]$$

LAMPIRAN 3
MEDAN SKALAR DALAM RUANG-WAKTU MELENGKUNG

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) + m^2\sqrt{-g}\phi = 0$$

LAMPIRAN 4
PENYELESAIAN PERSAMAAN MEDAN

Partikel skalar yang tidak bermassa

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right)\phi' - m^2\phi e^\lambda = 0$$

Dibagi ϕ'

$$\frac{\phi''}{\phi'} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right) - m^2 e^\lambda = 0$$

Jika $m = 0$

$$\frac{\phi''}{\phi'} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right) = 0$$

LAMPIRAN 5
SCRIPT GRAFIK UNTUK SOLUSI PERSAMAAN METRIK SCHWARZSCHILD

```
close all; clear all; clc;
M=1;
k=1;
g=1;
C=1;
```

LAMPIRAN 6
SCRIPT GRAFIK UNTUK MEDAN GRAVITASI DAN MEDAN SKALAR

```
close all; clear all; clc;
M=1;
k=1;
g=1;
C=1;
```

LAMPIRAN 7
SCRIPT GRAFIK UNTUK SOLUSI PERSAMAAN MEDAN GRAVITASI EINSTEIN-KLEIN-GORDON

```
close all; clear all; clc;
M=1;
k=1;
g=1;
C=1;
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Ida Hernani
NIM	: 15640056
Fakultas/ Jurusan	: Sains dan Teknologi/ Fisika
Judul Skripsi	: Studi Persamaan Klein-Gordon dalam Persamaan Ruang Waktu Schwarzschild
Pembimbing I	: Drs. Abdul Basid, M.Si
Pembimbing II	: Ahmad Abthoki, M.Pd.

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	17 Mei 2019	Konsultasi Bab I, dan II	
2	25 Juni 2019	Konsultasi Bab I, dan II	
3	08 Juli 2019	Konsultasi Bab I, dan II	
4	15 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II dan III	
5	25 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III dan ACC	
6	08 Oktober 2020	Konsultasi Bab IV dan V	
7	01 November 2020	Konsultasi Bab IV dan V	
8	09 November 2020	Konsultasi Kajian Agama Bab I, dan IV	
9	10 Oktober 2021	Konsultasi bab IV, V dan ACC	
10	28 Oktober 2021	Konsultasi Kajian Agama Bab I, II, IV dan ACC	

Malang, 28 Oktober 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika,

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002